HENRYK SZYDŁOWSKI

PRACOWNIA FIZYCZNA

WARSZAWA 1973
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Okładkę i obwolutę projektował *Stefan Nargiełło*

Redaktor: *Krzysztof Bujalski*

Redaktor techniczny: *Maria Żmirek*

Korektor techniczny: *Janina Chombakow*

S 12 103

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA W TORUNIU

Copyright by

Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Warszawa 1973

Printed in Poland

K 2610/73

SPIS TREŚCI

Przedmowa 13

Uwagi o technice pracy doświadczalnej 16

Rozdział I. **Jednostki, błędy, proste przyrządy** 21

1. *Układy jednostek fizycznych* 21
1.1. Wielkości fizyczne i ich jednostki 21
1.2. Międzynarodowy układ jednostek miar SI 22
1.3. Inne układy jednostek mechanicznych 32
1.4. Uwagi o jednostkach miar stosowanych w nauce o cieple 34
1.5. Jednostki elektromagnetycznego układu CGS (CGSEM) 36
1.6. Literatura 38
2. *Dyskusja błędów pomiarowych* 39
2.1. Źródła i podział błędów 39
2.2. Teoria błędów przypadkowych według Gaussa; odchylenie standardowe 41
2.3. Wartość średnia i odchylenie standardowe wielkości złożonej i średniej arytmetycznej . 46
2.4. Interpretacja geometryczna błędów 50
2.5. Metoda Studenta–Fishera określania błędów małej serii pomiarów 52
2.6. Zastosowanie metody wyrównawczej Gaussa do analizy wyników pomiaru wielkości liniowo zależnych 54
2.7. Obliczanie błędu w przypadku, gdy błędy systematyczne są duże w porównaniu z błędem przypadkowym 58
2.8. Zaokrąglanie i porównywanie wyników 59
2.9. Graficzna analiza wyników 61
2.10. Planowanie pomiarów 67
2.11. Literatura 70
3. *Proste przyrządy do pomiaru wielkości mechanicznych i cieplnych* 70
3.1. Pomiary długości i kąta 70
3.2. Katetometr 73
3.3. Pomiar kątów lub zmian długości metodą optyczną 74
3.4. Pomiary masy lub ciężaru 76
3.5. Pomiary czasu 81
3.6. Pomiary temperatury 83
3.7. Automatyczna regulacja temperatury i ultratermostat 84
3.8. Pomiary ciśnienia 87
3.9. Pomiary częstości 90
3.10. Pompy, kompresory, dmuchawy 91
3.11. Zawory 92
4. *Proste przyrządy elektryczne i optyczne* 94

4.1. Źródła prądu . . . 94
4.2. Oporniki, potencjometry i dławiki . . . 98
4.3. Proste metody pomiaru oporu elektrycznego . . . 100
4.4. Kondensatory . . . 102
4.5. Transformatory . . . 103
4.6. Układy prostownicze . . . 105
4.7. Odczytywanie schematów i łączenie układów elektronicznych . . . 106
4.8. Silniki elektryczne na prąd przemienny . . . 112
4.9. Urządzenia do wytwarzania pól magnetycznych . . . 113
4.10. Głośnik i mikrofon . . . 115
4.11. Przyrządy elektroniczne . . . 116
4.12. Lupa . . . 116
4.13. Luneta . . . 118
4.14. Lampy widmowe i filtry . . . 119

Rozdział II. **Mechanika** . . . 121

5. *Ważenie i wyznaczanie gęstości* . . . 121
5.01. Wpływ wyporu powietrza na wynik ważenia . . . 121
5.02. Związek gęstości z masą drobinową . . . 122
5.1. Hydrostatyczna metoda wyznaczania gęstości . . . 122
5.2. Piknometr . . . 125
5.3. Wyznaczanie gęstości pary metodą Meyera . . . 128
5.4. Metoda Bunsena . . . 131
5.5. Gęstość względna gazu . . . 133
5.6. Gęstość bezwzględna gazu . . . 135
6. *Kinematyka i dynamika* . . . 137
6.1. Ruch ciała o zmiennej masie . . . 137
6.2. Spadkownica Atwooda . . . 141
6.3. Ruch w układzie wirującym . . . 143
6.4. Współczynnik tarcia . . . 145
6.5. Badanie zderzeń . . . 147
6.6. Czas trwania zderzenia . . . 150
7. *Własności sprężyste ciał stałych* . . . 153
7.01. Definicje podstawowych wielkości . . . 153
7.1. Własności sprężyste gumy . . . 156
7.2. Własności sprężyste miedzi . . . 158
7.3. Ugięcie prętów . . . 160
7.4. Wyznaczanie modułu sztywności metodą statyczną . . . 164
7.5. Wyznaczanie modułu sztywności metodą dynamiczną . . . 167
7.6. Badanie sprężyny . . . 169
8. *Dynamika bryły sztywnej* . . . 173
8.1. Wyznaczanie momentu bezwładności metodą drgań torsyjnych . . . 173
8.2. Wyznaczanie momentu bezwładności metodą stolika balansowego . . . 176
8.3. Ruch obrotowy bryły . . . 179
8.4. Giroskop . . . 183
8.5 Moment giroskopowy . . . 186
9. *Przepływ płynów* . . . 188
9.01. Prawa rządzące przepływem . . . 188
9.1. Prędkość przepływu . . . 191
9.2. Liczba Reynoldsa . . . 194
9.3. Doświadczenie Stokesa . . . 195
9.4. Wiskozymetr Höpplera . . . 198
9.5. Wiskozymetry kapilarne . . . 200
9.6. Lepkość powietrza . . . 203

Rozdział III. **Drgania i akustyka** 206

10. *Drgania brył* 206
10.01. Drgania harmoniczne proste 206
10.02. Drgania tłumione 208
10.03. Straty mocy w ruchu tłumionym, dobroć 212
10.04. Składanie drgań wzajemnie prostopadłych 213
10.1. Wahadło fizyczne 216
10.2. Wahadło rewersyjne 219
10.3. Krzywe Lissajous 221
10.4. Wahadła sprzężone 223
10.5. Rezonans mechaniczny 227
11. *Drgania akustyczne* 232
11.01. Równanie fali 232
11.02. Fale stojące 233
11.03. Fala głosowa 236
11.04. Prędkość fali w powietrzu 237
11.1. Analiza drgań struny 238
11.2. Prędkość fali w pręcie 240
11.3. Bieżąca fala głosowa 243
11.4. Rezonans akustyczny 245
11.5. Interferometr Quincke'go 247
11.6. Rura Kundta 249
11.7. Interferencja ultradźwięków 251

Rozdział IV. **Ciepło i fizyka molekularna** 254

12. *Termometria i kalorymetria* 254
12.01. Zasady kalorymetrii 254
12.02. Wyznaczanie pojemności cieplnej kalorymetru (równoważnika wodnego), interpolacja temperatury 255
12.1. Rozszerzalność liniowa 257
12.2. Termometr gazowy 259
12.3. Kalorymetr 261
12.4. Ciepło właściwe powietrza 263
12.5. Ciepło właściwe metali 265
13. *Pierwsza zasada termodynamiki* 267
13.1. Termoergometr 267
13.2. Izobaryczne rozprężanie gazu 270
13.3. Doświadczenie Boyle'a–Mariotte'a 272
13.4. Izotermy gazu rzeczywistego 274
13.5. Pomiar $\varkappa$ 278
14. *Zmiany stanów skupienia* 279
14.1. Ciepło parowania wody 279
14.2. Ciepło topnienia lodu 281
14.3. Topnienie ciał stałych 282
14.4. Zależność temperatury wrzenia od ciśnienia 285
14.5. Temperatura krzepnięcia roztworu 286
14.6. Prężność pary 290
14.7. Wilgotność powietrza 291
15. *Przenoszenie ciepła* 295
15.01. Stygnięcie 295
15.02. Przewodzenie ciepła 296
15.03. Promieniowanie 296
15.1. Ostyganie 298

15.2. Przewodnictwo cieplne metalu . . . 300
15.3. Przewodnictwo materiałów źle przewodzących (metoda kalorymetryczna) . . . 304
15.4. Przewodnictwo płytek . . . 306
15.5. Promieniowanie cieplne . . . 308
15.6. Przewodnictwo powietrza . . . 310
16. *Fizyka drobinowa* . . . 313
16.1. Wyznaczanie napięcia powierzchniowego za pomocą wagi torsyjnej . . . 313
16.2. Kapilary . . . 317
16.3. Stalagmometr . . . 320
16.4. Ruchy Browna . . . 322

Rozdział V. **Prąd stały i elektrostatyka** . . . 325

17. *Doświadczenia z prądem stałym* . . . 325
17.01. Prawa rządzące przepływem prądu . . . 325
17.1. Mostek Wheatstone'a . . . 327
17.2. Mostek podwójny Thomsona . . . 330
17.3. Metoda kompensacyjna pomiaru siły elektromotorycznej . . . 332
17.4. Ciepło Joule'a–Lenza . . . 334
17.5. Kompensator prądu stałego . . . 335
18. *Mierniki elektryczne* . . . 338
18.01. Budowa mierników . . . 338
18.02. Podział mierników ze względu na przeznaczenie . . . 341
18.03. Dokładność mierników; oznaczenia . . . 344
18.1. Wzorcowanie woltomierza . . . 346
18.2. Wzorcowanie amperomierza . . . 347
18.3. Czułość galwanometru . . . 348
18.4. Badanie ruchu ramki galwanometru . . . 352
18.5. Opór wewnętrzny mierników prądu . . . 355
18.6. Strumieniomierz . . . 357
19. *Elektrostatyka* . . . 360
19.01. Natężenie pola elektrycznego . . . 360
19.1. Potencjał elektryczny . . . 362
19.2. Przenikalność dielektryczna próżni . . . 365
19.3. Ładunek kondensatora . . . 367
19.4. Pomiar pojemności kondensatora . . . 370
20. *Prąd elektryczny w gazach i cieczach* . . . 372
20.1. Łuk elektryczny . . . 372
20.2. Elektroliza . . . 374
20.3. Równoważnik chemiczny . . . 376
21. *Przewodnictwo ciał stałych* . . . 379
21.01. Teoria pasmowa półprzewodników . . . 379
21.1. Przewodnictwo ciał stałych . . . 384
21.2. Termoogniwo . . . 386
21.3. Dioda półprzewodnikowa . . . 391
21.4. Tranzystor . . . 396

Rozdział VI. **Zjawiska elektromagnetyczne; prąd zmienny** . . . 400

22. *Magnetyzm* . . . 400
22.01. Podatność magnetyczna . . . 400
22.02. Momenty magnetyczne atomów . . . 401
22.03. Pętla histerezy magnetycznej . . . 406
22.1. Podatność magnetyczna . . . 408
22.2. Badanie krzywej pierwotnej za pomocą strumieniomierza . . . 411

22.3. Pomiar namagnesowania metodą Gaussa . . . 414
22.4. Obserwacja pętli histerezy . . . 418
22.5. Indukcjomierz . . . 422
23. *Badanie prądnic i silników* . . . 424
23.1. Prądnica . . . 424
23.2. Silnik prądu stałego . . . 428
24. *Prąd przemienny* . . . 431
24.01. Prąd sinusoidalny . . . 431
24.02. Wektorowe i symboliczne przedstawienie wielkości elektrycznych . . . 432
24.03. Prawa Ohma i Kirchhoffa w metodzie symbolicznej . . . 435
24.04. Moc prądu przemiennego . . . 439
24.1. Indukcja własna i pojemność w obwodzie prądu przemiennego . . . 439
24.2. Watomierz . . . 440
24.3. Transformator . . . 442
24.4. Badanie prądów za pomocą oscylografu . . . 448

Rozdział VII. **Elektronika** . . . 451

25. *Lampy elektroniczne* . . . 451
25.01. Emisja elektronów . . . 451
25.02. Podstawowe informacje o lampach elektronicznych . . . 453
25.03. Ruch elektronu w polu elektrycznym i magnetycznym . . . 455
25.1. Dioda . . . 455
25.2. Trioda . . . 458
25.3. Drgania relaksacyjne . . . 461
25.4. Efekt magnetronowy . . . 465
25.5. Lampa oscylograficzna . . . 468
25.6. Wyznaczanie naboju właściwego metodą Thomsona . . . 473
26. *Drgania elektryczne* . . . 476
26.01. Drgania elektryczne . . . 476
26.02. Wytwarzanie drgań niegasnących . . . 480
26.1. Rezonans w obwodzie prądu przemiennego . . . 482
26.2. Obwód rezonansowy wysokiej częstości . . . 484
26.3. Rezonans obwodów drgań . . . 487
27. *Fale elektromagnetyczne* . . . 489
27.01. Teoria Maxwella . . . 489
27.02. Fale elektromagnetyczne . . . 492
27.03. Sposoby wytwarzania fal radiowych i mikrofal . . . 495
27.04. Elementy techniki mikrofalowej . . . 497
27.1. Struktura fali elektromagnetycznej . . . 500
27.2. Druty Lechera . . . 502
27.3. Długość mikrofal . . . 505
27.4. Załamanie mikrofal . . . 507
27.5. Dyfrakcja mikrofal . . . 511
27.6. Wnęka rezonansowa . . . 513
28. *Zjawisko fotoelektryczne* . . . 515
28.01. Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne . . . 515
28.02. Zjawisko fotoelektryczne wewnętrzne . . . 517
28.1. Fotokomórka . . . 519
28.2. Fotoopornik . . . 520
28.3. Fotodioda . . . 520

Rozdział VIII. **Optyka** . . . 522

29. *Optyka geometryczna* . . . 522
29.01. Soczewki . . . 522

29.1. Soczewki cienkie . . . 525
29.2. Soczewki grube . . . 528
29.3. Pozorna zmiana grubości . . . 531
29.4. Współczynnik załamania pryzmatu . . . 532
29.5. Wyznaczanie promienia krzywizny metodą odbicia . . . 535
30. *Przyrządy optyczne* . . . 538
30.1. Mikroskop . . . 538
30.2. Refraktometr Abbego . . . 544
30.3. Kolorymetr . . . 547
30.4. Fotometr . . . 552
30.5. Spektroskop . . . 555
30.6. Refraktometr Pulfricha . . . 559

Rozdział IX. **Fale świetlne** . . . 564

31. *Dyfrakcja i interferencja* . . . 564
31.01. Interferencja i spójność światła . . . 564
31.1. Dyfrakcja na szczelinach . . . 567
31.2. Dyfrakcja światła laserowego . . . 570
31.3. Siatka dyfrakcyjna . . . 573
31.4. Spektrometr siatkowy . . . 576
31.5. Pierścienie Newtona . . . 577
32. *Polaryzacja światła* . . . 579
32.01. Polaryzacja światła . . . 579
32.02. Polaryzacja kołowa i skręcenie płaszczyzny polaryzacji . . . 582
32.03. Analiza stanu polaryzacji światła . . . 584
32.1. Polaryzacja światła . . . 584
32.2. Polarymetr . . . 588
32.3. Zjawisko Faradaya . . . 591
32.4. Fotometr polaryzacyjny . . . 592
33. *Promieniowanie* . . . 594
33.01. Promieniowanie jonizujące . . . 594
33.02. Detekcja promieniowania jonizującego . . . 596
33.1. Promieniowanie rentgenowskie . . . 598
33.2. Absorpcja promieniowania jonizującego . . . 601
33.3. Widmo atomu wodoru . . . 602
33.4. Doświadczenie Francka–Hertza . . . 604

Rozdział X. **Tablice fizyczne** . . . 607

I. Stałe fizyczne . . . 607
II. Momenty bezwładności jednorodnych brył . . . 608
III. Zależność niektórych własności wody i rtęci od temperatury . . . 609
IV. Gęstości wodnych roztworów niektórych kwasów i innych ciał w zależności od stężenia . . . 610
V. Gęstości wodnych roztworów niektórych soli w zależności od stężenia . . . 611
VI. Niektóre własności ciał stałych w temperaturze 273 K . . . 612
VII. Niektóre własności cieczy w temperaturze 273 K . . . 614
VIII. Niektóre własności gazów pod normalnym ciśnieniem . . . 616
IX. Punkty eutektyczne niektórych stopów . . . 618
X. Tablice psychrometryczne . . . 618
XI. Opór właściwy i współczynnik temperatury oporu niektórych metali i stopów . . . 619
XII. Zależność oporu właściwego roztworów wodnych od stężenia . . . 619
XIII. Równoważniki chemiczne i elektrochemiczne . . . 620
XIV. Siła elektromotoryczna niektórych ogniw i akumulatorów . . . 620

XV. Zależność siły termoelektrycznej termoogniwa Pt-PtRh od różnicy temperatur 621
XVI. Zależność siły termoelektrycznej termoogniwa miedź-konstantan od różnicy temperatur 621
XVII. Zależność siły termoelektrycznej termoogniwa żelazo-konstantan od różnicy temperatur 622
XVIII. Podatność magnetyczna właściwa 622
XIX. Niektóre własności ciał ferro- i ferrimagnetycznych 623
XX. Współczynniki załamania względem powietrza 623
XXI. Długości fal linii widmowych niektórych pierwiastków 624
Skorowidz alfabetyczny zagadnień teoretycznych 627

Skorowidz aparatury i doświadczeń 630

TABELE W TEKŚCIE

1.1. Jednostki międzynarodowego układu SI 28
1.2. Wymiary różnych wielkości fizycznych w układzie SI 29
1.3. Przedrostki dla jednostek wielokrotnych i podwielokrotnych 30
1.4. Oznaczenia niektórych wielkości fizycznych 31
1.5. Jednostki wielkości mechanicznych 33
1.6. Jednostki wielkości cieplnych 35
1.7. Jednostki magnetyczne układu CGSEM 38
2.1. Opracowanie serii dużej liczby pomiarów wielkości prostej 42
2.2. Opracowanie serii małej liczby pomiarów wielkości prostej 46
2.3. Współczynniki Studenta–Fishera w zależności od liczby pomiarów i poziomów ufności 53
2.4. Zależność minimalnej liczby pomiarów od stosunku błędu systematycznego do odchylenia standardowego 53
2.5. Przykład opracowania serii wyników pomiarów wielkości zależnych liniowo 57
3.1. Poprawki wskazań barometru na włoskowatość 89
4.1. Oznaczenia stosowane w schematach elektrycznych 110
16.1. Poprawki do pomiarów stalagmometrycznych 321
18.1. Oznaczenia mierników elektrycznych 345
23.1. Oznaczenia silników i prądnic w schematach elektrycznych 426
24.1. Wielkości elektryczne i ich wzory definicyjne 438
27.1. Równania Maxwella 491
27.2. Fale elektromagnetyczne 495
32.1. Sposób ustalania stanu polaryzacji światła 587
33.1. Jednostki promieniowania jonizującego 595

PRZEDMOWA

Podręcznik przystosowany jest głównie dla potrzeb tzw. pracowni fizycznej I na wydziałach Fizyki uniwersytetów, lecz może służyć również studentom niektórych kierunków technicznych. Omawiane w podręczniku doświadczenia obejmują tzw. „fizykę ogólną".

W szerokim zakresie uwzględniono takie działy jak: dynamikę bryły sztywnej, drgania mechaniczne i elektryczne, przenoszenie ciepła, elektrostatykę, półprzewodniki, magnetyzm i fale elektromagnetyczne. Zarówno w wyborze tematów doświadczeń jak i metod pomiarowych uwzględniono współczesny poziom wiedzy i współczesne możliwości aparaturowe. Pominięto niektóre bardzo proste i niewątpliwie pouczające doświadczenia, które powinny być realizowane już w szkole średniej lub zdeaktualizowały się. Inne, choć równie łatwe, jeszcze uwzględniono z uwagi na dalszą ich eksploatację w pracowniach.

Opis każdego doświadczenia rozpoczyna się „wprowadzeniem", w którym zebrano minimum wiadomości niezbędnych do wykonania doświadczenia oraz wyprowadzenie stosowanych wzorów. W przypadku działów niejednolicie opracowanych w różnych podręcznikach, lub omawianych zbyt pobieżnie podano obszerniejsze wprowadzenie ogólne poprzedzające cały paragraf. Przyrządy niezbędne do wykonania pomiarów są omawiane w części opisu zatytułowanej „aparatura". Wyjątek stanowią podstawowe przyrządy stosowane w wielu doświadczeniach, które omówiono w § 3 i § 4. Z uwagi na dużą różnorodność produkowanej obecnie aparatury, jej opisy dotyczą w pierwszym rzędzie zasady działania. Takie szczegóły jak rozmieszczenie pokręteł, zacisków itp. muszą znaleźć się w szczegółowej instrukcji doświadczenia opracowanej dla każdego pojedynczego zestawu aparatury. Część zatytułowana „pomiary" zawiera instrukcję wykonania doświadczenia. Z uwagi na różnice w wyposażeniu poszczególnych pracowni, jak również z uwagi na konieczność wdrożenia studentów do samodzielności, zarówno część opisu „pomiary" jak i następna „obliczenia" nie są zbyt szczegółowe. Podano natomiast ogólne zasady „planowania pomiarów" (§ 2.10) w taki sposób, by uzyskać optymalny w danych warunkach wynik końcowy. W podtytule doświadczenia znajduje się dokładne określenie jego celu oraz wykaz przyrządów, które będą potrzebne, mimo że nie są omawiane w części „aparatura". Podano odnośniki do paragrafów, w których przyrządy te są omawiane. Zebrano najważniejsze zagadnienia, z którymi student powinien zapoznać się przed przystąpieniem do doświadczenia oraz podano

odnośniki do paragrafów, w których zagadnienie omówiono obszerniej lub do innych podręczników.

Pewne ogólne zasady obowiązujące w pracy doświadczalnej podano w uwagach wstępnych zatytułowanych „uwagi o technice pracy doświadczalnej". Student rozpoczynający pracę doświadczalną powinien rozpocząć swe przygotowania od tego właśnie paragrafu.

W początkowych paragrafach rozdziału I omówiono jednostki fizyczne z szczególnym uwzględnieniem układu SI oraz błędy pomiarowe i sposoby ich obliczania. Zamieszczone na końcu podręcznika tablice fizyczne opracowano w układzie SI. Nie są one w całości oparte na materiałach źródłowych, w związku z czym są przeznaczone wyłącznie do użytku pracowni.

Podręcznik został przygotowany z myślą o tym, by obejmował jak najszerszy zakres tematów doświadczalnych pracowni I. Stąd też w podręczniku znalazły się tematy omawiane w dotychczasowych polskich podręcznikach, a w szczególności w podręcznikach T. Dryńskiego [1], [2] i A. Zawadzkiego [3], jak również w licznych skryptach poszczególnych uczelni. W opisach tych „klasycznych" doświadczeń opierano się głównie na doświadczeniach zdobytych w czasie wieloletniej pracy z zestawami w pracowni poznańskiej, lecz oparto je również na wielu dostępnych mi źródłach takich jak klasyczny podręcznik C. Schaefera [4] czy w pewnym sensie historycznych jak M. Lubienieckiej [5] oraz skryptach pisanych wcześniej dla Pracowni UAM [6], [7], [8]. Podręcznik nie stanowi przedruku skryptu *Pracownia Fizyczna I* napisanego w roku 1966. Ze skryptu tego wykorzystano z niewielkimi przeróbkami tylko paragraf dotyczący jednostek. Pozostała część została napisana na nowo, lub gruntownie przeredagowana (w przypadku paragrafów własnych).

Poza źródłami polskimi wiele pomysłów nowych doświadczeń zaczerpnięto z pracowni uniwersytetów zagranicznych, a w pierwszym rzędzie z pracowni Uniwersytetu Łomonosowa w Moskwie [9], [10], [11], z którego zaczerpnięto następujące tematy: 6.1, 8.1, 8.4, 11.1, 11.2, 15.2, 27.2, 27.4, 27.5, 31.2. Z Uniwersytetu Karola w Pradze [12], [13], [14], [15] zaczerpnięto tematy: 13.2, 21.3, 21.4, 22.4, 25.4. Pomysły doświadczeń: 8.2, 9.2, 10.4, 13.4, 14.6, 33.1, 33.4 zaczerpnięto z Uniwersytetu K. Marksa w Lipsku [16], doświadczenia 11.7 — z Newcastle [17], doświadczeń 9.6, 15.3, 15.5 z Cambridge [18], doświadczeń 11.3 i 25.1 z Nowosybirska [19], [20], [21]. Wiele nowych doświadczeń m.in.: 6.3, 7.1, 8.5, 17.5, 18.1, 18.2, 19.1, 19.2, 19.3, 20.1, 22.1, 23.1, 23.2, 27.1, 27.3 opracowano po raz pierwszy w Pracowni I UAM, a inne takie jak 7.6, 15.5, 22.3 gruntownie zmodernizowano.

Pomysły niektórych doświadczeń wysunęli: prof. S. Loria 10.5; prof. A. Piekara: 19.1, 19.2, 19.3, 20.1; dr P. Kiszkowski 7.1; mgr H. Szweycer 15.4.

Omówiono również kilka spośród doświadczeń o bardzo dużych walorach dydaktycznych nie wprowadzonych dotychczas do Pracowni UAM: 6.1, 9.2, 11.2, 11.4, 31.2, 33.1, 33.4. Oparto je na opisach oryginalnych i sprawdzono ich działanie przy pomocy zestawów oryginalnych w ośrodkach, z których je zaczerpnięto lub poza pracownią fizyczną [22].

W czasie przygotowania podręcznika korzystano również z bardzo wielu nie cytowanych tu źródeł.

Składam serdeczne podziękowanie profesorom: Dr. hab. A. Piekarze, Dr. hab. S. Szczeniowskiemu, Dr. hab. St. Loria, Dr. hab. Z. Pająkowi, którzy kierując byłą Katedrą Fizyki Doświadczalnej UAM popierali gorąco każdą inicjatywę unowocześnienia ćwiczeń Pracowni, a niejednokrotnie sami wysuwali cenne pomysły.

Dziękuję również obecnej dyrekcji Instytutu Fizyki: Prof. dr hab. S. Kielichowi, Prof. dr hab. Z. Pająkowi, Doc. dr. hab. J. Pietrzakowi oraz Doc. dr. hab. T. Krajewskiemu kierownikowi Sekcji Ogólnej, którzy wykazują pełne zrozumienie potrzeb Pracowni i nadal w pełni popierają wszystkie poczynania mające na celu jej dalszą modernizację.

Gorąco dziękuję bardzo licznemu gronu współpracowników, którzy prowadzili zajęcia w Pracowni i wnieśli jakiś przyczynek do jej rozwoju i unowocześnienia.

Dziękuję recenzentowi podręcznika Prof. dr. hab. A. Wróblewskiemu, którego uwagi krytyczne zachęciły mnie do gruntownej rewizji ujęcia paragrafu dotyczącego błędów pomiarowych oraz tym spośród kolegów, którzy zechcieli krytycznie przejrzeć niektóre paragrafy podręcznika, a szczególnie pani Dr J. Stankowskiej i pani mgr L. Latanowicz. Dziękuję żonie Lilianie za pomoc redakcyjną. Dziękuję za trud i ofiarną pracę laborantom Pracowni: panom K. Tomczakowi, S. Sosnowskiemu i P. Hoppelowi, którzy w oparciu o skromne zaplecze techniczne wykonali wiele prototypowych aparatur.

LITERATURA

1. T. Dryński, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, Warszawa 1959.
2. T. Dryński, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, Warszawa 1967.
3. A. Zawadzki, H. Hofmokl, *Laboratorium fizyczne*, Warszawa 1964.
4. C. Schaefer, L. Bergmann, W. Klieforth, *Grundlagen des physikalischen Praktikums*, Leipzig 1962.
5. A. Lubieniecka, *Ćwiczenia z fizyki doświadczalnej*, Księgarnia Akademicka, Poznań 1948.
6. H. Szydłowski, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, Wyd. UAM, Poznań 1962.
7. H. Szydłowski, *I pracownia fizyczna*, Wyd. UAM, Poznań 1966.
8. B. Błaszkiewicz, D. Ożgo, Z. Ożgo, D. Surma, H. Szydłowski, *Przewodnik metodyczny dla pracowni fizycznej I* (przyg. do druku dla Ośrodka Metodycznego Studiów dla Pracujących w roku 1968).
9. W. I. Iwieronowa, *Fiziczeskij praktikum*, Moskwa 1951.
10. W. I. Iwieronowa, *Fiziczeskij praktikum, Mechanika i molekularnaja fizika*, Moskwa 1967.
11. W. I. Iwieronowa, *Fiziczeskij praktikum, Elektriczestwo i optika*, Moskwa 1968.
12. A. Havránek, V. Müller, D. Slavinská, *Fyzikální praktikum I*, Wyd. Uniwersytetu Karola w Pradze, Praha 1966.
13. R. Bakule, J. Klimovič, V. Müller, *Fyzikální praktikum II*, Wyd. Uniwersytetu Karola w Pradze, Praha 1964.
14. V. Müller, B. Sedlák, Z. Smetana, *Fyzikální praktikum III*, Wyd. Uniwersytetu Karola w Pradze, Praha 1963.
15. Kolektiv pracovníků kateder fyziky, *Fyzikální praktikum IV*, Wyd. Uniwersytetu Karola w Pradze, Praha 1962.
16. W. Ilberg, *Physikalisches Praktikum für Anfängers*, Leipzig 1967.
17. University of Durham, Newcastle upon Tyne, *Level II Physics laboratory*, Copies of Manuscripts for Experiments (ok. 1966).
18. Cavendish Laboratory, University of Cambridge, *Practical Class in Mechanics, Optics and Heat*, Copies of Manuscripts for Experiments (ok. 1959).
19. R. I. Sołouchin, *Metody fiziczeskich izmierenii I*, Wyd. NGU, Nowosybirsk 1967.
20. R. I. Sołouchin, *Metody fiziczeskich izmierenii II*, Wyd. NGU, Nowosybirsk 1967.
21. R. I. Sołouchin, *Metody fiziczeskich izmierenii III*, Wyd. NGU, Nowosybirsk 1968.
22. Z. Błaszczyk, Praca magisterska wyk. w KFD UAM, Poznań 1965.

UWAGI O TECHNICE PRACY DOŚWIADCZALNEJ

PRZYGOTOWANIE DO PRACY DOŚWIADCZALNEJ

Pracownia fizyczna stanowi doświadczalną podbudowę wykładów z fizyki i spełnia dwa rodzaje zadań:

a. Uczy techniki eksperymentowania, do której zaliczamy: znajomość przyrządów, umiejętność posługiwania się nimi oraz sposób planowania i wykonywania pomiarów, opracowanie i interpretację wyników.

b. Pozwala gruntownie poznać zjawiska fizyczne poprzez ilościowe ich badanie.

Celem zrealizowania pierwszej grupy zadań, przed przystąpieniem do zajęć w pracowni musimy opanować podstawowe wiadomości dotyczące wielkości fizycznych i ich jednostek oraz błędów pomiarowych. Stąd każdy student przed przystąpieniem do zajęć powinien dokładnie przestudiować te paragrafy. Na końcu każdego z tych paragrafów podano literaturę, która pozwoli rozszerzyć wiadomości. Wykonując już pomiary w pracowni, będziemy musieli w właściwy sposób zaplanować pomiary (§ 2.10). Przy analizie serii próbnych musimy wtedy szybko wykonać wiele obliczeń, przy czym ich dokładność nie musi być duża. Obliczenia takie wykonujemy za pomocą suwaka logarytmicznego, stąd zachodzi konieczność posiadania własnego suwaka i wykonywania z jego pomocą podstawowych działań matematycznych.

Przed przystąpieniem do doświadczeń zawierających obwody elektryczne należy zapoznać się z § 4.7, w którym omówiono zasady odczytywania schematów elektrycznych i łączenia obwodów. Obwody najczęściej spotykane omówiono szczególnie dokładnie, a sposób łączenia zilustrowano rysunkami montażowymi pokazującymi sposób łączenia oraz rzutami perspektywicznymi.

Warunkiem poprawnej realizacji zadań grupy drugiej jest teoretyczna znajomość zarówno badanego zjawiska, jak i techniki eksperymentowania. Stąd wykonanie doświadczenia musi być poprzedzone dokładnym przestudiowaniem problemu oraz aparatury.

Symbole literatury cytowanej. Podręcznik nie zawiera całej niezbędnej wiedzy teoretycznej; wiedzę tę należy opanować w oparciu o inne podręczniki oraz wykłady. Dla ułatwienia, w opisie doświadczeń podano odnośniki do ogólnie dostępnych podręczników oznaczonych następującymi symbolami:

S1 — S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, cz. I; Mechanika i akustyka*, PWN, Warszawa 1972 r.
S2 — S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, cz. II; Ciepło i fizyka drobinowa*, PWN, Warszawa 1964 r.
S3 — S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, cz III; Elektryczność i magnetyzm*, PWN, Warszawa 1966 r.
S4 — S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, cz. IV; Optyka*, PWN, Warszawa 1967 r.

S5 — S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, cz. V; Fizyka atomowa*, PWN, Warszawa 1969 r.
P1 — A. Piekara, *Mechanika ogólna*, PWN, Warszawa 1961 r.
P2 — A. Piekara, *Elektryczność i magnetyzm*, PWN, Warszawa 1970 r.
P3 — E. M. Purcell, *Elektryczność i magnetyzm*, PWN, Warszawa 1972 r.
K — C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1969 r.
C — F. C. Crawford, *Fale*, PWN, Warszawa 1972 r.
J — M. Jeżewski, *Fizyka*, PWN, Warszawa 1970 r.
H1 — R. Resnick, D. Halliday, *Fizyka tom I*, PWN, Warszawa 1973 r.
H2 — D. Halliday, R. Resnick, *Fizyka tom II*, PWN, Warszawa 1973 r.

PRACA DOŚWIADCZALNA

Przygotowując jakiś temat doświadczenia musimy liczyć się z tym, że stosowana w danej pracowni aparatura i rodzaj wykonywanych pomiarów mogą znacznie odbiegać od opisów podręcznikowych. Z tego powodu należy uprzednio, najlepiej w czasie poprzednich zajęć, zapoznać się na miejscu z aparaturą oraz instrukcją doświadczenia. W przypadku, gdy przedmiotem pomiaru będzie wielkość złożona, należy wyprowadzić wzory służące do obliczania błędów maksymalnych i odchylenia standardowego.

Każde doświadczenie rozpoczynamy od przygotowania układu do pracy, a więc ustawienia aparatury, połączenia obwodów elektrycznych itp. Czynności te wykonujemy szybko, by jak najwięcej czasu można było poświęcić właściwym pomiarom.

Pomiary właściwe rozpoczynamy od wykonania serii próbnej w skład której wchodzić będą po 1–3 pomiarów każdej wielkości prostej. Jeden pomiar wykonujemy dla takich wielkości, których miara jest duża i błąd względny pomiaru bardzo mały. Oceniamy błędy systematyczne poszczególnych pomiarów oraz rzędy wielkości błędów przypadkowych, a następnie analizujemy wpływ błędów poszczególnych wielkości na błąd wyniku końcowego i planujemy szczegółowo sposób wykonania pomiarów w sposób omawiany w § 2.10.

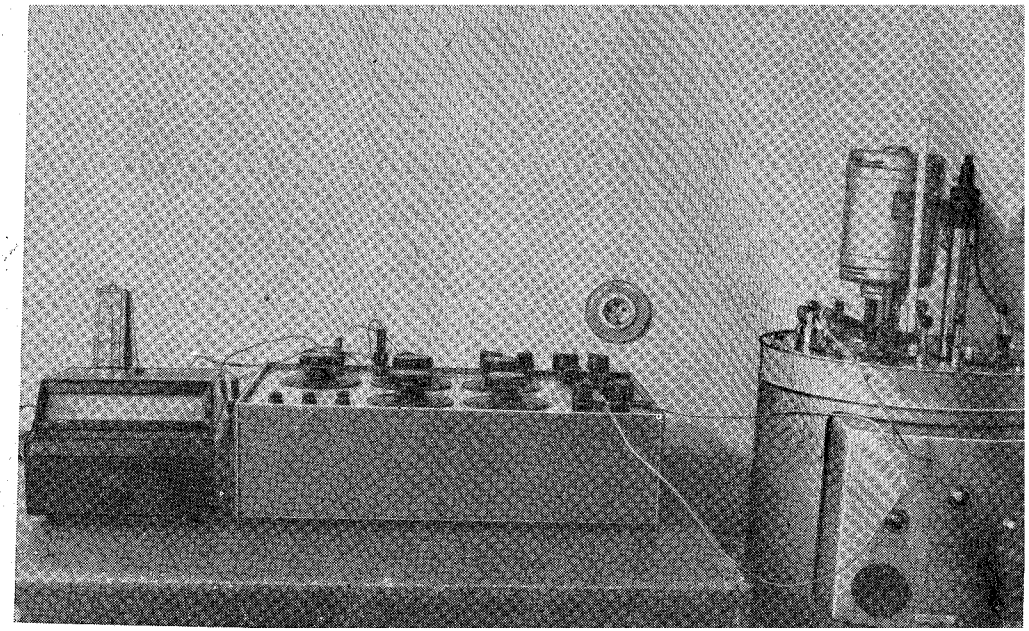
Wykonując pomiary notujemy zawsze bezpośrednie odczyty wskazania przyrządów, a nie wyniki obliczeń, chociażby najprostszych. Ujmujemy je zawsze w tabele, w których rezerwujemy rubryki dla wszystkich wyników pośrednich, np. w czasie pomiaru notujemy wskazania w dwu ramionach manometru i rezerwujemy m.in. rubrykę dla różnicy poziomów δh. Jako wzorce służyć mogą tabelki podawane w § 2.

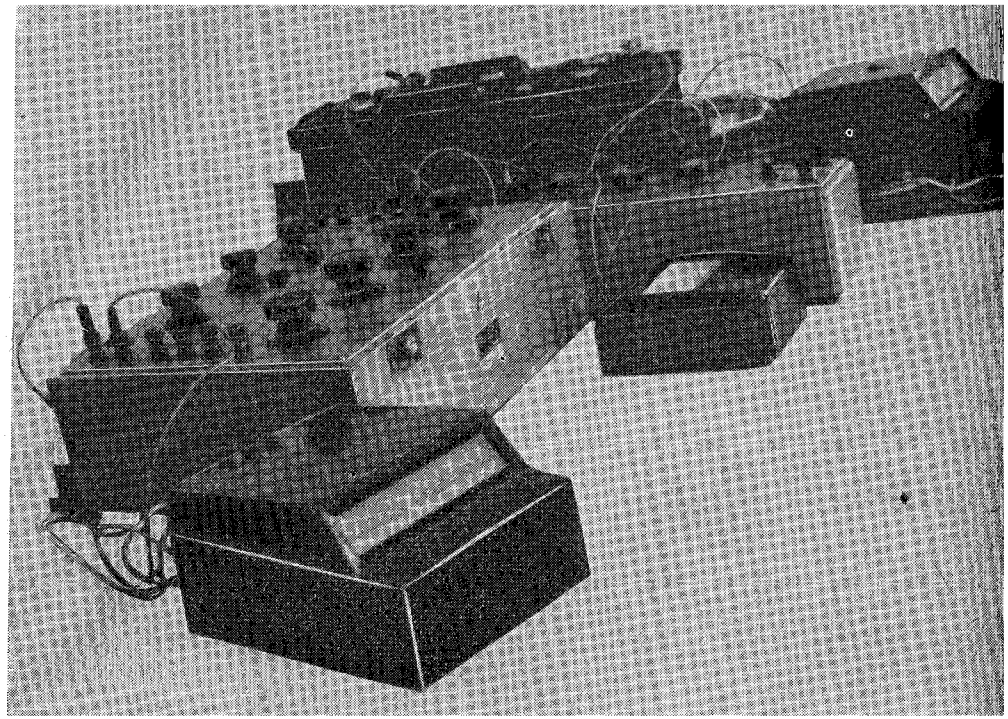
W czasie zajęć należy przestrzegać podstawowych zasad BHP, a więc stosować się ściśle do regulaminu pracowni w sprawach związanych ze sposobem włączania do źródeł prądu obwodów elektrycznych łączonych w ramach ćwiczeń. Po włączeniu aparatury do źródła prądu nie opuszczać stanowiska do chwili zakończenia pomiarów i wyłączenia aparatury. Przed przystąpieniem do rozłączania układu wyłączyć go ze źródła prądu.

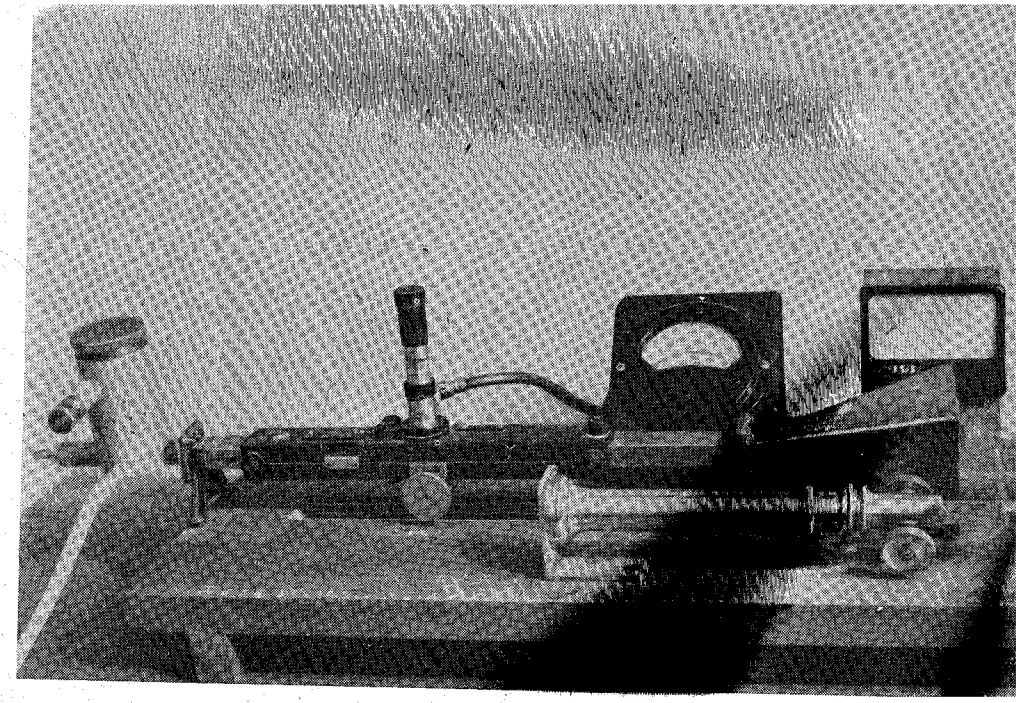
OPRACOWANIE WYNIKÓW

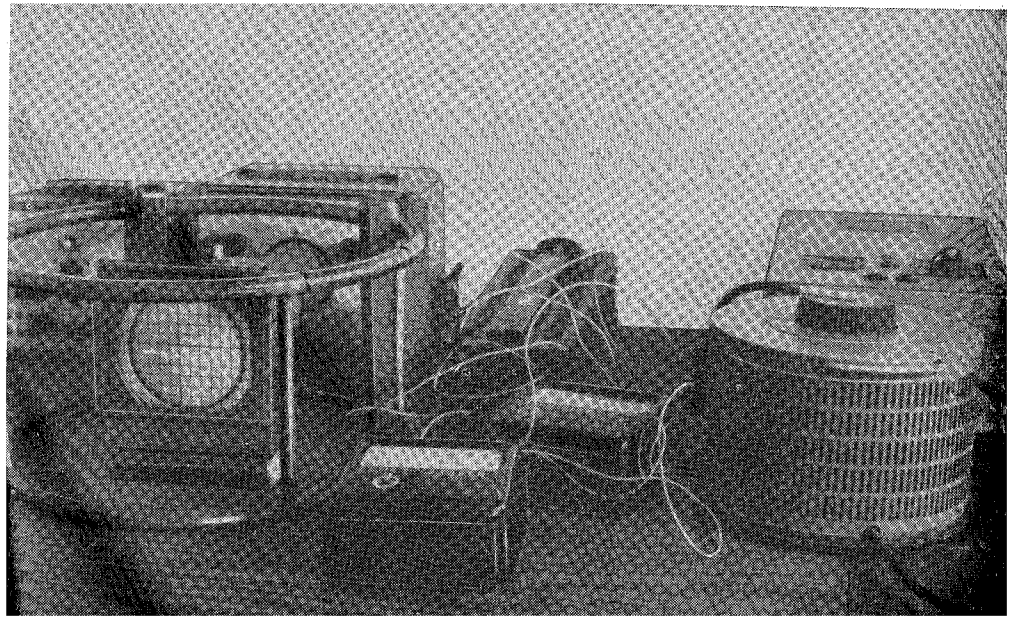
W pierwszym rzędzie obliczamy wyznaczaną wielkość. W większości przypadków obliczenia wykonujemy suwakiem logarytmicznym. W protokole zamieszczamy tylko podstawienia do wzorów i te etapy obliczeń, których nie można pominąć posługując się suwakiem logarytmicznym, np. wyniki obliczania składników sumy.

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA









Przykładowe zestawy aparatury pomiarowej.

Obliczenia wykonujemy w zasadzie w układzie SI, a wynik ostateczny podajemy zawsze w układzie SI. W cieple, magnetyzmie i niektórych doświadczeniach mechanicznych wynik ostateczny podajemy również w jednostkach stosowanych tradycyjnie. Szczególną uwagę zwracamy na wymiar wielkości podstawianych do wzorów i sprawdzamy czy w wyniku obliczeń otrzymujemy prawidłowy wymiar obliczanej wielkości.

Obliczamy zawsze błędy wyznaczonych wielkości. Metoda obliczania błędów zależy od sposobu wykonywania pomiarów. Staramy się obliczyć zawsze odchylenia standardowe. Tylko w przypadku gdy nie jest to możliwe, liczymy błędy maksymalne spowodowane błędami systematycznymi. Podstawienia do wzorów i obliczenia numeryczne wykonujemy w taki sposób jak przy obliczaniu wyników. Błędy obliczamy wyłącznie suwakiem logarytmicznym. Zaokrąglamy wyniki, piszemy zestawienie wyników ostatecznych (por. § 2.8) oraz sprawdzamy ich zgodność z wartościami podanymi w tablicach, sprawdzając nierówność (2.42).

Wykresy wykonujemy starannie na papierze milimetrowym, kolorowymi kredkami lub w tuszu według zasad omawianych w § 2.9. Na zakończenie w kilku zdaniach omawiamy wyniki wykonanego doświadczenia.

Rozdział I

JEDNOSTKI, BŁĘDY, PROSTE PRZYRZĄDY

1. UKŁADY JEDNOSTEK FIZYCZNYCH

1.1. WIELKOŚCI FIZYCZNE I ICH JEDNOSTKI

Każdą mierzalną własność zjawiska lub ciała nazywamy *wielkością fizyczną*. Poszczególne wielkości fizyczne powiązane są równaniami wyrażającymi prawa przyrody lub definiującymi nowe wielkości fizyczne. Zbiór wielkości fizycznych występujących w danej dziedzinie wiedzy nazywamy *układem wielkości*. W układzie istnieje minimalna liczba umownie przyjętych *wielkości podstawowych*, których nie można określić za pomocą równań definicyjnych i które pozwalają określić wszystkie wielkości układu. Wielkości określone za pomocą wielkości podstawowych nazywamy *wielkościami pochodnymi*.

Pomiar wielkości fizycznej jest możliwy tylko wtedy, gdy istnieje *jednostka miary*. W przypadku wielkości podstawowych jednostką miary jest dowolnie wybrany stan tej wielkości, któremu umownie przypisujemy wartość 1 i nazywamy go *wzorcem*. Jednostki miar wielkości pochodnych określamy w oparciu o wzory definicyjne; wyrażają się one przez jednostki wielkości podstawowych. Miarą wielkości fizycznej A jest iloczyn liczby $\{A\}$, która jest wartością liczbową miary i jednostki miary $[A]$:

$$A = \{A\}[A] \tag{1.1}$$

Układowi wielkości fizycznych odpowiada *układ jednostek*, a wielkościom podstawowym — *jednostki podstawowe*. Jednostki nie należące do układu nazywamy jednostkami pozaukładowymi.

W fizyce stosowano wiele układów jednostek; różniły się one między sobą zarówno wyborem wielkości podstawowych, jak również ich jednostek. W mechanice stosowano dwa typy układów jednostek: układy bezwzględne, w których wielkościami podstawowymi są długość, masa i czas oraz układy ciężarowe, gdzie jako wielkości podstawowe przyjmowano długość, siłę i czas.

W zależności od wyboru jednostek wielkości podstawowych rozróżniamy dwa układy bezwzględne: *układ CGS*, w którym jednostkami podstawowymi są *centymetr*, *gram* i *sekunda*, oraz *układ MKS*, w którym jako jednostki podstawowe przyjmuje się *metr*, *kilogram* i *sekundę*.

W nauce o elektryczności stosowano również wiele układów jednostek. Niektóre z nich, jak np.: *układ CGSES*, *układ CGSEM*, oraz *układ mieszany Gaussa* były rozszerzeniem stosowanych w mechanice układów bezwzględnych. W najczęściej stosowanym obecnie *układzie MKSA* lub *Giorgiego* do jednostek podstawowych układu *MKS*, jako czwartą dodano jednostkę natężenia prądu — *amper*.

Obecnie coraz większego znaczenia nabiera *międzynarodowy układ jednostek miar SI* (système international), w którym przyjmuje się sześć wielkości podstawowych i który obejmuje wszystkie wielkości fizyczne. W skład tego układu wchodzi w całości układ MKSA. Znaczenie układu SI wynika ze względów praktycznych; obejmuje on bowiem wszystkie dziedziny fizyki i techniki, a tym samym praktycznie wszystkie dziedziny wiedzy. Nie bez znaczenia jest również fakt, że dnia 7 października 1958 r. Międzynarodowy Komitet Metrologii Ustawodawczej na wniosek Międzynarodowego Komitetu Miar i Wag zatwierdził powyższy układ i zalecił państwom-członkom przyjęcie układu SI w ustawodawstwie państwowym. W Polsce układ SI został wprowadzony ustawowo rozporządzeniem Rady Ministrów z dnia 30 czerwca 1966 r. [1], które weszło w życie z dniem 1 grudnia 1966 r. Zgodnie z zarządzeniem wykonawczym prezesa Państwowego Urzędu Jakości i Miar [2], można przejściowo stosować wyszczególnione w zarządzeniu jednostki pozaukładowe.

1.2. MIĘDZYNARODOWY UKŁAD JEDNOSTEK MIAR SI

Jednostkami podstawowymi w układzie SI są: metr (m), kilogram (kg), sekunda (s), amper absolutny (A), kelwin (K) oraz kandela (cd). Jednostkami uzupełniającymi są: radian (rad), steradian (sr).

Metr definiujemy jako równy 1 650 763,73 długości fal w próżni promieniowania odpowiadającego przejściu z poziomu $2p_{10}$ na poziom $5d_5$ w atomie izotopu kryptonu 86 (^{86}Kr). Źródłem światła jest lampa widmowa wypełniona parami izotopu kryptonu 86 umieszczona w kriostacie w temperaturze 63 K. W kryptonie przejściu z poziomu $2p_{10}$ do $5d_5$ odpowiada pomarańczowa linia widmowa. Do roku 1960 metr definiowano jako odległość między dwoma kreskami na wzorcu przechowywanym w Sèvres pod Paryżem (w szkolnictwie, ze względu na trudności dydaktyczne, nie uczy się nowej definicji metra).

Kilogram jest masą wzorca przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres pod Paryżem.

Definicję jednostki czasu — **sekundy** oparto na atomowym wzorcu częstości, określając ją z częstości drgań zachodzących w atomach. Tak więc jako wzorzec częstości przyjęto częstość niewymuszonego zewnętrznymi polami przejścia pomiędzy poziomami struktury nadsubtelnej $F = 4, M = 0$ i $F = 3, M = 0$ stanu podstawowego $2S_{1/2}$ izotopu 133 atomu cezu (^{133}Cs). Przyjmuje się, że częstość ta wynosi 9 192 631 770 Hz. Oznacza to, że sekunda jest czasem, w którym następuje 9 192 631 770 przejść pomiędzy wymienionymi poziomami atomu cezu. Dla potrzeb dydaktycznych w szkolnictwie sekundę można nadal definiować jako $\frac{1}{86\,400}$ część średniej doby słonecznej.

Amper absolutny określamy następująco. Stały prąd elektryczny nie ulegający żadnym wahaniom posiada natężenie jednego ampera absolutnego, jeżeli przepływając przez dwa równoległe, nieskończenie długie, znajdujące się we wzajemnej odległości jednego metra przewody o znikomym przekroju, powoduje powstanie siły $2 \cdot 10^{-7}$ N (niutonów), działającej w próżni na każdy metr jednego z przewodów. Prąd o natężeniu jednego ampera absolutnego, przepływając przez wodny roztwór azotanu srebra, wydziela na katodzie w ciągu jednej sekundy 1,1183 mg srebra.

Kelwin jest jednostką termodynamicznej skali temperatury Kelvina, w której przyporządkowano temperaturze potrójnego punktu wody wartość 273,16 K (w skali Celsjusza +0,01°C). Definicję termodynamicznej, bezwzględnej skali temperatur oparto na sprawności silnika Carnota pracującego w sposób odwracalny i quasi-statyczny

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad \text{skąd} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \tag{1.2}$$

Zakres od temperatury punktu potrójnego T_0 do temperatury wrzenia wody T_{100} (pod normalnym ciśnieniem) jest równy sto kelwinów $T_{100} - T_0 = 100$ K. Stąd jednostki skali Celsjusza są równe jednostkom skali Kelvina (°C = K), a temperatura 0°C = 273,15 K.

Kandela jest światłością (lub natężeniem światła) pola równego $\frac{1}{6} \cdot 10^{-5}$ m^2 powierzchni ciała doskonale czarnego promieniującego w kierunku prostopadłym w temperaturze krzepnięcia platyny, pod ciśnieniem jednej atmosfery fizycznej 101 325,0 N · m^{-2}. W praktyce ciało doskonale czarne zastępuje się otwartym końcem rurki z tlenku toru.

Radian jest kątem płaskim o wierzchołku w środku koła, wycinającym z obwodu tego koła łuk o długości równej promieniowi. Jeden radian równy jest

$$1 \text{ rad} = 57°17'45''. \tag{1.3}$$

Steradian jest kątem bryłowym o wierzchołku w środku kuli, wycinającym z powierzchni tej kuli pole równe kwadratowi jej promienia.

Obecnie omówimy jednostki niektórych wielkości pochodnych.

Siła F. Definicja siły oparta jest na drugiej zasadzie dynamiki Newtona

$$F = ma. \tag{1.4}$$

Wymiarem jednostki siły jest *niuton* (N), który możemy określić ze wzoru (1.4): N = m · kg · s^{-2}. Niuton jest siłą, która masie jednego kilograma nadaje przyspieszenie jednego metra na sekundę do kwadratu.

Praca W jest iloczynem siły i drogi

$$W = Fs. \tag{1.5}$$

Jednostką pracy jest *dżul* (J). Dżul jest pracą, którą wykonuje się, działając siłą jednego niutona na drodze jednego metra; jego wymiar wynika z wzoru (1.5): J = N · m.

Moc P jest stosunkiem pracy do czasu

$$P = Wt^{-1}. \tag{1.6}$$

Jednostką mocy jest *wat* (W), zdefiniowany jako moc maszyny, która w ciągu jednej sekundy wykonuje pracę jednego dżula. Wynikający ze wzoru (1.6) wymiar wata jest następujący: $W = J \cdot s^{-1}$.

Ładunek elektryczny Q. Jednostką ładunku elektrycznego jest *kulomb* (C) definiowany ze wzoru

$$Q = It. \tag{1.7}$$

Jeżeli przez przewodnik przepływa prąd jednego ampera, to w czasie jednej sekundy przez przewodnik ten przepływa ładunek elektryczny równy jednemu kulombowi. Wymiar kulomba zgodnie z wzorem (1.7) jest następujący: $C = A \cdot s$.

Napięcie U jest stosunkiem wydzielonej mocy do natężenia prądu płynącego przez odbiornik

$$U = PI^{-1}. \tag{1.8}$$

Jednostką napięcia jest *wolt* (V) posiadający wymiar: $V = W \cdot A^{-1}$. Na zaciskach odbiornika, przez który przepływa prąd o natężeniu jednego ampera, panuje napięcie jednego wolta, jeżeli w odbiorniku tym wydziela się moc jednego wata. Jednostki napięcia można również definiować z wzoru na pracę prądu

$$W = UIt. \tag{1.9}$$

Ze względu na wzór (1.6) obydwie definicje są równoważne.

Opór elektryczny R. Definicję *oma* (Ω), jednostki oporu elektrycznego, opieramy na prawie Ohma

$$R = UI^{-1}. \tag{1.10}$$

Przewodnik posiada opór jednego oma, jeżeli po przyłożeniu do jego zacisków napięcia jednego wolta, popłynie prąd o natężeniu jednego ampera. Wymiarem oma jest: $\Omega = V \cdot A^{-1}$.

Pojemność elektryczna C. Jednostką pojemności elektrycznej jest farad (F) definiowany ze wzoru

$$C = QU^{-1}. \tag{1.11}$$

Odizolowany od otoczenia przewodnik posiada pojemność jednego farada, jeżeli po przyłożeniu napięcia jednego wolta gromadzi się na nim ładunek jednego kulomba. Wynikający ze wzoru (1.11) wymiar farada jest następujący: $F = C \cdot V^{-1}$.

Współczynnik indukcji własnej L. Jednostkę indukcji własnej *henr* (H) definiujemy ze wzoru na siłę przeciwelektromotoryczną indukcji własnej

$$E = -L\frac{dI}{dt}. \tag{1.12}$$

Obwód elektryczny (cewka) posiada współczynnik indukcji własnej (indukcyjność) równy jeden henr, jeżeli pod wpływem jednostajnej zmiany natężenia prądu, wynoszącej jeden amper w ciągu sekundy, na jego zaciskach indukuje się siła przeciwelektromotoryczna jednego wolta. Wymiar henra jest następujący: $H = V \cdot s \cdot A^{-1}$.

Natężenie pola elektrycznego E istniejącego w przestrzeni pomiędzy okładkami kondensatora płaskiego jest stosunkiem napięcia panującego na okładkach do odległości między okładkami:

$$E = Ud^{-1} \tag{1.13}$$

Jednostka natężenia pola elektrycznego nie posiada własnej nazwy, a jej wymiar można określić następująco*: $dim\, E = V \cdot m^{-1} = N \cdot C^{-1}$. Natężenie pola elektrycznego można również definiować na podstawie wzoru, jakim wyraża się siła działająca na ładunek elektryczny umieszczony w polu

$$F = EQ. \tag{1.14}$$

Przesunięcie elektryczne D zwane również indukcją elektryczną definiuje się ze wzoru

$$D = QS^{-1}. \tag{1.15}$$

Jednostka przesunięcia elektrycznego nie posiada własnej nazwy, a jej wymiar można określić następująco: $dim\, D = C \cdot m^{-2}$.

Przenikalność dielektryczna ε. Przesunięcie elektryczne D jest proporcjonalne do natężenia pola elektrycznego E:

$$D = \varepsilon E. \tag{1.16}$$

Występujący w tym równaniu współczynnik proporcjonalności ε, zwany przenikalnością dielektryczną, jest wielkością mianowaną. Z wzoru (1.16) wynika następujący wymiar tej wielkości: $dim\, \varepsilon = C \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$. Przenikalność dielektryczna składa się z dwóch czynników:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \tag{1.17}$$

z których pierwszy jest wielkością stałą zwaną *przenikalnością dielektryczną próżni*, posiada wymiar przenikalności dielektrycznej i wynosi

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} C \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}. \tag{1.18}$$

Drugi czynnik ε_r zwany *względną przenikalnością dielektryczną* jest wielkością niemianowaną i określa własności środowiska materialnego. W próżni przenikalność dielektryczna środowiska $\varepsilon_r = 1$.

Polaryzacja dielektryczna P. Wielkość ta zdefiniowana jest wzorem:

$$D = \varepsilon_0 E + P. \tag{1.19}$$

Wyraża się ona w takich samych jednostkach jak przesunięcie elektryczne ($C \cdot m^{-2}$). Wielkość ta określa własności dielektryczne środowiska.

Natężenie pola magnetycznego H. Do zdefiniowania jednostki natężenia pola magnetycznego wykorzystuje się zjawisko występowania pola magnetycznego wokół przewodników, przez które przepływa prąd elektryczny. Wewnątrz długiego równomiernie nawiniętego solenoidu istnieje jednorodne pole magnetyczne, które wyraża się wzorem:

$$H = \frac{NI}{l}, \tag{1.20}$$

gdzie przez N oznaczono liczbę zwojów solenoidu, a przez l jego długość. Należy tu dodać, że pole jest jednorodne tylko w małym, środkowym obszarze solenoidu, którego długość jest dziesięciokrotnie większa od średnicy. Jednostka natężenia pola magnetycznego nie posiada własnej nazwy, określa się ją jako amper na metr: $dim\, H = A \cdot m^{-1}$.

* *dim* (dimension *fr.*) — wymiar.

Indukcja magnetyczna B. Indukcję magnetyczną definiujemy ze wzoru określającego siłę F działającą na przewodnik, przez który przepływa prąd o natężeniu I znajdujący się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B:

$$F = (\mathbf{I} \times \mathbf{B})\mathbf{l}, \tag{1.21}$$

l oznacza tu długość przewodnika. Jeżeli założymy, że prąd płynie w kierunku prostopadłym do linii sił pola magnetycznego, to wzór powyższy przyjmuje postać

$$F = IBl. \tag{1.21a}$$

W obszarze jednorodnego pola magnetycznego indukcja magnetyczna wynosi jeden *tesla* (T), jeżeli na jednometrowy odcinek przewodnika ustawionego prostopadle do kierunku linii sił pola magnetycznego, przez który przepływa prąd o natężeniu jednego ampera, działa siła jednego niutona. Wymiar tesli jest następujący: $\mathrm{T} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{A}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$.

Strumień indukcji magnetycznej Φ. Jednostkę strumienia indukcji magnetycznego *weber* (Wb) wyprowadzamy z wzoru definicyjnego

$$\Phi = BS. \tag{1.22}$$

Strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez powierzchnię jednego metra kwadratowego wynosi jeden weber, jeżeli na całej tej powierzchni panuje jednorodne pole magnetyczne o indukcji jednego tesli. Zgodnie z wzorem (1.22) wymiar webera jest następujący:

$$\mathrm{Wb} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Przenikalność magnetyczna μ. Istnieje proporcjonalność pomiędzy indukcją magnetyczną i natężeniem pola magnetycznego

$$B = \mu H. \tag{1.23}$$

Współczynnik proporcjonalności μ nazywa się przenikalnością magnetyczną, jest on wielkością mianowaną i ma wymiar: $dim\,\mu = \mathrm{Wb} \cdot \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Podobnie jak przenikalność dielektryczna, również przenikalność magnetyczna składa się z dwóch czynników:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r, \tag{1.24}$$

z których pierwszy μ_0 jest wielkością stałą zwaną przenikalnością magnetyczną próżni, posiada wymiar przenikalności magnetycznej i wynosi

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb} \cdot \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}. \tag{1.25}$$

Drugi czynnik μ_r nazywa się przenikalnością magnetyczną ośrodka, jest on wielkością niemianowaną i określa magnetyczne własności ośrodka materialnego. W próżni $\mu_r = 1$.

Dipolowy moment magnetyczny j. Moment magnetyczny jest iloczynem całkowitego strumienia indukcji magnetycznej wychodzącego z jednego z biegunów magnesu i odległości l między biegunami

$$j = \Phi l. \tag{1.26}$$

Definicja powyższa jest ścisła tylko przy założeniu, że długość dipola maleje do zera ($l \to 0$). Jednostka momentu dipolowego nie posiada własnej nazwy, a jej wymiar wynika z wzoru (1.26) i jest następujący: $dim\,j = \mathrm{Wb} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^3$.

Moment elektromagnetyczny m lub μ. W przypadku zamkniętych obwodów z prądem, a także w przypadku atomów, wprowadza się pojęcie momentu elektromagnetycznego zdefiniowanego wzorem:

$$m = I \cdot S. \tag{1.27}$$

Wymiarem momentu elektromagnetycznego jest iloczyn jednostki natężenia prądu i powierzchni: $dim\, m = A \cdot m^2$. W przypadku ramki z prądem, moment elektromagnetyczny wyraża się wzorem:

$$m = NIS, \tag{1.28}$$

gdzie N jest liczbą zwojów; wymiar jego wynosi:

$$dim\, m = A \cdot m^2.$$

Pomiędzy dipolowym momentem magnetycznym i momentem elektromagnetycznym istnieje następujący związek:

$$j = \mu m. \tag{1.29}$$

Polaryzacja magnetyczna $\mathcal{J}$. Polaryzacją magnetyczną nazywamy wielkość zdefiniowaną wzorem:

$$B = \mu_0 H + \mathcal{J}. \tag{1.30}$$

Wielkość powyższa określa własności magnetyczne ośrodka, jest miarą dodatkowego przyczynku indukcji wywołanego obecnością ośrodka. Wyraża się ona w jednostkach indukcji magnetycznej — teslach.

Namagnesowanie* M. Namagnesowaniem nazywamy wielkość zdefiniowaną wzorem:

$$B = \mu_0 (H + M) \tag{1.31}$$

będącą miarą dodatkowego pola magnetycznego, wywołanego obecnością ośrodka. Namagnesowanie wyraża się w jednostkach natężenia pola magnetycznego; amperach na metr $(A \cdot m^{-1})$.

Pomiędzy polaryzacją magnetyczną i namagnesowaniem istnieje następujący związek:

$$\mathcal{J} = \mu_0 M. \tag{1.32}$$

Strumień świetlny Φ. Jednostką strumienia świetlnego jest *lumen* (lm). Punktowe źródło światła o niezależnej od kierunku emisji światłości jednej kandeli wysyła strumień światła równy 4π lumenów. W ogólnym przypadku światłość niepunktowego źródła światła wysyłającego w głąb kąta bryłowego $d\Omega$ strumień świetlny $d\Phi$ określona jest wzorem

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \tag{1.33}$$

W związku powyższym lumen posiada następujący wymiar: $lm = cd \cdot sr$.

* W wielu podręcznikach namagnesowaniem nazywa się polaryzację magnetyczną $\mathcal{J}$, co jest niezgodne z zaleceniami Międzynarodowej Unii Fizyki Czystej i Stosowanej [3].

Natężenie oświetlenia E definiujemy jako pochodną strumienia świetlnego względem powierzchni ustawionej prostopadle do biegu promienia:

$$E = \frac{d\Phi}{dS}. \tag{1.34}$$

Jednostką natężenia oświetlenia jest *luks* (lx), który zgodnie z ostatnim wzorem posiada wymiar: $\mathrm{lx} = \mathrm{lm} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.

Jednostki układu SI zebrano w tabeli 1.1, a w tabeli 1.2 podano wymiary najczęściej spotykanych wielkości fizycznych. W układzie SI poza jednostkami podstawowymi można stosować jednostki *wielokrotne* i *podwielokrotne*. Wtedy przed nazwą jednostki dodajemy przedrostek określający krotność, a przed symbolem jednostki dodajemy

Tabela 1.1

Jednostki międzynarodowego układu SI

Wielkość fizyczna	Oznaczenie	Wzór definicyjny	Nazwa jednostki	Symbol jedn.	Wymiar wielkości
		Jednostki podstawowe			
długość	l	—	metr	m	m
masa*	m	—	kilogram	kg	kg
czas	t	—	sekunda	s	s
natężenie prądu elektrycznego	I	—	amper	A	A
temperatura termodynamiczna	T	—	kelwin	K	K
światłość kierunkowa	I	—	kandela	cd	cd
		Jednostki uzupełniające			
kąt płaski	α, β, γ	—	radian	rad	rad
kąt bryłowy	Ω, ω	—	steradian	sr	sr
		Jednostki pochodne			
częstość	$\nu\,(f)$	$\nu = T^{-1}$	herc	Hz	s^{-1}
siła	F	$F = \frac{dp}{dt}$	niuton	N	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
praca	W	$W = Fs$	dżul	J	$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$
moc	P	$P = Wt^{-1}$	wat	W	$\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
ładunek elektryczny	Q	$Q = It$	kulomb	C	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
napięcie elektryczne	U	$U = PI^{-1}$	wolt	V	$\mathrm{W} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{J} \cdot \mathrm{C}^{-1}$
opór elektryczny	R	$U = RI$	om	Ω	$\mathrm{V} \cdot \mathrm{A}^{-1}$
pojemność elektryczna	C	$C = QU^{-1}$	farad	F	$\mathrm{C} \cdot \mathrm{V}^{-1}$
współczynnik indukcji własnej	L	$E = L\frac{dI}{dt}$	henr	H	$\mathrm{V} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{A}^{-1}$
indukcja magnetyczna	B	$F = BIl$	tesla	T	$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$
strumień indukcji magnetycznej	Φ	$\Phi = BS$	weber	Wb	$\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2$
strumień świetlny	Φ	$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$	lumen	lm	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{sr}$
natężenie oświetlenia	E	$E = \frac{d\Phi}{dS}$	luks	lx	$\mathrm{lm} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

* Jednostki podwielokrotne i wielokrotne tworzy się od jednostki gram =

Tabela 1.2

Wymiary różnych wielkości fizycznych w układzie SI

Wielkość fizyczna	Oznaczenie	Wzór definicyjny	Nazwa jednostki	Wymiar wielkości
powierzchnia	S	$S = l_1 l_2$	metr kwadratowy	m^2
objętość*	V	$V = Sh$	metr sześcienny	m^3
okres	T	—	sekunda	s
częstość kołowa	ω	$\omega = 2\pi\nu$	sekunda do minus pierwszej	s^{-1}
prędkość	v	$v = \frac{ds}{dt}$	metr na sekundę	$m \cdot s^{-1}$
prędkość kątowa	ϖ	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	radian na sekundę	$rad\,s^{-1}$
przyspieszenie	a	$a = \frac{dv}{dt}$	metr na sekundę kwadrat	$m \cdot s^{-2}$
przyspieszenie kątowe	α	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	radian na sekundę kwadrat	$rad \cdot s^{-2}$
gęstość	ϱ	$\varrho = mV^{-1}$	kilogram na metr sześcienny	$kg \cdot m^{-3}$
gęstość względna	d	$d = \varrho \cdot \varrho_{H_2O}^{-1}$	—	—
pęd	p	$p = mv$	metr kilogram na sekundę	$m \cdot kg \cdot s^{-1}$
moment pędu	L	$L = rp$	metr kwadrat razy kilogram na sekundę	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$
moment bezwładności	$\mathcal{J}$	$d\mathcal{J} = r^2 dm$	metr kwadrat razy kilogram	$m^2 \cdot kg$
moment siły	M	$M = rF$	niuton razy metr	$N \cdot m$
moduł Younga	E	$\sigma = E\varepsilon$	niuton na metr kwadratowy	$N \cdot m^{-2}$
moduł sztywności	G	$\tau = G\gamma$	niuton na metr kwadratowy na radian	$N \cdot m^{-2} \cdot rad^{-1}$
współczynnik lepkości	η	$F = \eta \frac{dv}{dx} S$	kilogram na metr na sekundę	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
napięcie powierzchniowe	σ	$F = \sigma l$	niuton na metr	$N \cdot m^{-1}$
ilość ciepła	Q	—	dżul	J
temperatura w skali Celsjusza**	$\tau(t)$	—	stopień Celsjusza	°C
współczynnik rozszerzalności objętościowej	γ	$V = V_0(1+\gamma\Delta\tau)$	kelwin do minus pierwszej	K^{-1}
współczynnik przewodnictwa cieplnego	λ	$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S\,dt$	dżul na metr na sekundę na kelwin	$J \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$

* 1 dm^3 w układzie SI nazywa się litrem.

** Jednostka przejściowo dopuszczalna w układzie SI.

Tabela 1.2 ciąg dalszy

Wielkość fizyczna	Oznaczenie	Wzór definicyjny	Nazwa jednostki	Wymiar wielkości
ciepło właściwe	C	$Q = Cm\Delta T$	dżul na kilogram na kelwin	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
strumień cieplny	φ	$\varphi = \frac{dQ}{dt}$	dżul na sekundę	$J \cdot s^{-1}$
gęstość strumienia cieplnego	q	$q = \varphi S^{-1}$	dżul na sekundę na metr kwadrat	$J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$
natężenie pola elektrycznego	E	$E = Ud^{-1}$	wolt na metr	$V \cdot m^{-1}$
przesunięcie elektryczne	D	$D = QS^{-1}$	kulomb na metr kwadrat	$C \cdot m^{-2}$
stała dielektryczna	ε	$D = \varepsilon E$	kulomb na wolt na metr	$C \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$
względna stała dielektryczna	ε_r	$\varepsilon_r = \varepsilon\varepsilon_0^{-1}$	—	—
polaryzacja elektryczna	P	$D = \varepsilon_0 E + P$	kulomb na metr kwadrat	$C \cdot m^{-2}$
elektryczny moment dipolowy	p	$p = Ql$	kulomb razy metr	$C \cdot m$
natężenie pola magnetycznego	H	$H = NIl^{-1}$	amper na metr	$A \cdot m^{-1}$
przenikalność magnetyczna	μ	$B = \mu H$	tesla razy metr na amper	$T \cdot m \cdot A^{-1}$
względna przenikalność magnetyczna	μ_r	$\mu_r = \mu\mu_0^{-1}$	—	—
polaryzacja magnetyczna	$\mathcal{J}$	$B = \mu_0 H + \mathcal{J}$	tesla	T
namagnesowanie	M	$B = \mu_0(H + M)$	amper na metr	$A \cdot m^{-1}$
magnetyczny moment dipolowy	j	$j = BV$	tesla razy metr sześcienny	$T \cdot m^3$
moment elektromagnetyczny	$m(\mu)$	$m = NIS$	amper razy metr kwadratowy	$A \cdot m^2$

Tabela 1.3

Przedrostki dla jednostek wielokrotnych i podwielokrotnych

Nazwa przedrostka	Symbol	Mnożnik	Nazwa przedrostka	Symbol	Mnożnik
tera	T	10^{12}	centy	c	10^{-2}
giga	G	10^9	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^6	mikro	μ	10^{-6}
kilo	k	10^3	nano	n	10^{-9}
hekto	h	10^2	piko	p	10^{-12}
deka	da	10	femto	f	10^{-15}
decy	d	10^{-1}	atto	a	10^{-18}

Tabela 1.4

Oznaczenia niektórych wielkości fizycznych*

Wielkość fizyczna	Oznaczenie
Mechanika	
współrzędne przestrzenne	x, y, z
wektor wodzący	r
długość	l
szerokość	b
wysokość	h
promień	r
grubość	d
średnica	$d = 2r$
droga	s
długość fali	λ
liczba falowa	$\sigma = 1/\lambda$
ciężar	G
przyspieszenie ziemskie	g
prędkość światła	c
v/c	β
naprężenie normalne	σ
wydłużenie względne	$\varepsilon = \Delta l/l_0$
naprężenie styczne	τ
kąt ścinania	γ
względna zmiana objętości	$\vartheta = \Delta V/V_0$
moduł ściśliwości ($p = -K\vartheta$)	K
liczba Poissona	γ
współczynnik tarcia	μ
energia potencjalna	E_p, V
energia kinetyczna	E_k, T
sprawność	η
gęstość	ϱ
gęstość względna	d
Akustyka	
prędkość głosu	c
prędkość fal podłużnych	c_l
prędkość fal poprzecznych	c_t
prędkość grupowa	c_g
strumień energii głosowej	P
Fizyka molekularna	
liczba molekuł	N
gęstość molekuł	$n = N/V$
liczba Avogadra	N, L
masa molekularna	m
prędkości molekuł	$u(u_x, u_y, u_z)$
	$c(c_x, c_y, c_z)$
wektor położenia	$r(x, y, z)$
pęd molekuł	$p(p_x, p_y, p_z)$
prędkość średnia	$\bar{c}, \langle c \rangle, \bar{u}, \langle u \rangle$
prędkość najbardziej prawdopodobna	$\hat{u}, \hat{c}$
średnia droga swobodna	l
stała Boltzmanna	k
$(kT)^{-1}$	β
stała gazowa	R
współczynnik dyfuzji	D
temperatura charakterystyczna	Θ
Ciepło	
współczynnik rozszerzalności liniowej	α
ciepło właściwe	c
molowe ciepło właściwe	C_p, C_v
Elektryczność	
gęstość ładunku	ϱ
powierzchniowa gęstość ładunku	σ
siła elektromotoryczna	E
stała dielektryczna próżni	ε_0
podatność elektryczna	χ_e
podatność magnetyczna	χ_m
moduł oporu zespolonego $Z = R + iX$	$\lvert Z \rvert, (Z)$
opór właściwy	ϱ
przewodnictwo właściwe	σ
indukcja w a e na	M, L_{12}
liczba zwojów	N
Optyka	
energia promieniowania	Q, W
gęstość promieniowania	$L = \frac{dI}{dS\cos\vartheta}$
emisja promieniowania	$M = \frac{d\Phi}{dS}$
współczynnik absorpcji	α
współczynnik odbicia	ϱ
współczynnik przepuszczania	τ
współczynnik załamania	n

* Tabela zawiera tylko wielkości nie ujęte w tabelach 1.1 i 1.2.

symbol krotności. Na przykład zamiast 1000 m mówimy kilometr, a piszemy km, podobnie zamiast jednej milionowej ampera (10^{-6} A) mówimy mikroamper, a piszemy μA. Kompletny wykaz przedrostków służących do tworzenia jednostek wielokrotnych i podwielokrotnych zebrano w tabeli 1.3. Wreszcie w tabeli 1.4 podano, zalecane przez Międzynarodową Unię Fizyki Czystej i Stosowanej, oznaczenia innych wielkości fizycznych. Oznaczenia te stosowane są w niniejszym podręczniku.

1.3. INNE UKŁADY JEDNOSTEK MECHANICZNYCH

a. Układ CGS.

Jednostkami podstawowymi w bezwzględnym układzie CGS są: centymetr równy jednej setnej metra, gram masy równy jednej tysięcznej części kilograma oraz sekunda. Kilogram, metr i sekunda są zdefiniowane w taki sam sposób jak w układzie SI.

W układzie CGS jednostkę siły — dynę definiuje się w oparciu o drugą zasadę dynamiki (por. wzór 1.4). Dyna jest to siła, która masie jednego grama nadaje przyspieszenie jednego centymetra na sekundę do kwadratu. Wymiar dyny jest następujący: dyna = $g \cdot cm \cdot s^{-2}$. Związek liczbowy pomiędzy niutonem i dyną można uzyskać w następujący sposób. W wymiarze niutona ($m \cdot kg \cdot s^{-2}$) przeliczamy jednostki układu SI na jednostki układu CGS, ponieważ 1 kg = 1000 g i 1 m = 100 cm, otrzymamy $1\ N = 1000\ g \cdot 100\ cm \cdot s^{-2} = 10^5\ g \cdot cm \cdot s^{-2}$.
Uwzględniając fakt, że $g \cdot cm \cdot s^{-2}$ jest wymiarem dyny otrzymamy

$$\begin{aligned} 1\ N &= 10^5\ \text{dyn}, \\ 1\ \text{dyna} &= 10^{-5}\ N. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Jednostką pracy jest erg. Jest to praca, którą wykonujemy działając siłą jednej dyny na drodze jednego centymetra. Wymiar erga jest następujący: erg = dyna · cm. Postępując w analogiczny sposób jak przy zamianie niutona na dynę, otrzymamy następujący związek pomiędzy dżulem i ergiem, ponieważ $1\ J = 1\ N \cdot 1\ m = 10^5\ \text{dyn} \cdot 10^2\ cm = 10^7$ ergów, skąd

$$\begin{aligned} 1\ J &= 10^7\ \text{ergów}, \\ 1\ \text{erg} &= 10^{-7}\ J. \end{aligned} \tag{1.36}$$

W podobny sposób można uzyskać związki pomiędzy jednostkami innych wielkości fizycznych.

b. Układ ciężarowy lub techniczny. W ciężarowym układzie jednostek podstawowymi wielkościami są: *długość, siła i czas.* Jednostki długości i czasu definiuje się w taki sam sposób jak w układzie SI. Jednostką siły jest kilogram siły zwany również kilopondem (kG). Jest to siła, z jaką na poziomie morza i na szerokości geograficznej 45° Ziemia przyciąga wzorzec 1 kg masy. Dla uzyskania związku pomiędzy kilogramem siły i niutonem skorzystamy z faktu, że do definiowania kilograma siły służy ten sam wzorzec, który w układzie SI służy do definiowania masy jednego kilograma. Znając wartość przyspieszenia ziemskiego ($g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$) oraz korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona, można wyliczyć siłę, z jaką Ziemia przyciąga masę wzorca jednego kilograma:

$$1\ kG = 1\ kg \cdot 9{,}81\ m \cdot s^{-2},$$

skąd

$$1\ \text{kG} = 9{,}81\ \text{N},$$
$$1\ \text{N} = 0{,}102\ \text{kG}. \tag{1.37}$$

W układzie ciężarowym masa jest wielkością pochodną, której jednostkę definiuje się, korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona (por. wzór 1.4). Jednostka ta nazywa się jednostką techniczną masy. Ciało posiada masę równą jednej jedn. techn. masy, jeżeli siła jednego kilograma siły nadaje mu przyspieszenie jednego metra na sekundę do kwadratu. Związek pomiędzy jednostką techniczną masy i kilogramem masy otrzymamy, zastępując w wynikającym z równania (1.4) wzorze na wymiar jedn. techn. masy, kilogram siły przez niuton:

$$1\ \text{jedn. techn. masy} = 1\ \text{kG} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1},$$
$$1\ \text{jedn. techn. masy} = 9{,}81\ \text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}.$$

Uwzględniając wymiar niutona otrzymamy:

$$1\ \text{jedn. techn. masy} = 9{,}81\ \text{kg},$$
$$1\ \text{kg} = 0{,}102\ \text{jedn. techn. masy}. \tag{1.38}$$

Jednostką pracy jest kilogramometr (kGm) definiowany w oparciu o wzór (1.5). Jest to praca, którą wykonujemy działając siłą jednego kilograma siły na drodze jednego metra, 1 kGm = 1 kG · 1 m. Związek pomiędzy kilogramometrem i dżulem otrzymamy zastępując w powyższym wymiarze 1 kG wartością ze wzoru (1.37):

$$1\ \text{kGm} = 9{,}81\ \text{J},$$
$$1\ \text{J} = 0{,}102\ \text{kGm}. \tag{1.39}$$

Tabela 1.5

Jednostki wielkości mechanicznych

Wielkość fizyczna	Układy jednostek		
	SI	CGS	ciężarowy
długość	m	cm = 10^{-2} m	m, cm
masa	kg	g = 10^{-3} kg	jedn. techn. masy = 9,81 kg
czas	s	s	s, min, h
prędkość	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{cm} \cdot \text{s}^{-1} = 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$
prędkość kąt.	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{s}^{-1} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{obr} \cdot \text{s}^{-1} = 2\pi\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
przyspieszenie	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{cm} \cdot \text{s}^{-2} = 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$
przysp. kątowe	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{s}^{-2} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{obr} \cdot \text{s}^{-2} = 2\pi\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$
siła	N	dyna = 10^{-5} N	kG = 9,81 N
praca	J	erg = 10^{-7} J	kGm = 9,81 J
moc	W	$\text{erg} \cdot \text{s}^{-1} = 10^{-7}$ W	$\text{kGm} \cdot \text{s}^{-1}$ = 9,81 W KM = 736 W
ciśnienie	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	bar = $10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	$\text{kG} \cdot \text{cm}^{-2} = 1$ at = $98{,}1 \cdot 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
gęstość	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\text{g} \cdot \text{cm}^{-3} = 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	jedn. techn. masy $\cdot\ \text{m}^{-3}$ = $= 9{,}81\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Jednostkami mocy są kilogramometr na sekundę lub koń mechaniczny (KM). Układ (maszyna) ma moc jednego konia mechanicznego, jeżeli w ciągu sekundy wykonuje pracę 75 kGm, skąd

$$1 \text{ KM} = 75 \text{ kGm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Korzystając z równania (1.39), otrzymamy następujący związek pomiędzy koniem mechanicznym i watem:

$$\begin{aligned} 1 \text{ KM} &= 736 \text{ W}, \\ 1 \text{ kW} &= 1{,}36 \text{ KM}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Jednostki wielkości mechanicznych wszystkich układów zebrano w tabeli 1.5. W tabeli tej podano również związki liczbowe pomiędzy jednostkami różnych układów.

1.4. UWAGI O JEDNOSTKACH MIAR STOSOWANYCH W NAUCE O CIEPLE

W nauce o cieple i termodynamice, poza jednostkami wielkości mechanicznych (na przykład masa i czas) stosuje się jednostki dwu dodatkowych wielkości temperatury i ilości ciepła. Do niedawna obydwie te wielkości posiadały własne jednostki; istniał więc własny układ jednostek cieplnych. Ponieważ układ ten nie miał nazwy, nazwiemy go *układem tradycyjnym*. Jednostki tego układu nie były definiowane jednoznacznie; stosowano wiele skal temperatur (Celsjusza, Fahrenheita, termodynamiczną, gazową i in.) oraz wiele różnych definicji kalorii. Poza powszechnie znaną ze szkoły, według której kaloria jest ilością ciepła potrzebnego do podgrzania 1 g wody od temperatury 14,5°C do temperatury 15,5°C, stosowano jeszcze dziewięć innych definicji kalorii.

Sytuację tę w sposób radykalny rozwiązuje układ SI. Jednostką temperatury jest kelwin, którego definicję włączono do definicji jednostek podstawowych. Jeżeli chodzi o jednostkę ilości ciepła, to zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki energia cieplna jest jedną z form energii i jest równoważna każdej innej formie energii. Nie ma więc potrzeby wprowadzania nowej jednostki ilości ciepła. Stąd też w układzie SI *ilość ciepła mierzy się w dżulach*. Postanowiono również, że odtąd kaloria posiada tylko znaczenie historyczne i w czasie gdy jeszcze nie wyjdzie z użycia będzie definiowana jako:

$$1 \text{ cal} = 4{,}1868 \text{ J (dokładnie)}.$$

W pracowni energię cieplną wyrażać będziemy tylko w dżulach. W przypadku temperatury, skala termodynamiczna nawiązuje do skali Celsjusza i istnieje zgodność wartości jednej jednostki obydwu skal (1°C = 1 K). Biorąc pod uwagę również i to, że wszystkie mierniki temperatury wyskalowane są w stopniach Celsjusza, w pracowni dopuszcza się stosowanie skali Celsjusza. Tym niemniej wszystkie obliczenia wykonywać należy konsekwentnie w układzie SI. W tabeli 1.6 podano związki pomiędzy jednostkami podstawowych wielkości cieplnych potrzebne przy zamianie jednostek tradycyjnych na jednostki SI.

Obecnie w cieple i w chemii na szeroką skalę stosuje się nie należące do układu SI jednostki *masy atomowej* i *ilości substancji*. W nowej skali mas atomowych przyjmuje się założenie, że masa atomowa izotopu ^{12}C węgla wynosi dokładnie 12. Zatem masą atomową nazywamy stosunek masy danego atomu do 1/12 masy atomu izotopu ^{12}C

węgla. Stosunek jednostki masy atomowej stosowanej do niedawna skali fizycznej opartej na izotopie ^{16}O tlenu do nowej jednostki masy atomowej zdefiniowanej w oparciu o izotop ^{12}C węgla wynosi

$$1{,}000\ 317\ 917 \pm 0{,}000\ 000\ 017.$$

Jednostką ilości substancji jest *mol*. Jednym molem nazywamy ilość substancji układu zawierającego liczbę atomów lub cząstek równą liczbie cząstek zawartych w masie

Tabela 1.6

Jednostki wielkości cieplnych

Wielkość fizyczna	Jednostka	Relacja do jednostki SI
temperatura	stopień Celsjusza	$°C(\tau_C = T_K - 273{,}15)$
	stopień Fahrenheita	$°F\left(\tau_F = \frac{9}{5}\tau_C + 32\right)$
	stopień Réaumura	$°R\left(\tau_R = \frac{4}{5}\tau_C\right)$
różnica temperatur	°C = K = deg	K
ilość ciepła	kaloria międzynarodowa	1 cal(międz.) = 4,1868 J
	kaloria termochemiczna	1cal(termochem.) = = 4,1840 J
	kaloria piętnastostopniowa	$1\ cal_{15} = 4{,}1855$ J
	kaloria dwudziestostopniowa	$1\ cal_{20} = 4{,}182$ J
moc, strumień energii	$cal \cdot s^{-1}$	$1\ cal \cdot s^{-1} = 4{,}1868$ W
	$kcal \cdot h^{-1}$	$1\ kcal \cdot h^{-1} = 1{,}163$ W
ciepło właściwe	$erg \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$	$1\ erg \cdot g^{-1} \cdot K^{-1} = 10^{-4}\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
	$cal \cdot (g \cdot K)^{-1}$	$1\ cal \cdot (g \cdot K)^{-1} = 4\,186{,}8\ J(kg \cdot K)^{-1}$
	$kcal \cdot (kg \cdot K)^{-1}$	$1\ kcal \cdot (kg \cdot K)^{-1} = 4\,186{,}8\ J \cdot (kg \cdot K)^{-1}$
gęstość strumienia energii	$cal \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1}$	$1\ cal \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1} = 41\,868\ W \cdot m^{-2}$
	$kcal \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$	$1\ kcal \cdot m^{-2} \cdot h^{-1} = 1{,}163\ W \cdot m^{-2}$
współczynnik przewodnictwa cieplnego	$erg \cdot (cm \cdot s \cdot K)^{-1}$	$1\ erg \cdot (cm \cdot s \cdot K)^{-1} = 10^{-5}\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
	$cal \cdot (cm \cdot s \cdot K)^{-1}$	$1\ cal \cdot (cm \cdot s \cdot K)^{-1} = 418{,}68\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
współczynnik rozszerzalności liniowej, objętościowej lub rozprężliwości termicznej	$(°C)^{-1} = (K)^{-1} = deg^{-1}$	—

0,012 kg (dokładnie) czystego węgla ^{12}C. Z definicji powyższej wynika, że jeden mol zawiera tyle gramów danej substancji, ile wynosi jego masa drobinowa. Liczbę atomów lub drobin zawartych w jednym molu nazywamy *liczbą Avogadra* N_A. Wartość liczby Avogadra wynosi $N_A = (6{,}02252 \pm 0{,}00028) \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$.

1.5. JEDNOSTKI ELEKTROMAGNETYCZNEGO UKŁADU CGS (CGSEM)

Poza układem SI w elektryczności i magnetyzmie istnieją następujące układy: elektrostatyczny CGS (CGSES), elektromagnetyczny CGS (CGSEM) oraz układ mieszany Gaussa. Wszystkie te układy są rozszerzeniem układu CGS na elektryczność i magnetyzm. W układzie CGSES pierwszą jednostkę niemechaniczną definiuje się w oparciu o prawo Coulomba dla ładunków elektrycznych, a w układzie CGSEM w oparciu o prawo Coulomba dla mas magnetycznych. W układzie mieszanym Gaussa wielkości elektryczne wyraża się w jednostkach CGSES, a magnetyczne w jednostkach CGSEM. W niniejszym paragrafie omówimy wyłącznie jednostki magnetyczne układu CGSEM, które nadal są stosowane w fizyce doświadczalnej. Jednostkami podstawowymi w układzie CGSEM są tylko trzy jednostki podstawowe układu CGS stosowanego w mechanice.

Związkiem, który łączy pierwszą wielkość magnetyczną z wielkościami mechanicznymi, a tym samym pozwala sprowadzić wymiar tej wielkości do jednostek podstawowych układu CGS, jest prawo Coulomba dla magnesów

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{1.42}$$

Masę magnetyczną definiuje się w oparciu o ostatni wzór. Przyjmując założenie $k = 1$, otrzymamy następujący wymiar masy magnetycznej: jedn. masy magn. = $= \text{cm} \cdot \text{dyna}^{1/2}$. Należy tu podkreślić, że na skutek niemożliwości rozdzielenia biegunów magnesu, pojęcie masy magnetycznej nie posiada prostej interpretacji fizycznej.

Jednostkę natężenia pola magnetycznego, ersted (Oe), określa się jako stosunek masy magnetycznej m bieguna bardzo długiego magnesu do odległości r od tego bieguna

$$H = m r^{-2}. \tag{1.43}$$

W punkcie oddalonym o jeden centymetr od bieguna magnesu o masie magnetycznej $m = 1$ jedn. masy magn. panuje natężenie pola magnetycznego równe jeden ersted.

Dla uzyskania związku między erstedem i amperem na metr skorzystamy ze wzoru, określającego natężenie pola magnetycznego w środku długiego solenoidu. W układzie CGSEM przyjmuje on postać

$$H_{\text{CGS}} = \frac{4\pi}{10^3}\frac{NI}{l}\,[\text{Oe}], \tag{1.20a}$$

gdzie przez H_{CGS} oznaczono natężenie pola w Oe, N — liczbę zwojów solenoidu, I — natężenie prądu w A, l — długość solenoidu w metrach. Ten sam wzór w układzie SI ma postać

$$H_{\text{SI}} = \frac{NI}{l}\left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right]. \tag{1.20}$$

Oczywiście dla tego samego solenoidu, czyli dla tych samych wartości N, I, l zachodzi równość $H_{CGS} = H_{SI}$, czyli

$$\frac{4\pi}{10^3}\frac{NI}{l}[\text{Oe}] = \frac{NI}{l}\left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right],$$

skąd

$$\begin{aligned} 1\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1} &= 4\pi\cdot 10^{-3}\text{Oe} = 0{,}0126\ \text{Oe},\\ 1\ \text{A}\cdot\text{cm}^{-1} &= 4\pi\cdot 10^{-1}\ \text{Oe} = 1{,}26\ \text{Oe},\\ 1\ \text{Oe} &= 79{,}6\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Indukcja magnetyczna B. W układzie CGSEM przyjmujemy, że w próżni indukcja magnetyczna jest równa natężeniu pola magnetycznego, to znaczy, że współczynnik proporcjonalności μ występujący w równaniu (1.23) jest równy jeden, czyli

$$B = H. \tag{1.45}$$

Zatem jednostka indukcji magnetycznej *gaus* (Gs) ma taki sam wymiar jak jednostka natężenia pola magnetycznego ersted. Wymiar ten określamy z równania (1.43): 1 Gs = = 1 Oe = $\text{cm}^{-1}\cdot\text{dyna}^{1/2}$. Związek pomiędzy gausem i teslą otrzymamy ze wzoru (1.23), który w próżni, po uwzględnieniu równania (1.24) przyjmuje postać

$$1\ \text{Gs} = \mu_0\ 1\ \text{Oe},$$

gdzie w układzie CGSEM $\mu_0 = 1$. Wielkości μ_0 oraz Oe wyrażone w układzie CGSEM zamieniamy na jednostki układu SI. Zatem, podstawiając zamiast μ_0 wartość ze wzoru (1.25), a zamiast Oe wartość ze wzoru (1.44) otrzymamy

$$\begin{aligned} 1\ \text{Gs} &= 4\pi\ 10^{-7}\ \text{Wb}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{A}^{-1}\cdot 10^3(4\pi)^{-1}\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1},\\ 1\ \text{Gs} &= 10^{-4}\ \text{T},\\ 1\ \text{T} &= 10^4\ \text{Gs}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Jednostkę strumienia indukcji magnetycznej definiujemy, wychodząc ze wzoru (1.22). Jednostka ta nazywa się *makswelem* (Mx) i ma następujący wymiar Mx = = Gs · cm^2. Związek pomiędzy makswelem i weberem otrzymamy, zastępując w wymiarze makswela gaus i centymetr przez jednostki układu SI

$$\begin{aligned} 1\ \text{Mx} &= 10^{-4}\ \text{T}\cdot 10^{-4}\text{m}^2,\\ 1\ \text{Mx} &= 10^{-8}\ \text{Wb},\\ 1\ \text{Wb} &= 10^8\ \text{Mx}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

W wyniku założonej równości wymiarów natężenia pola magnetycznego i indukcji magnetycznej w układzie CGSEM istnieje wiele terminów wspólnych dla różnych wielkości fizycznych. Należą do nich strumień magnetyczny, moment magnetyczny i namagnesowanie. W układzie CGSEM nazwą strumień magnetyczny określa się zarówno strumień indukcji magnetycznej (por. wzór 1.22), jak i strumień natężenia pola magnetycznego ($\Phi' = HS$). Pomiędzy tymi dwiema wielkościami istnieje związek

$$\Phi = \mu\,\Phi', \tag{1.48}$$

który w próżni przyjmuje postać

$$\Phi = \mu_0\,\Phi'.$$

Ponieważ jednak w omawianym układzie $\mu_0 = 1$, obydwa strumienie posiadają nie tylko taki sam wymiar, lecz również taką samą wartość liczbową. W ośrodku materialnym związek (1.48) przyjmuje postać

$$\Phi = \mu_r \Phi'$$

i wartość liczbowa obydwu strumieni jest różna, o czym łatwo zapomina się w praktyce. Te same uwagi dotyczą również wartości indukcji magnetycznej i natężenia pola magnetycznego, które również posiadają takie same wartości liczbowe w próżni, lecz różne w ośrodku materialnym.

Analogiczne trudności wyłaniają się w przypadku momentu magnetycznego. Terminem moment magnetyczny, w układzie CGSEM, nazywa się zarówno dipolowy moment magnetyczny jak i moment elektromagnetyczny, pomiędzy którymi istnieje związek (1.29). Dodać należy, że w układzie CGSEM nie zachodzi potrzeba rozróżniania polaryzacji magnetycznej od namagnesowania, gdyż w związku (1.32) $\mu_0 = 1$.

W chwili obecnej w różnych podręcznikach brak jest również konsekwencji w oznaczaniu jednostek i tak np. pole magnetyczne podaje się w gausach, a nie w erstedach, a magneton Bohra, który jest momentem elektromagnetycznym, podaje się w erg · Gs^{-1}, co nasuwa przypuszczenie, że jest to moment dipolowy. Niejednoznaczną terminologię przenosi się czasem również do układu SI. Na przykład w wielu monografiach naukowych pisanych w układzie SI polaryzację magnetyczną nazywa się namagnesowaniem. W praktyce należy stosować wyłącznie terminologię zalecaną przez Międzynarodową Unię Fizyki Czystej i Stosowanej [3], stosowaną również w niniejszym podręczniku. Terminologię tę należy również rozszerzyć na układ CGSEM, gdyż tylko wtedy można uniknąć omówionych powyżej nieścisłości.

W tabeli 1.7 zebrano najważniejsze jednostki układu mieszanego Gaussa.

Tabela 1.7

Jednostki magnetyczne układu CGSEM

Wielkość fizyczna	Jednostka	Relacja do jednostki SI
Natężenie pola magnetycznego i namagnesowanie	Oe	1 Oe = $\frac{10^3}{4\pi}$ A · m^{-1}
indukcja magnetyczna i polaryzacja magnetyczna	Gs	1 Gs = 10^{-4} T
strumień indukcji magnetycznej	Mx	1 Mx = 10^{-8} Wb
strumień pola magnetycznego	Oe · cm^2	1 Oe · cm^2 = $(40\pi)^{-1}$ A · m
moment dipolowy	Mx · cm	1 Mx · cm = 10^{-10} Wb · m
moment elektromagnetyczny	erg · Gs^{-1}	1 erg · Gs^{-1} = 10^{-3} A · m^2
współczynnik indukcji własnej	cm	1 cm = 10^{-9} H

1.6. LITERATURA

1. Dziennik Ustaw nr 25, poz. 154.
2. Monitor Polski nr 74, poz. 356.
3. International Union of Pure and Applied Physics, Symbols, Units and Nomenclature in Physics (Document U.I.P. 11), 1965.
4. J. M. Massalski, J. Studnicki, Międzynarodowy układ jednostek miar SI, PWN Warszawa 1968.
5. Z. Gajewski, Międzynarodowy układ jednostek miar. Mały poradnik, WNT Warszawa 1956.

2. DYSKUSJA BŁĘDÓW POMIAROWYCH

2.1. ŹRÓDŁA I PODZIAŁ BŁĘDÓW

Pomiarem nazywamy czynności związane z ustaleniem wartości liczbowej miary (por. § 1.1) danej wielkości fizycznej. Pomiary wykonujemy za pomocą *narzędzi pomiarowych*, na które składają się wzorce miar (odważniki, przymiar, pojemniki itp.) oraz przyrządy pomiarowe (waga, mierniki elektryczne itp.). *Przyrządy pomiarowe* podzielić możemy na: bezpośrednie, pozwalające odczytywać bezpośrednio miarę wielkości fizycznej (np. suwmiarka, sekundomierz, omomierz itp.) oraz pośrednie (np. cyrkiel, opornik wzorcowy itp.), które nie dają wprawdzie bezpośrednio miary wielkości fizycznej, lecz pomiar umożliwiają. Ze względu na sposób pomiaru, wielkości fizyczne podzielić możemy na: proste i złożone. Miarę *wielkości prostej* otrzymujemy w wyniku bezpośredniego pomiaru wykonanego za pomocą jednego przyrządu pomiarowego. Celem uzyskania miary *wielkości złożonej* musimy wykonać równoczesny pomiar kilku wielkości prostych, stosując nieraz bardzo złożoną aparaturę pomiarową. Samą miarę wielkości złożonej obliczamy wtedy z wzoru fizycznego.

Otrzymana w wyniku pomiaru miara wielkości fizycznej x różni się od prawdziwej miary x_0. Różnicę $x - x_0 = \delta$ nazywamy *rzeczywistym błędem bezwzględnym* wielkości mierzonej. Ze względu na źródła, błędy podzielić możemy na błędy przyrządu pomiarowego, błędy metody pomiarowej (wynikające np. z przybliżonego charakteru wzoru), błędy powodowane niedokładnością zmysłów lub wreszcie statystycznym charakterem zjawiska. Ze względu na sposób w jaki błędy wpływają na wynik pomiaru dzielimy je na trzy następujące grupy: systematyczne, przypadkowe i grube.

a. Błędy systematyczne. Zawsze w ten sam sposób wpływają na wyniki pomiarów wykonanych za pomocą tej samej metody i aparatury pomiarowej. Przy zmianie warunków pomiaru według określonej prawidłowości, błąd systematyczny zachowuje stałą wartość lub zmienia się w sposób prawidłowy. Wiele różnorodnych przyczyn może spowodować powstanie błędu systematycznego.

Minimalna wartość błędu systematycznego jest określona *dokładnością* stosowanego przyrządu (lub jego klasą w przypadku mierników elektrycznych, por. § 18.03). Przyrządy skonstruowane są w ten sposób, by wyniki prawidłowo wykonanych pomiarów różniły się od wartości prawdziwej x_0 nie więcej niż o wartość najmniejszej działki skali lub ułamek tej działki określony klasą przyrządu. Wartość najmniejszej działki, czyli odległość między sąsiednimi kreskami na skali przyrządu lub ułamek tej odległości określony klasą przyrządu nazywać będziemy dokładnością odczytu i oznaczać symbolem Δx. Wartość prawdziwa x_0 może być większa albo mniejsza od wartości odczytanej x, stąd dokładność odczytu może być dodatnia lub ujemna $\pm \Delta x$.

Przykład. Za pomocą miarki, na której zaznaczono każdy centymetr, zmierzono długość l przedmiotu, otrzymując wartość $l = 78$ cm. W tym przypadku dokładność odczytu wynosi $\Delta l = \pm 1$ cm; ($|\Delta l| = 1$ cm). Zatem rzeczywista długość przedmiotu mieści się w granicach od $l_1 = 77$ do $l_2 = 79$ cm, co możemy zapisać w postaci $l = (78 \pm 1)$ cm.

Innym źródłem błędu systematycznego jest błąd skali przyrządu, spowodowany trwałym jego uszkodzeniem lub wadliwym wykonaniem. Do tej grupy zaliczymy również błędy wynikające z niewłaściwego sposobu wykorzystania przyrządów, np. złego ustawienia, niewłaściwej temperatury otoczenia, wilgotności itp. Celem wyeliminowania

błędów tego typu należy przyrządy wykorzystywać w sposób zgodny z instrukcją i co pewien czas kontrolować, to znaczy porównywać ich wskazania ze wskazaniami wzorców pewniejszych*.

Przyczyną błędu systematycznego może być *zła metoda pomiaru*. Jeżeli np. mierząc wydłużenie drutu, odczytujemy położenie obciążonego końca przyjmując, że drugi, zamocowany koniec nie zmienia swego położenia, to wynik pomiaru, poza właściwym wydłużeniem, zawiera przyczynek pochodzący od ugięcia zawieszenia. Błąd taki można wyeliminować przez ulepszenie sposobu pomiaru.

Pewna grupa błędów systematycznych wynika z *przybliżonego charakteru wzorów* stosowanych do obliczenia wielkości złożonej. Tego typu błąd popełniamy obliczając przyspieszenie ziemskie z wzoru $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ wtedy, gdy pomiar okresu wykonaliśmy przy dużej amplitudzie wahań. (Wzór na okres jest wyprowadzony przy założeniu małych kątów wychylenia.)

Błąd systematyczny może być wprowadzony również *przez* samego *eksperymentatora* (np. błąd paralaksy, por. § 18.03). Ostatnio ten rodzaj błędów coraz częściej eliminuje się przez zastosowanie automatycznego zapisu wyników za pomocą przyrządów rejestrujących np. pisaków itp.

Błędy systematyczne można zmniejszać nieograniczenie udoskonalając metodę pomiaru lub stosowane przyrządy, przez zastosowanie dokładniejszych wzorów, lub wreszcie przez wyeliminowanie błędów popełnianych przez eksperymentatora.

b. Błędy przypadkowe. Załóżmy, że pomiar wykonujemy wielokrotnie, za pomocą przyrządu, którego dokładność jest bardzo duża, a więc błąd systematyczny mały. W takim przypadku może się zdarzyć, że różnice między wynikami kolejnych pomiarów będą znacznie przewyższać błąd systematyczny. Błąd, którym obarczony jest każdy z pomiarów, nazywamy błędem przypadkowym. Wiele różnorodnych przyczyn może spowodować powstanie błędu przypadkowego. Może on wynikać z *własności przedmiotu mierzonego*, np. przy pomiarze średnicy drutu wynikać może z wahań średnicy. Innym jego źródłem są *własności* samego *przyrządu* pomiarowego, którego wskazania zależą od przypadkowych drgań budynku, ruchów powietrza, tarcia w łożyskach, docisku (np. mikromierza) itp. Błędy przypadkowe mogą mieć za przyczynę również podłoże *fizjologiczne* np. zjawisko spostrzeżenia chwili włączenia sekundomierza, określenia równości oświetlenia poszczególnych części pola widzenia lub usłyszenia ekstremum natężenia dźwięku itp. Błędów przypadkowych nie można wyeliminować, lecz ich wpływ na wynik ostateczny można ściśle określić. Będzie to przedmiotem następnych paragrafów.

c. Błędy grube lub pomyłki wynikają z niestaranności eksperymentatora. Celem wyeliminowania takich błędów należy powtórzyć pomiary. Ponieważ błędy grube są do uniknięcia, wyeliminujemy je z dalszych rozważań.

d. Ze względu na sposób zapisu rozróżniamy błędy bezwzględne, względne i procentowe.

Błędem bezwzględnym nazywamy odchylenie wyniku pomiaru od wartości rzeczywistej wyrażone w takich jednostkach jak wielkość mierzona. Błąd bezwzględny nie oddaje sam w pełni wartości wykonanego pomiaru. Jeżeli np. wiemy, że błąd bezwzględ-

* Kontrolowaniem przyrządów stosowanych w przemyśle i handlu zajmuje się Centralny Urząd Jakości i Miar.

ny wynosił $\Delta l = \pm 1$ cm, to wartość wykonanego pomiaru ocenić możemy tylko wtedy, gdy znamy bezpośredni odczyt l. Błąd $\Delta l = \pm 1$ cm jest bardzo duży wtedy, gdy $l = 5$ cm, a bardzo mały wtedy, gdy $l = 5$ km. Stąd też musimy zawsze obok wartości otrzymanej z pomiaru zapisać błąd

$$l \pm \Delta l = (102 \pm 1) \text{ cm}. \tag{2.1}$$

Tak zapisany rezultat nazywać będziemy *wynikiem pomiaru*. Podkreślić tu należy, że rezultat pomiaru bez oceny dokładności jest bezwartościowy.

Błędem względnym nazywamy stosunek błędu bezwzględnego do wielkości mierzonej $\left|\frac{\Delta l}{l}\right|$. Jest on wielkością niemianowaną. Błąd względny wyrażony w procentach nazywamy *błędem procentowym* $B_p = \left|\frac{\Delta l}{l}\right| 100\%$. W ten sposób zdefiniowany błąd procentowy nie zawiera żadnych informacji na temat samego wyniku lub błędu bezwzględnego. Pełną informację o wartości wykonanego pomiaru dają łącznie: wynik pomiaru i błąd bezwzględny lub procentowy. Stąd podając bezpośrednio rezultaty pomiaru w pracowni, należy podać zarówno wynik pomiaru jak i błąd procentowy. Tak więc w cytowanym przypadku równanie (2.1) napiszemy w postaci

$$l = (102 \pm 1) \text{ cm}, \quad B_p = 1\%. \tag{2.2}$$

2.2. TEORIA BŁĘDÓW PRZYPADKOWYCH WEDŁUG GAUSSA; ODCHYLENIE STANDARDOWE

W obecnych rozważaniach ograniczymy się do przypadku pomiarów, w których błąd systematyczny możemy pominąć w porównaniu z błędem przypadkowym. Dla przykładu w tabeli 2.1 przedstawiono wyniki dużej liczby pomiarów wykonanych z tą samą dokładnością. Wyniki te uporządkowano według rosnących wartości i przedstawiono graficznie na rys. 2.1. Zauważymy, że bardzo rzadko pojawiają się wartości małe i duże, natomiast najczęściej występują wartości pośrednie.

Przedstawiony tu przykład posłuży nam do sformułowania podstawowych założeń teorii błędów przypadkowych. Nasze obecne rozważania dotyczyć będą przypadku, gdy całkowita liczba pomiarów $n \to \infty$ i wyniki w sposób ciągły pokrywają całą oś odciętych. (W każdej rzeczywistej serii pomiarów możliwe są tylko wyniki, których wartość liczbowa miary jest równa całkowitej liczbie działek przyrządu pomiarowego.)

Różnicę między wynikiem i-tego pomiaru i wartością rzeczywistą, zwaną błędem rzeczywistym, oznaczymy przez δ_i

$$\delta_i = x_i - x_0. \tag{2.3}$$

Oznaczając ponadto przez n_i liczbę pomiarów, dla których uzyskano ten sam wynik x_i, prawdopodobieństwo $P(\delta_i)$ uzyskania wyniku x_i wyrazimy wzorem:

$$P(\delta_i) = \frac{n_i}{n} \quad \text{lub} \quad P(\delta_i) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n}.$$

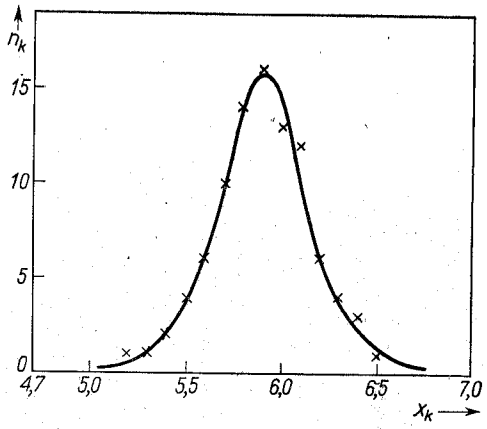
Ponadto muszą być spełnione związki:

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = n, \quad \text{skąd} \quad \sum_{i=1}^{n} P(\delta_i) = 1.$$

n_k	n_k/n	x_k	$n_k x_k$	ε_k^*	ε_k^2	$n_k \varepsilon_k^2$
1	0,011	5,2	5,2	−0,7	0,49	0,49
1	0,011	5,3	5,3	−0,6	0,36	0,36
2	0,021	5,4	10,8	−0,5	0,25	0,50
4	0,043	5,5	22;0	−0,4	0,16	0,64
7	0,075	5,6	39,2	−0,3	0,09	0,63
10	0,094	5,7	57,0	−0,2	0,04	0,40
14	0,149	5,8	81,2	−0,1	0,01	0,14
16	0,170	5,9	94,4	0,0	0,00	0,00
13	0,138	6,0	78,0	0,1	0,01	0,13
12	0,128	6,1	73,2	0,2	0,04	0,48
6	0,064	6,2	37,2	0,3	0,09	0,54
4	0,043	6,3	25,2	0,4	0,16	0,64
3	0,032	6,4	19,2	0,5	0,25	0,75
1	0,011	6,5	6,5	0,6	0,36	0,36
$94 = n$			$554{,}4 = \sum_k n_k x_k$			$6{,}06 = \sum_k x_k \varepsilon_k^2$

Wynik końcowy: $\bar{x} = 5{,}899$, $S_{\bar{x}} = 0{,}026$, $x = 5{,}90 \pm 0{,}03$

* Do obliczeń ε_x przyjęto $x = 5{,}9$.



2.1. Graficzne przedstawienie wyników z tabeli 2.1.

Zakładając, że błąd δ_i jest zmienną ciągłą, wprowadzimy różniczkę $d\delta \to \lim \Delta\delta$, przy czym kolejne wartości $\Delta\delta$ są rozłączne i pokrywają cały przedział zmienności δ_i. Ponadto wprowadzimy pojęcie gęstości prawdopodobieństwa błędu przypadkowego

$$\varphi(\delta) = \lim_{\Delta S = 0} \frac{P(\delta)}{\Delta\delta},$$

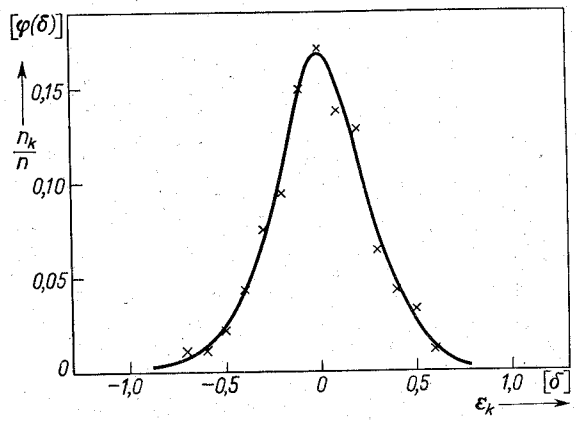
wtedy

$$P(\delta) = \varphi(\delta)d\delta \tag{2.4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta)d\delta = 1. \tag{2.5}$$

Obecnie, postaramy się odgadnąć postać matematyczną funkcji $\varphi(\delta)$, opisującej rozkład błędów przypadkowych bardzo dużej serii pomiarów. Zgodnie z rys. 2.2 funkcja taka spełniać musi następujące warunki:
$\varphi(\delta) \geqslant 0$; $\varphi(+\delta) = \varphi(-\delta)$; $\varphi(\delta_1) > \varphi(\delta_2)$, gdy $|\delta_1| < |\delta_2|$; $\max \varphi(\delta) = \varphi(0)$; $\min \varphi(\delta) = \varphi(\pm \infty)$; dla dużych δ funkcja $\varphi(\delta)$ musi asymptotycznie zbliżać się do zera. Warunki powyższe dobrze spełnia funkcja

$$\varphi(\delta) = C \exp(-h^2\delta^2) \quad \text{dla} \quad C > 0.$$



2.2. Przedstawienie wyników tabeli 2.1 w układzie: względna liczba pomiarów n_k/n w zależności od odchylenia od wartości średniej ε_k. Na wykresie zaznaczono w nawiasach oznaczenia odpowiadające krzywej Gaussa.

Stałą C wyznaczyć można korzystając z następującej własności przyjętej funkcji

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}. \tag{2.6}$$

Ponieważ zgodnie z (2.5) musi zachodzić

$$C\exp(-h^2\delta^2)d\delta = 1, \quad \text{otrzymamy} \quad C = h/\sqrt{\pi},$$

czyli

$$\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2\delta^2) \quad \text{dla} \quad h > 0. \tag{2.7}$$

Funkcję (2.7) nazywamy funkcją Gaussa lub Gaussa prawem błędów, parametr h — miarą precyzji wykonanych pomiarów. Obraz graficzny funkcji Gaussa przedstawiono na rysunku 2.3.

Można udowodnić, że błędy pomiaru stosują się do funkcji Gaussa również wtedy, gdy prawdziwą wartość x_0 zastąpimy średnią arytmetyczną $\bar{x}$. Wprowadzając do wzoru (2.7) odchylenia od średniej arytmetycznej:

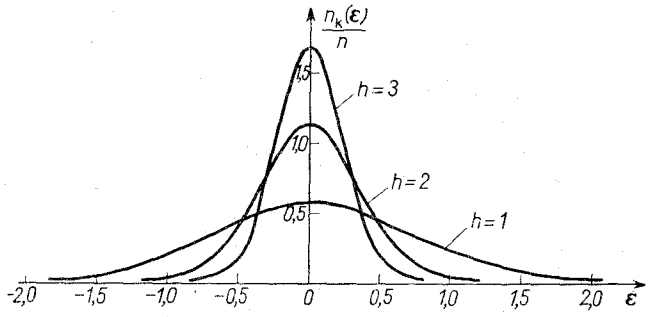
$$\boxed{\varepsilon_i \stackrel{\text{df}}{=} x_i - \bar{x}} \tag{2.8}$$

rzymamy

$$\varphi(x_i-\bar{x}) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp -h^2(x_i-\bar{x})^2. \tag{2.9}$$

godnie z wzorem (2.4), prawdopodobieństwo otrzymania wartości x_i wyraża się zorem:

$$P(x_i) = \varphi(x_i-\bar{x})\,dx_i.$$



2.3. Krzywa Gaussa dla różnych wartości miary precyzji h.

Zgodnie z teorią prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo $L(x)$ otrzymania w kolejnych pomiarach wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wynosi

$$L(x) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i-x)\,dx_i. \tag{2.10}$$

Wartość $\bar{x}$ jest wartością najbardziej prawdopodobną, stąd dla $L(x)$ funkcja (2.10) musi przyjmować maksimum. Podstawiając wyrażenie (2.9) do (2.10) otrzymamy

$$L(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \prod_{i=1}^{n} dx_i \prod_{i=1}^{n} \exp[-h^2(x_i-\bar{x})^2],$$

skąd

$$L(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2\right] \prod_{i=1}^{n} dx_i.$$

Przy $\prod_{i=1}^{n} dx_i$ = const, jeżeli wyrażenie powyższe osiąga maksimum

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \text{minimum}. \tag{2.11}$$

Wynik ten, zwany postulatem Gaussa, jest punktem wyjścia przy ustalaniu błędów pomiarowych.

Z postulatu Gaussa wynika również, że wielkość $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną. Warunkiem istnienia minimum funkcji (2.11) jest zerowanie pierwszej pochodnej $f'(x) = 0$, skąd $2\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x}) = 0$ i dalej $n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$,

czyli

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.} \tag{2.12}$$

Tak więc udowodniliśmy, że wychodząc z postulatu Gaussa, na wynik końcowy dużej serii pomiarów przyjąć musimy średnią arytmetyczną (2.12). Metoda obliczeń oparta na postulacie Gaussa nazywa się metodą wyrównawczą, lub metodą najmniejszych kwadratów.

Odchyleniem standardowym lub błędem średnim kwadratowym S_x dowolnego pomiaru x_i serii składającej się z bardzo dużej liczby pomiarów o jednakowej dokładności nazywamy pierwiastek z średniej arytmetycznej kwadratów błędów bezwzględnych δ_i:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}. \tag{2.13}$$

Ponieważ nie znamy rzeczywistych błędów δ_i, błąd średni kwadratowy średniej arytmetycznej musimy wyrazić przez odchylenia od wartości średniej ε_i zdefiniowane wzorem (2.8). Udowodnimy, że w takim przypadku odchylenie standardowe wyraża się wzorem:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}. \tag{2.14}$$

Sumując wyrażenia definicyjne (2.3) dla wszystkich wskaźników i otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - nx_0,$$

skąd

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i.$$

Uwzględniając definicję średniej arytmetycznej (2.12) otrzymamy

$$x_0 = \bar{x} - \bar{\delta}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie we wzorze (2.3) definiującym błąd rzeczywisty i uwzględniając wzór (2.8) otrzymamy

$$\varepsilon_i = \delta_i - \bar{\delta}.$$

Podnosząc powyższe wyrażenie do kwadratu, sumując po i oraz dzieląc przez n otrzymamy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \bar{\delta}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 - \frac{2}{n} \bar{\delta} \sum_{i=1}^{n} \delta_i.$$

Po uwzględnieniu definicii średniej arytmetycznej wyrażenie przyjmie postać

$$\overline{\varepsilon_i^2} = \bar{\delta}^2 + \overline{\delta^2} - 2\bar{\delta}^2.$$

Celem znalezienia związku między kwadratem średniej $\bar{\delta}^2$ i średnią kwadratów $\overline{\delta^2}$ zauważymy, że

$$\bar{\delta}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (\delta_1\delta_i + \delta_2\delta_i + \ldots)\right] = \frac{1}{n} \overline{\delta^2}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{n-1}{n}\overline{\delta^2}$$

lub rozpisując wartości średnie

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2.$$

Podstawiając powyższy związek do wzoru (2.13) otrzymamy (2.14) c.n.d.

W praktyce obliczanie błędów ściśle według wzoru (2.14) jest bardzo kłopotliwe, ponieważ $\bar{x}$ musimy obliczyć z dokładnością przewyższającą dokładność pomiaru x_i. Dowodzi się, że przy obliczaniu odchylenia standardowego według wzoru (2.14) można przyjąć na $\bar{x}$ wartość zaokrągloną do tego miejsca znaczącego, do którego są podane wyniki x_i. Zaokrąglenia takie zastosowano w przykładowych obliczeniach przedstawionych w tabelkach 2.1 i 2.2.

Tabela 2.2

Opracowanie serii małej liczby pomiarów wielkości prostej

i (l. p.)	x_i	ε_i^*	ε_i^2
1	35,6	−0,1	0,01
2	35,8	0,1	0,01
3	35,7	0,0	0,00
4	35,5	−0,2	0,04
5	35,6	−0,1	0,01
6	35,9	0,2	0,04
7	35,7	0,0	0,00
8	35,8	0,1	0,01
9	35,9	0,2	0,04
	$\sum_i x_i = 321{,}5$		$\sum_i \varepsilon_i^2 = 0{,}16$

Wynik końcowy: $\bar{x} = 35{,}72$ mm, $S_{\bar{x}} = 0{,}05$ mm, $x = (35{,}72 \pm 0{,}05)$ mm.

* Do obliczania ε_i przyjęto zaokrąglenie $x = 35{,}7$ mm.

3. WARTOŚĆ ŚREDNIA I ODCHYLENIE STANDARDOWE WIELKOŚCI ZŁOŻONEJ I ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ

Załóżmy, że interesująca nas wielkość $z = f(x, y)$ jest funkcją złożoną dwóch wielkości prostych x oraz y, które mierzyliśmy wielokrotnie uzyskując w wyniku końcowym wartości x_i, gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, oraz y_k, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots, m$. Wielkości te w wyniku końcowym dają wartości średnie

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{oraz} \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k. \tag{2.15}$$

$$\varepsilon_i = x_i - \bar{x}, \quad \text{oraz} \quad \nu_k = y_k - \bar{y}, \tag{2.16}$$

jak również odchylenia standardowe S_x oraz S_y. Wielkość złożoną z_{ik} obliczyć możemy oddzielnie dla każdej pary wielkości prostych x_i oraz y_k:

$$z_{ik} = f(x_i, y_k).$$

Korzystając z definicji odchyleń (2.16) możemy napisać

$$z_{ik} = f(\bar{x} + \varepsilon_i, \bar{y} + \nu_k). \tag{2.17}$$

Rozwijając powyższe wyrażenie w szereg Taylora i ograniczając rozwinięcie do pierwszych dwóch wyrazów otrzymamy

$$z_{ik} = f(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon_i f'_x(\bar{x}, \bar{y}) + \nu_k f'_y(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots,$$

gdzie $f'_x(\bar{x}, \bar{y})$ oznacza pierwszą pochodną cząstkową funkcji (2.17) względem x_i w punkcie $\bar{x}, \bar{y}$, a $f'_y(\bar{x}, \bar{y})$ odpowiednią pochodną względem y_k. Zgodnie z definicją średniej arytmetycznej $\bar{z}$ możemy napisać

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} z_{ik}, \\
&= \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} [f(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon_i f'_x(\bar{x}, \bar{y}) + \nu_k f'_y(\bar{x}, \bar{y})], \\
&= \frac{1}{nm}\left[nmf(\bar{x}, \bar{y}) + m\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f'_x(\bar{x}, \bar{y}) + n\sum_{k=1}^{m} \nu_k f'_y(\bar{x}, \bar{y})\right].
\end{aligned}$$

Ponieważ zgodnie z definicją wartości średniej $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$ oraz $\sum_{k=1}^{m} \nu_k = 0$ otrzymamy:

$$\bar{z} \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} z_{ik} \simeq f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Wynika stąd, że podstawiając do wzoru na wielkość złożoną wartości średnie wielkości prostych, w wyniku końcowym otrzymamy średnią arytmetyczną wielkości złożonej.

Obecnie wyprowadzimy wzór na odchylenie standardowe wielkości $\bar{z}$. Oznaczymy przez z_0 wartość rzeczywistą wielkości z, a przez w_{ik} odchylenie wielkości z_{ik} od wartości rzeczywistej

$$w_{ik} = z_{ik} - z_0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m. \tag{2.18}$$

Odchylenia poszczególnych wielkości prostych wynoszą odpowiednio

$$\delta_i = x_i - x_0 \quad \text{oraz} \quad \zeta_k = y_k - y_0$$

i wielkość z_{ik} możemy napisać w postaci:

$$z_{ik} = f(x_i, y_k) = f(x_0 + \delta_i, y_0 + \zeta_k).$$

Rozwijając powyższe wyrażenie na szereg Taylora otrzymamy

$$z_{ik} = f(x_0, y_0) + \delta_i f'_x(x_0, y_0) + \zeta_k f'_y(x_0, y_0).$$

Założymy, że $f(x_0, y_0) = z_0$. Przenosząc z_0 na stronę lewą i uwzględniając (2.18) otrzymamy

$$w_{ik} = \delta_i f'_x(x_0, y_0) + \zeta_k f'_y(x_0, y_0).$$

Zgodnie z definicją odchylenia standardowego (błędu średniego kwadratowego) (2.13) otrzymamy

$$S_z^2 = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} w_{ik}^2,$$

$$S_z^2 = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} [\delta_i f'_x(x_0, y_0) + \zeta_k f'_y(x_0, y_0)]^2,$$

$$S_z^2 = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} [\delta_i^2 f'^2_x(x_0, y_0) + \zeta_k^2 f'^2_y(x_0, y_0) + 2\delta_i \zeta_k f'_x(x_0, y_0) f'_y(x_0, y_0)].$$

Trzeci składnik ostatniej sumy zawiera iloczyn dwóch małych wielkości $\delta_i \zeta_k$ i możemy go zaniedbać. Wykonując ponadto sumowanie otrzymamy

$$S_z^2 = f'^2_x(x_0, y_0) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 + f'^2_y(x_0, y_0) \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \zeta_k^2.$$

Zgodnie z definicją odchyleń standardowych wielkości prostych mamy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = S_x^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \zeta_k^2 = S_y^2$$

i ostatni wzór przyjmie postać

$$S_z^2 = S_x^2 f'^2_x(x_0, y_0) + S_x^2 f'^2_y(x_0, y_0).$$

Zastępując wartości rzeczywiste $f(x_0, y_0)$ wyrażeniami otrzymanymi dla wartości średnich $f(\bar{x}, \bar{y})$ otrzymamy

$$S_z = \sqrt{S_x^2 f'^2_x(\bar{x}, \bar{y}) + S_y^2 f'^2_y(\bar{x}, \bar{y})}.$$

Wyrażenie powyższe można uogólnić na funkcje dowolnej liczby zmiennych x_i otrzymując

$$S_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^2 \left[\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i}\right]^2}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{2.19}$$

Odchylenie standardowe, czyli błąd średni kwadratowy *średniej arytmetycznej* pojedynczego pomiaru jest miarą błędu każdego z pomiarów wielkości prostej, wchodzących w skład serii. Obecnie odpowiemy na pytanie jakim błędem obarczona jest średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots + x_n).$$

W tym celu do powyższej średniej zastosujemy wzór (2.19), który pozwoli nam obliczyć jej odchylenie standardowe. Pochodna wartości średniej $\bar{x}$ traktowanej jako funkcja złożona $f(x_k)$ wielkości x_k, względem zmiennej x_k wynosi

$$f'_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n},$$

natomiast błąd tej zmiennej

$$S_{x_k} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}.$$

Obydwa wyrażenia nie zależą od zmiennej x_k. Po podstawieniu do wzoru (2.19) otrzymamy

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}.$$

Wykonując sumowanie po k otrzymamy ostatecznie

$$\boxed{S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}.} \tag{2.20}$$

Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej wielkości złożonej otrzymamy podstawiając do wzoru (2.19) błąd $S_{\bar{x}_i}$ zamiast odchylenia standardowego S_{x_i}

$$\boxed{S_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_{\bar{x}_i}^2\left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n)}{\partial x_i}\right]^2}.} \tag{2.21}$$

Szczególnie prostym wzorem wyraża się odchylenie standardowe wielkości złożonej obliczanej ze wzoru

$$z = \prod_{i=1}^{n} A x_i^{a_i},$$

gdzie A oraz a_i są dowolnymi liczbami. Tak więc z jest iloczynem dowolnych potęg wielkości prostych. W takim przypadku

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = a_i \frac{z}{x_i}.$$

Podstawiając powyższą wielkość do wzoru (2.21) i dzieląc przez z otrzymamy

$$\boxed{\frac{S_{\bar{z}}}{z} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[a_i \frac{S_{\bar{x}_i}}{x_i}\right]^2}.} \tag{2.22}$$

P r z y k ł a d: Celem doświadczenia jest wyznaczenie gęstości czaszy kulistej. Zmierzono jej promień podstawy otrzymując wynik $r = 1{,}3678$ cm oraz strzałkę — wysokość $s = 0{,}6359$ cm i w wyniku ważenia na wadze analitycznej ustalono masę $m = 9{,}23638$ g. Postępując w sposób omawiany w § 2.2

(tab. 2.2) uzyskano następujące wartości odchyleń standardowych średniej arytmetycznej: $S_{\bar{r}} = 0{,}0001$ cm, $S_{\bar{s}} = 0{,}0002$ cm oraz $S_{\bar{m}} = 0{,}00006$ g. Obliczyć średnią gęstość czaszy d oraz błąd, odchylenie standardowe średniej arytmetycznej $S_{\bar{d}}$. Gęstość obliczamy w tym przypadku ze wzoru

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{1}{2}\pi r^2 s + \frac{1}{6}\pi s^3}.$$

Po podstawieniu danych i wykonaniu obliczeń otrzymano $d = 4{,}61036$ g cm^{-3}. Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej, zgodnie z (2.21), wyrazi się wzorem:

$$S_{\bar{d}}^2 = \left[\frac{S_{\bar{m}}}{\frac{1}{2}\pi r^2 s + \frac{1}{6}\pi s^3}\right]^2 + \left[\frac{\frac{1}{2}\pi m(r^2+s^2)}{\left(\frac{1}{2}\pi r^2 s + \frac{1}{6}\pi s^3\right)^2} \cdot S_{\bar{s}}\right]^2 + \left[\frac{\pi m r s S_{\bar{r}}}{\left(\frac{1}{2}\pi r^2 s + \frac{1}{6}\pi s^3\right)^2}\right]^2.$$

Podstawiając do powyższego wzoru wartości liczbowe i wykonując obliczenia otrzymamy

$$S_{\bar{d}}^2 = 0{,}499^2(6 \cdot 10^{-5})^2 + 8{,}22^2(2 \cdot 10^{-4})^2 + 6{,}29^2(10^{-4})^2$$

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{0{,}05 + 270 + 39{,}5} \cdot 10^{-4} = \sqrt{310} \cdot 10^{-4} = 18 \cdot 10^{-4} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Wynik ostateczny przyjmie postać $d = (4{,}6104 \pm 0{,}0018)$ g $\cdot$ cm^{-3}, a błąd procentowy wynosi 0,04%.

2.4. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA BŁĘDÓW

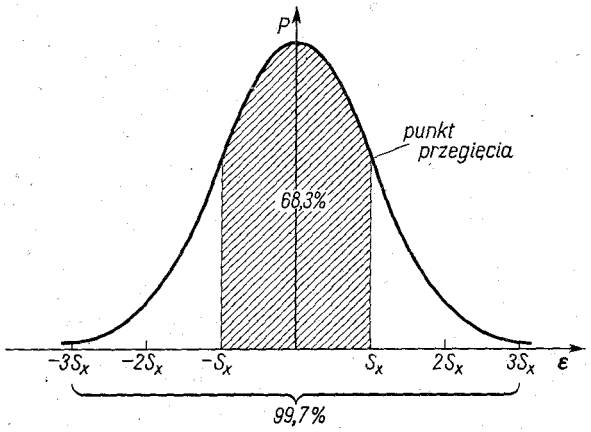
W dotychczasowych rozważaniach wprowadziliśmy niezależnie miarę precyzji h i odchylenie standardowe S_x. Granicę, do której dąży odchylenie standardowe S_x przy $n \to \infty$, oznaczamy przez σ;

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} S_x.$$

Można udowodnić, że zachodzi następujący związek:

$$\sigma = (h\sqrt{2})^{-1}. \tag{2.23}$$

Dowodzi się również, że odcięta punktu przegięcia krzywej Gaussa δ_p jest równa σ (por. rys. 2.4).



2.4. Interpretacja graficzna odchylenia standardowego.

Zakładając, że gęstość prawdopodobieństwa wyraża się funkcją Gaussa (2.7), prawdopodobieństwo $P_{\Delta x}$, że wynik jest zawarty w granicach od $\bar{x}-\Delta x$ do $\bar{x}+\Delta x$ wynosi

$$P_{\Delta x} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \exp(-h^2\varepsilon^2)\,d\varepsilon.$$

Podstawiając $\xi = h\varepsilon$ oraz zmieniając granice całkowania, równanie powyższe możemy przedstawić w postaci

$$P_{\Delta x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\Delta x} \exp(-\xi^2)\,d\xi.$$

Wielkość

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} \exp(-\xi^2)\,d\xi$$

nazywamy funkcją błędu Gaussa. Wartości tej funkcji są stabelaryzowane. Prawdopodobieństwo $P_{\Delta x}$ wyrazimy więc wzorem:

$$P_x = \Phi(h\Delta x).$$

Zgodnie z (2.23) dla dostatecznie dużej serii pomiarów możemy przyjąć przybliżenie

$$S_x = (h\sqrt{2})^{-1}. \tag{2.23a}$$

Znając funkcję Gaussa możemy określić kolejne prawdopodobieństwa tego, że wynik nasz mieści się w przedziale $\bar{x}\pm\Delta x$, przy Δx wynoszącym kolejno S_x, $2S_x$, $3S_x$:

Δx	$P_{\Delta x}$	Poziom ufności α
S_x	$\Phi(1/\sqrt{2}) = \Phi(0{,}707) = 0{,}683$	68,3
$2S_x$	$\Phi(2/\sqrt{2}) = \Phi(1{,}414) = 0{,}954$	95,4
$3S_x$	$\Phi(3/\sqrt{2}) = \Phi(2{,}121) = 0{,}997$	99,7

Wyrażoną w procentach ilość wyników mieszczących się w danym przedziale $\bar{x}\pm\Delta x$ nazywamy *poziomem ufności* α, a przedział, w którym mieści się wtedy wielkość mierzona z danym prawdopodobieństwem, nazywamy przedziałem ufności $(\bar{x}-\Delta x < x < \bar{x}+\Delta x)$. Błąd równy $3S_x$ (trzykrotne odchylenie standardowe) nazywamy *błędem maksymalnym*.

Poza błędami średnim kwadratowym i maksymalnym niekiedy posługujemy się jeszcze pojęciem *błędu przeciętnego*

$$S_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|.$$

Można udowodnić, że dla bardzo dużej serii pomiarów, między błędem przeciętnym i miarą precyzji h istnieje związek

$$S_p = (h\sqrt{\pi})^{-1}.$$

Dzieląc stronami przez ostatnie równanie wyrażenie (2.23a) otrzymamy

$$\frac{S_x}{S_p} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{2.24}$$

Spełnienie powyższego związku można uważać za kryterium stosowalności prawa Gaussa dla danej serii pomiarów.

2.5. METODA STUDENTA-FISHERA OKREŚLANIA BŁĘDÓW MAŁEJ SERII POMIARÓW

Do tej pory omawialiśmy błędy bardzo dużej liczby pomiarów ($n \to \infty$). W praktyce najczęściej wykonujemy tylko kilka pomiarów ($n < 5$). Oznacza to, że ze zbioru teoretycznego, składającego się z nieskończenie wielu punktów wybieramy tzw. próbkę składającą się z kilku przypadkowo wybranych pomiarów. Dla tej próbki obliczamy wartość średnią $\bar{x}$, odchylenie standardowe S'_x oraz odchylenie standardowe średniej $S'_{\bar{x}}$. Jest rzeczą oczywistą, że prawdopodobieństwo znalezienia wartości rzeczywistej w przedziale $(\bar{x}' \pm S'_{\bar{x}'})$ jest znacznie mniejsze, niż w przypadku, gdy wartość średnia $\bar{x}$ i błąd $S_{\bar{x}}$ obliczone są na podstawie bardzo dużej liczby pomiarów. W metodzie Studenta–Fishera pytamy, na ile należy rozszerzyć przedział $(\bar{x}' \pm S'_{\bar{x}'})$ określony dla próbki, by prawdopodobieństwo znalezienia wartości rzeczywistej w rozszerzonym przedziale było równe prawdopodobieństwu znalezienia wartości rzeczywistej w przedziale $(\bar{x} \pm S_{\bar{x}})$, określonym przez odchylenie standardowe obliczone dla bardzo dużej liczby pomiarów. Rozszerzony przedział napiszemy w postaci $(\bar{x}' \pm t_{n\alpha} S'_{\bar{x}'})$. Wartość współczynnika $t_{n\alpha}$ zwanego współczynnikiem Studenta–Fishera zależy od liczby n pomiarów wchodzących w skład próbki i od postulowanego poziomu ufności α. Korzystając z wyników teorii Studenta–Fishera, obliczyć można teoretyczne wartości współczynników $t_{n\alpha}$. W tablicy 2.3 zebrano współczynniki $t_{n\alpha}$ zaokrąglone do dwóch miejsc znaczących, ponieważ taka dokładność wystarcza całkowicie do przypadków, spotykanych w pracowni.

W tablicy podano współczynniki, przez które należy pomnożyć odchylenie standardowe, aby otrzymać błąd dla danego poziomu ufności α. Chcąc uzyskać błąd średni kwadratowy przyjmujemy poziom ufności $\alpha = 0{,}68 \simeq 0{,}7$, poziomowi ufności $\alpha = 0{,}5$ odpowiada tzw. *błąd prawdopodobny*, a poziomowi $\alpha = 0{,}999$ — trzykrotne odchylenie standardowe — czyli błąd maksymalny. W pracowni z reguły obliczać będziemy odchylenia standardowe biorąc poziom ufności $\alpha = 0{,}7$, a tylko w nielicznych przypadkach błąd maksymalny przy $\alpha = 0{,}999$. Celem uzyskania błędu maksymalnego wystarczy pomnożyć odchylenie standardowe $S'_{x'}$ przez odpowiedni współczynnik Studenta–Fishera, nie trzeba mnożyć najpierw $S'_{x'}$ przez 3, czyli $S_{n\alpha} = t_{n\alpha} S'_{x'}$, przy $\alpha = \text{const}$.

Zaniedbując poprawki Studenta–Fishera dla niewielkiej liczby pomiarów, popełniamy błąd $\Delta x_n \simeq (t_{\infty\alpha} - t_{n\alpha}) S'_{x'}$. Wynikający stąd błąd względny φ jest zdefiniowany wzorem:

$$\varphi = \frac{\Delta x_n}{t_{\infty\alpha} S'_{x'}} = \frac{t_{\infty\alpha} - t_{n\alpha}}{t_{\infty\alpha}}.$$

Korzystając z tablicy współczynników Studenta–Fishera możemy określić minimalną liczbę pomiarów, które musimy wykonać, by na skutek pominięcia współczynników

Tabela 2.3

Współczynniki Studenta–Fishera w zależności od liczby pomiarów n i poziomu ufności α

n \ α	0,5	0,7	0,95	0,999
2	1,00	2,0	12,7	636,6
3	0,82	1,3	4,3	31,6
4	0,77	1,3	3,2	12,9
5	0,74	1,2	2,8	8,6
6	0,73	1,2	2,6	6,9
7	0,72	1,1	2,4	6,0
8	0,71	1,1	2,4	5,4
9	0,71	1,1	2,3	5,0
10	0,70	1,1	2,3	4,8
12	0,70	1,1	2,2	4,6
14	0,69	1,1	2,2	4,1
16	0,69	1,1	2,1	4,0
18	0,69	1,1	2,1	4,0
20	0,69	1,1	2,1	3,9
22	0,69	1,1	2,1	3,8
24	0,68	1,1	2,1	3,8
26	0,68	1,1	2,1	3,7
28	0,68	1,1	2,0	3,7
30	0,68	1,1	2,0	3,6
40	0,68	1,1	2,0	3,6
60	0,68	1,0	2,0	3,5
120	0,68	1,0	2,0	3,4
∞	0,67	1,0	2,0	3,3
∞	0,674	1,036	1,960	3,291

Tabela 2.4

Zależność minimalnej liczby pomiarów, które należy wykonać przy żądanym poziomie ufności α, by stosunek φ błędu systematycznego Δx do odchylenia standardowego S_x przyjmował podane w tablicy wartości

φ \ α	0,5	0,7	0,95	0,999
1,0	2	3	7	17
0,5	3	6	18	50
0,4	4	8	27	74
0,3	6	13	46	127
0,2	13	29	99	277
0,1	47	169	387	1089

Studenta–Fishera błąd względny φ nie przekroczył z góry zadanej wartości w
na przykład 0,1 czyli 10%.

Korzystając z dokładniejszych tablic współczynników $t_{n\alpha}$ można ustalić m
liczby pomiarów gwarantujące poprawność wyników odchylenia standardow
czonego metodą Gaussa, a więc z pominięciem poprawek Studenta–Fishera
w tablicy 2.4

Przykład: Wykonano cztery pomiary średnicy drutu za pomocą mikromierza otrzymu
pujące wyniki: 0,67 mm; 0,66 mm; 0,66 mm; 0,69 mm. Wartość średnia wynosi $\bar{x} = 0{,}670$ mm
lenie standardowe obliczone według wzoru (2.20) wynosi 0,0022 mm. Współczynnik Student
odczytany z tabl. 2.3 dla poziomu ufności 0,68 $\simeq$ 0,7 wynosi $t_{4\alpha} = 1{,}3$. Zatem odchylenie sta
średniej arytmetycznej wyniesie $\bar{x} = (0{,}670 \pm 0{,}003)$ mm. Gdyby interesował nas błąd mak
musielibyśmy przyjąć poziom ufności 0,999, dla którego $t_{4\alpha} = 12{,}9$, wtedy błąd maksymalny
$12{,}9 \cdot 0{,}0022$ mm = 0,03 mm i trzykrotnie przewyższa błąd systematyczny, który dla mikromie
nosi 0,01 mm.

2.6. ZASTOSOWANIE METODY WYRÓWNAWCZEJ GAUSSA DO ANALIZY WYNIKÓW POMIARU WIELKOŚCI LINIOWO ZALEŻNYCH

Załóżmy, że przedmiotem pomiaru były dwie wielkości: x, y zależne liniowo, a
spełniające zależność funkcyjną

$$y = ax + b. \qquad (2$$

Obrazem graficznym tej zależności jest linia prosta o nachyleniu a przecinająca oś r
nych y w punkcie b. Wykonaliśmy n pomiarów otrzymując n par wyników x_i, y_i.
łóżmy, że znamy nachylenie $\bar{a}$ oraz wartość $\bar{b}$. Wtedy z równania (2.25) obliczyć moż
wartość $y(x)$:

$$y(x_i) = \bar{a}x_i + \bar{b}, \qquad (2$$

która nie jest dokładnie równa wartości y_i uzyskanej w wyniku pomiaru. Rozbież
wartości $y(x_i)$ z równania (2.26) oraz wyniku pomiaru y_i wynika z błędu pomiaro
i można ją przedstawić wzorem:

$$y(x_i) - y_i = \bar{a}x_i + \bar{b} - y_i.$$

W dalszych rozważaniach wyprowadzimy związek pomiędzy wynikami pomiar
i wartościami $\bar{a}$ i $\bar{b}$ dobranymi w ten sposób, by spełniały postulat Gaussa tzn., by sum
kwadratów odchyleń $y(x_i) - y_i$ poszczególnych pomiarów y_i od wartości obliczon
$y(x_i)$ rozciągnięta na wszystkie pomiary, posiadała wartość minimalną

$$\sum_{i=1}^{n} [y(x_i) - y_i]^2 = \text{minimum}.$$

Podstawiając na $y(x_i)$ wartość z równania (2.26) otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i)^2 = \text{minimum}.$$

Warunek powyższy będzie spełniony, jeżeli pochodne cząstkowe liczone względem $\bar{a}$ i $\bar{b}$ będą równocześnie zerem, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} 2x_i(\bar{a}x_i+\bar{b}-y_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} 2(\bar{a}x_i+\bar{b}-y_i) = 0.$$

Jest to układ dwóch równań, z których obliczyć możemy $\bar{a}$ i $\bar{b}$ otrzymując

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \tag{2.27}$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{2.28}$$

Można udowodnić, że błędy — odchylenia standardowe wartości średnich wielkości $\bar{a}$ i $\bar{b}$ wyrażają się wzorami:

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2} \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}, \tag{2.29}$$

$$S_{\bar{b}} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}, \tag{2.30}$$

w których

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{a} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{b} \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{2.31}$$

We wzorach (2.27) ... (2.31) występują różnice dwu dużych, często prawie jednakowych liczb. Chcąc w takim przypadku uzyskać poprawny wynik, wszystkie rachunki wykonać musimy z bardzo dużą dokładnością, co jest bardzo uciążliwe. Wzory powyższe można znacznie uprościć stosując następujące podstawienia:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{2.32}$$

$${}^{x}\varepsilon_i = x_i - \bar{x}, \qquad {}^{y}\varepsilon_i = y_i - \bar{y}, \qquad \varepsilon_i = {}^{y}\varepsilon_i - \bar{a} \cdot {}^{x}\varepsilon_i = y_i - \bar{a} \cdot {}^{x}\varepsilon_i - \bar{y}, \tag{2.33}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{a} \sum_{i=1}^{n} {}^{x}\varepsilon_i y_i - n\bar{y}^2. \tag{2.34}$$

Wielkości $\bar{a}$, $\bar{b}$, $S_{\bar{a}}$ i $S_{\bar{b}}$ wyrażają się wtedy następującymi wzorami:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \tag{2.35}$$

$$\bar{b} = \bar{y} - \bar{a}\bar{x}, \tag{2.36}$$

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{-1}}, \tag{2.37}$$

$$S_{\bar{b}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 + \bar{x}^2 \cdot S_{\bar{a}}^2}. \tag{2.38}$$

Powyższą metodę obliczania nachylenia $\bar{a}$ i rzędnej $\bar{b}$ przecięcia prostej z osią y oraz odchyleń standardowych $S_{\bar{a}}$ i $S_{\bar{b}}$, nazywamy metodą wyrównawczą lub metodą Gaussa najmniejszych kwadratów. Prostą o nachyleniu $\bar{a}$ przecinającą oś y w punkcie $\bar{b}$ nazywać będziemy „linią teoretyczną". Linia teoretyczna, czyli prosta o teoretycznie obliczonych parametrach $\bar{a}$ i $\bar{b}$, jest rezultatem najlepszego uśrednienia wyników. Ważne jest to, że parametrów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nie musimy określać z wykresu, z czym mogą być związane duże błędy, lecz obliczamy je wprost z rezultatów doświadczenia. Wykonując wykres, możemy najpierw nanieść linię teoretyczną, a dopiero później same punkty pomiarowe. Wada metody polega na tym, że w wyniku obliczeń otrzymujemy wartości $\bar{a}$ i $\bar{b}$ również wtedy, gdy mierzone wielkości nie są liniowo zależne. Celem wyeliminowania takich przypadków, musimy zbadać zgodność punktów z linią teoretyczną nanosząc na wykres nie tylko punkty lecz również ich błąd. Znaczne odstępstwa ponad 30% punktów od linii teoretycznej pozwalają przypuszczać, że mierzone wielkości nie są liniowo zależne.

Metodę wyrównawczą możemy zastosować nie tylko do wielkości zależnych liniowo, lecz również do każdej pary wielkości dających się sprowadzić do zależności liniowej przez zastosowanie odpowiednich podstawień matematycznych. Na przykład w ruchu jednostajnie przyspieszonym droga i czas spełniają związek $s = \frac{1}{2}at^2$, w którym liniowo zależne są wielkości s i t^2. Stąd do zależności powyższej zastosować możemy metodę wyrównawczą przyjmując podstawienia $y = s$ oraz $x = t^2$.

Przykład. Wyznaczono zależność wydłużenia x sprężyny od obciążającej ją masy m. Te dwie wielkości łączy związek (por. wzór 7.26)

$$mg = kx.$$

Przyjmując $y = m$ równanie powyższe napiszemy w postaci:

$$y = \frac{k}{g}x.$$

Jest to równanie prostej o nachyleniu $\bar{a} = k/g$, dla której $\bar{b} = 0$. W oparciu o wyniki pomiaru zebrane w tabeli 2.5 obliczamy nachylenie $\bar{a}$, a także wartość $\bar{b}$, która w omawianym przypadku powinna być ze-

rem. Wykonując obliczenia numeryczne najwygodniej obliczyć po kolei wszystkie wyrażenia wchodzące do równań (2.32) ... (2.34). Tabela 2.5 stanowi przykład najwygodniejszego sposobu zapisu wielkości niezbędnych do dalszych obliczeń. Wykonując podstawienia do wzorów (2.32) do (2.38) otrzymamy następujące wyniki:

$$n = 10, \quad \bar{x} = 13{,}4 \text{ cm}, \quad \bar{y} = 0{,}90 \text{ kg}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{\varepsilon_i} y_i = 47{,}56 \text{ kg} \cdot \text{cm},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\varepsilon_i}^2 = 712{,}5 \text{ cm}^2, \quad \varepsilon_i^2 = 0{,}0043 \text{ kg}^2, \quad \bar{a} = 0{,}0668 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$\bar{b} = 0{,}006 \text{ kg}, \quad S_{\bar{a}} = 0{,}0003 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1}, \quad S_{\bar{b}} = 0{,}008 \text{ kg}.$$

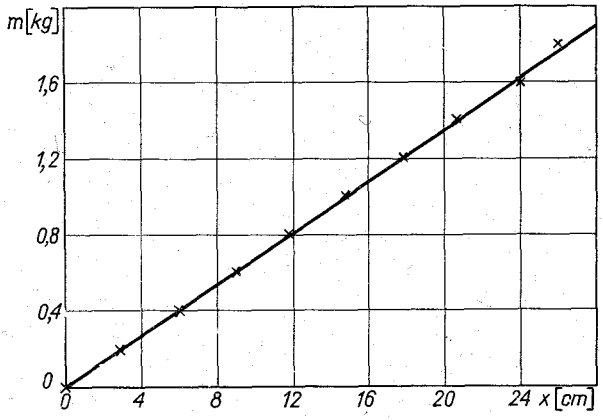
Stąd ostatecznie

$$\bar{a} = (66{,}8 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-1}, \quad (S_{\bar{a}}/\bar{a})100 = 0{,}45‰,$$
$$\bar{b} = (6 \pm 8) \cdot 10^{-3} \text{ kg}, \quad (S_{\bar{b}}/b)100 = 140\%.$$

Tabela 2.5

Przykład opracowania serii wyników pomiarów wielkości zależnych liniowo

y_i (kg)	x_i (cm)	x_{ε_i}	$x_{\varepsilon_i} y_i$	$x_{\varepsilon_i}^2$	$\bar{a} x_{\varepsilon_i}$	y_{ε_i}	ε_i	ε_i^2
0,0	0,0	−13,4	0,00	179,6	−0,90	−0,90	0,00	0,0000
0,2	2,9	−10,5	−2,10	110,3	−0,70	−0,70	0,00	0,0000
0,4	6,0	−7,4	−2,96	54,8	−0,49	−0,50	−0,01	0,0001
0,6	9,0	−4,4	−2,64	19,4	−0,29	−0,30	−0,01	0,0001
0,8	11,8	−1,6	−1,28	2,6	−0,11	−0,10	−0,01	0,0001
1,0	14,8	+1,4	+1,40	2,0	+0,09	+0,10	+0,01	0,0001
1,2	17,8	+4,4	+5,28	19,4	+0,29	+0,30	+0,01	0,0001
1,4	20,7	+7,3	+10,22	53,3	+0,49	+0,50	+0,01	0,0001
1,6	24,0	+10,6	+16,96	112,3	+0,71	+0,70	+0,01	0,0001
1,8	26,0	+12,6	+22,68	158,8	+0,84	+0,90	+0,06	0,0036
9,0	133,6		+47,56	712,5				0,0043



2.5 Graficzny obraz wyników tabeli 2.5.

Wielkość $\bar{b}$ jest bardzo mała względem najmniejszej masy $m_1 = 0{,}2$ kg; stanowi zaledwi 3% m_1 ($\bar{b}/m_1 \cdot 100 = 3\%$) i z dobrym przybliżeniem przyjąć możemy $\bar{b} = 0$. Błąd $S_{\bar{b}}$ jest bardzo duż względem $\bar{b}$, lecz jest również bardzo mały względem m_1; określa on możliwe odchylenie linii od pun ktu $x = 0$, $y = 0$, a więc wielkość błędu uzyskanego z obliczeń linii. Na rysunku 2.5 wykreślono lini teoretyczną i zaznaczono punkty pomiarowe.

2.7. OBLICZANIE BŁĘDU W PRZYPADKU, GDY BŁĘDY SYSTEMATYCZNE SĄ DUŻE W PORÓWNANIU Z BŁĘDEM PRZYPADKOWYM

Jak już zaznaczono, metodę Gaussa stosować możemy tylko w przypadku, gdy błąd systematyczny jest mały w porównaniu z błędem przypadkowym. Podobne zastrzeżenie dotyczy również metody Studenta–Fishera. Jako skrajny przypadek, w którym będziemy stosować metodę Gaussa, przyjmiemy taki, w którym błąd systematyczny Δx jest równy odchyleniu standardowemu S_x. Jeżeli $\Delta x \geqslant S_x$ lub pomiar wykonujemy jednokrotnie, wtedy musimy brać pod uwagę wyłącznie wpływ błędu systematycznego.

Nie ma możliwości tak ścisłego obliczania błędów systematycznych jak to czynimy w przypadku błędów przypadkowych. Dla wielkości prostych szacujemy błąd na podstawie dokładności lub klasy przyrządów, staranności wykonania pomiarów itp. W przypadku wielkości złożonej wpływ błędów wielkości prostych możemy uwzględnić obliczając tzw. błąd maksymalny, tzn. określając jaki maksymalny wpływ na wynik końcowy posiadają błędy systematyczne poszczególnych wielkości prostych.

Załóżmy, że wielkość $z = f(x_1, x_2, \ldots)$ jest funkcją l zmiennych. Znamy wartości $x_1, x_2, \ldots$ oraz ich błędy $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ Rozwijając funkcję z w szereg Taylora i zaniedbując wyrazy wyższych rzędów otrzymamy

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots) = f(x_1, x_2, \ldots)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+ \ldots$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\Delta z = f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots)-f(x_1, x_2, \ldots)$$

otrzymamy*:

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k. \tag{2.39}$$

Zakładając przypadek najniekorzystniejszy, w którym wszystkie wyrazy wnoszą przyczynki tego samego znaku otrzymamy

$$\boxed{\Delta z = \sum_{k=1}^{l}\left|\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_k}\Delta x_k\right|.} \tag{2.40}$$

Wzór powyższy upraszcza się znacznie w przypadku, gdy funkcję f przedstawić można w postaci iloczynu:

$$z = A\prod_{i=1}^{l} x_i^{a_i},$$

* Wyrażenie (2.39) możemy interpretować jako różniczkę zupełną wielkości z.

wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = A a_i x_i^{a_i - 1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{l} x_k^{a_k} = \frac{a_i}{x_i} z.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (2.40) otrzymamy

$$\boxed{\frac{\Delta z}{z} = \sum_{k=1}^{l} \left| \frac{a_k}{x_k} \Delta x_k \right|.} \tag{2.41}$$

Przykład. W doświadczeniu mierzono współczynnik rozszerzalności liniowej ciał stałych stosując wzór końcowy

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{\delta l}{\tau_2 - \tau_1}. \tag{a}$$

Długość pręta zmierzona w temperaturze $\tau_1 = (18 \pm 1)^\circ\mathrm{C}$ wynosiła $l_0 = (107{,}2 \pm 0{,}1)$ cm. Pręt podgrzano do temperatury $\tau_2 = (98 \pm 1)^\circ\mathrm{C}$ i stwierdzono, że jego długość wzrosła o $\delta l = (0{,}96 \pm 0{,}01)$ mm. Obliczony ze wzoru (a) współczynnik rozszerzalności liniowej wynosił $\alpha = 11{,}207 \cdot 10^{-6}\mathrm{K}^{-1}$. Celem obliczenia błędu maksymalnego do wzoru (a) zastosowano formułę (2.40) otrzymując przy założeniu $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 = \Delta\tau = 1^\circ\mathrm{C}$ następujący wzór:

$$|\Delta\alpha| = \left| \frac{1}{l_0(\tau_2 - \tau_1)} \right| \left[\left| \frac{\delta l}{l_0} \Delta l_0 \right| + |\Delta \delta l| + 2 \left| \frac{\delta l}{\tau_2 - \tau_1} \Delta\tau \right| \right].$$

Podstawiając wielkości wyznaczone doświadczalnie otrzymuje się

$$|\Delta\alpha| = \frac{1}{80 \cdot 1{,}072} \left(\frac{0{,}96}{1{,}072} 10^{-3} + 0{,}01 + 2 \frac{0{,}96}{80} \right) \mathrm{K}^{-1}$$

$$|\Delta\alpha| = 0{,}424 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1} \simeq 0{,}43 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}.$$

Wynik końcowy napiszemy w postaci:

$$\alpha = (11{,}21 \pm 0{,}43) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}; \quad (\Delta\alpha/\alpha)100 = 3{,}9\%.$$

2.8. ZAOKRĄGLANIE I PORÓWNYWANIE WYNIKÓW

Załóżmy, że dla pewnej serii pomiarów obliczono bardzo dokładnie wartość średnią otrzymując $\bar{h} = 4{,}315233$ mm, oraz odchylenie standardowe średniej arytmetycznej: $S_{\bar{h}} = 0{,}01514$ mm. Wynik końcowy zapisano w postaci

$$h = (4{,}315233 \pm 0{,}01514)\ \mathrm{mm} \qquad \text{zły wynik.}$$

Mimo iż obliczenia wykonano bardzo dokładnie, wynik ten nie jest poprawny. Nigdy wartości mierzonej ani błędu nie znamy dokładnie. Celem rachunku błędów jest ustalenie przedziału, w którym z określonym prawdopodobieństwem zawarta jest wartość rzeczywista. Z uwagi na przedział ufności, który dla odchylenia standardowego wynosi 68%, jak i z uwagi na sam charakter prawdopodobieństwa, sens fizyczny posiada tylko pierwsze miejscę znaczące wyniku $S_{\bar{h}}$, a więc w naszym przypadku jedynka (0,01514). W pewnych przypadkach podaje się jeszcze również i drugie miejsce znaczące; natomiast miejsce trzecie i następne są cyframi, które wynikły z rachunku i nie posiadają żadnego sensu fizycznego. Zatem każdy błąd należy zaokrąglić do jednego, lub co najwyżej do dwóch miejsc znaczących.

W pracowni, przy zaokrąglaniu wyników, stosować będziemy następujące zasady: błąd obliczamy do drugiego miejsca znaczącego, a następnie zaokrąglamy (zawsze w górę) do pierwszego miejsca w przypadku, gdy na skutek zaokrąglenia wynik nie zwiększy się więcej niż o 10% (1/10 błędu). Jeżeli w wyniku zaokrąglenia błąd zwiększyłby się więcej niż o 10%, podajemy błąd z dokładnością do dwóch miejsc znaczących. W żadnym przypadku nie podajemy trzeciego miejsca. Błędów nie można zaokrąglać w dół, gdyż w żadnym przypadku nie można obniżać wyniku uzyskanego z obliczeń. Zatem poprawnie zaokrąglony wynik w cytowanym przykładzie wyniesie $S_{\bar{h}} = 0{,}016$ mm.

Wynik pomiaru obliczamy o jedno miejsce dalej niż miejsce dziesiętne, na którym zaokrąglono błąd, po czym zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego wyznaczono błąd. Dalszych miejsc pisać nie wolno, ponieważ nie posiadają one żadnego sensu fizycznego. Wynik zaokrąglamy według normalnych reguł, to znaczy cyfry od 1 do 4 zaokrąglamy w dół, cyfry 6 do 9 w górę, a cyfrę 5 w górę w przypadku, gdy poprzedza ją cyfra nieparzysta, natomiast w dół, gdy poprzedza ją cyfra parzysta. Cytowany na początku paragrafu wynik, po zaokrągleniu ma postać

$$\bar{h} = (4{,}315 \pm 0{,}016)\text{mm} \quad \text{poprawny wynik.}$$

W przypadku, gdy z obliczeń otrzymuje się wynik składający się z jednej cyfry znaczącej i zer, np. $\bar{d} = 0{,}5000$ mA, a odchylenie standardowe wynosi $S_{\bar{d}} = 0{,}0002$ mA, to wynik pomiaru należy zapisać: $d = (0{,}5000 \pm 0{,}0002)$ mA. Pominięcie w wyniku zer po przecinku, znaczących w tym wypadku, byłoby błędem. Zaleca się wyniki końcowe pisać w takiej potędze, by błędem obarczone były miejsca dziesiętne i setne. A oto kilka przykładów zaokrąglania wyników.

Przed zaokrągleniem	Po zaokrągleniu
$m = (136{,}521 \pm 0{,}115)$ g,	$m = (136{,}52 \pm 0{,}12)$ g,
$B = (0{,}036251 \pm 0{,}000111)$ T,	$B = (36{,}25 \pm 0{,}12)$ mT,
$C = (65{,}273 \pm 0{,}321) \cdot 10^{-3}$ μF,	$C = (65{,}27 \pm 0{,}33)$ nF,
$I = (251{,}67 \pm 0{,}79)$ μA,	$I = (251{,}7 \pm 0{,}8)$ μA,
$V = (365{,}135 \pm 0{,}089)$ cm^3,	$V = (365{,}14 \pm 0{,}09)$ cm^3,
$v = (96{,}3659 \pm 0{,}0185) \cdot 10^5$ m · s^{-1},	$v = (963{,}6 \pm 0{,}2) \cdot 10^4$ m · s^{-1},
$v = (96{,}3659 \pm 0{,}0171) \cdot 10^5$ m · s^{-1},	$v = (963{,}66 \pm 0{,}18) \cdot 10^4$ m · s^{-1}.

Często zachodzi potrzeba porównania dwóch wielkości wyznaczonych doświadczalnie różnymi metodami lub porównania wielkości zmierzonej z wartością podaną w tablicach. Zazwyczaj wielkości uzyskane w różnych pomiarach lub różnymi metodami nie są dokładnie równe i wynoszą odpowiednio

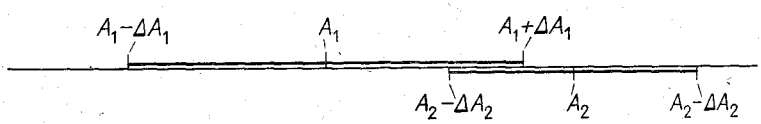
$$A_1 \pm \Delta A_1 \quad \text{oraz} \quad A_2 \pm \Delta A_2,$$

gdzie ΔA_1 i ΔA_2 oznaczają błędy maksymalne. W przypadku, gdy znamy odchylenia standardowe $S_{\bar{A}_1}$ i $S_{\bar{A}_2}$, przyjmujemy błędy maksymalne w sensie $\Delta A_2 = 3S_{\bar{A}_2}$, $\Delta A_1 = 3S_{\bar{A}_1}$. Z własności błędu maksymalnego wynika, że rzeczywista wartość A_0 powinna mieścić się równocześnie w następujących dwóch przedziałach:

$$\langle (A_1 - \Delta A_1),\ (A_1 + \Delta A_1) \rangle,$$
$$\langle (A_2 - \Delta A_2),\ (A_2 + \Delta A_2) \rangle.$$

Wyniki są zgodne wtedy, gdy obydwa przedziały będą się częściowo przekrywały lub gdy będą przynajmniej styczne, co graficznie przedstawiono na rys. 2.6. Warunek przekrywania lub styczności przedziałów jest równoważny następującej nierówności:

$$|A_1 - A_2| \leqslant |\Delta A_1| + |\Delta A_2|. \tag{2.42}$$



2.6. Przekrywanie się przedziałów błędów dla dwóch niezależnych pomiarów tej samej wielkości prostej

Jeżeli wynik A_1 jest wynikiem doświadczenia, a wynik A_2 jest wartością z tablic, to najczęściej błąd ΔA_2 jest znacznie mniejszy od ΔA_1 i możemy w przybliżeniu założyć $\Delta A_2 \simeq 0$. Wtedy ostatnie równanie przyjmie postać

$$|A_1 - A_2| \leqslant |\Delta A_1|, \quad \text{przy} \quad \Delta A_1 \gg \Delta A_2. \tag{2.42a}$$

Jeżeli jest spełniona nierówność (2.42) lub (2.42a) mówimy, że porównywane wyniki są zgodne.

2.9. GRAFICZNA ANALIZA WYNIKÓW

Graficzną metodę przedstawiania wyników stosujemy wtedy, gdy mierzymy równocześnie dwie wielkości x i y współzależne od siebie. Wykonując pomiary, dla zadanych z góry wartości jednej z wielkości np. x mierzymy wielkość drugą. Wykres jest graficznym obrazem badanej zależności.

Metodą graficzną posługujemy się w następujących przypadkach:

a. Gdy chcemy udowodnić, że badane wielkości spełniają założony uprzednio związek funkcyjny. Na przykład celem sprawdzenia czy ciało porusza się ruchem jednostajnym, wystarczy zbadać i wykreślić zależność drogi od czasu. Te dwie wielkości spełniają związek $s = vt$. Jeżeli obrazem graficznym jest linia prosta, to jest spełnione równanie liniowe, a tym samym ruch jest jednostajny.

b. Gdy chcemy dowiedzieć się jaki typ zależności funkcyjnej spełniają mierzone wielkości. Jeżeli na przykład wykres przedstawia w liniowym układzie linię prostą, to mamy do czynienia z zależnością liniową typu $y = ax$, jeżeli parabolę — to występuje zależność kwadratowa typu $y = ax^2$, itp.

c. Gdy badana zależność nie da się przedstawić za pomocą prostych związków matematycznych. Jako przykład możemy podać zależność gęstości wody od temperatury, pętlę histerezy itp.

Wykresy wykonujemy na tzw. papierze funkcyjnym. Najczęściej na papierze takim naniesiono dwie rodziny prostych równoległych. Oznaczymy odległości kolejnych linii od początku układu przez x' oraz y'.

Jeżeli podziałki na obydwu osiach są liniowe tzn. $x' = kx$ oraz $y' = ly$, gdzie k i l są wielkościami stałymi, a odległość między liniami wynosi 1 mm, papier nazywamy milimetrowym. Papier milimetrowy stosujemy do wykreślania wielkości zależnych liniowo $y = ax+b$.

W tzw. papierze logarytmicznym odległości kolejnych linii wyrażają się wzorami:

$$x' = k\log x, \quad y' = l\log y.$$

Na papierze logarytmicznym wykreślamy zależności funkcyjne typu

$$y = ax^b,$$

które po zlogarytmowaniu dają zależność

$$\log y = \log a + b\log x. \tag{2.43}$$

Wielkości związane zależnością funkcyjną $y = ab^x$, która po logarytmowaniu daje

$$\log y = \log a + x\log b, \tag{2.44}$$

wykreślamy na papierze półlogarytmicznym, na którym na osi x stosuje się podziałkę liniową $x' = kx$, a na osi y logarytmiczną $y' = l\log y$.

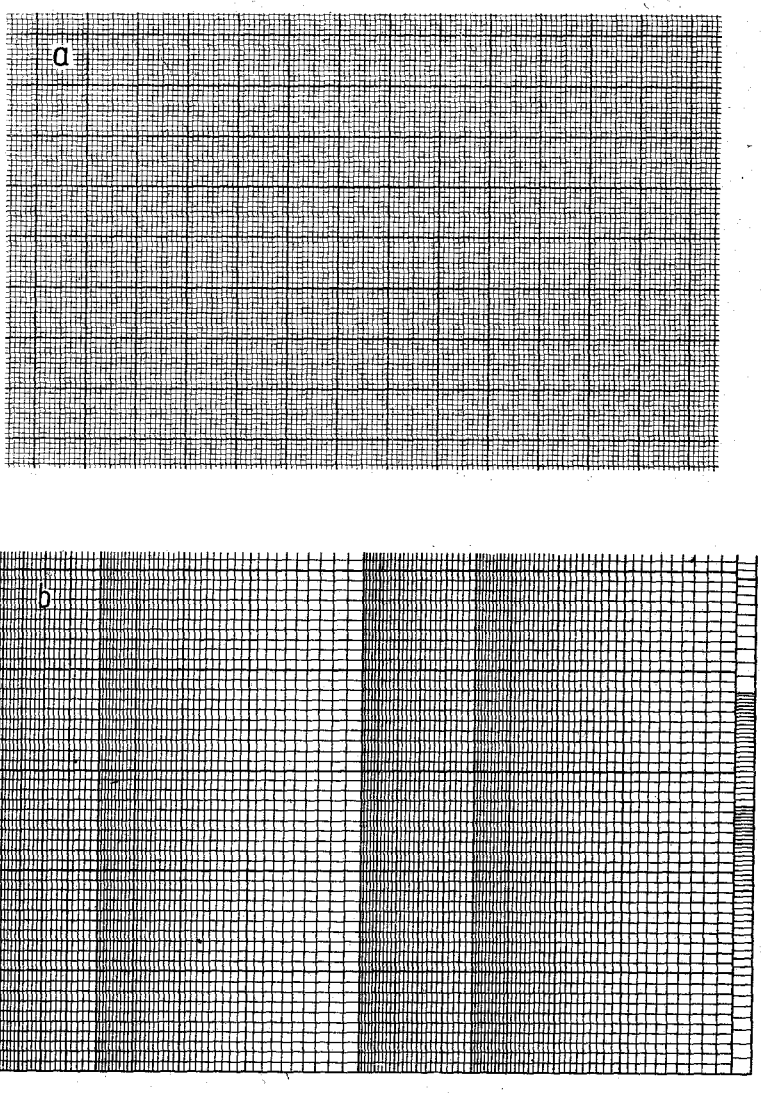
W niektórych przypadkach stosujemy jeszcze inne rodzaje papierów funkcyjnych np. o współrzędnych biegunowych itp. Rysunek 2.7 przedstawia najważniejsze typy papierów funkcyjnych.

Sporządzając wykres dobieramy taki papier funkcyjny by wykreślana zależność była zbliżona do prostej. Niektóre nieomawiane dotąd typy zależności funkcyjnych przedstawić możemy w postaci prostej, przez zastosowanie odpowiednich podstawień. I tak parabola jest linią prostą w układzie $y(x^2)$, hiperbola ($y = k/x$) w układzie $y(1/x)$ itp.

Wykreślanie. Po dokonaniu wyboru papieru funkcyjnego dobieramy skalę na osiach przestrzegając przy tym wymienionych pewnych zasad. Błąd pomiaru nie powinien przekraczać 5 mm, lecz powinien być większy od grubości linii. Przyjęta skala powinna dawać możliwość łatwego odczytu współrzędnych dowolnego punktu. Warunek powyższy jest spełniony, jeżeli jednej działce skali odpowiada $1 \cdot 10^n$, $2 \cdot 10^n$, $3 \cdot 10^n$ lub $5 \cdot 10^n$ jednostek. Nachylenie krzywej w najbardziej interesujących nas punktach powinno być zbliżone do jedynki. Wykres powinien zajmować całą powierzchnię arkusza. Podziałki nie muszą rozpoczynać się od zera, a skrajne wartości zmiennej powinny leżeć w pobliżu początku i końca arkusza.

Po dobraniu skali i naniesieniu osi współrzędnych, nanosimy punkty pomiarowe. Zaznaczamy je krzyżykami, kółkami lub innymi figurami geometrycznymi. Kropek nie należy stosować, gdyż są niewidoczne. Położenie punktu pomiarowego jest określone punktem przecięcia linii tworzących krzyżyk, a w przypadku stosowania figur geometrycznych znajduje się w ich środku i może dodatkowo być oznaczone punktem. W przypadku, gdy na jednym arkuszu nanosimy kilka krzywych, punkty należące do każdej krzywej oznaczamy w inny sposób.

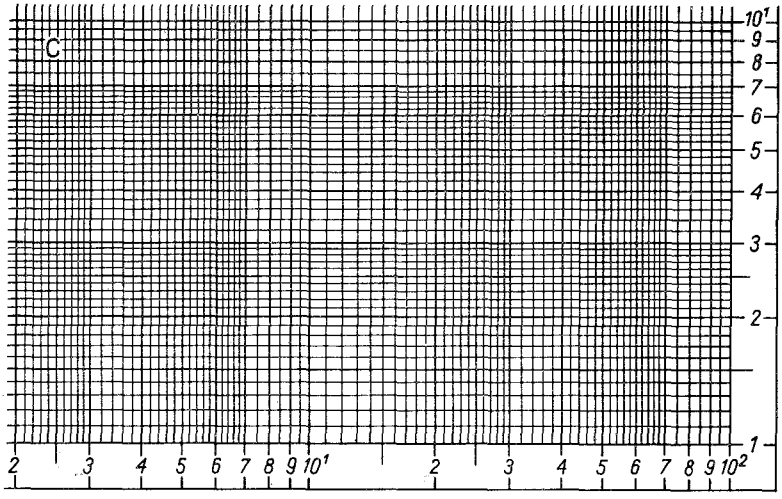
Trzecią czynnością jest zaznaczenie błędów. Uwzględniając błąd odczytu, współrzędne punktu pomiarowego można zapisać w postaci: $I \pm \Delta I$, $U \pm \Delta U$, gdzie znak Δ oznacza błąd maksymalny lub odchylenie standardowe. Dla punktu zaznaczonego na rys. 2.8a oznacza to, że rzeczywista wartość prądu mieści się w przedziale od $I+\Delta I$

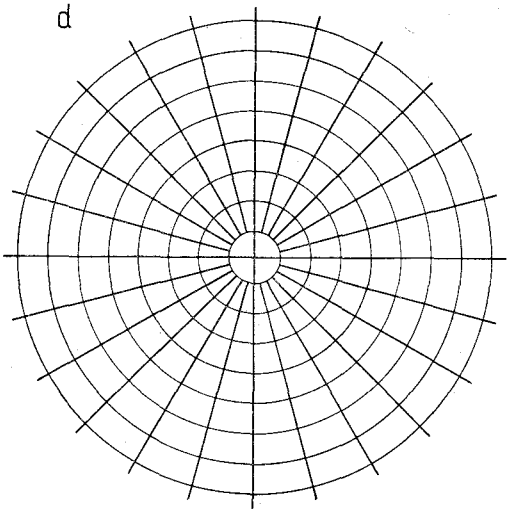


2.7.1. Różne rodzaje papieru funkcyjnego: milimetrowy (a), półlogarytmiczny (b).

do $I-\Delta I$, a napięcie od $U+\Delta U$ do $U-\Delta U$. Zaznaczenie tych przedziałów na wykresie jest równoważne z otoczeniem punktu pomiarowego prostokątem o bokach $2\Delta I$ oraz $2\Delta U$ zwanym prostokątem błędu. Prostokąty błędów należy nanieść dla kilku punktów. Po wykreśleniu krzywej należy nanieść prostokąty błędów również wokół punktów znacznie odbiegających od krzywej.

Ostatnią czynnością jest wykreślenie samej krzywej. Krzywą należy wykreślić z pomocą krzywika (najwygodniejsze są przezroczyste krzywiki oraz przezroczyste liniały). Krzywa nie powinna przebiegać dokładnie przez wszystkie punkty pomiarowe, ale musi przechodzić przez ich prostokąty błędów maksymalnych lub przez 70% prostokątów określonych przez odchylenie standardowe. Liczba punktów znajdujących się po pra-





2.7.2. Różne rodzaje papieru funkcyjnego: logarytmiczny (c), biegunowy (d).

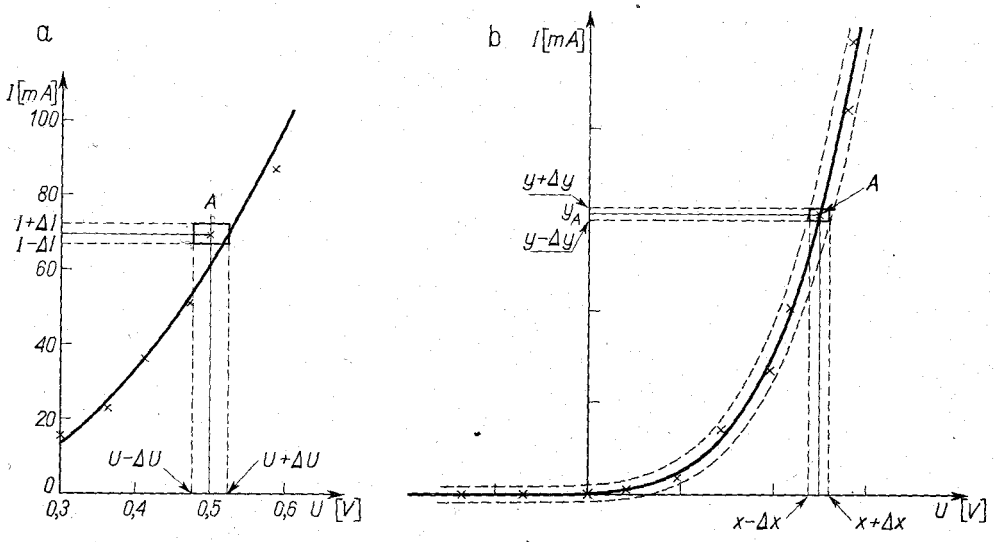
wej i po lewej stronie krzywej powinna być w miarę możności równa na każdym jej odcinku. Ze względu na ograniczoną liczbę punktów ostatni postulat nie da się spełnić dokładnie.

Dla wszystkich zależności liniowych, parametry prostej: punkt b przecięcia z osią y oraz nachylenie a, można obliczyć wprost z danych pomiarowych w sposób opisany w § 2.6. Mając te dane, przy sporządzaniu wykresu nanosimy linię teoretyczną o nachyleniu a przecinającą oś y w punkcie b, a dopiero następnie nanosimy punkty pomiarowe.

Może się zdarzyć, że któryś z punktów leży w znacznej odległości od krzywej. Gdy pomiary dotyczą zjawiska znanego, należy go pominąć uznając że jest on obarczony błędem grubym. Jeżeli pomiary dotyczą zjawiska nieznanego, to należy je powtórzyć

i wykonać dodatkowe pomiary w bezpośrednim sąsiedztwie danego punktu, by przekonać się, czy punkt ten jest rzeczywiście obarczony błędem grubym, czy też przebieg krzywej jest inny.

Odczytywanie wartości z wykresu i wyznaczenie nachylenia. Maksymalny błąd jakim obarczony jest dowolny punkt leżący na krzywej nie przekracza błędu jakim obarczone były punkty pomiarowe. Zatem doświadczalną krzywą otoczyć można krzywymi pomocniczymi oddalonymi od niej o wartość błędu (rys. 2.8b). Skoro chcemy odczytać wartość odciętej x_A dla założonej wartości rzędnej y_A, to zakładamy, że leżący na krzywej punkt A, którego położenie wyznacza rzędna y_A, otoczony jest takim samym prostokątem błędu jak każdy inny punkt pomiarowy. Zatem interesująca nas rzędna y_A obarczona jest błędem Δy, a odczytana dla punktu A odcięta x jest obarczona błędem Δx. Jeżeli na wykresie zaznaczono odchylenie standardowe, to również błędy Δx i Δy są odchyleniami standardowymi.



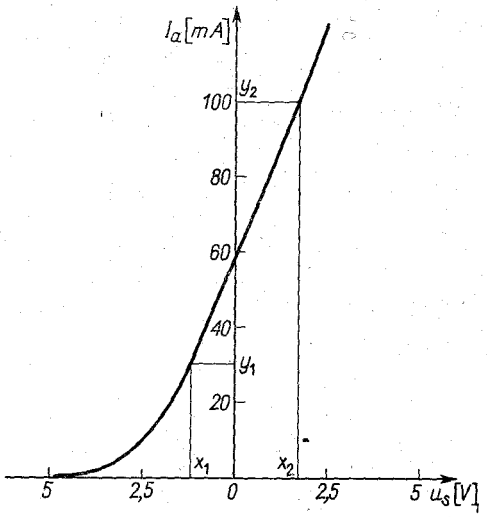
2.8. Zaznaczanie błędów na wykresach: nanoszenie prostokąta błędu (a), błąd krzywej (b).

Nachyleniem a krzywej nazywamy stosunek przyrostu rzędnej y_2-y_1 do odpowiadającego mu przyrostu odciętej x_2-x_1 (por. rys. 2.9),

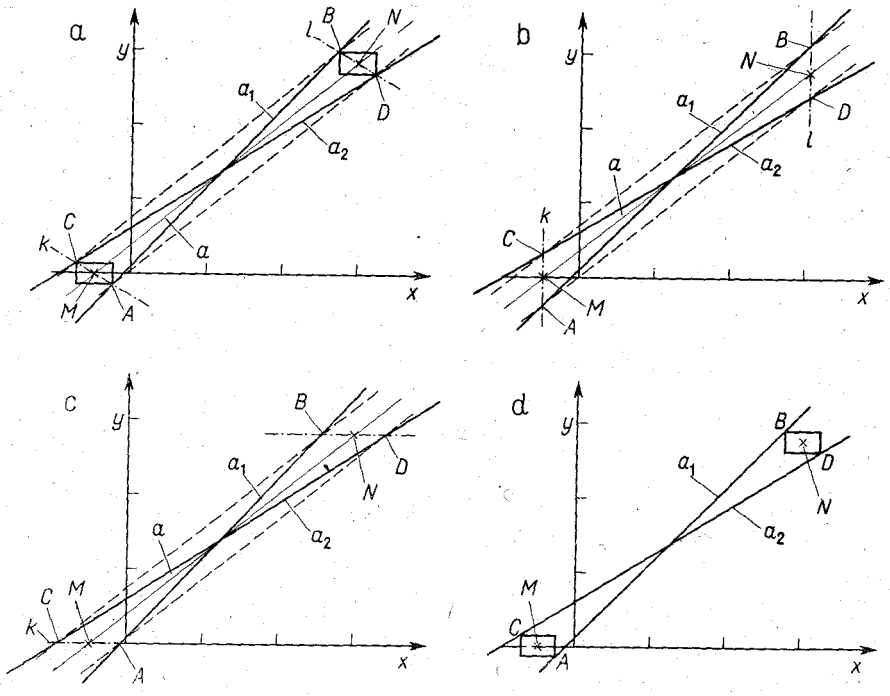
$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{2.45}$$

W granicznym przypadku, gdy x_2-x_1 dąży do zera nachylenie jest równe pochodnej y względem x. Należy jednak pamiętać, że nachylenie krzywej, mimo podobieństwa do tangensa kąta nachylenia, jest najczęściej wielkością mianowaną i nie można jej interpretować jako tangens kąta zmierzonego na wykresie. Nachylenie wyznaczyć można w sposób omówiony w § 2.6 lub mniej dokładnie z definicji, którą jest równanie (2.45), to znaczy jako stosunek przyrostu rzędnej do przyrostu odciętej. Na rysunku 2.10 pokazano pewną, doświadczalnie wyznaczoną zależność liniową oraz pomocnicze

krzywe błędu. Linia doświadczalna nie musi przebiegać dokładnie w taki sposób jak zaznaczono ją na rysunku, lecz musi przebiegać całkowicie przez obszar ograniczony krzywymi błędu. W obszarze tym można przeprowadzić nieskończenie wiele prostych o nachyleniu zawartym między dwiema skrajnymi wartościami a_1 i a_2. Przy określaniu wartości a_1 i a_2 wzajemna odległość punktów końcowych odcinka MN, dla którego



2.9. Zasada obliczania nachylenia krzywej.



2.10. Wybór punktów końcowych do obliczania nachylenia i błędu nachylenia.

wyznaczamy nachylenie, powinna być jak największa, czyli powinny one ograniczać prostoliniowy odcinek krzywej lub powinny być to końcowe punkty pomiarowe w przypadku zależności liniowej. Końcowe punkty A, B, C, D prostych o nachyleniach a_1 i a_2 powinny leżeć na dwóch prostych równoległych k, l przechodzących przez punkty M, N wybranych w jeden ze sposobów pokazanych na rysunkach 2.10a, 2.10b lub 2.10c.

Jako rzeczywiste nachylenie przyjmujemy średnią arytmetyczną

$$a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2). \tag{2.46}$$

Błąd maksymalny nachylenia jest równy połowie różnicy dwóch skrajnych wartości nachylenia

$$|\Delta a| = \frac{1}{2}|a_1 - a_2|. \tag{2.47}$$

2.10. PLANOWANIE POMIARÓW

W praktyce życia codziennego jak i w fizyce szkolnej często wykonujemy pomiary różnych wielkości fizycznych. Jednak z naukowego punktu widzenia pomiary te są bezwartościowe, ponieważ nie zawierają oceny dokładności pomiaru. W pracowni fizycznej musimy nie tylko oceniać dokładności wykonywanych pomiarów, lecz również w taki sposób planować ich wykonanie, by osiągnąć wynik optymalny, czyli obarczony najmniejszym błędem.

Ze względu na sposób planowania, pomiary podzielić możemy na następujące grupy: 1. Pomiary wielkości prostych. 2. Pomiary wielkości złożonych. 3. Pomiary wielkości liniowo zależnych. 4. Pomiary wielkości zależnych, nie związanych prostą zależnością funkcyjną. Omówimy kolejno sposób planowania pomiarów należących do poszczególnych grup.

1. W przypadku pomiaru wielkości prostej wystarczy zaplanować liczbę pomiarów. Podstawową przesłanką pozwalającą ustalić liczbę pomiarów jest stosunek błędu systematycznego do odchylenia standardowego.

Celem uzyskania najgrubszego oszacowania dotyczącego tylko przybliżonego rzędu wielkości, musimy określić błąd systematyczny i wykonać próbną serię 2–3 pomiarów. Jeżeli wyniki wszystkich pomiarów są identyczne, to błąd pomiaru jest określony wyłącznie błędem systematycznym i nie można do tego przypadku stosować teorii błędów przypadkowych, a zwiększanie liczby pomiarów jest niecelowe. Jeżeli poszczególne wyniki serii próbnej nie są identyczne, lecz różnice między nimi przekraczają 2-krotnie błąd systematyczny możemy przypuszczać, że błąd przypadkowy jest tego samego rzędu co błąd systematyczny. Wtedy nie ma sensu duża seria i ograniczamy się do kilku pomiarów, stosując przy obliczeniach metodę Studenta–Fishera dla poziomu ufności $0{,}68 \simeq 0{,}7$.

W przypadku, gdy różnice między wynikami poszczególnych pomiarów serii próbnej znacznie przekraczają błąd systematyczny, precyzję pomiarów możemy zwiększyć, zwiększając ich liczbę do wartości, dla której stosować możemy teorię Gaussa, a więc

dla poziomu ufności 0,7 wykonujemy $n \gg 6$ pomiarów, minimum 10 pomiarów (por. § 2.5) i dla tego przypadku obliczamy odchylenie standardowe.

W przypadku, gdy liczba pomiarów przekracza 3, ich wyniki ujmujemy w tabelę, której wzór stanowi tabela 2.2. W przypadku bardzo dużej liczby wykonanych pomiarów, zapisujemy tylko ich wyniki a następnie porządkujemy według rosnących wartości ujmując w tabelę, której wzorem jest tabela 2.1.

Wykonując dużą serię pomiarów wielkości prostej musimy sprawdzić, czy do tej serii stosować możemy teorię Gaussa. W tym celu obliczamy błąd przeciętny i sprawdzamy, czy spełniony jest związek (2.24). Jeżeli lewa strona równania (2.24) różni się od prawej więcej niż o 10 %, metody Gaussa nie możemy stosować.

2. Zagadnienia związane z planowaniem pomiarów wielkości złożonej rozpoczniemy od przypadku prostszego, w którym wielkość złożona jest iloczynem dowolnych potęg wielkości prostych. Jako podstawę analizy wpływu poszczególnych wielkości prostych na dokładność wielkości złożonej przyjmiemy wyrażenie na błąd maksymalny (2.41),

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left| a_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \right|. \tag{2.48}$$

Z wzoru powyższego wynika, że systematyczny błąd względny wielkości złożonej jest sumą iloczynów wykładników potęgowych i błędów względnych poszczególnych wielkości prostych. Zatem pomiary winniśmy planować w taki sposób, by błędy względne wnoszone przez poszczególne składniki sumy były tego samego rzędu. Musimy zwiększać precyzję pomiaru tych wielkości, które wnoszą największy błąd, czyli wielkości małych oraz tych, które posiadają największe wykładniki potęgowe.

P r z y k ł a d. Załóżmy, że przedmiotem pomiaru jest moduł Younga przez wydłużenie. Moduł oblicza się z wzoru

$$E = \frac{mal}{\pi r^2 \delta l}.$$

W wyniku pomiaru uzyskano: $m = (800 \pm 10)\,g$, $r = (0{,}11 \pm 0{,}01)$ mm, $l = (2000 \pm \pm 10)$ mm, $\delta l = (0{,}27 \pm 0{,}01)$ mm. Wzór (2.48) przyjmuje w tym przypadku postać

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta l}{l}\right| + 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta(\delta l)}{\delta l}\right|,$$

stąd

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = 0{,}013 + 0{,}005 + 0{,}18 + 0{,}04.$$

Drugi wiersz uzyskano po podstawieniu danych i wykonaniu obliczeń. Jak widać największy błąd 18% wnosi składnik trzeci. Zatem celem uzyskania większej dokładności należy w pierwszym rzędzie zwiększyć precyzję pomiaru wielkości wchodzącej do składnika trzeciego, czyli pierwsze dwa składniki w tym przypadku wnoszą bardzo mały udział do błędu $\frac{\Delta E}{E}$ i można ich wpływ zaniedbać.

Te same zasady obowiązują w przypadku odchylenia standardowego średniej arytmetycznej, lecz w tym przypadku, ze względu na postać wzoru (2.21), w którym występuje suma kwadratów składniki pierwszy i drugi odgrywają jeszcze mniejszą rolę,

natomiast dodatkowo wzrasta rola składnika 3, a więc wielkości małej występującej w drugiej potędze. Jeżeli założymy, że podane w przykładzie błędy byłyby odchyleniami standardowymi, wtedy względne odchylenie standardowe wyniku (por. wzór 2.22) wyrazi się wzorem:

$$\frac{S_{\bar{E}}}{E} = \sqrt{0{,}016 + 0{,}0025 + 3{,}2 + 0{,}16} \cdot 10^{-1}.$$

W tym przypadku pierwsze dwa składniki sumy można pominąć, również składnik czwarty jest praktycznie do zaniedbania wobec składnika trzeciego. Zatem i tu mała precyzja pomiaru r daje decydujący przyczynek błędu ostatecznego.

W przypadku ogólnym, gdy wielkość złożona nie sprowadza się do iloczynu potęg wielkości prostych w zasadzie obowiązują te same zasady planowania pomiarów i tu o przyczynku wnoszonym przez błąd poszczególnych wielkości prostych decyduje jej błąd względny. Możemy to udowodnić pisząc równanie (2.19) w postaci

$$S_{\bar{z}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \left(\frac{S_{\bar{x}_i}}{\bar{x}_i}\right)^2.$$

Pewne komplikacje wprowadza współczynnik zawierający pochodną cząstkową. W pracowni, celem ustalenia najwłaściwszego planu pomiarów, należy zawsze wykonać próbną serię pomiarów, ocenić ich błędy systematyczne i wykonać próbną analizę błędów celem ustalenia właściwej „taktyki" pomiaru poszczególnych wielkości prostych. Pomiary poszczególnych wielkości prostych wchodzących w skład wielkości złożonej planujemy tak samo jak w przypadku pomiaru wielkości prostych.

Na zakończenie zwrócimy jeszcze uwagę i na to, że skoro dla wielkości złożonej chcemy wyznaczyć odchylenie standardowe, a wpływ błędów niektórych wielkości na błąd wyniku końcowego można pominąć, tak jak to miało miejsce dla m i l w omawianym przykładzie modułu Younga, to dla tych wielkości nie musimy wyznaczać błędu średniego kwadratowego. Błąd średni kwadratowy $S_{\bar{x}_i}$ wystarczy wyznaczyć tylko dla tych wielkości prostych, które decydują o najwyższych dwóch rzędach wielkości błędu. Wynik końcowy i tak zawsze ograniczamy tylko do tych rzędów. Zatem w cytowanym przykładzie wystarczy powtarzać wielokrotnie pomiary r i δl i obliczyć $S_{\bar{r}}$ i $S_{\overline{\delta l}}$, natomiast na błędy wielkości m i l przyjąć można nawet błąd maksymalny.

3. Bardzo prosty jest przypadek pomiaru dwóch wielkości zależnych liniowo. Wtedy zazwyczaj wyznaczyć musimy parametry badanej zależności liniowej, a więc nachylenie i punkt przecięcia z osią y. Wielkości te określamy metodą najmniejszych kwadratów postępując w sposób omawiany w § 2.6. Chcąc dobrze przygotować dane do obliczeń wybieramy do pomiaru n (> 10) wartości zmiennej niezależnej dobranych w ten sposób, by równomiernie pokrywały cały przedział zmienności. Wykonujemy pomiar, a następnie sporządzamy orientacyjny wykres. W przypadku, gdy odchylenia punktów od przebiegu liniowego są nieznaczne, tzn. przynajmniej 70% prostokątów błędów leży na krzywej, możemy przyjąć, że wyniki są poprawne; jeżeli istnieją obawy co do poprawności wyników, pomiar powtarzamy. Wyniki ujmujemy w tabelę podobną do tab. 2.3 ułatwiającą wykonanie wszystkich obliczeń.

4. W pracowni spotykamy często przypadki pomiaru wielkości zależnych, nie spełniających związku liniowego. Celem uniknięcia konieczności stosowania papieru

o podziałkach nieliniowych, jak również, celem uproszczenia rachunków, zależności takie najczęściej sprowadzamy do związków liniowych, stosując odpowiednie podstawienia. Np. dla przypadku drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym $y = \frac{1}{2}at^2$ zależność sprowadzimy do związku liniowego podstawiając $x = t^2$, więc $y = \frac{1}{2}ax$. Sposób planowania pomiarów jest wtedy podobny jak w przypadku 3, a nieco tylko komplikują się obliczenia. Nim przystąpimy do sporządzenia wykresu próbnego, obliczyć musimy wartości t^2 i wykreślamy zależność $y(t^2) = y(x)$. W tabeli pomiarów rezerwujemy dodatkową kolumnę dla $t^2 = x$.

W przypadku pomiaru dwóch wielkości zależnych, lecz nie spełniających żadnej zależności funkcyjnej (pętla histerezy, krzywa rezonansu itp.) wykonujemy serię pomiarów oraz próbny wykres i sprawdzamy, czy punkty pomiarowe wyznaczają jednoznacznie przebieg badanej krzywej. Punkty powinny być zagęszczone w obszarach o dużej krzywiźnie oraz na odcinkach o dużym nachyleniu. W ostatecznej serii pomiarów planujemy takie wartości odciętej, by uzyskać właściwe zagęszczenie punktów. Jeżeli zachodzi konieczność odczytywania wartości z wykresów, wtedy przyjmujemy, że krzywa jest obarczona błędem systematycznym równym błędowi systematycznemu poszczególnych punktów pomiarowych.

2.11. LITERATURA

1. H. Hänsel, *Podstawy rachunku błędów*, Warszawa 1968.
2. A. Strzałkowski, A. Śliżyński, *Matematyczne metody opracowania wyników pomiarów*, Warszawa 1969.
3. J. W. Linnik, *Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowania obserwacji*, Warszawa 1962.
4. T. A. Agekian, *Osnowy teorii oszibok*, Moskwa 1968.
5. W. Pogorzelski, *Zarys rachunku prawdopodobieństwa i teorii błędów*, Warszawa 1948.

3. PROSTE PRZYRZĄDY DO POMIARU WIELKOŚCI MECHANICZNYCH I CIEPLNYCH

3.1. POMIARY DŁUGOŚCI I KĄTA

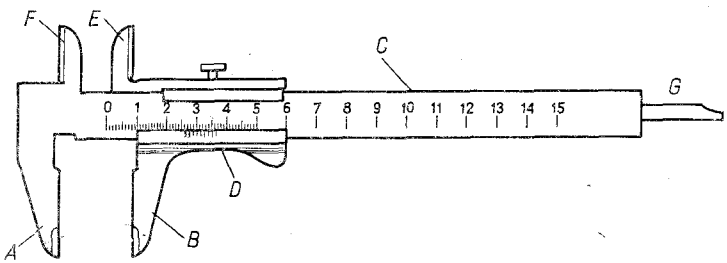
W zależności od stopnia wymaganej dokładności mierzenia do pomiaru długości stosujemy: przymiar lub miarkę milimetrową, suwmiarkę, mikromierz lub czujnik zegarowy. *Przymiarem* nazywamy miarkę długości 1 m o dokładności 1 mm, a *miarką milimetrową* liniał o takiej samej dokładności lecz krótszy. Miarki tego typu są dobrze znane z praktyki życia codziennego i nie wymagają specjalnego opisu.

Do pomiarów z dokładnością do 0,1 mm służą *suwmiarki* (rys. 3.1). Suwmiarka składa się ze sztaby C z podziałką milimetrową zakończonej szczęką A i suwaka D ze szczęką B. Na suwaku znajduje się dodatkowa skala zwana noniuszem. Noniusz posiada 10 kresek na długości 9 mm. Gdy szczęki A i B są zaciśnięte, zerowa kreska noniusza przedłuża zerową kreskę skali, a 10-ta kreska noniusza — 9-tą kreskę skali. Działki noniusza są o 0,1 mm krótsze od działek skali milimetrowej. Stąd po przesunięciu

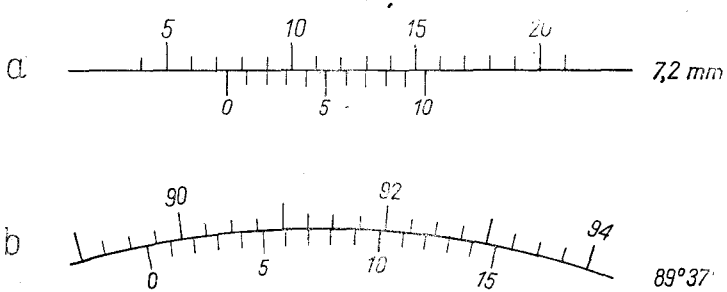
noniusza o 0,1 mm pierwsza kreska noniusza przedłuża jedną z kresek skali (w tym przypadku pierwszą), po przesunięciu o 0,2 mm druga kreska noniusza przedłuża inną kreskę skali (drugą) itd. Ogólnie ilość dziesiątych części milimetra jest równa numerowi działki noniusza przedłużającej jedną z kresek skali milimetrowej. Tak więc zerowa kreska noniusza wskazuje ilość całych milimetrów, a kreska noniusza przedłużająca jedną z kresek skali milimetrowej wskazuje ilość dziesiętnych milimetra (rys. 3.2a). Zasada noniusza bywa w różnych przyrządach stosowana do odczytywania z większą dokładnością. Dokładność ta w ogólnym przypadku wyraża się ułamkiem;

$$\text{dokładność} = \frac{\text{wartość najmniejszej podziałki skali głównej}}{\text{ilość działek noniusza}}. \qquad (3.1)$$

Na rys. 3.2b pokazano odczyt kąta z dokładnością do 1 minuty kątowej za pomocą skali, w której stopień podzielony jest na cztery części (15'), a noniusz posiada 15 działek. Szczęki *EF* w suwmiarce służą do pomiaru średnic otworów. Pręt G połączony jest z suwakiem i służy do pomiaru głębokości otworów.



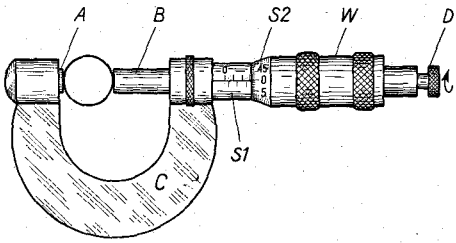
3.1. Suwmiarka.



3.2. Zasada noniusza.

Za pomocą *mikromierza* zwanego również śrubą mikrometryczną (rys. 3.3) mierzyć można z dokładnością do 0,01 mm. Mikromierz składa się z części nieruchomej *C* ze skalą *S1* oraz wrzecionka mikrometrycznego *W* ze skalą *S2*. Na górnej części skali *S1* są zaznaczone milimetry, kreskami poniżej linii poziomej zaznaczono każde pół mm. Zazwyczaj jeden pełen obrót wrzeciona odpowiada przesunięciu szczęki *B* o 0,5 mm, a skala *S2* posiada podziałkę od 0 do 50. Odczytując wskazania mikromierza musimy zapisać najpierw ilość pełnych milimetrów oraz zwrócić uwagę na to, czy na skali jest już widoczna kreska odpowiadająca 1/2 mm. Jeżeli nie, to wskazanie na skali wrzecionka jest równe ilości setnych części milimetra. Gdy kreska oznaczająca 1/2 mm jest już

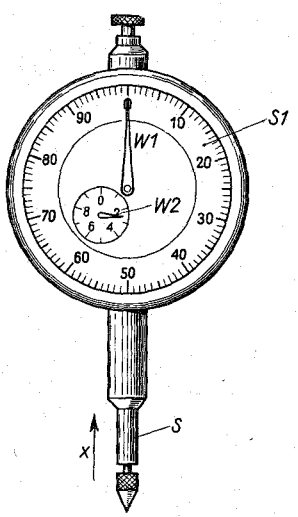
widoczna, do cyfry odczytanej z wrzecionka dodajemy 50. Mierząc przedmiot, wrzecionko możemy tylko dokręcać pokrętłem *D*, które obraca się poprzez sprzęgło wyłączające obrót śruby przy nadmiernym docisku, a tym samym zabezpieczające gwint wrzecionka.



3.3. Mikromierz.

Przed przystąpieniem do pomiarów, należy sprawdzić wskazanie zerowe po doprowadzeniu do zetknięcia szczęk *A B*. Gdy mikromierz nie wskazuje wtedy „zera", należy odczytać wskazanie i zależnie od znaku dodawać lub odejmować od wskazań uzyskanych w pomiarach.

Czujnik mikrometryczny (rys. 3.4) służy przede wszystkim do pomiaru zmian długości. Zachodzące wzdłuż kierunku *x* przesunięcie suwaka *S* przenosi się za pomocą układu kół zębatych na dwie wskazówki *W1* i *W2*, z których jedna *W1* wykonuje pełen obrót przy przesunięciu suwaka o 1 mm, a druga *W2* przy przesunięciu o 10 mm. Sprężyna dociska suwak w dolne skrajne położenie (rys. 3.4). Obwód tarczy czujnika podzielony jest na 100 części i zmiany długości można mierzyć z dokładnością do 0,01 mm. Skalę *S1* można obracać zmieniając w ten sposób położenie punktu zerowego.



3.4. Czujnik mikrometryczny.

Pomiar kąta sprowadza się również do pomiaru długości. Zgodnie z definicją, kąt jest stosunkiem łuku koła do promienia i jego pomiar sprowadza się do pomiaru tych dwóch wielkości. Dotąd niemal wyłącznie stosowana jest skala stopniowa, w której

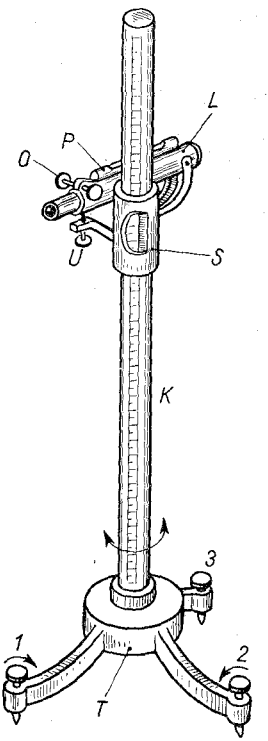
pełen kąt płaski podzielony jest na 360° (stopni kątowych), każdy stopień na 60 minut (60′), a minuta na 60 sekund stopniowych (60″). Do bezpośredniego pomiaru kąta służą *kątomierze*, które w przypadku, gdy wymagana jest duża dokładność odczytu kąta mogą być również zaopatrzone w noniusz.

Stosując kątomierze wzorcowane w stopniach kątowych należy każdorazowo przeliczyć kąt na jednostki miary łukowej. W tym przypadku najpierw trzeba zamienić minuty i sekundy kątowe na dziesiętne i setne części stopnia, a następnie zamienić jednostki według wzoru

$$1 \text{ rad} = 57{,}29578° = 57°17'44{,}8''. \tag{3.2}$$

3.2. KATETOMETR

Katetometr jest przyrządem, który pozwala dokładnie mierzyć odległości pionowe, względnie przesunięcia pionowe w pewnej, nieraz znacznej odległości. Składa się on (rys. 3.5) z osadzonego na trójnogu T statywu K zaopatrzonego w pionową skalę.



3.5. Katetometr.

Statyw może obracać się wokół osi pionowej. Po statywie przesuwa się suwak S zaopatrzony w noniusz. Do suwaka zamocowana jest lunetka L zaopatrzona w krzyż z nici pajęczych. Nóżki statywu zaopatrzone są w śruby regulujące *1*, *2*, *3*, które pozwalają na regulację ustawienia w pionie. Lunetka posiada poziomnicę P, urządzenie U pozwalające na obrót wokół osi prostopadłej do statywu. Ponadto zaopatrzona jest ona

w urządzenie O do przesuwania okularu, a tym samym do regulacji ostrości widzenia mierzonego przedmiotu.

Przed przystąpieniem do pracy katetometr trzeba ustawić dokładnie pionowo, a lunetkę poziomo. W tym celu lunetkę ustawiamy w jednej płaszczyźnie z nóżką *3* i doprowadzamy pęcherzyk w poziomnicy w środkowe położenie za pomocą śruby *3* oraz U; staramy się przy tym, by obrót każdej ze śrub przesunął pęcherzyk o połowę drogi. Obracamy statyw o π (pół obrotu) i powtarzamy te same regulacje. Po kilkakrotnym powtórzeniu tych czynności lunetka będzie spoziomowana w płaszczyźnie wyznaczonej statywem i nóżką *3*. Następny etap polega na wypoziomowaniu katetometru w płaszczyźnie prostopadłej do poprzedniej. W tym celu obracamy statyw o 1/4 obrotu $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Poziomnica wykaże brak pionowego ustawienia. Nie ruszając śrub *3* i U sprowadzamy pęcherzyk do środkowego położenia wyłącznie za pomocą śrub *1* i *2*. Celem uniknięcia rozregulowania poprzedniego ustawienia w płaszczyźnie (*3*, K), śruby *1* i *2* musimy obracać zawsze równocześnie o taki sam kąt, lecz w przeciwnych kierunkach (obydwie do środka jak zaznaczono na rysunku lub obydwie na zewnątrz), do chwili gdy pęcherzyk poziomicy znajdzie się w środkowym położeniu. Po osiągnięciu tego stanu przyrząd jest wypoziomowany i przy obrocie statywu o dowolny kąt pęcherzyk pozostaje w środkowym położeniu. Jednak przy niewystarczającej wprawie ćwiczącego może się okazać, że ustawienie w dalszym ciągu jest nieprawidłowe. Wtedy lunetkę ustawiamy na powrót w płaszczyźnie (*3*, K) i powtarzamy wszystkie czynności.

Niektóre typy katetometrów posiadają wbudowane poziomnice w statywie lub zaopatrzone są w pion. Ustawienie takich katetometrów jest prostsze. Ustawiamy wtedy trójnóg, a następnie lunetkę. Istnieją również katetometry uproszczone, w których brak noniusza, a lunetkę zastępuje się celownikiem lub wskazówką.

Pomiar polega na zgraniu przecięcia nici pajęczych z określonym punktem przedmiotu mierzonego, odczytaniu położenia lunetki na skali statywu. Gdy mierzymy długość, nastawiamy lunetkę na drugi koniec mierzonego przedmiotu i odczytujemy ponownie. Mierzona wielkość jest równa różnicy obydwu wskazań.

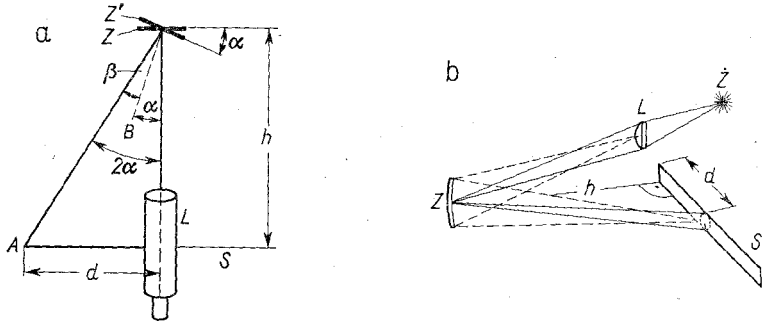
3.3. POMIAR KĄTÓW LUB ZMIAN DŁUGOŚCI METODĄ OPTYCZNĄ

Dokładność pomiaru kąta zależy od promienia koła, na którego obwodzie mierzymy kąt lub długość łuku. Ramion tych nie można przedłużać nieograniczenie, ponieważ związana jest z tym zmiana masy urządzenia, jego wymiary itp. Można jednak długość ramion przedłużyć nieograniczenie za pomocą wiązki światła. Urządzenia służące do tego celu pokazano na rysunku 3.6. Rysunek 3.6a przedstawia urządzenie składające się z lunety L, skali S oraz zwierciadła Z, znajdującego się na osi urządzenia, którego kąt obrotu mamy zamiar mierzyć. Układ ustawiamy w ten sposób, by nić pajęcza w lunecie pokrywała się z punktem zerowym skali S. Po obrocie urządzenia, a wraz z nim zwierciadła o kąt α, w lunecie widzimy działkę skali odległą o d od położenia zerowego, a kąt AZL wynosi 2α. Ponieważ kąt BZL i kąt pomiędzy położeniem Z i Z' zwierciadła posiadają ramiona zgodnie prostopadłe, a kąt $\beta = \alpha$ zgodnie z prawem odbicia, linia BZ' jest prostopadła do powierzchni zwierciadła w położeniu Z'. Za pomocą

opisanego tu urządzenia mierzymy zazwyczaj kąty małe i możemy przyjąć, że d jest równe długości łuku odpowiadającego kątowi 2α. Wtedy $2\alpha = \frac{d}{n}$ lub

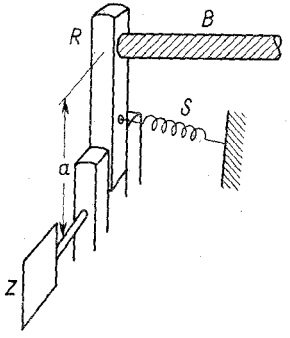
$$\alpha = \frac{d}{2h}. \tag{3.3}$$

Urządzenie pokazane na rysunku 3.6a nie jest jednak praktyczne, ponieważ wymaga ciągłej obserwacji skali przez lunetę, co przy dłuższych obserwacjach jest męczące. Na rysunku 3.6b pokazano tzw. urządzenie z plamką świetlną, za pomocą którego na przezroczystej skali S widzimy wprost plamkę świetlną z nicią pajęczą rzutowaną za



3.6. Urządzenia do optycznego odczytywania kątów.

pomocą odpowiedniego układu optycznego składającego się z soczewki L związanej na stałe z żarówką $\dot{Z}$ oraz zwierciadła Z, które w tym przypadku jest wklęsłe i jest częścią układu optycznego. Układ można również skonstruować w taki sposób, by nie było konieczne zwierciadło wklęsłe. Dla urządzenia z rys. 3.6b kąt wyraża się również wzorem (3.3).



3.7. Urządzenia do optycznego pomiaru wydłużenia.

Układ pokazany na rysunku 3.6 można zastosować również do pomiaru zmian długości, co pokazano na rysunku 3.7. Do belki B, której zmiany długości Δl mierzymy, jest dociskane ramię R za pomocą sprężyny S. Mierzymy kąt α, o który obróci się zwierciadło Z. W tym przypadku kąt $\alpha = \Delta l/a$, zatem zgodnie z wzorem (3.3) otrzymamy

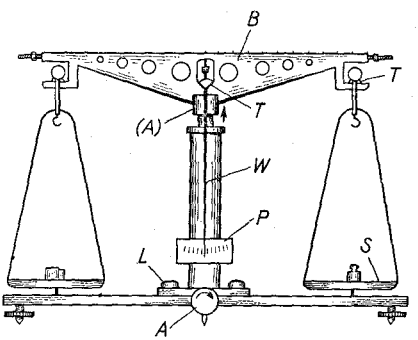
$$\Delta l = \frac{ad}{2h}. \tag{3.4}$$

3.4. POMIARY MASY LUB CIĘŻARU

Do pomiaru masy lub ciężaru służą wagi. Czynności związane z pomiarem nazywamy ważeniem. Ze względu na zasadę działania wagi dzielimy na belkowe, sprężynowe i torsyjne.

a. Budowa i działanie wag belkowych. Waga belkowa jest przyrządem służącym do porównywania ciężaru ciał. Ze względu na stałość przyspieszenia ziemskiego może ona służyć również do porównywania mas, bowiem z równości ciężarów dwóch ciał $m_1 g = m_2 g$, wynika równość ich mas $m_1 = m_2$.

Waga belkowa jest dźwignią dwustronną, w której punkt podparcia znajduje się powyżej środka ciężkości (rys. 3.8). Najważniejszymi częściami wagi są: belka B, szalki S, wskazówka W, skala P, urządzenie do unieruchomiania wagi czyli aretowania A, oraz pion względnie poziomica L. Belka i szalki wsparte są na ostrzach pryzmatów co ogranicza do minimum wpływ tarcia i pozwala na dokładne określenie długości ramion. Ostrza wszystkich pryzmatów leżą na jednej płaszczyźnie.



3.8. Waga belkowa: B — belka, S — szalka.

Wartość użytkową wagi określają dwa parametry: dokładność i czułość. *Dokładność* wagi określamy jako wartość najmniejszej podziałki (odważnika). *Czułością* C wagi nazywamy stosunek wychylenia wskazówki do obciążenia, przez które wychylenie to zostało spowodowane

$$C = \frac{\Delta\alpha}{\Delta m}. \tag{3.5}$$

Często kąt α zastępuje się wskazaniem A na skali

$$C = \frac{\Delta A}{\Delta m}. \tag{3.6}$$

Ze względu na dokładność wagi dzielimy na laboratoryjne, których dokładność osiąga co najwyżej 0,01 g oraz analityczne o dokładności ważenia 0,1 mg. Wagi analityczne wykonane są bardzo precyzyjnie i zamknięte są w oszklonej szafce. Pryzmaty tych wag wykonane są z agatu.

Celem zbadania wpływu różnych czynników na czułość wagi, załóżmy, że nie jest ona dokładnie zrównoważona i belka jest wychylona z położenia równowagi o kąt α (rys. 3.9). Na belkę działają następujące momenty sił ważonego ciała ($r_1 m g \cos\alpha$),

odważników $(-r_2 (m+\Delta m) g \cos\alpha)$ oraz moment siły związany z ciężarem belki $(S m_B g \sin\alpha)$. Przez S oznaczono odległość środka ciężkości belki od punktu podparcia, a przez m_B masę belki. W przypadku równowagi trwałej suma tych wszystkich momentów musi się równać zeru

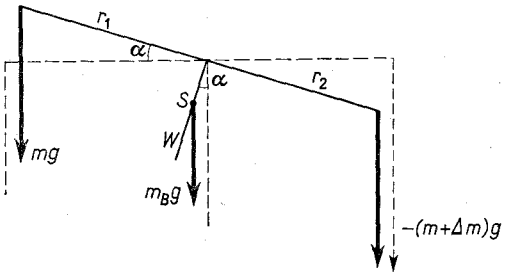
$$r_1 mg\cos\alpha - r_2 mg\cos\alpha - r_2 \Delta mg\cos\alpha + Sm_B g\sin\alpha = 0.$$

Gdy założymy, że ramiona belki są równe $(r_1 = r_2 = r)$, to po prostych przekształceniach ostatni wzór przyjmie postać

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r\Delta m}{Sm_B}.$$

Zakładając ponadto, że wychylenia są za małe $(\operatorname{tg}\alpha \simeq \alpha)$ oraz uwzględniając definicję czułości (3.5) otrzymamy

$$C = \frac{r}{Sm_B}. \tag{3.7}$$



3.9. Siły działające na niezrównoważoną wagę.

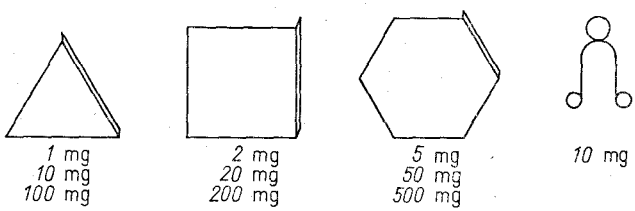
Czułość wagi jest więc proporcjonalna do długości ramion, a odwrotnie proporcjonalna do odległości między punktem podparcia i środkiem ciężkości oraz odwrotnie proporcjonalna do masy belki. Konstruktor dobiera optymalne wartości wszystkich tych parametrów. Obecnie konstruowane wagi posiadają stosunkowo krótką, ażurową belkę, wykonaną z lekkich, odpornych mechanicznie stopów aluminium.

Jeżeli w obciążonej wadze belka ugina się, wtedy następuje zmiana odległości S punktu podparcia od środka masy belki, a tym samym zmienia się czułość wagi (por. wzór 3.7). Stąd dla każdej wagi określa się maksymalne obciążenie, przy którym belka się nie deformuje. Po przekroczeniu maksymalnego obciążenia wyniki ważenia są błędne, a przy znacznym przeciążeniu może nastąpić uszkodzenie wagi*.

Odważniki są wzorcem, z którym porównujemy masę ważonego ciała (rys. 3.10). Komplety zawierające odważniki od 0,1 g (do 200 lub 500 g) nazywamy *odważnikami laboratoryjnymi*. Komplety zawierające odważniki od 100 g do 1 mg nazywamy *odważnikami analitycznymi*. Odważniki od 0,5 g do 1 mg wykonane są w postaci blaszek, a jeden odważnik 10 mg zwany konikiem wykonany jest z drutu (rys. 3.10). Do nakładania odważników służą specjalne szczypce — penseta.

* Chcąc uzyskać poprawny wynik ważenia ciał o małej gęstości, musimy uwzględnić poprawki na wypór powietrza omawiane w § 5.01.

b. Ważenie za pomocą wagi laboratoryjnej. Ustawienie wagi sprawdzamy na poziomnicy umieszczonej w podstawce wagi, lub za pomocą tzw. pionu czyli ciężarka z ostrzem zawieszonego na nici w górnej części podstawy belki. W poziomo ustawionej wadze pęcherzyk powietrza powinien znajdować się wewnątrz kółka zaznaczonego na szkiełku poziomnicy. W przypadku pionu ostrze ciężarka musi znajdować się dokładnie naprzeciw ostrza umieszczonego w podstawie wagi. Możemy poprawić ustawienie wagi przez pokręcanie dwóch przednich nóżek, pokręcając nimi równocześnie w przeciwnych kierunkach.



3.10. Kształty odważników miligramowych.

W poziomowanej wadze sprawdzamy położenie zerowe. W tym celu najpierw sprawdzamy czystość szalek, po czym zwalniamy belkę i odczytujemy środek wahań. Jeżeli nie znajduje się on w pobliżu zera skali, przesuwamy w prawo lub w lewo środek ciężkości belki przez pokręcenie jednej z poziomo ustawionych śrub, znajdujących się na końcach ramion lub w środkowej części belki.

Czynności związane z ważeniem są najprostsze w przypadku, gdy wymagana dokładność pomiaru nie przekracza masy najmniejszego odważnika np. 0,1 g. W czasie nakładania ciała lub odważników, belka musi być unieruchomiona. Pokrętło służące do unieruchomienia obracamy powoli i płynnie. Ważone ciało umieszczamy na lewej, a odważniki na prawej szalce. Odważniki nakładamy metodą prób, którą wyjaśniamy na przykładzie.

P r z y k ł a d. Gdy oceniamy, że ciało waży ok. 20 g, nakładamy odważnik 20 g. Jeżeli ten okaże się za duży, zastępujemy go odważnikiem 10 g. Jeśli to nie wystarcza dodajemy 5 g. Postępując w ten sposób dochodzimy do sytuacji, w której dodanie odważnika 1 g spowoduje przejście wskazówki przez zero, czyli powstanie nadwagi. Wtedy odważnika tego już nie dodajemy, lecz zaczynamy w podobny sposób dobierać odważniki o masie od 0,1 do 0,5 g. Jako wynik ostateczny przyjmujemy taki przypadek, w którym środek wahań znajduje się stosunkowo najbliżej położenia wyjściowego zanotowanego przed pomiarem.

Należy podkreślić, że w przypadku gdy dobieramy nie masę odważników, lecz ilość substancji, a więc np. wtedy, gdy musimy odważyć 1 g cukru, dokładność odczytu wynosi również przynajmniej 0,1 g, mimo że nie stosujemy odważników ułamkowych od 0,1 do 0,5 g.

c. Interpolacja. Metodę interpolacji stosujemy zawsze wtedy, gdy wymagana dokładność pomiaru musi przekroczyć wagę najmniejszego odważnika. W omawianej metodzie kolejne miejsca znaczące określamy z wychylenia wskazówki.

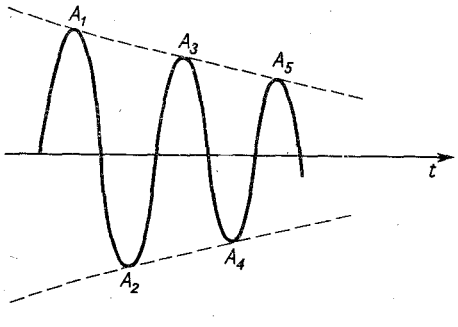
W tym przypadku rozpoczynamy od dokładnego wyznaczenia położenia zerowego. Po zwolnieniu belki, kąt wychylenia nie ustala się natychmiast. Występują wahania (rys. 3.11) o malejącej amplitudzie (drgania tłumione), które pokazuje nam wskazówka. Ze względu na przypadkowe drgania stołu, ruchy powietrza itp. amplituda tych drgań praktycznie nigdy nie spada do zera. Jako położenie równowagi

przyjmujemy wartość średnią amplitudy A_2 i średniej arytmetycznej amplitud A_1 i A_3, eliminując w ten sposób wpływ tłumienia (rys. 3.11).

$$A^{(0)} = \frac{\frac{A_1+A_3}{2}+A_2}{2} = \frac{A_1+2A_2+A_3}{4}.$$

Jeżeli skala wagi posiada zero w środku, to odczyty z lewej strony zera oznaczamy znakiem „$-$". Po wyznaczeniu $A^{(0)}$ w podobny sposób wyznaczamy środek wahań $A^{(1)}$ przy najmniejszej niedowadze. Jeżeli niedowagę, różnicę między masą odważników i masą ciała, oznaczymy przez x, to możemy napisać proporcję

$$x \sim A^{(0)} - A^{(1)}.$$



3.11. Wychylenia wskazówki wagi (drgania tłumione).

Następnie do szalki z odważnikami dokładamy najmniejszy odważnik (np. 0,1 g). Powstaje wtedy niewielka nadwaga, a środek wahań przesunie się do punktu $A^{(2)}$. Zachodzi wtedy proporcja

$$\Delta m \sim A^{(2)} - A^{(1)}.$$

Z tych dwóch proporcji otrzymujemy

$$x = \frac{A^{(0)} - A^{(1)}}{A^{(2)} - A^{(1)}} \Delta m. \tag{3.8}$$

Zaokrągloną do jednego miejsca znaczącego wartość x dopisujemy do masy odważników jako następne miejsce dziesiętne otrzymując masę ważonego ciała z dokładnością o jeden rząd przewyższającą masę odważników.

Dodatkowo zauważyć możemy, że zgodnie z wzorem (3.6) stosunek

$$C = \frac{A^{(2)} - A^{(1)}}{\Delta m}$$

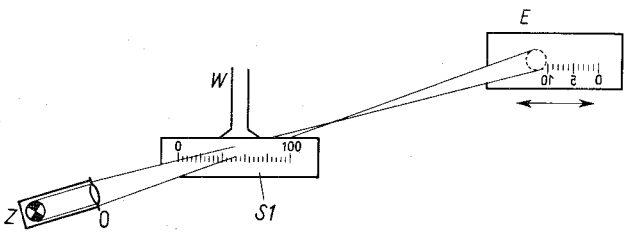
jest czułością wagi. Zatem wzór (3.8) można również zapisać w postaci

$$x = \frac{A^{(0)} - A^{(1)}}{C}. \tag{3.9}$$

Przy wykonywaniu większej serii pomiarów opłaca się uprzednio wyznaczyć czułość wagi, wtedy każdy z pomiarów można ograniczyć do zważenia z niedowagą.

d. Wagi analityczne. Produkowane obecnie wagi analityczne są przyrządami nowoczesnymi i pozbawionymi wielu niedoskonałości wag laboratoryjnych. Zaopatrzone są one w *tłumienie powietrzne* dzięki czemu belka nie waha się i odczyty na skali są dokładne. Produkowane są również *wagi automatyczne*, w których nakładanie odważników odbywa się samoczynnie przez obrót odpowiedniego pokrętła. Wagi automatyczne

posiadają tylko jedną szalkę. Druga zastąpiona jest układem prętów, na których za pośrednictwem układu dźwigni zawiesza się odważniki wykonane w kształcie kółek lub koników. Łączną masę odważników dobiera się w taki sam sposób jak w wagach laboratoryjnych, przy czym odważniki gramowe nakłada się przy unieruchomionej belce. Istnieją również *wagi półautomatyczne*, w których odważniki o masie większej od 1 g nakłada się ręcznie. Najmniejszym odważnikiem stosowanym w tego typu wagach jest odważnik 10 mg. *Dalsze miejsca odczytuje się z wychylenia wskazówki.* Dużą precyzję tego odczytu zapewnia układ optyczny (rys. 3.12) oraz konstrukcja wagi.



3.12. Układ optyczny do pomiaru wychyleń wskazówki wagi (widok od tyłu wagi ku przodowi).

W tylnej części znajduje się źródło równoległej wiązki światła, żarówka *Ż* z odpowiednim układem optycznym *O*. Koniec *W* wskazówki zaopatrzony jest w skalę *S1* podzieloną na 10 lub 100 części. Cała płytka ze skalą jest nieprzezroczysta, a światło przechodzi tylko przez kreski oznaczające działki skali i cyfry oznaczające numery działek. W przedniej części wagi znajduje się ekran *E* (szyba matowa), na którym otrzymuje się obraz skali, a właściwie mały jego wycinek. Na ekranie tym zaznaczona jest kreska oznaczająca położenie zerowe lub noniusz pozwalający odczytać ułamki kresek. Czułość wagi jest tak dobrana, że obciążenie 1 mg przesuwa wskazówkę dokładnie o 0,1 część skali. Dzięki temu przy skali podzielonej na 100 części z wychylenia wskazówki odczytujemy pojedyncze miligramy i dziesiętne części miligrama. Ponadto noniusz pozwala odczytać ułamki działek, które oznaczają setne części miligrama. Tak więc *dokładność wagi analitycznej*, w zależności od sposobu jej wykonania *wynosi 0,1 lub 0,01 mg*.

Dodać jeszcze należy, że wskazanie zerowe w nowoczesnych wagach analitycznych koryguje się przez przesunięcie ekranu z kreską zerową (lub noniuszem). Służy do tego specjalne pokrętło.

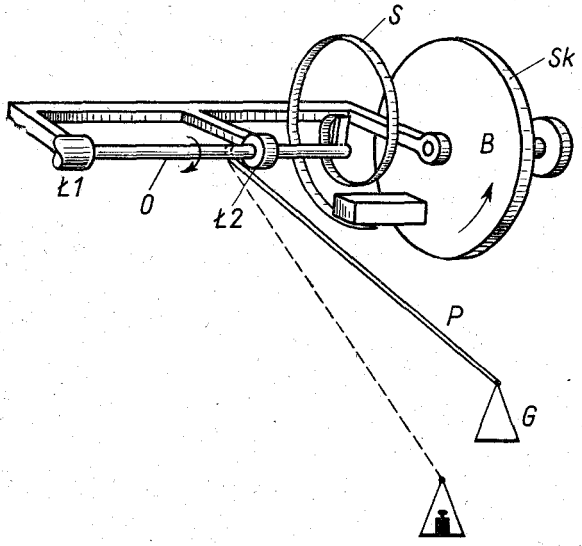
Obecnie istnieje jeszcze wiele wag analitycznych starego typu, przy których stosować trzeba metodę interpolacji (por. punkt c). W tym przypadku równoważymy masę ciała za pomocą odważników analitycznych do 0,01 g, a pojedyncze miligramy wyznaczamy za pomocą konika o masie 10 mg, który zawieszamy na prawej belce. Do przesuwania konika służy dźwignia, której uchwyt znajduje się z prawej strony szafki. Belka podzielona jest na 10 części, a ilość mg równa jest numerowi działki, na której zawieszony jest konik. W tym przypadku dziesiętne części mg wyznacza się metodą interpolacji.

Przy pomiarach mas rzędu kilogramów stosuje się obecnie wiele typów wag takich jak uchylne, decymalne szalkowe itp. Bliższy opis tych wag znajdzie czytelnik w literaturze (P1, § 140).

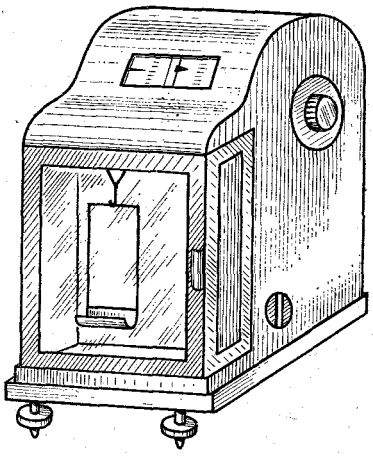
e. Wagi sprężynowe i torsyjne. W obydwu wymienionych typach wag stosuje się elementy, które podczas ważenia odkształcają się. Wielkość tego odkształcenia, zgodnie

z prawem Hooke'a (por. wzór 7.4) jest proporcjonalna do siły odkształcającej czyli do ciężaru ważonego ciała. W wagach sprężynowych elementem tym jest sprężyna, której wydłużenie jest proporcjonalne do ciężaru zawieszonego ciała. Przykładem wagi sprężynowej jest znany ze szkoły dynamometr.

W wagach torsyjnych elementem odkształcającym się jest naciągnięta struna lub sprężyna spiralna. Budowę wagi torsyjnej pokazano na rysunku 3.13. Szalka o ciężarze G zawieszona jest na końcu pręta P, który jest przytwierdzony do osi O. Oś jest podtrzymywana przez łożyska $Ł1$ i $Ł2$. Po obciążeniu szalki oś obróci się o kąt φ. Moment siły spowodowany obciążeniem szalki zostaje skompensowany sprężyną S. Na



3.13. Zasada działania wagi torsyjnej.



3.14. Wygląd zewnętrzny wagi torsyjnej.

skutek obrotu osi zmienia się długość ramienia szalki. Celem przywrócenia pierwotnego położenia szalki obracamy bęben B do takiego położenia, któremu odpowiada pierwotne położenie szalki. Kąt, o który obróciliśmy bęben, jest proporcjonalny do ciężaru ciała ważonego, a tym samym do jego masy. Na bębnie B znajduje się skala, na której można odczytać masę ciała ważonego w mg.

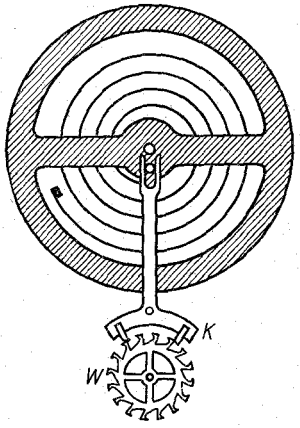
Istnieją różne typy wag torsyjnych jednak zazwyczaj dopuszczalne obciążenie nie przekracza 1 g.

Wygląd zewnętrzny wagi produkowanej w Polsce pokazano na rysunku 3.14.

3.5. POMIARY CZASU

Pomiary czasu wykonujemy za pomocą zegarów lub sekundomierzy (stoperów). Do napędzania mechanizmu zegara służy sprężyna lub ciężarek w przypadku napędu grawitacyjnego. Drugim podstawowym elementem mechanizmu zegara jest urządzenie, które uwalnia energię sprężyny małymi porcjami w różnych odstępach czasu. Podstawową częścią tego urządzenia jest wahadło grawitacyjne lub sprężynowe (balansowe).

Wykorzystywane są tu w szczególności dwie cechy wahadła, izochronizm czyli niezależność okresu od amplitudy drgań oraz stałość okresu. Wahadło porusza kotwicę *K*, która za każdym ruchem w lewo (rys. 3.15) zwalnia jeden ząbek koła wychwytowego *W*. Ze względu na tarcie, amplituda drgań wahadła powoli maleje w czasie, lecz mechanizm zegara uzupełnia straty. Energia uzupełniająca jest przekazywana od sprężyny do wahadła również przez koło wychwytowe. Po uwolnieniu kolejnego ząbka koło wychwytowe uderza następnym ząbkiem w kotwicę, która przenosi energię „uderzenia" na wahadło uzupełniając tym samym straty jego energii. Pozostała część mechanizmu zegara składa się z układu przekładni zębatych, które przenoszą ruch na wskazówki. W sekundomierzu istnieje dodatkowy mechanizm służący do *uruchamiania i zatrzymywania* oraz do sprowadzania wskazówek do położenia zerowego.



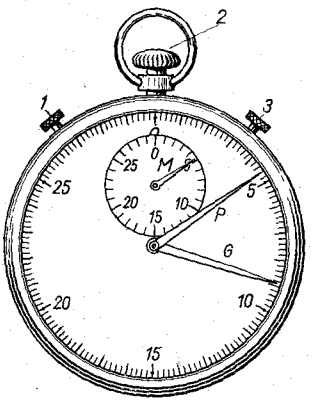
3.15. Wahadło balansowe zegarka.

Sekundomierze mogą być obarczone dużym *błędem systematycznym*, stąd przed użyciem należy je sprawdzić porównując wskazania z zegarkiem, który jest przyrządem bardzo dokładnym. Jeżeli w ciągu doby trwającej 1440 minut zegarek pośpiesza lub opóźnia się o 1 minutę, to błąd procentowy wynosi $\frac{1}{1440} \cdot 100 = 0{,}07\%$. Jest to błąd bardzo mały w porównaniu z błędem innych pomiarów wykonywanych w pracowni. Wyższość sekundomierzy polega na tym, że pozwalają one mierzyć dziesiętne części sekundy oraz posiadają mechanizm zatrzymywania.

Dokładność pomiarów wykonanych za pomocą sekundomierza zależy od wprawy obserwatora. Teoretycznie dokładność odczytu na niektórych sekundomierzach wynosi 0,05 s, lecz w praktyce błąd ten jest przynajmniej dwukrotnie większy, bowiem wszystkie pomiary są nim obarczone dwukrotnie: przy włączaniu i przy wyłączaniu. Dokładność taką osiągnąć możemy dopiero po pewnym treningu dlatego przed przystąpieniem do pomiarów musimy sprawdzić szybkość naszej reakcji. W tym celu staramy się zatrzymać sekundomierz na z góry upatrzonej podziałce np. 5 s i zapisujemy odchylenia wskazówki od założonego położenia. Jeżeli nie przekraczają one 0,05 s, to możemy przyjąć, że pomiary przez nas wykonane są obarczone błędem nie przekraczającym 0,1 s. W przypadku gdy występują odchylenia rzędu 0,1 s przyjmujemy błąd 0,2 s. Jeżeli odchylenia

są jeszcze większe, to jednak przed rozpoczęciem pomiarów musimy na tyle opanować umiejętność włączania i wyłączania, by osiągnąć dokładność 0,2 s. Należy zwrócić uwagę na to, że przycisk sekundomierza posiada pewien luz, dokładniejsze pomiary uzyskamy wtedy, gdy chwilę przed wyłączeniem lekko naciśniemy przycisk tak, by luz zmniejszyć do minimum.

Obecnie buduje się sekundomierze pozwalające mierzyć jednocześnie czasy trwania dwóch rozpoczynających się równocześnie zjawisk. Mają one dwie, współosiowo osadzone wskazówki, główną *G* i pomocniczą *P*. Obydwie wskazówki poruszają się razem. Ponadto jest jeszcze trzecia wskazówka mała *M*, osadzona na innej osi, wskazująca minuty. Sekundomierz posiada trzy przyciski. Przycisk *1* (rys. 3.16) służy do zwalniania i zatrzymywania wskazówki pomocniczej. Po naciśnięciu przycisku *1* zatrzymuje się



3.16. Sekundomierz.

wskazówka pomocnicza; po ponownym naciśnięciu tego przycisku wskazówka pomocnicza natychmiast dołącza do głównej i dalej poruszają się razem. Przycisk *2* służy do zwalniania i zatrzymywania wskazówki *G*, lecz nie sprowadza on wskazówki głównej do położenia zerowego. Do położenia zerowego można sprowadzić sekundomierz po zatrzymaniu, przez naciśnięcie przycisku *3*. Przycisk *2* jest równocześnie pokrętłem do naciągania sprężyny sekundomierza. Rozmieszczenie przycisków w sekundomierzu produkcji radzieckiej pokazano na rysunku 3.16. Sekundomierze omawianego typu nadają się szczególnie do pomiarów i kontroli okresów zjawisk zachodzących periodycznie. Mierząc czas trwania 10-ciu okresów wyłączamy pomocniczą wskazówkę po 5-ciu okresach, a główną po 10-ciu. Pomiar jest poprawny, jeżeli wskazanie pomocnicze stanowi 1/2 wskazania głównego.

3.6. POMIARY TEMPERATURY

Do pomiaru temperatury stosujemy dwa rodzaje mierników: termometry i termogniwa. *Termometry* są znane z życia codziennego i sposób posługiwania się nimi nie wymaga wyjaśnień. Dokładność jest równa wartości najmniejszej podziałki. W termometrach stosowanych w pracowni wynosi ona 1, 0,2 lub 0,1°C. Termometr można łatwo zniszczyć przez nieostrożne lub nieprawidłowe stosowanie np. włożenie termo-

metru o skali 40°C do naczynia z wrzącą wodą. Ciecz termometryczna rtęć, a szczególnie jej pary są szkodliwe dla zdrowia i w przypadku zbicia termometru, rtęć należy zebrać bardzo dokładnie. Zasada działania *termoogniwa* (termopary) opiera się na różnicach stężeń gazu elektronowego w metalach (szczegóły w § 21.2). Do pomiaru siły termoelektrycznej stosujemy miliwoltomierze. Najczęściej są one dostosowane do termoogniwa i odpowiednio wyskalowane w jedn. temperatury. Niektóre miliwoltomierze zwane termorejestratorami pozwalają zapisywać wskazania na specjalnym papierze przesuwanym przez silnik elektryczny.

3.7. AUTOMATYCZNA REGULACJA TEMPERATURY I ULTRATERMOSTAT

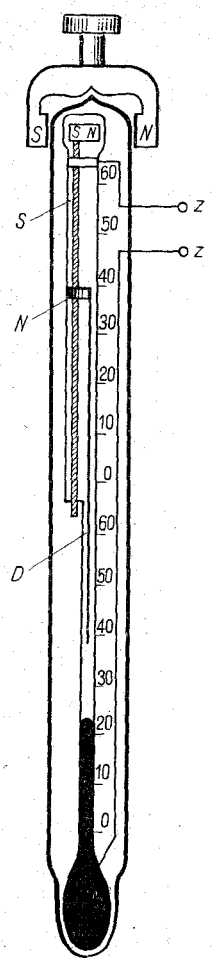
Zasadniczym elementem służącym do automatycznej regulacji temperatury jest termometr kontaktowy, rtęciowy, bimetaliczny lub wskaźnik termoogniwa z automatycznym wyłącznikiem. Zasada działania tych urządzeń polega na zamykaniu lub otwieraniu obwodu prądu w grzejniku. Urządzenie musi przerwać obwód prądu w chwili, gdy temperatura wzrośnie do zadanej z góry wartości i ponownie go zamknąć, gdy temperatura opadnie o wartość δT, zwaną nieczułością regulacji. Wskazane jest, by wartość δT była jak najniższa. Dla różnych typów mierników temperatury nieczułość regulacji waha się od 10 do setnych części kelwina.

Budowę *termometru kontaktowego* pokazano na rys. 3.17. Górna część kapilary, w której w każdym termometrze przesuwa się poziom rtęci, jest poszerzona. Znajduje się tam śruba S zaopatrzona u góry w mały magnesik NS, za pomocą zewnętrznego, dużego magnesu SN możemy obracać tę śrubę, a tym samym przesuwać w górę lub w dół nakrętkę N, z którą połączony jest drucik D. Położenie nakrętki N na tle dodatkowej podziałki znajdującej się w poszerzonej części kapilary określa nastawioną temperaturę. Poprzez śrubę S i zbiornik rtęci temometr łączy się z elektrycznym obwodem zewnętrznym. Gdy poziom rtęci wzrośnie do nastawionej wartości nastąpi zetknięcie drucika D z rtęcią i zamknięcie obwodu.

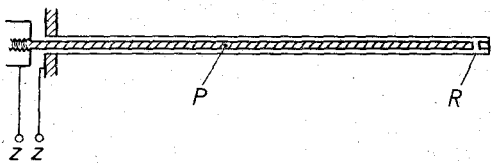
Budowę *termometru bimetalicznego* pokazano na rys. 3.18. Składa się on z pręta P i rurki R wykonanych z różnych materiałów. Współczynnik rozszerzalności pręta jest większy niż rurki. Obwód zamyka się w chwili, gdy osiągnięta zostaje temperatura nastawiona i gdy nastąpi zetknięcie pręta z dnem rurki. Wyłączniki wskaźników do termoogniwa posiadają dość skomplikowaną budowę opartą na zastosowaniu przerywaczy mechanicznych lub urządzeń elektronicznych.

Prąd, który możemy sterować bezpośrednio za pomocą mierników temperatury, jest bardzo mały, stąd nie możemy umieszczać tych elementów w obwodzie grzejnika. Za pomocą tego prądu uruchamiamy dodatkowy wyłącznik rtęciowy dostosowany do sterowania silnych prądów. Zasadę działania wyłącznika nurkowego pokazano na rys. 3.19. Gdy przez uzwojenie cewki C płynie prąd, walec żelazny Fe jest wciągnięty przez pole magnetyczne cewki do wnętrza rtęci Hg. Poziom rtęci podnosi się do wysokości zaznaczonej linią przerywaną. Rtęć łączy przewody połączone z zaciskami zG zG zamykając obwód.

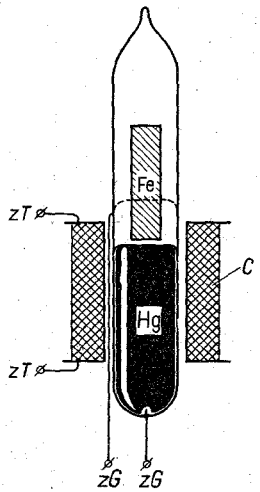
Na rysunku 3.20 pokazano schemat połączeń stosowanych w *ultratermostacie* tzn. przyrządzie służącym do utrzymywania stałej temperatury. Termometr kontaktowy T_k



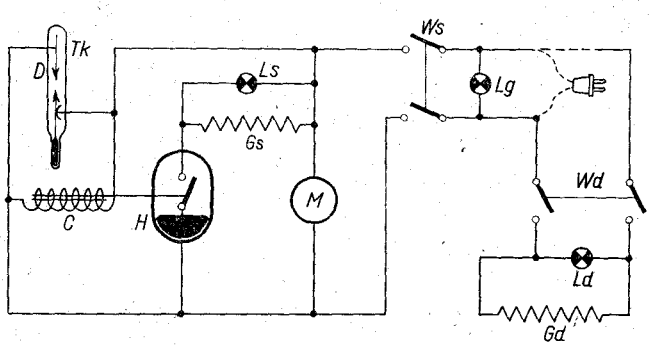
3.17. Termometr kontaktowy.



3.18. Termometr bimetaliczny.

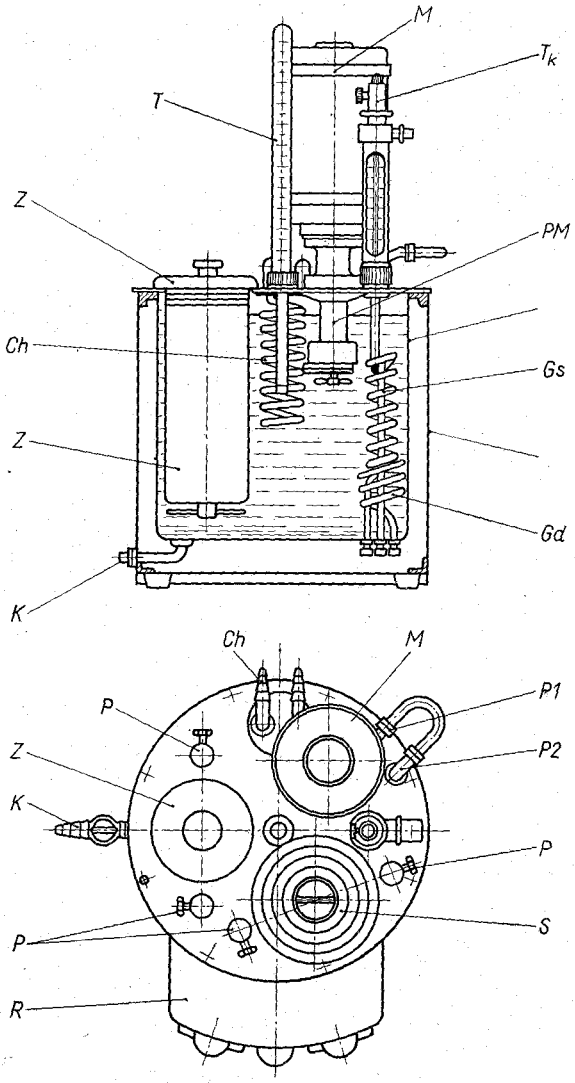


3.19. Rtęciowy wyłącznik nurkowy.



3.20. Schemat połączeń elektrycznych ultratermostatu.

jest tu włączony równolegle do cewki *C* wyłącznika rtęciowego. Gdy rtęć termometru zetknie się z drucikiem *D* (rys. 3.17), następuje zwarcie zacisków cewki. Prąd przez cewkę przestaje płynąć i wyłącznik rtęciowy rozłącza się i przerywa obwód prądu w grzejniku *Gs*. Gdy temperatura nieco opadnie, kontakt w termometrze ulega przerwaniu, prąd znowu płynie przez cewkę, i wyłącznik rtęciowy zamyka obwód elektryczny grzejnika.



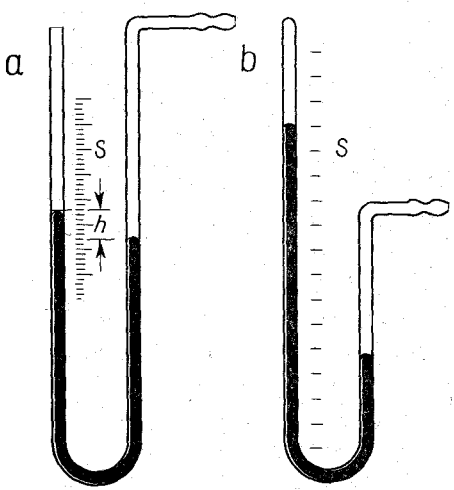
3.21. Rozmieszczenie elementów ultratermostatu.

Budowę ultratermostatu pokazano na rysunku 3.21. Pokazano tam również rozmieszczenie poszczególnych elementów. Przeznaczenie większości elementów jest tu oczywiste. W określonej temperaturze termostat pracuje wyłącznie z grzejnikiem *Gs*. W przypadku, gdy zachodzi potrzeba zmiany temperatury pracy, to nastawiamy na pożądaną

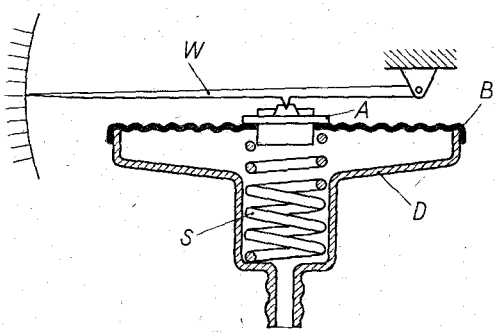
temperaturę termometr kontaktowy i dla przyspieszenia grzania włączamy dodatkowy grzejnik *Gd*. Musimy pamiętać o wyłączeniu grzejnika *Gd* po osiągnięciu potrzebnej temperatury. W przypadku konieczności ochładzania nastawiamy odpowiednio termometr kontaktowy, a następnie przepuszczamy wodę z wodociągu przez chłodnicę *Ch* do chwili obniżenia temperatury do żądanej wartości. Pracując w temperaturach ujemnych wypełniamy zbiornik *Z* zimną mieszaniną suchego lodu zalanego alkoholem. Zawór kurkowy *K* służy do szybkiego opróżnienia zbiornika termostatu. Zespół pompująco-mieszający *PM* miesza ciecz w termostacie, a równocześnie może przepompowywać tę ciecz przez urządzenia zewnętrzne, które mamy zamiar termostatować. W przypadku, gdy urządzenia termostatowane mają znajdować się w cieczy termostatującej, stosujemy stanowisko *S*. Jako suchy termostat można wykorzystać zbiornik zimna *Z*. Można również w jego miejsce wbudować drugie stanowisko pomiarowe. Jako ciecz termostatującą w temperaturach od 0 do 100°C stosujemy wodę destylowaną; w wyższych — glicerynę lub olej, w ujemnych — alkohol. Termometr *T* służy do dokładnego odczytania panującej w zbiorniku temperatury. Do wysuwania w górę i obniżania zasobnika zimna oraz urządzeń termostatowanych służą podnośniki *P*. Za pomocą śrub można je umocować na dowolnej wysokości. Wszystkie wyłączniki znajdują się na tablicy rozdzielczej *R*. W przypadku, gdy nie wykorzystujemy możliwości przepompowania cieczy termostatującej, wyjścia pompki *P1* i *P2* musimy złączyć rurką.

3.8. POMIARY CIŚNIENIA

Budowa przyrządów stosowanych do pomiaru ciśnienia uzależniona jest od ich przeznaczenia. Do pomiaru małych różnic ciśnień służą *manometry cieczowe*. Budowę takiego manometru pokazano na rysunku 3.22a. Składa się on z rurki szklanej wygiętej w kształcie litery *U* zamocowanej pionowo na tle skali *S*. Rurka wypełniona jest cieczą manometryczną do połowy wysokości. Zbiornik, w którym panuje mierzone ciśnienie łączymy z końcem jednego z ramion manometru. W manometrze ustali się wtedy róż-



3.22. Manometr cieczowy (a) i skrócony (b).

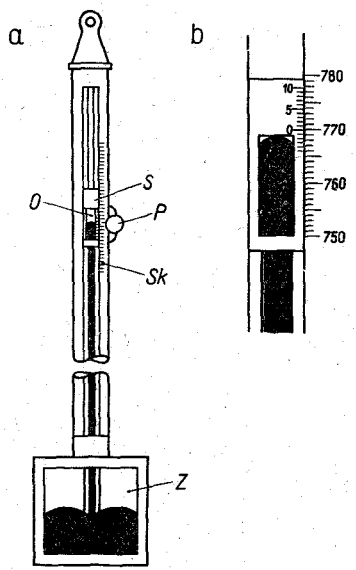


3.23. Budowa aneroidu.

nica h poziomów cieczy, a różnica ciśnień jest równa ciśnieniu hydrostatycznemu słupka cieczy manometrycznej $p = h\varrho g$, gdzie ϱ oznacza gęstość cieczy manometrycznej.

Do pomiaru małych różnic ciśnień służą również *aneroidy* (rys. 3.23). Aneroid składa się ze szczelnego pudełka metalowego D pokrytego membraną B wykonaną z bardzo cienkiej i pofalowanej blachy. Na skutek zmian ciśnień panujących wewnątrz przesuwa się membrana, a jej ruch przenosi się na wskazówkę W. Sprężyna S utrzymuje membranę w pewnym napięciu zapobiegając przesunięciom punktu zerowego. Zbiornik, w którym badamy ciśnienie, łączymy z pudełkiem.

Do pomiaru ciśnień, w zakresie od bardzo małych do atmosferycznego stosujemy *manometry rtęciowe*. Do pomiaru małych ciśnień rzędu kilku cm Hg stosuje się *skrócone* manometry, w których jedno ramię jest zatopione i dokładnie odpompowane (rys. 3.22b). Manometry skrócone wskazują ciśnienie względem próżni. Gdy w otwartym ramieniu panuje ciśnienie atmosferyczne, rtęć zapełnia całkowicie ramię zamknięte.



3.24. Barometr rtęciowy (a) oraz prawidłowe ustawienie suwaka (b).

Do pomiaru ciśnienia atmosferycznego służy *barometr rtęciowy* (rys. 3.24). Jest on manometrem, w którym jedno z ramion jest bardzo szerokie. Jest nim zbiornik Z połączony małym otworem z otoczeniem. W górnej części drugiego ramienia panuje próżnia (Toricellego). Ze względu na dużą szerokość zbiornika Z zmiany poziomu rtęci w tym zbiorniku są małe, w niektórych barometrach kompensuje się je doprowadzając poziom rtęci do zetknięcia z ostrzem, a w nowych poprawką na punkt zerowy uwzględniona jest w podziałce skali. Odczyt ciśnienia sprowadza się do odczytania poziomu tylko w jednym ramieniu. W precyzyjnych barometrach poziom rtęci odczytuje się za pomocą noniusza (por. § 3.1) z dokładnością do 0,1 mm. Zadanie to ułatwia suwak S, którego położenie możemy zmieniać za pomocą pokrętła P. Suwak musimy ustawić w takim położeniu, by dolna krawędź górnej ramy okienka O była styczna do powierzchni rtęci w rurce.

Ze względu na rozszerzalność cieplną wskazania barometru zależą od temperatury. Poprawny wynik uzyskamy dopiero po *zredukowaniu* wskazania, tzn. po wprowadzeniu poprawek na rozszerzalność cieplną rtęci i skali. Gdyby temperaturę rtęci obniżyć do 0°C, to jej objętość wynosiłaby

$$v_0 = v - v\gamma\tau,$$

gdzie γ oznacza współczynnik rozszerzalności objętościowej rtęci. Przy obniżeniu temperatury zmniejszyłby się również przekrój poprzeczny rurki, lecz z uwagi na małą wartość współczynnika rozszerzalności szkła (jest on o jeden do dwóch rzędów wielkości mniejszy od γ) z wystarczającą dokładnością założyć możemy stałość przekroju S rurki, wtedy $v = Sh$, $v_0 = Sh_0$. Podstawiając te wartości do ostatniego równania i upraszczając przez S otrzymamy

$$h_0 = h - h\gamma\tau.$$

Ponadto przy obniżeniu temperatury skraca się równocześnie miarka o $h\alpha\tau$, gdzie α — współczynnik rozszerzalności liniowej materiału miarki. Poprawkę tę musimy dodać do prawej strony ostatniego równania otrzymując

$$h_0 = h - h(\gamma - \alpha)\tau.$$

Ponieważ $\gamma = 18{,}4 \cdot 10^{-5}\mathrm{K}^{-1}$, a dla mosiądzu, z którego wykonano skalę $\alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, otrzymamy ostatecznie

$$h_0 = h - h \cdot 16{,}6 \cdot 10^{-5}\tau. \tag{3.10}$$

Poprawka ta, mimo iż wydaje się bardzo mała, może być rzędu 0–3 mm Hg i przy dokładności 0,1 mm Hg koniecznie należy ją uwzględnić.

Tabela 3.1

Poprawki wskazań barometru na włoskowatość

Poprawki należy dodawać do wskazań barometru. Wszystkie wielkości zawarte w tablicy podano w torach (mm Hg)

Średnica rurki w mm	Wysokość menisku w mm								
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
7	0,17	0,34	0,49	0,62	0,74	0,85	0,95	1,04	1,12
8	0,13	0,27	0,39	0,49	0,59	0,68	0,76	0,82	0,87
9	0,10	0,21	0,30	0,38	0,46	0,54	0,60	0,65	0,70
10	0,08	0,16	0,23	0,30	0,36	0,42	0,47	0,52	0,57
11	0,06	0,11	0,17	0,22	0,27	0,32	0,37	0,41	0,45
13	0,03	0,06	0,09	0,11	0,14	0,17	0,20	0,22	0,25
15	0,02	0,04	0,06	0,08	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17
17	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
19	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05

Przy precyzyjnych pomiarach ciśnienia, dodatkowo uwzględnić trzeba poprawkę związaną z włoskowatością, obniżającą poziom rtęci w rurce barometru o Δh. Wartość Δh zależy od średnicy rurki, jej czystości oraz czystości rtęci. Czystość wpływa

bezpośrednio na wysokość menisku mierzonego od miejsca zetknięcia rtęci z rurką do górnej powierzchni menisku, stąd ostatecznie o wartości liczbowej Δh decyduje średnica rurki i wysokość menisku. Wartości liczbowe poprawek podano w tablicy 3.1. Po uwzględnieniu poprawki na włoskowatość wzór (3.10) przyjmuje postać

$$h_0 = (1 - 16{,}6 \cdot 10^{-5}\tau)\,(h + \Delta h). \tag{3.10a}$$

Do niezbyt dokładnych pomiarów ciśnienia atmosferycznego stosuje się aneroid o zamkniętej puszce D (por. rysunek 3.23).

3.9. POMIARY CZĘSTOŚCI

Spośród przyrządów przeznaczonych do pomiaru częstości omówimy stroboskop, częstościomierz językowy i tachometr. *Stroboskopem* nazywamy lampę wysyłającą światło przerywane składające się z bardzo krótkich impulsów. Częstość ν' impulsów świetlnych jest znana i można ją zmieniać w szerokich granicach. Oświetlając przedmiot drgający takim światłem nie zauważymy obrotów ciała, jeżeli częstość ν' impulsów świetlnych jest całkowitą wielokrotnością częstości obrotów

$$\nu' = n\nu. \tag{3.11}$$

Gdy częstości ν i ν' różnią się nieco, wtedy obserwujemy powolny obrót ciała zachodzący zgodnie z obrotem jeżeli $\nu > \nu'$ lub przeciwnie przy $\nu < \nu'$, porównaj z obserwowanym w kinie obrazem kół filmowanych pojazdów. Mierząc częstość ν'_p obrotu pozornego możemy obliczyć częstość z wzoru

$$\nu = \nu' \pm \nu'_p. \tag{3.12}$$

Najwygodniej określić częstość obrotów obserwując kolejne częstości ν'_1 i ν'_2, przy których nie obserwujemy pozornego obrotu. Wtedy zgodnie z wzorem (3.11), zachodzi

$$n\nu = \nu'_1 \quad \text{oraz} \quad (n+1)\nu = \nu'_2,$$

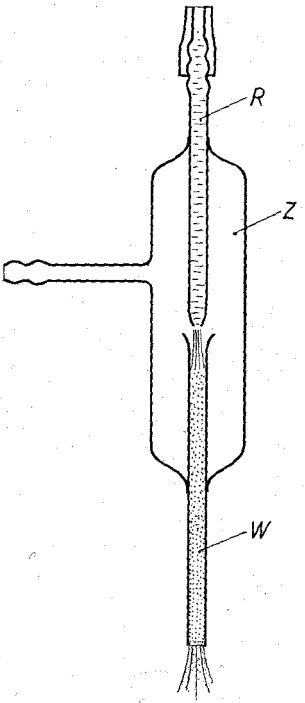
stąd wynika związek

$$\nu = \nu'_2 - \nu'_1. \tag{3.13}$$

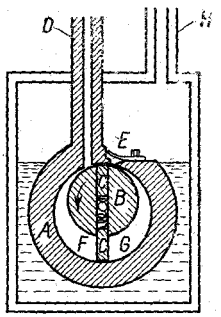
Działanie *częstościomierza językowego* oparte jest na zjawisku rezonansu mechanicznego (§ 10.5). Posiada on układ języczków, z których każdy posiada swą częstość drgań własnych. Drgania obracających się części maszyn przeniesione na częstościomierz pobudzają do drgań najsilniej języczek będący w rezonansie, tzn. ten, którego częstość drgań własnych jest równa częstości mierzonej. Częstościomierze językowe stosuje się również do pomiaru częstości prądu.

Tachometr elektryczny składa się z małej prądnicy (§ 4.1) i woltomierza (§ 18.02). W czasie pomiaru pokryty gumą koniec osi prądnicy przykładamy do osi obracającego się ciała. Oś prądnicy i oś ciała powinny leżeć na jednej prostej. Wirnik prądnicy obraca się z częstością równą mierzonej częstości obrotów badanego ciała. W prądnicy wytwarza się siła elektromotoryczna proporcjonalna do częstości obrotów wirnika. Woltomierz wyskalowany jest wprost w obrotach na minutę.

Spośród różnych konstrukcji pomp służących do zmniejszania ciśnienia wymienimy *pompę wodną Bunsena* oraz rotacyjną. W pompie wodnej (rys. 3.25) woda przepływa pod ciśnieniem przez rurkę R zwężającą się u dołu. Od ujścia tej rurki przechodzi krótkim strumieniem do rurki W, przez którą wypływa. Wskutek zwężenia strumienia w przestrzeni pomiędzy rurkami woda przepływa z wielką szybkością i zgodnie z równaniem Bernoulliego (S1, § 87) posiada niskie ciśnienie. Na skutek tego otaczające powietrze zostaje wciągnięte w strumień i wyrzucone na zewnątrz; w zbiorniku Z wytwarza się próżnia. Najmniejsze ciśnienia uzyskane za pomocą pompy wodnej są równe ciśnieniom pary nasyconej wody (ok. 2 cm Hg).



3.25. Pompa wodna Bunsena.

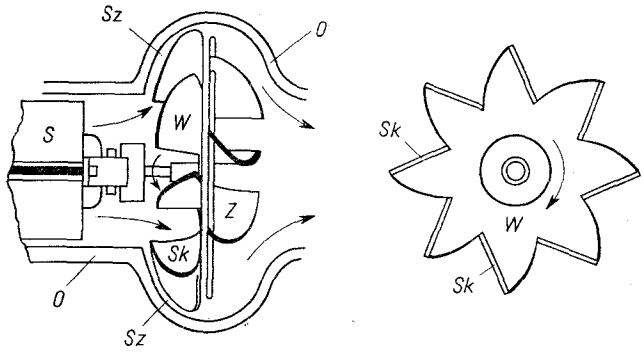


3.26. Budowa pompy rotacyjnej.

Ciśnienia obniżone do 0,01 mm Hg uzyskuje się za pomocą *pomp rotacyjnych*. Zasada pompowania jest następująca. Objętość opróżnionego zbiornika zostaje sztucznie powiększona, przez co ciśnienie gazu się zmniejsza, następnie część objętości zostaje zamknięta i opróżniona. Pompa (rys. 3.26) składa się z walca metalowego A, który dla uzyskania większej szczelności jest zanurzony w oleju. Wewnątrz obraca się mimośrodowo umieszczony walec B. Jest on zaopatrzony w dwie płytki C przyciskane szczelnie do ścianek za pomocą sprężyn. Płytki dzielą przestrzeń wewnątrz pompy na dwie części F i G. W czasie obrotu walca B część G zmniejsza się, a zawarty w niej gaz zostaje wypchnięty na zewnątrz poza wentyl E. Część F połączona ze zbiornikiem początkowo się zwiększa, następnie płytka C odcina ją od zbiornika opróżnianego, z którym pompę łączy rurka D, po czym przejmuje rolę części G i zostaje opróżniona. Pompę rotacyjną

można wykorzystać również do zgęszczania powietrza. Wtedy zbiornik łączymy z rurką *H*.

Zasadę działania dmuchawy pokazano na rysunku 3.27. Składa się ona z wirnika *W* osadzonego bezpośrednio na osi silnika elektrycznego *S*. Wirnik zaopatrzony jest w skrzydełka *Sk*. Pomiędzy dolną częścią wirnika i obudową *O* istnieje bardzo mała szczelina *Sz*. Skrzydełka obracającego się wirnika porywają ze sobą cząstki powietrza.



3.27. Schemat budowy dmuchawy.

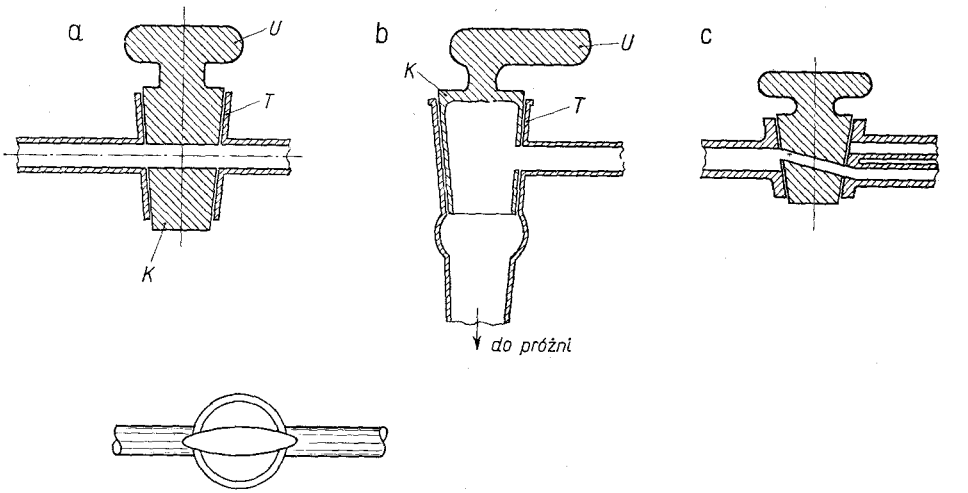
Na skutek działania siły odśrodkowej powietrze to zostaje wyrzucone na zewnątrz, a pomiędzy skrzydełka napływa nowe powietrze od strony osi obrotu. Powietrze wyrzucone przez wirnik przepływa poza przegródkę *Z* i ze względu na duży opór w szczelinie *Sz* praktycznie nie wraca do części, w której znajduje się silnik. Za przegródką *Z* powstaje nadwyżka ciśnienia, która zmusza powietrze do ruchu w kierunku wskazanym na rysunku. Na omówionej zasadzie oparta jest budowa odkurzaczy elektrycznych, suszarek do włosów itp. W przypadku suszarki strumień przepływa dodatkowo przez komorę, zawierającą grzejnik elektryczny.

3.11. ZAWORY

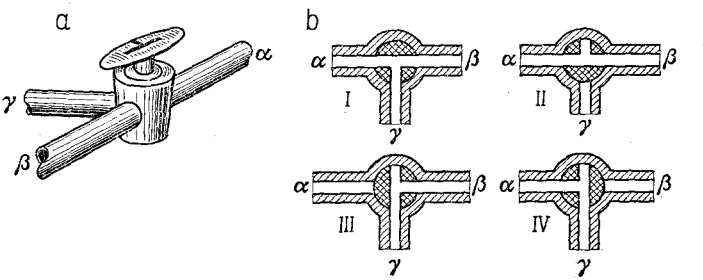
Zaworem nazywamy mechanizm służący do zmieniania przekroju przewodu, przez który przepływa płyn. Zasadniczą częścią zaworu jest tzw. *zawieradło*, którego kształt określa typ zaworu. W laboratorium najczęściej stosujemy zawory kurkowe jedno- i wielodrożne oraz zawory redukcyjne.

Zawór kurkowy jednodrożny (rys. 3.28) składa się z tulejki *T* i z zawieradła *K*, zwanego w tym przypadku *kurkiem*. Kurek może obracać się wokół swej osi zmieniając pole przekroju dostępne dla przepływu. Uchwyt *U* kurka jest równoległy do osi otworu zawieradła. Rysunek 3.28c przedstawia zawór dwudrożny. Często stosuje się zawory kurkowe trójdrożne (rys. 3.29). Uchwyt kurka zaworu trójdrożnego jest równoległy do osi otworu biegnącego na wylot kurka. Często na uchwycie zaworów metalowych zaznaczone jest rozmieszczenie otworów w kurku. Zawór trójdrożny pokazany na rysunku 3.29 pozwala na zrealizowanie połączeń pokazanych na rysunkach I, II, III, IV.

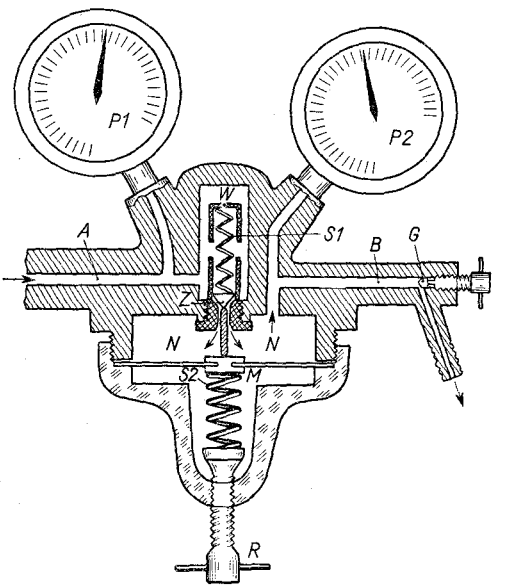
Gazy techniczne (tlen, wodór itp.) rozprowadza się w butlach stalowych pod ciśnieniem do 150 atm. Tak wysokie ciśnienie uniemożliwia bezpośrednie wykorzystanie



3.28. Zawory kurkowe jednodrożne: przelotowy (a), próżniowy (b); zawór dwudrożny (c).



3.29. Zawór kurkowy trójdrożny (a) i sposoby jego wykorzystania (b).



3.30. Zawór redukcyjny (reduktor).

butli. Do obniżania ciśnienia służą *zawory redukcyjne* (rys. 3.30) zwane *reduktorami*. Gaz z butli dochodzi przewodem *A* do komory *W*. Droga do komory niskiego ciśnienia *N* odcięta jest zawieradłem *Z*. Na zawieradło działają dwie silne sprężyny *S1* i *S2*. Docisk sprężyny *S2* reguluje śruba *R*. Gdy śruba *R* znajduje się w najniższym położeniu, zawieradło *Z* zamyka dopływ gazu do komory *N*. Gdy śrubę *R* przesuwa się w górę, wtedy sprężyna *S2* kompensuje nacisk *S1* i gaz przechodzi do komory *N*. W miarę wzrostu ciśnienia w komorze *N* elastyczna membrana *M* stanowiąca dno komory przesuwa się nieco ku dołowi i zawieradło *Z* znowu zamyka dopływ gazu. Mechanizm ten utrzymuje w komorze *N* stałe ciśnienie, które można regulować śrubą *R*. Z komory *N* przewodem *B* gaz odpływa przez zawór grzybkowy *G* do urządzenia odbiorczego. Manometry *P1* i *P2* wskazują ciśnienie w poszczególnych komorach. Butla stalowa zaopatrzona jest we własny zawór grzybkowy podobny do zaworu *G*. Celem uruchomienia butli z gazem technicznym przykręcamy do wylotu butli reduktor, a śrubę *R* wykręcamy do oporu. Otwieramy zawór butli. Manometr *P1* wskaże wtedy ciśnienie w butli. Zamykamy zawór *G* i powoli podkręcamy w górę śrubę *R* do chwili, gdy manometr *P2* wskaże pożądane ciśnienie 1–3 atm. Podłączamy odbiórnik gazu, otwieramy zawór *G*. Po zakończeniu pracy odłączamy odbiornik, zamykamy zawór butli i powoli wykręcamy śrubę *R* utrzymując stałe ciśnienie *P2*. W przypadku, gdy nie wykręcamy śruby *R*, ciśnienie *P2* wzrasta w miarę spadku ciśnienia *P1* w komorze *W* (por. § 5.4) grożąc uszkodzeniem manometru. Po opróżnieniu komory *W* odkręcamy śrubę *R* w dolne skrajne położenie i zamykamy zawór *G*.

4. PROSTE PRZYRZĄDY ELEKTRYCZNE I OPTYCZNE

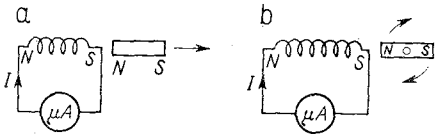
4.1. ŹRÓDŁA PRĄDU

Podstawowymi źródłami prądu stosowanymi w pracowni są: *sieć prądu przemiennego*, *ogniwa galwaniczne* i *akumulatory*. Napięcie skuteczne prądu przemiennego wynosi $U_s = 220$ V i zmienia się według wzoru $U = U \sin 2\pi\nu t$, gdzie $\nu = 50$ Hz. Źródłem prądu przemiennego są *prądnice* (generatory) zainstalowane w elektrowniach. Niezależnie od szczegółów konstrukcyjnych, działanie prądnic oparte jest na *prawie indukcji elektromagnetycznej Faradaya*

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

W zamkniętym obwodzie cewki, na skutek zmiany strumienia indukcji magnetycznej, indukuje się siła elektromotoryczna *E*, proporcjonalna do szybkości zmian strumienia indukcji magnetycznej $\frac{d\Phi}{dt}$ i przeciwnie skierowana. Kierunkiem przepływu prądu indukowanego rządzi reguła Lenza (rysunek 4.1a). Gdy odsuwamy magnes wtedy w cewce indukuje się prąd skierowany w takim kierunku, by wytworzone przepływem prądu pole magnetyczne przeciwdziałało ruchowi magnesu. W przypadku oddalania magnesu, naprzeciw bieguna *N* powstaje biegun *S*. Siłę elektromotoryczną w cewce zaindukować można również magnesem obracającym się w sposób pokazany na rysunku (4.1b). Obrót jest korzystniejszy, gdyż łatwiej skonstruować urządzenie do obra-

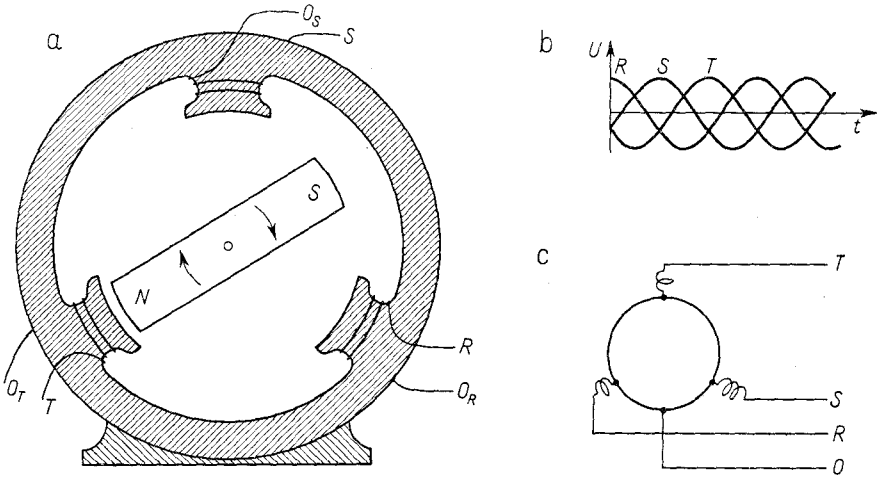
cania magnesu niż do jego przesuwania. Zauważymy, że w przypadku obrotu magnesu, prąd indukowany zmienia swój kierunek; gdy oddala się biegun N, prąd posiada inny kierunek niż wtedy, gdy oddala się biegun S. Jeżeli obrót magnesu będzie odbywał się ze stałą częstością, wtedy indukowany prąd ze stałą częstością zmieniać będzie swój kierunek. Rysunek (4.1b) przedstawia więc prototyp prądnicy prądu przemiennego.



4.1. Indukowanie prądu w cewce za pomocą magnesu.

Zasadę budowy prawdziwej *prądnicy* (generatora) *prądu trójfazowego*, pokazang na rysunku 4.2 (P2, § 4.21–22).

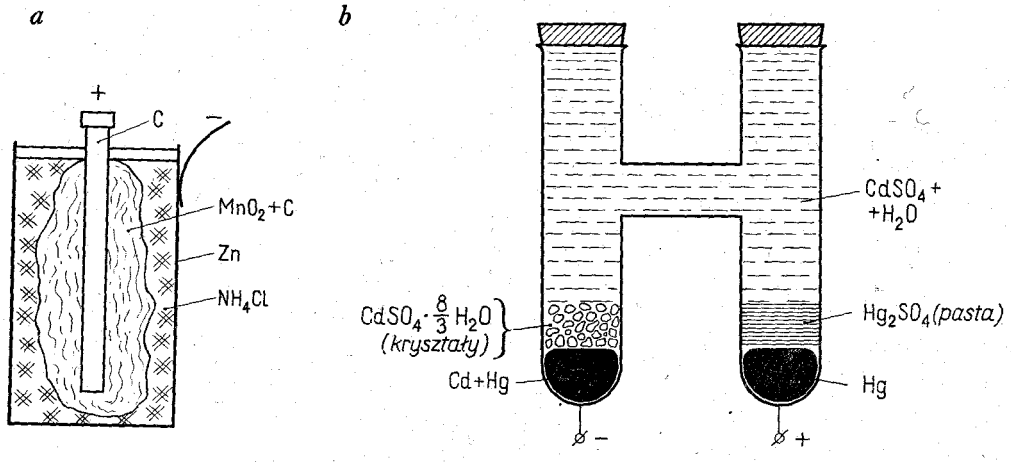
Prądnica zbudowana jest z nieruchomego twornika składającego się z 3 cewek (może ich być $3n$) osadzonych na rdzeniach żelaznych połączonych korpusem oraz ruchomego wirnika, którym jest obracający się magnes lub elektromagnes. Obracający się magnes indukuje w cewkach prąd przemiany, którego napięcie zmienia się w sposób pokazany na rysunku 4.2b. Napięcia w poszczególnych cewkach są przesunięte względem siebie o kąt $\frac{2}{3}\pi$ (120°). Przewody O_R, O_S i O_T połączone są razem i odprowadzone jednym



4.2. Zasada działania prądnicy trójfazowej (a), przebieg napięć w poszczególnych fazach (b) oraz łączenie w gwiazdę (c).

przewodem O (połączenie w gwiazdę rys. 4.2c). Napięcia pozostałych końców cewek odprowadzone są za pomocą przewodów oznaczonych R, S, T, które nazywają się przewodami fazowymi lub *fazami*. Pomiędzy fazami istnieje napięcie skuteczne 380 V. W praktyce posługujemy się prądem pochodzącym z jednej fazy. Do napędzania wirnika prądnicy stosuje się turbiny parowe. W dużych elektrowniach turbina wraz z generatorem stanowi jedną całość i nazywa się turbogeneratorem.

Działanie ogniwa. Zasady, kwasy i sole rozpuszczone w wodzie ulegają *dysocjacji elektrolitycznej* polegającej na rozpadzie drobin na jony (np. $CuSO_4 \rightarrow Cu^{++} + SO_4^{--}$, $HCl \rightarrow H^+ + Cl^-$, $NH_4Cl \rightarrow NH_4^+ + Cl^-$). Roztwory tych ciał nazywamy elektrolitami. Metal zanurzony w elektrolicie wykazuje tzw. *elektrolityczną prężność roztwórczą*, która powoduje przechodzenie jego jonów (Cu^+, Zn^{++}) do roztworu, wtedy sam metal ładuje się ujemnie. Elektrolitycznej prężności roztwórczej przeciwstawiają się siły elektrostatyczne działające między naładowanym metalem i jonami w elektrolicie oraz *ciśnienie osmatyczne jonów* znajdujących się w roztworze, prowadzące do ich wydzielania się na ściankach. W wyniku działania tych czynników ustala się równowaga dynamiczna i różnica potencjałów między metalem a elektrolitem zwana *potencjałem elektrolitycznym*. Różnica potencjałów wytworzy się również między ciałem nie wykazującym elektrolitycznej prężności roztwórczej np. węglem a elektrolitem; jest ona uwarunkowana ciśnieniem osmotycznym jonów. Wartość potencjału elektrolitycznego jest inna dla każdego układu, ciało stałe–elektrolit. Jeżeli więc dwa ciała (dwa różne metale, lub metal oraz węgiel itp.) zanurzymy w elektrolicie, to między nimi istnieje napięcie równe różnicy potencjałów elektrolitycznych na granicy każdego z tych ciał z elektrolitem. Ciała zanurzone w elektrolicie nazywać będziemy *elektrodami*. Jeżeli elektrody połączymy przewodem elektrycznym, popłynie prąd elektryczny neutralizujący ładunki elektrod, lecz pozbawienie elektrod ładunku zakłóca równowagę dynamiczną i następna porcja jonów może przejść do elektrolitu (w przypadku metalu) lub wydzielić się na elektrodzie (węgiel). Proces ten podtrzymuje ładunki elektrod dzięki czemu prąd czerpać możemy w sposób ciągły do czasu zużycia elektrolitu lub metalu. Omawiamy układ nazywamy *ogniwem*. Zaznaczyć należy, że w obwodzie podłączanym do ogniwa płynie prąd elektronowy, a w elektrolicie prąd jonowy.



4.3. Ogniwo Leclanchégo (a) i normalne (b).

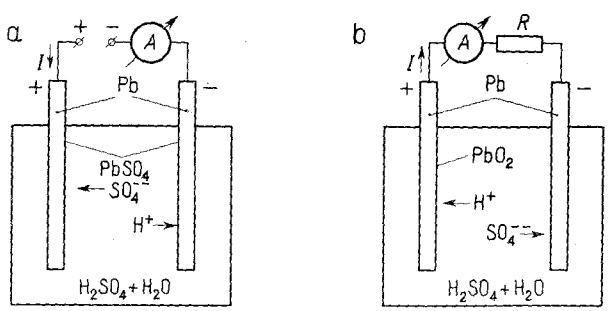
Obecnie najczęściej stosuje się *ogniwo Leclanchégo* (rys. 4.3a). Zewnętrzna obudowa cynkowa spełnia rolę elektrody ujemnej (katody), a węgiel elektrody dodatniej (anody). Elektrolitem jest wodny roztwór salmiaku (NH_4Cl), który dysocjuje na jony NH_4^+ i Cl^-. Jony NH_4^+ osadzają się na elektrodzie węglowej ładując ją dodatnio. Gdy czerpiemy prąd jony NH_4^+ zobojętniają się i rozpadają na NH_3 oraz wodór. Na anodzie powstaje

warstwa wodoru, która nie dopuszcza następnych jonów NH_4^+, a tym samym obniża wartość potencjału elektrolitycznego. Zjawisko powyższe nazywamy *polaryzacją elektrod*. Celem zlikwidowania warstwy wodoru anoda jest otoczona środkiem utleniającym (MnO_2), który utlenia wodór. Rozpuszczające się w elektrolicie jony cynku tworzą z jonami chloru, chlorek cynku; $Zn^{++}+2Cl^- \rightarrow ZnCl_2$. Ogniwo działa do chwili wyczerpania się jednego ze składników: Zn, NH_4Cl lub MnO_2. Ogniwa Leclanchégo produkowane są w postaci tzw. ogniw suchych, w których nie stosuje się ciekłego roztworu, lecz trociny nasycone elektrolitem. Siła elektromotoryczna wynosi 1,5 V. Celem otrzymania wyższych napięć ogniwa Leclanchégo łączymy szeregowo (baterie do latarek i baterie anodowe).

Rolę wzorca napięcia spełnia *ogniwo normalne* zwane również *ogniwem Westona* (rys. 4.3b). Jego biegunem dodatnim jest rtęć metaliczna, a ujemnym kadm używany w postaci amalgamatu rtęci. Elektrolitem jest wodny roztwór siarczanu kadmu. Siła elektromotoryczna ogniwa normalnego wynosząca w temperaturze 20°C $E = 1{,}01865$ V wykazuje dużą stałość i bardzo małą zależność od temperatury.

Akumulatorem ołowiowym nazywamy układ składający się z dwóch elektrod ołowiowych pokrytych warstwą siarczanu ołowiowego $PbSO_4$ oraz wodnego roztworu kwasu siarkowego H_2SO_4; $PbSO_4\text{-}H_2SO_4+H_2O\text{-}PbSO_4$. Jeżeli układ taki podłączymy do źródła prądu, zachodzi elektroliza kwasu siarkowego, w czasie której na katodzie wydziela się wodór, a na anodzie reszta kwasowa SO_4. Na elektrodach zachodzą podczas ładowania następujące reakcje wtórne:

$$\text{Ładowanie} \quad \begin{array}{ll} \text{katoda} & PbSO_4+2H^+ \rightarrow Pb^{++}+H_2SO_4 \\ \text{anoda} & PbSO_4+SO_4^{--}+2H_2O \rightarrow PbO_2^{--}+2H_2SO_4 \end{array} \tag{4.1}$$



4.4. Procesy zachodzące w akumulatorze ołowiowym w czasie ładowania (a) i rozładowania (b).

W wyniku elektrolizy otrzymaliśmy układ $Pb\text{-}H_2SO_4+H_2O\text{-}PbO_2$, który jest układem asymetrycznym i spełnia rolę ogniwa. Na skutek ciśnienia osmotycznego jonów na elektrodzie ołowiowej wydzielają się jony SO_4^{--}, a na elektrodzie z tlenku ołowiu jony H^+. Gdy z akumulatora czerpiemy prąd, wydzielone jony neutralizują się i na obydwu elektrodach zachodzą podczas rozładowania reakcje wtórne:

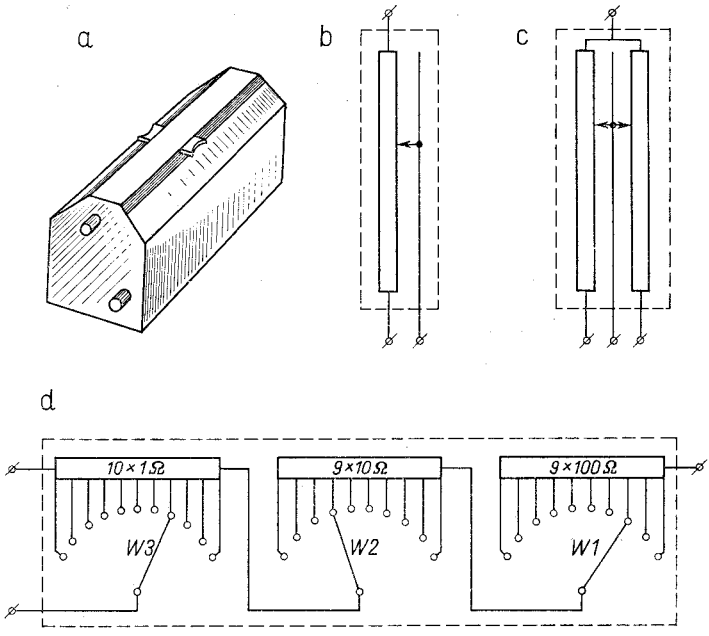
$$\text{Rozładowanie} \quad \begin{array}{ll} \text{katoda} & Pb^{++}+SO_4^{--} \rightarrow PbSO_4 \\ \text{anoda} & PbO_2^{--}+2H^++H_2SO_4 \rightarrow PbSO_4+2H_2O \end{array} \tag{4.2}$$

Prąd możemy czerpać do chwili całkowitego pokrycia powierzchni elektrod warstwą $PbSO_4$. Proces (4.1) prowadzący do powstania układu asymetrycznego nazywamy ładowaniem akumulatora, a rozładowaniem proces (4.2). Zauważymy, że w procesie ładowania wytwarza się kwas siarkowy i ubywa wody, a przy rozładowaniu kwasu siarkowego ubywa i ilość wody wzrasta. Tak więc w akumulatorze naładowanym jest duże stężenie roztworu H_2SO_4, a małe w rozładowanym. Zauważymy również, że ujemnym biegunem naładowanego akumulatora jest ta sama elektroda, która była katodą w czasie elektrolizy. Oznacza to, że prąd czerpany z akumulatora płynie w kierunku przeciwnym niż prąd ładowania, to samo dotyczy prądu jonowego w elektrolicie (por. rysunek 4.4).

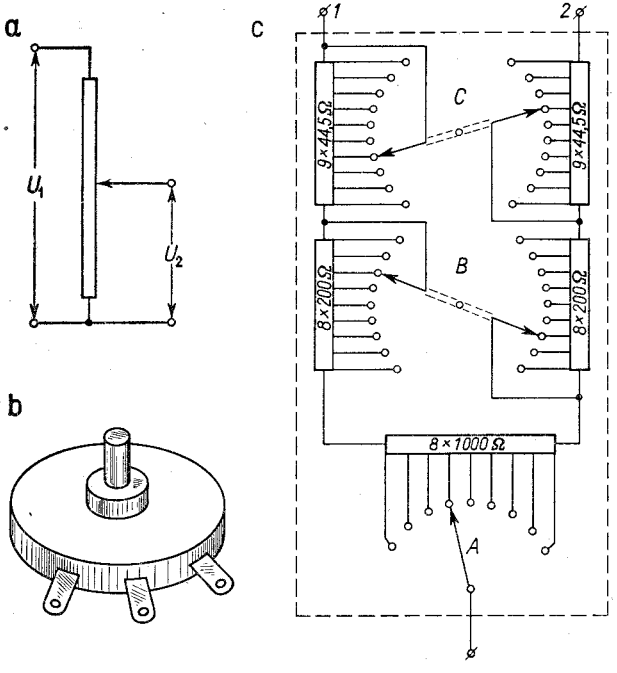
4.2. OPORNIKI, POTENCJOMETRY I DŁAWIKI

Wzdłuż przewodnika z prądem I występuje spadek napięcia U, którego wielkość określona jest prawem Ohma $U = RI$. Często zjawisko to wykorzystuje się celem zmniejszenia napięcia na zaciskach odbiornika, a tym samym ograniczenia prądu w obwodzie. Jeżeli przewodnik wykorzystany jest w takim właśnie celu, nazywamy go *opornikiem*. Istnieje wiele różnych typów oporników. Do najbardziej rozpowszechnionych należą *oporniki radiowe* z prętów o dużym oporze właściwym (oporniki masowe), z prętów ceramicznych pokrytych warstwą materiału o dużym oporze właściwym lub z drutu o dużym oporze właściwym nawiniętego na pręcie lub rurce ceramicznej (oporniki drutowe). Opór oporników radiowych waha się w granicach od kilku omów do kilku megaomów. W laboratoriach często stosuje się *oporniki suwakowe* (rys. 4.5a–4.5c). W opornikach takich drut oporowy nawinięty jest na rurze ceramicznej. Posiadają one ruchomy styk, tzw. suwak pozwalający zmieniać opór w granicach od 0 Ω do, wartości maksymalnej wynoszącej od kilku omów do 10 kiloomów. Obecnie coraz szerzej stosowane są tzw. *oporniki dekadowe*. Opornik taki składa się z bardzo wielu oporników drutowych połączonych w sposób pokazany na rysunku 4.5d na przykładzie opornika 3-dekadowego. Oporniki włączane za pomocą jednego przełącznika wielopozycyjnego tworzą jedną dekadę. Opory dobrane są bardzo dokładnie i w poszczególnych dekadach posiadają wartości: 0,1 Ω, 1 Ω, 10 Ω, 100 Ω, 1000 Ω. W jednej dekadzie znajduje się 9–10 oporników każdego typu. Przez odpowiednie ustawienie przełączników można dobrać każdą wartość oporu w granicach 0–10 000 Ω z dokładnością do 0,1 Ω.

Często stosuje się *potencjometryczne połączenia oporów* pokazane schematycznie na rysunku 4.6a. Ponieważ wzdłuż przewodnika istnieje liniowy spadek napięcia, napięcie U_2 zależy również od położenia suwaka i można je zmieniać w granicach od 0 do U_1. Przez opornik połączony potencjometrycznie płynie prąd o stałym natężeniu. W radiotechnice stosuje się tzw. potencjometry radiowe (rys. 4.6b). Obecnie często stosuje się potencjometry dekadowe. Na rysunku 4.6c przedstawiono przykładowy układ połączeń potencjometru dekadowego. W pokazanym układzie na dekadę A składa się 8 oporników o oporze $R = 1000$ Ω każdy. Łączny opór oporników dekady A wynosi 8000 Ω. Dekada B składa się z dwóch serii po 8 oporników po 200 Ω, łączonych w taki sposób, że w obwodzie włączony jest zawsze opór 1600 Ω. Dekada C składa się z dwóch serii po 9 oporników o oporze ok. 44,5 Ω każdy, z czego w obwodzie na stałe włączonych jest 9 oporników o łącznym oporze ok. 400 Ω. Całkowity opór włączony między za-



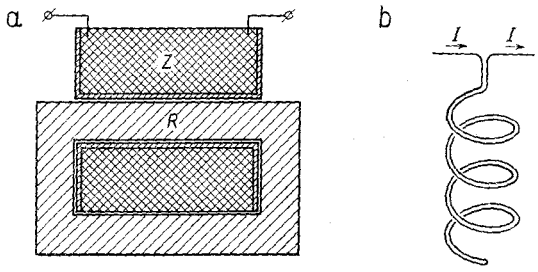
4.5. Oporniki: suwakowy (a, b), suwakowy podwójny (c) i dekadowy (d).



4.6. Potencjometry: zasada działania (a), radiowy (b) i dekadowy (c).

ciskami *1* i *2* wynosi zawsze, niezależnie od ustawienia przełączników *A*, *B* i *C*, 10 000 Ω. Potencjometr dekadowy pozwala uzyskać dowolne napięcie z przedziału od 0 do U_{max} (napięcie przyłożone do zacisków *1* i *2*), z dokładnością 1‰.

Dla każdego opornika istnieje maksymalne dopuszczalne natężenie I_{max} prądu. Po przekroczeniu I_{max} w oporniku wydziela się ilość ciepła wystarczająca do stopienia materiału opornika, opornik zostaje zniszczony. Na opornikach dekadowych i suwakowych wartość I_{max} jest podana. W przypadku oporników radiowych podaje się dopuszczalną moc P_{max}, którą można wykorzystać do obliczenia I_{max}. Przed użyciem opornika należy w oparciu o prawo Ohma obliczyć prąd, który popłynie przez opornik. W przypadku połączeń, w których wykorzystuje się suwak opornika, przed włączeniem prądu suwak ustawiamy w położeniu zapewniającym maksymalny opór w obwodzie. Suwak nie może być podłączony do źródła prądu.



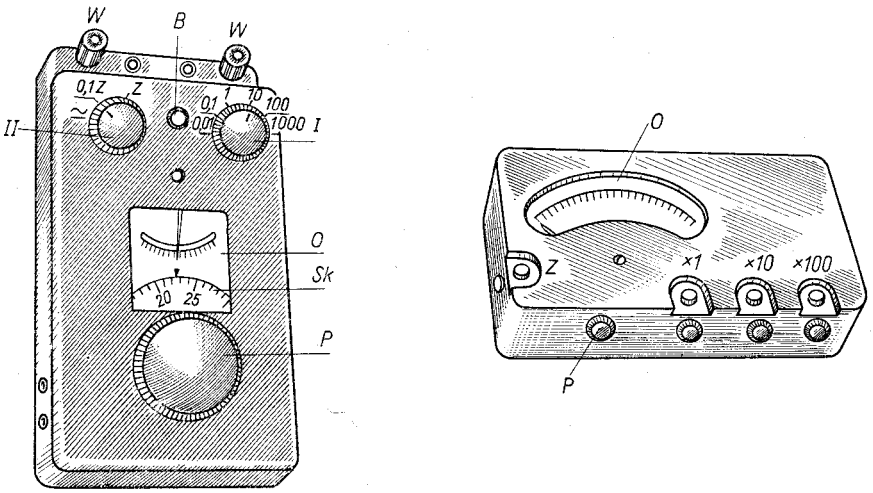
4.7. Budowa dławika (a), *R* — rdzeń, *Z* — uzwojenia; nawinięcie bezindukcyjne, bifilarne (b).

Zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej Faradaya w każdym przewodniku, przez który płynie prąd przemienny, indukuje się siła elektromotoryczna indukcji własnej (S3, § 93), $E = -L\frac{dI}{dt}$. Współczynnik indukcji własnej L zależy od geometrii przewodnika i jest on duży dla cewki. Opór pozorny cewki wyraża się wzorem ωL przy $R \ll \omega L$ szczególnie dla cewki wypełnionej rdzeniem żelaznym. Cewki z rdzeniem nazywamy *dławikami* i stosujemy jako oporniki w obwodach prądu przemiennego (rys. 4.7a). Dławik posiada bardzo mały opór R i włączony w obwód prądu stałego ulega zniszczeniu. Celem wyeliminowania wpływu indukcji własnej na opór precyzyjnych oporników drutowych stosuje się tzw. *nawinięcie bifilarne* przedstawione na rysunku 4.7b.

4.3. PROSTE METODY POMIARU OPORU ELEKTRYCZNEGO

Dokładne pomiary oporu elektrycznego wykonuje się za pomocą układów mostkowych Wheatstone'a (§ 17.1) lub Thomsona (§ 17.2). W praktyce laboratoryjnej do mniej precyzyjnych pomiarów stosuje się przyrządy nie wymagające skomplikowanej obsługi jak np. *mostek MW4* i omomierz. Mostek MW4 jest mostkiem Wheatstone'a (§ 17.1b), w którym wszystkie elementy, a więc oporniki, galwanometr i źródło prądu są wbudowane. Oporniki R_1 i R_2 są dwiema częściami potencjometru zaopatrzonego w przełącznik *I* oraz skalę *Sk* (rys. 4.8a). Wykonując pomiar mierzony opornik podłączamy do

zacisków *WW*. Za pomocą przełącznika *I* znajdującego się w prawej górnej części obudowy dobieramy opornik porównawczy R_1 o odpowiednim zakresie wartości. Przełącznik *II* znajdujący się w lewym górnym narożniku służy do włączania źródła prądu, którym jest ogniwo Leclanchégo o napięciu 4,5 V. Przełącznik *II* posiada trzy pozycje ~; 0,1 *Z*; *Z*. Pozycja ~ przeznaczona jest do pomiaru za pomocą prądu przemiennego. W pozycji 0,1 *Z* włączone jest napięcie 0,45 V, a w pozycji *Z* napięcie 4,5 V. Miernik włącza się za pomocą włącznika *B*. Za pomocą pokrętła *P* zmienia się położenie suwaka potencjometru. Pomiar oporu wykonujemy ustawiając początkowo przełącznik *II* w położeniu 0,1 *Z*. Po włączeniu miernika przyciskiem *B* wychyli się wskazówka w okienku *O*. Nie zdejmując palca z przycisku za pomocą pokrętła *P* dobieramy takie położenie suwaka potencjometru, by wychylenie doprowadzić do zera. Jeżeli nie można tego osiągnąć, zmieniamy zakres wartości oporu porównawczego. Gdy wskazówka wychyla się w lewo, przełącznikiem *I* zmniejszamy opór porównawczy, gdy miernik wychyla się w prawo zakres zwiększamy i powtarzamy próbę kompensacji za pomocą potencjometru. Po skompensowaniu wychylenia należy przełącznik *II* ustawić w pozycji *Z* i skorygować kompensację za pomocą potencjometru. Opór badanego opornika jest iloczynem wskazania skali potencjometru odczytanego w okienku *O* oraz liczby, którą wskazuje przełącznik *I*.



4.8. Mostek Wheatstone'a (a) i omomierz (b).

Działanie *omomierza* oparte jest na prawie Ohma, $U = RI$. Natężenie prądu w obwodzie, w którym źródło posiada stałe napięcie $U = \text{const}$ jest odwrotnie proporcjonalne do oporu, $I = \frac{\text{const}}{R}$. Zatem określonym wartościom oporu odpowiadają ściśle określone natężenia prądu. Miernik można wyskalować w omach, przy czym zerowemu wychyleniu odpowiada opór $R = \infty$, a wychyleniu maksymalnemu opór $R = 0\ \Omega$. Budowę omomierza w wykonaniu fabrycznym pokazano na rysunku 4.8b. Posiada on trzy zakresy pomiarowe. Źródłem prądu jest ogniwo Leclanchégo o napięciu 4,5 V. Przed pomiarem zwieramy zacisk interesującego nas zakresu ($\times 1$, $\times 10$ lub $\times 100$) z zaciskiem

Z i za pomocą potencjometru P znajdującego się na ściance bocznej (niewidoczny na rysunku) regulujemy wskazanie miernika w okienku O na zero. Po skorygowaniu zera do tej samej pary zacisków podłączamy mierzony opornik. Badany opór równy jest iloczynowi wskazania miernika i mnożnika wyrytego obok zacisku odpowiadającego danemu zakresowi.

Mierniki uniwersalne (§ 18.01–08) zaopatrzone są w zakresy pomiarowe służące do pomiaru oporu. Działają one na tej samej zasadzie co omomierz. Stosuje się w nich źródło prądu o napięciu 1,5 V (pojedyncze ogniwo Leclanchégo).

4.4. KONDENSATORY

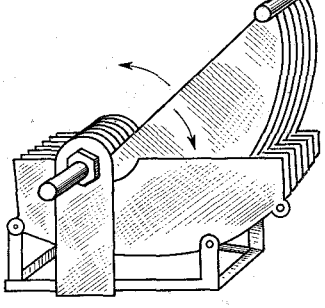
Często w praktyce laboratoryjnej stosowane są kondensatory płytkowe. Składają się one z dwóch płytek, z których jedną zazwyczaj łączymy z ziemią lub obudową przyrządów elektronicznych, czyli z tzw. masą. Ilość ładunku Q, który można zgromadzić na okładce zależy od przyłożonego napięcia U. Stosunek tych dwóch wielkości nazywamy pojemnością

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Pojemność kondensatora zależy od odległości d płytek, ich powierzchni S oraz od względnej stałej dielektrycznej ε_r środowiska wypełniającego przestrzeń między okładkami (por. wzór 1.16)

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}. \tag{4.3}$$

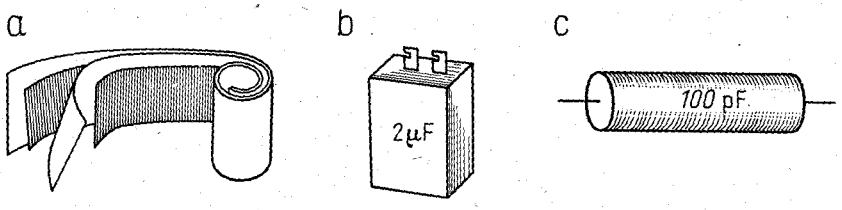
W praktyce stosuje się wiele typów kondensatorów, z których wymienimy *powietrzny kondensator płytkowy* (rys. 19.2), którego szczególną odmianą jest *kondensator obrotowy* (rys. 4.9), składający się z układu płytek ładowanych na przemian dodatnio i ujemnie.



4.9. Kondensator obrotowy.

Jedną serię płytek można obracać zmieniając w ten sposób pojemność kondensatora. W kondensatorze *blokowym* (rys. 4.10) powierzchnia S płytek jest bardzo duża. Tworzą ją dwa długie paski cynfolii oddzielone materiałem o dużej wartości względnej przenikalności dielektrycznej ε_r, zwinięte w rulon i umieszczone w blaszanej lub plastykowej osłonie. Ważną rolę odgrywają *kondensatory elektrolityczne*, w których dielektrykiem

jest bardzo cienka warstwa wodorotlenku glinu $Al(OH)_3$. Warstwa ta wytwarza się na dodatniej elektrodzie glinowej podczas elektrolizy wodnego roztworu boraksu i kwasu borowego (H_2BO_4). Kondensator elektrolityczny zbudowany jest z dwóch pasków metalicznego glinu oddzielonych papierem nasyconym elektrolitem. Warstwa $Al(OH)_3$ wytwarza, czyli formuje się po przyłożeniu napięcia. Jedną okładką jest tu płytka glinowa, a drugą jest elektrolit. Warstwa $Al(OH)_3$ jest bardzo cienka, stąd pojemność bardzo duża (por. wzór 4.36). W kondensatorze elektrolitycznym nie można zmieniać biegunów, tzn. nie można ładować go przeciwnie niż był uformowany.

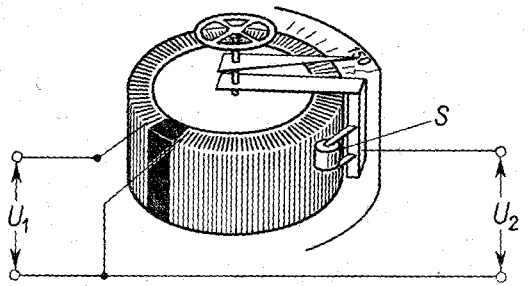


4.10. Kondensatory blokowe (b, c) i ich budowa (a).

Pomiary pojemności kondensatorów są uciążliwe, kilka metod podano w dalszych paragrafach (19.4–5, 26.2–3). Stosując kondensatory nie wolno przykładać napięć przekraczających wartość nominalną napięcia pracy podaną na obudowie, tzw. *napięcie przebicia*. Stosując kondensator w obwodach prądu przemiennego musimy zwrócić uwagę, by napięcie szczytowe nie przekroczyło napięcia przebicia.

4.5. TRANSFORMATORY

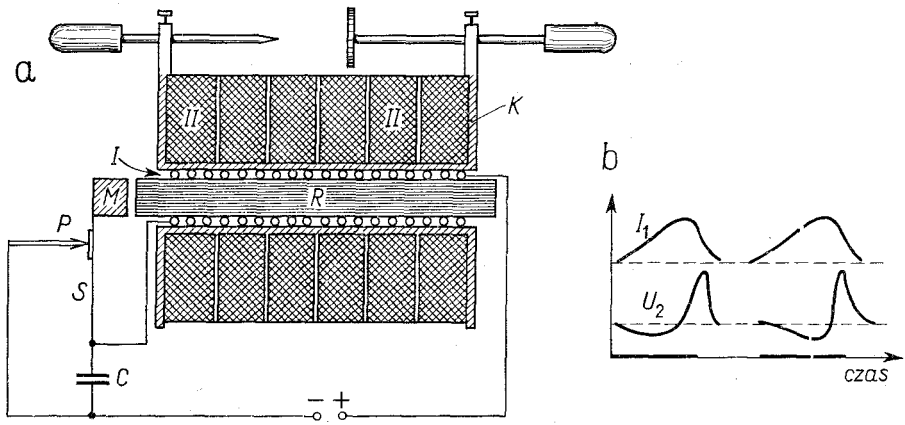
Transformatory służą do podwyższania lub obniżania napięcia prądu przemiennego. Ich budowę omówiono w § 24.3. Składają się one z rdzenia i dwóch uzwojeń, pierwotnego utworzonego przez N_1 zwojów i wtórnego o N_2 zwojach. Napięcie transformuje



4.11. Budowa autotransformatora.

się według prawa $U_1N_1 = U_2N_2$. Stosunek ilości zwojów N_1/N_2 nazywamy przekładnią transformatora. Poza zwykłymi transformatorami o stałej przekładni obecnie szeroko stosowane są *autotransformatory* o przekładni zmiennej i jednym, stałym uzwojeniu. Budowę autotransformatora pokazano na rysunku 4.11. Jego rdzeń posiada kształt pierścienia, a uzwojenie jest nawinięte na rdzeniu w jednej warstwie wzdłuż całego

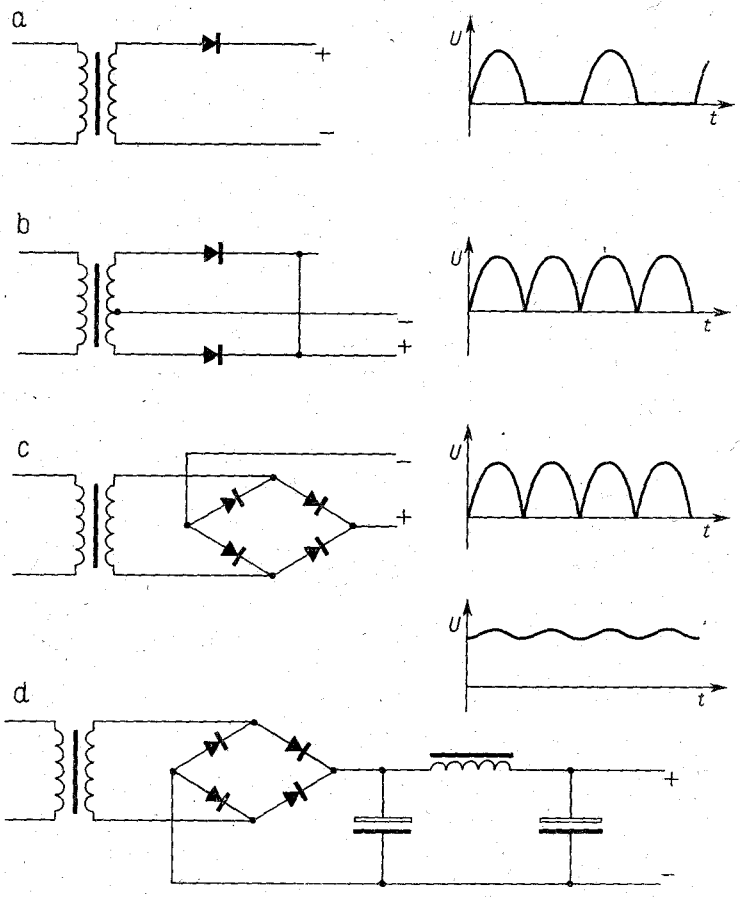
obwodu. Napięcie z autotransformatora zbiera się za pomocą suwaka w taki sam sposób jak w potencjometrach. Za pomocą autotransformatora zasilanego napięciem 220 V można zmieniać napięcie w sposób ciągły od 0 do 250 V. Wadą autotransformatorów jest kontakt elektryczny układu odbiorczego z siecią prądu przemiennego. Przy eksploatacji autotransformatorów należy zwrócić uwagę na to, by nie czerpać prądów większych od dopuszczalnego, wskazanego na obudowie. Włączenie autotransformatora do źródła prądu stałego powoduje przepalenie jego uzwojeń.



4.12. Induktor Ruhmkorffa.

Odmianą transformatora jest *induktor Ruhmkorffa* (rys. 4.12). Służy on do transformowania prądu stałego. Rdzeń R składa się z wiązki prętów żelaznych. Bezpośrednio na rdzeniu nawinięte jest uzwojenie pierwotne I, a następnie w dobrze izolowanych korpusach K uzwojenie wtórne II składające się z bardzo dużej liczby zwojów cienkiego drutu miedzianego. Obwód pierwotny induktora zasilany jest prądem stałym, w obwodzie którego znajduje się przerywacz P. Gdy przez uzwojenie I przepływa prąd, rdzeń magnesuje się i przyciąga żelazny młoteczek M umocowany na sprężynie S. Wtedy przerywacz P przerywa obwód prądu, rdzeń rozmagnesowuje się, młoteczek wraca w pierwotne położenie i włącza prąd. Cykl taki powtarza się kilkadziesiąt razy w sekundzie. Kondensator C zapobiega iskrzeniu między młoteczkiem M i rdzeniem R przy wyłączaniu prądu, gdy przy wyłączaniu powstaje duża siła elektromotoryczna indukcji własnej i wtedy prąd powstały na skutek działania tej siły elektromotorycznej ładuje kondensator. Napięcie wytwarzające się w induktorze jest prawie jednokierunkowe. Dzieje się tak dlatego, że przy włączaniu prądu jego natężenie wzrasta powoli i indukuje się niewielka siła elektromotoryczna, która zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej Faradaya (4.1) jest proporcjonalna do szybkości zmian indukcji magnetycznej $\frac{d\Phi}{dt}$, a ta jest proporcjonalna do szybkości zmian natężenia prądu; stąd $E = -L\frac{dI}{dt}$. Prąd zostaje przerwany gwałtownie, dlatego zachodzi bardzo szybka zmiana natężenia prądu i indukuje się bardzo duża siła elektromotoryczna. Zilustrowano to na rysunku (4.12b).

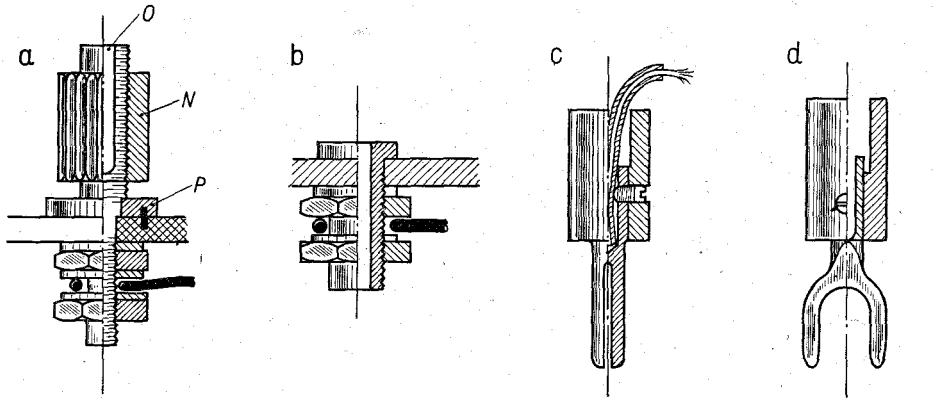
Do urządzeń tego typu należą lampy elektroniczne, diody i tyratrony lub prostowniki półprzewodnikowe np. diody germanowe i prostowniki selenowe. Zasada działania tych ostatnich jest podobna do działania diody ostrzowej (§ 21.3). Prostowniki stosuje się z reguły wraz z transformatorami i nie włącza się ich bezpośrednio do sieci prądu przemiennego. Jeżeli do prostowania zastosujemy tylko jeden prostownik, to uzyskujemy wprawdzie prąd jednokierunkowy, lecz silnie tętniący (rys. 4.13a). Tętnienia zmniejszają się w przypadku, gdy stosujemy prostowanie dwukierunkowe (rys. 4.13b) lub układ



4.13. Układy prostownicze: prostowanie jednokierunkowe (a), dwukierunkowe (b), układ Graetza (c) oraz układ Graetza z filtrem (d).

Graetza (rys. 4.13c). W celu dalszego zmniejszenia tętnień napięcia stosuje się dodatkowo na wyjściu prostownika filtr składający się z kondensatorów elektrolitycznych i dławika połączonych w sposób pokazany na rysunku 4.13d. Przy odpowiednio dużych pojemnościach kondensatorów i indukcji własnej dławika układ składający się z prostownika i filtru daje prąd o prawie dokładnie stałym napięciu.

W schematach nie zaznacza się zacisków, do których przyłączamy przewody, a miejsca połączenia dwóch przewodów dobiera się dowolnie. W rzeczywistości każdy przyrząd ma *zaciski tablicowe* (rys. 4.14), do których możemy podłączać przewody elektryczne. Budowa zacisków (rys. 4.14a) umożliwia podłączenie przewodów przez dokręcenie pomiędzy podstawkę P i nakrętkę N zacisku lub przez włożenie końcówki przewodu w otwór O w zacisku. Istnieją jednak zaciski, w których brak otworu. W niektórych przypadkach zamiast zacisków stosowane są tzw. gniazdka radiowe, do których można

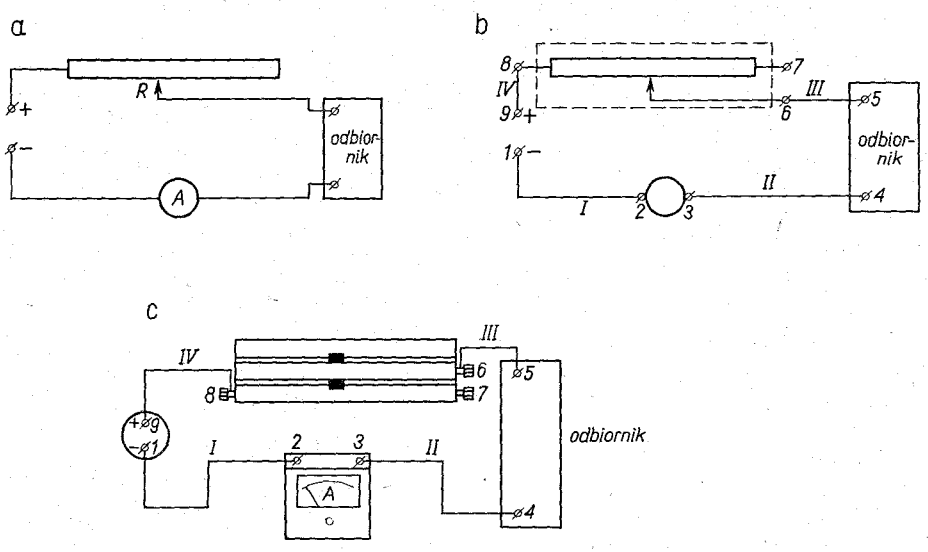


4.14. Budowa zacisków tablicowych (a), gniazdek radiowych (b), wtyczek bananowych (c) i końcówek widełkowatych.

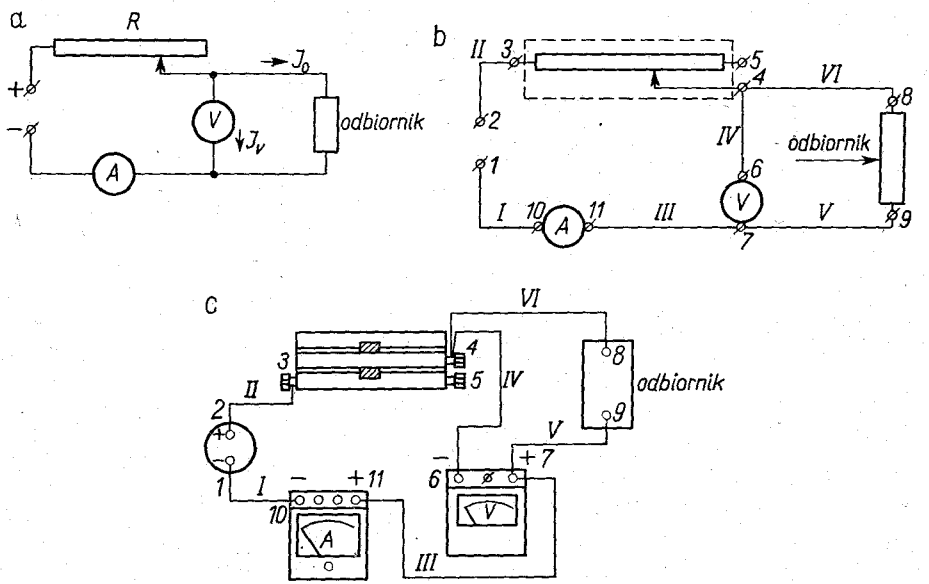
(tylko) wkładać końcówkę przewodu (rys. 4.14b). Przewody możemy połączyć tylko przy zaciskach przyrządów. Pokazano to na rysunkach 4.15–4.20. Przewody służące do połączeń elektrycznych są przewodami składającymi się z wielu cienkich drucików miedzianych (linka), oblanych materiałem izolacyjnym np. igelitem, gumą itp. Końcówki zakładane do przewodów nazywamy *wtyczkami bananowymi* (rys. 4.14c) lub *końcówkami widełkowymi* (rys. 4.14d).

Sposób odczytywania i łączenia układów wyjaśniamy na kilku przykładach. Pierwszy z nich (rys. 4.15) przedstawia układ służący do pomiaru i regulowania natężenia prądu w dowolnym odbiorniku np. grzejniku elektrycznym, cewce pomiarowej itp. Obwód ten składa się z amperomierza, opornika i odbiornika. Może być również wyłącznik, który stosujemy tylko w przypadku prądów elektrycznych o dużym natężeniu, $I > 1$ A. Schemat pokazany na rysunku 4.15a jest schematem uproszczonym, na którym nie podano miejsc połączeń przewodów elektrycznych oraz rozmieszczenia zacisków. Na rysunku 4.15b pokazano rozmieszczenie zacisków i dla wygody ponumerowano je, ponumerowano również przewody (cyfry łacińskie). Na rysunku 4.15c pokazano rozmieszczenie poszczególnych elementów. Rozwiązanie zaproponowane na rys. 4.15c nie jest jedyne, w tym prostym przypadku można zmieniać kolejność wszystkich elementów.

Na rysunku 4.16 przedstawiono nieco bardziej skomplikowany układ szeregowy przeznaczony do badania charakterystyki napięciowo-prądowej dowolnego odbiornika.



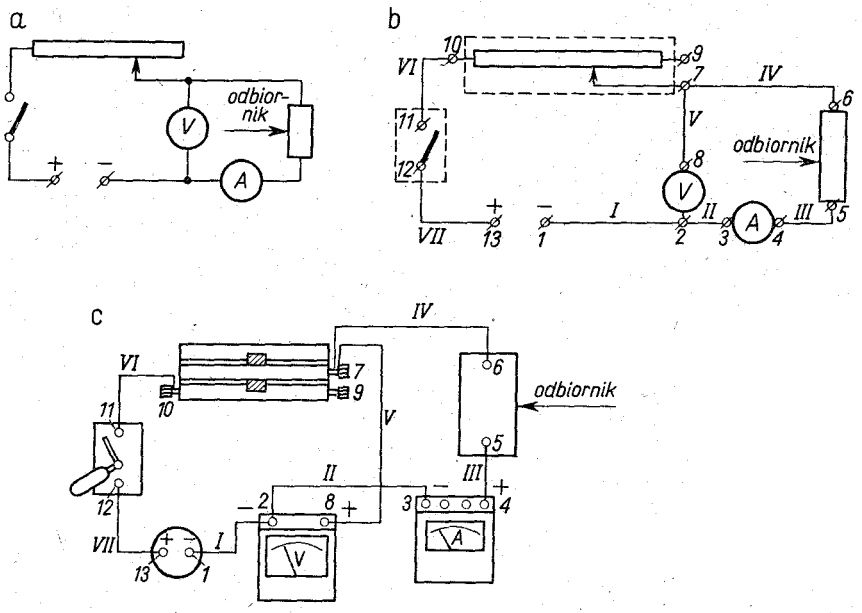
4.15. Układ do regulowania natężenia prądu. Schemat połączeń (a), sposób łączenia (b) i wygląd obwodu (c).



4.16. Układ do badania charakterystyk napięciowo-prądowych (stosowany, gdy $I_V \ll I_0$).

Schemat 4.16a jest również uproszczony i nie pokazano na nim miejsc połączeń przewodów elektrycznych i rozmieszczenia zacisków. Przy zastosowaniu oznaczeń podobnych jak na rys. 4.15 omawiany schemat przyjmie postać pokazaną na rysunku 4.16b. Z rysunku tego wynika, że do połączenia układu należy zastosować sześć przewodów elektrycznych ponumerowanych na schemacie cyframi rzymskimi od *I* do *VI* oraz, że do niektórych zacisków (*4* i *7*) należy łączyć po dwa przewody. Na rysunku 4.16c pokazano

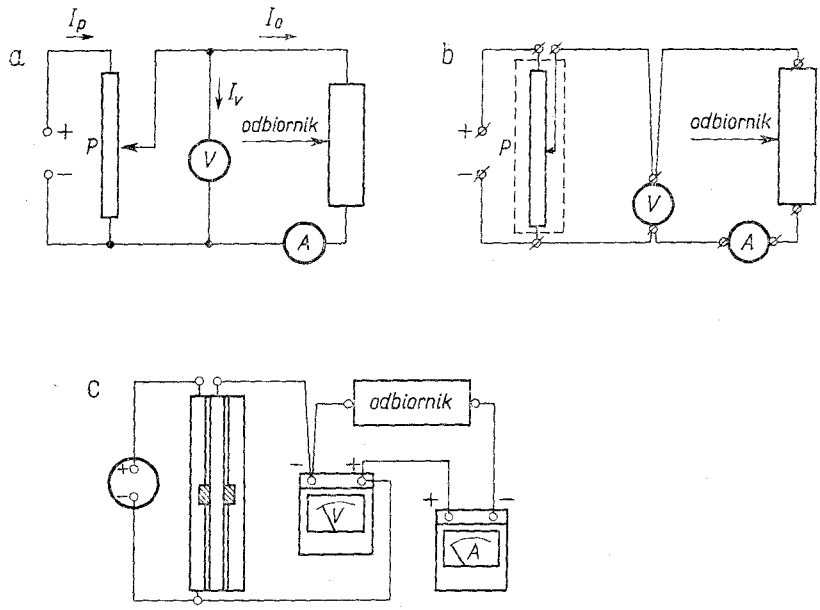
rzut perspektywiczny omawianego układu. Pokazany układ połączeń można stosować we wszystkich przypadkach, gdy prąd I_V płynący przez woltomierz jest bardzo mały w porównaniu z prądem I_0 płynącym przez odbiornik ($I_V \ll I_0$), ponieważ zakładamy, że amperomierz mierzy prąd I_0. W przypadku odbiorników pobierających bardzo mały prąd, gdy $I_V \simeq I_0$ stosować musimy schemat zmodyfikowany, pokazany na rysunku 4.17. Ten obwód również nie pozwala na zupełnie bezbłędny pomiar, bowiem do oporu odbiornika dołącza się opór amperomierza.



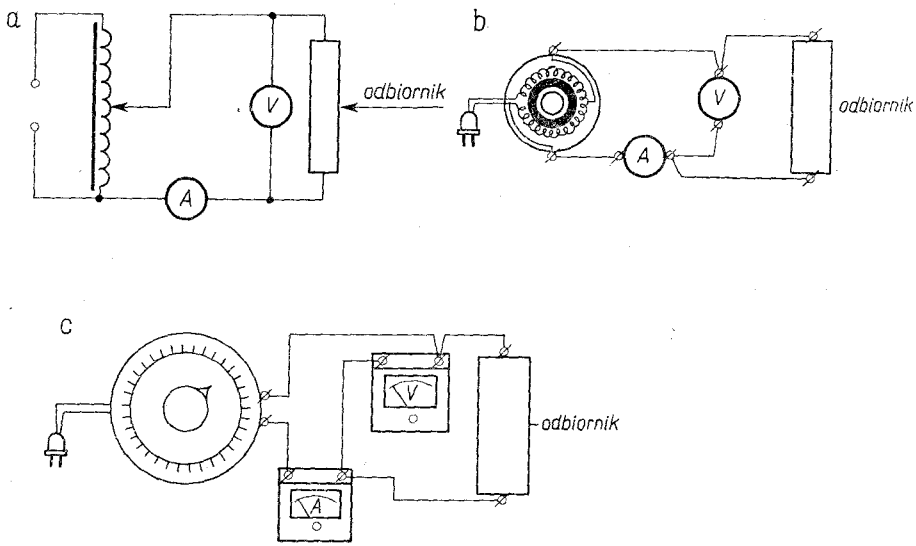
4.17. Inny układ do badania charakterystyk napięciowo-prądowych (stosowany, gdy $I_V \simeq I_0$ i $R_A \ll R_{odb}$).

Na rysunku 4.18 pokazano w podobny sposób schemat układu potencjometrycznego także do badania charakterystyk napięciowo-prądowych. Połączenie potencjometryczne można stosować tylko w przypadku, gdy prąd I_0 płynący przez odbiornik jest mały w stosunku do prądu I_p płynącego przez potencjometr ($I_0 < I_p$), stąd zawsze amperomierz jest połączony po stronie odbiornika (licząc od woltomierza); z reguły zachodzi wtedy przypadek $I_V \simeq I_0$. W przypadku obwodów prądu przemiennego zamiast potencjometru stosować możemy autotransformator. Z autotransformatora czerpać możemy duże prądy, stąd mierniki możemy rozmieścić podobnie jak w przypadku 4.16. Układ taki pokazano na rysunku 4.19. Na rysunku 4.20 pokazano w podobnych ujęciach układ nieco bardziej skomplikowany służący do pomiaru prędkości wyjściowej elektronu.

W większości układów, w których czerpie się niewielkie prądy, $I < 1$ A wyłącznik nie jest potrzebny. Prąd wtedy wyłącza się przez wyjęcie wtyczki bananowej z dodatniego bieguna źródła prądu. Ze względu na bezpieczeństwo, przy łączeniu w żadnym przypadku nie wolno włączać obwodu do źródła prądu przed sprawdzeniem przez prowadzącego. Za włączenie obwodu do źródła uważa się włączenie wtyczki do dodat-



4.18. Układ potencjometryczny do badania charakterystyk napięciowo-prądowych (stosowany, gdy $I_p > I_0$).



4.19. Układ do badania charakterystyk napięciowo-prądowych w obwodzie prądu przemiennego (z autotransformatorem).

Tabela 4.1

Oznaczenia stosowane w schematach elektrycznych

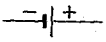
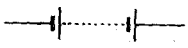
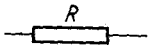
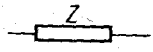
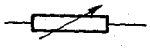
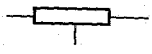
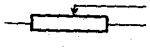
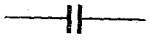
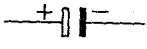
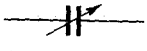
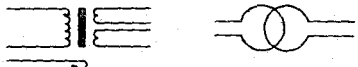
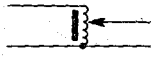
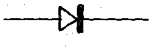
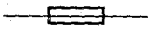
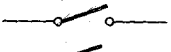
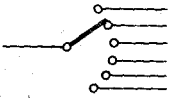
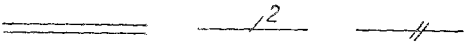
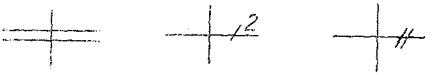
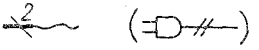
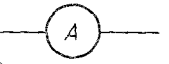
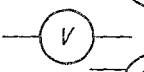
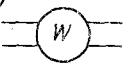
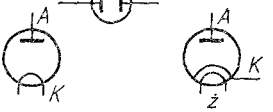
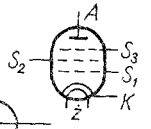
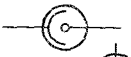
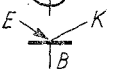
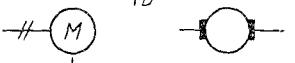
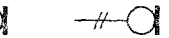
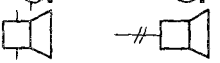
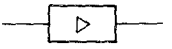
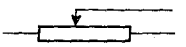
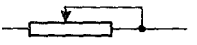
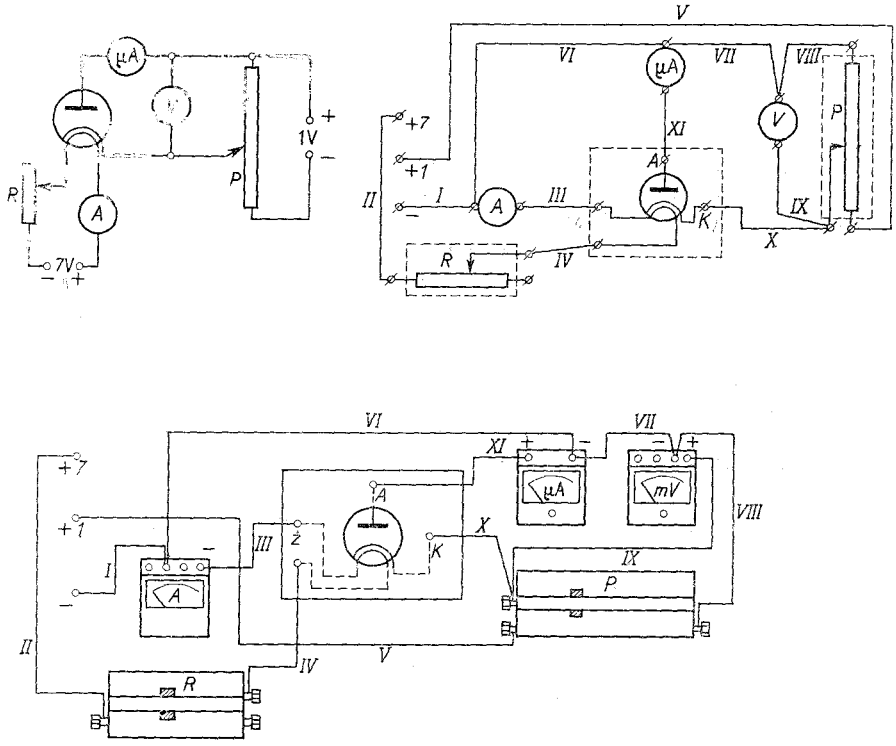
Nazwa elementu	Oznaczenie
prąd stały	
prąd przemienny	
ogniwo lub akumulator	
bateria ogniw	
opornik czynny nie regulowany	
opornik pozorny	
opornik indukcyjny	
opornik nastawny	
opornik ze stałym odczepem	
opornik z wieloma odczepami lub kilka oporników łączonych w szereg	
potencjometr	
kondensator nieregulowany	
kondensator elektrolityczny	
kondensator zmienny	
cewka bez rdzenia	
dławik z rdzeniem	
transformator	
autotransformator	
prostownik	
dioda półprzewodnikowa	
bezpiecznik	
wyłącznik jednobiegunowy	
wyłącznik dwubiegunowy	
przełącznik wielopozycyjny	

Tabela 4.1 c. d.

połączenie elektryczne	
połączenie elektryczne podwójne	
zacisk tablicowy lub gniazdo radiowe	
przewody elektryczne nie połączone	
przewody elektryczne połączone	
uziemienie	
gniazdo sieciowe wtyczkowe	
wtyczka sieciowa	
połączenia nieelektryczne (mechaniczne)	
amperomierz	
woltomierz	
watomierz	
lampa sygnalizacyjna	
wskaźnik (lampa) neonowy	
dioda lampowa	
lampa wieloelektrodowa	
fotokomórka	
lampa oscylograficzna	
tranzystor	
silnik elektryczny	
mikrofon	
głośnik	
wzmacniacz	
opornik regulowany z przerywaniem obwodu	
opornik regulowany bez przerywania obwodu	

niego bieguna źródła. Rozłączanie obwodu należy bezwzględnie rozpoczynać od wyłączenia prądu, tzn. wyjęcia wtyczek z źródła. Prądu przemiennego nie wolno czerpać wprost z fazy, lecz przez tzw. transformator oddzielający (bezpieczeństwo) o przekładni 1/1.

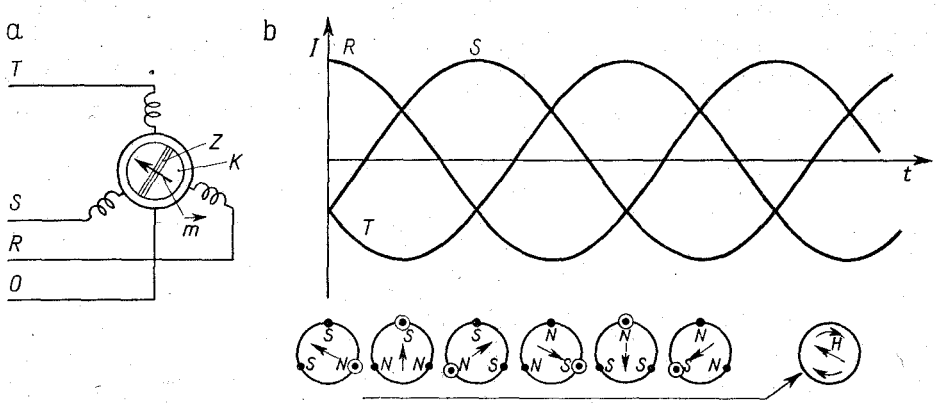


4.20. Układ do pomiaru prędkości wyjściowej elektronu.

4.8. SILNIKI ELEKTRYCZNE NA PRĄD PRZEMIENNY

Silniki elektryczne są odwróceniem prądnic. Każda prądnica stanie się silnikiem, jeżeli czerpać z niej prąd podłączymy ją do źródła prądu. W praktycznym wykonaniu budowa silników różni się nieco od budowy prądnic. Silnik prądu stałego omówiono w § 23.2. Szczególnie interesujące jest rozwiązanie *asynchronicznego silnika trójfazowego krótkozwartego*. Budowa części nieruchomej w zasadzie nie różni się od prądnicy (por. rysunek 4.2). Jeżeli prądnicę trójfazową podłączymy do sieci prądu trójfazowego, wytwarza się *wirujące pole magnetyczne*. Wyjaśniono to na rysunku 4.21, na którym przedstawiono rozkład biegunów w następujących po sobie chwilach. Wirnik nie musi być magnesem ani elektromagnesem, wystarczy jeżeli na obracającym się rdzeniu K nawiniemy zamkniętą ramkę z drutu, jeden zwój Z, którego końce są złączone. Wtedy na skutek zmian strumienia indukcji magnetycznej w ramce indukuje się prąd, który wytworzy własne pole magnetyczne i własny moment elektromagnetyczny $m = SI$ (por. wzór 1.27). Na ramkę poprzez jej moment elektromagnetyczny działa moment siły

$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ wywierany przez zewnętrzne pole wirujące. Ramka, a wraz z nią wirnik, wirują z polem. Gdy silnik nie jest obciążony, moment elektromagnetyczny m ramki Z jest w każdej chwili niemal równoległy do wektora natężenia pola magnetycznego (wirującego). Na wirnik pracującego silnika działa *moment hamujący* M_H zwalniający obrót silnika. Wtedy wirnik opóźnia się względem obrotu wirującego pola, a w jego



4.21. Wirowanie pola magnetycznego w silniku trójfazowym.

ramce występują większe zmiany strumienia indukcji magnetycznej i wzrasta prąd indukowany, a tym samym moment elektromagnetyczny i moment siły M. Moment siły wzrasta do wartości kompensującej moment hamujący $M = M_H$. Szybkość obrotów wirnika maleje wraz z obciążeniem, stąd silnik nazywamy silnikiem asynchronicznym.

4.9. URZĄDZENIA DO WYTWARZANIA PÓL MAGNETYCZNYCH

Pola magnetyczne o natężeniu do kilkudziesięciu $kA \cdot m^{-1}$ wytwarza się za pomocą solenoidu lub cewek Helmholtza–Gaugaina. *Solenoidem* nazywamy tzw. zwojnicę, czyli cewkę o długości l nawiniętą równomiernie wzdłuż swojej długości N zwojami drutu. Zwoje mogą tworzyć kilka warstw. Natężenie pola magnetycznego w punkcie leżącym dokładnie w środku solenoidu jednowarstwowego wynosi

$$H = \frac{NI}{l}.$$

Wzór powyższy jest wzorem definicyjnym natężenia pola magnetycznego w przypadku, gdy $l \geqslant 10r_1$.

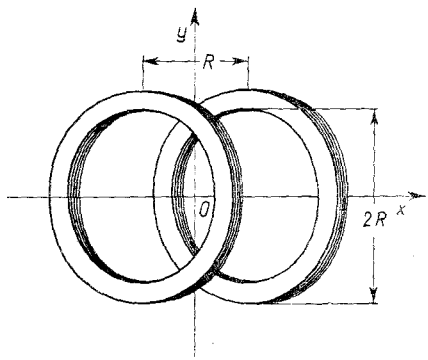
Pole uzyskane za pomocą solenoidu jest jednorodne tylko w niewielkim, środkowym obszarze. Pole jednorodne w dużej objętości możemy uzyskać za pomocą *cewek Helmholtza–Gaugaina* (rys. 4.22). Jest to układ dwóch równych, szeregowo połączonych cewek, o wspólnej osi, oddalonych na odległość R równą ich średniemu promieniowi. Natężenie pola w punkcie leżącym na osi cewek w odległości x od środka symetrii dla cewek o małym przekroju poprzecznym uzwojenia wyraża się wzorem:

$$H = \frac{NI}{R}\left\{\left[1+\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{R}\right)^2\right]^{-3/2} + \left[1+\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{R}\right)^2\right]^{-3/2}\right\}, \tag{4.4}$$

gdzie N oznacza liczbę zwojów każdej z cewek. Dla $x = 0$ otrzymamy

$$H = \frac{16}{5\sqrt{5}} \frac{NI}{R}. \tag{4.5}$$

Za pomocą *elektromagnesów* wytwarzać możemy pola do kilku MAm^{-1}, gdzie $MA = 10^6$ A. Istota elektromagnesu polega na wypełnieniu cewki rdzeniem żelaznym o bardzo dużej przenikalności względnej μ_r dzięki czemu indukcja w cewce wzrasta μ_r-krotnie. Budowę elektromagnesu pokazano na rysunku (4.23). Składa się on z obwodu magnetycznego utworzonego przez jarzmo *1*, rdzenie *2* i nabiegunniki *4*. Źródłem

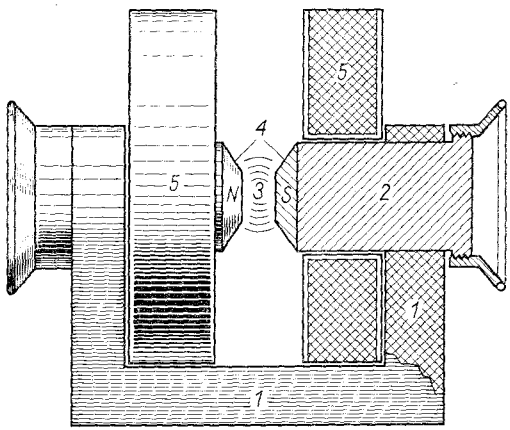


4.22. Cewki Helmholtza–Gaugaina.

pola magnetycznego są cewki *5* składające się z bardzo dużej liczby zwojów. Pole magnetyczne istnieje w szczelinie *3* o stosunkowo niewielkiej objętości. Jego natężenie można w przybliżeniu wyrazić wzorem:

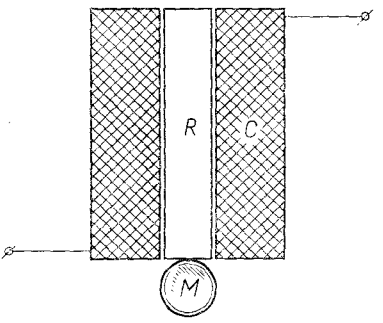
$$H = \frac{NI}{S_3\left(\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{2l_2}{\mu_2 S_2}\right) + l_3}, \tag{4.6}$$

gdzie l_1 oznacza długość obwodu jarzma, l_2 — rdzenia, l_3 — szczeliny, S_1 przekrój poprzeczny jarzma, S_2 — rdzenia, S_3 — szczeliny, μ_1 przenikalność względną jarzma,



4.23. Elektromagnes typu Weissa.

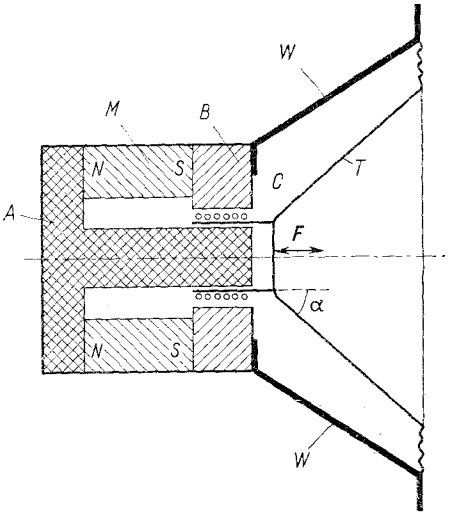
μ_2 — rdzenia, μ_3 — szczeliny, N łączną ilość zwojów cewek, I natężenie prądu. Wzór (4.6) posiada charakter przybliżony, a wielkości w nim występujące są trudne do określenia. Pole magnetyczne zależy również od kształtu obwodu magnetycznego, rozmieszczenia cewek itp. Elektromagnesy stosowane w praktyce nie zawsze posiadają tak optymalne kształty jak przedstawiony na rysunku 4.23 elektromagnes typu Weissa. Ze względu na przeznaczenie lub przestarzałą konstrukcję ich kształt może znacznie odbiegać od wzorca. Niekiedy elektromagnesy wykorzystuje się wyłącznie do przyciągania kawałków żelaza, części aparatur itp. W takich przypadkach elektromagnes może składać się wyłącznie z cewki C wypełnionej rdzeniem R (rys. 4.24).



4.24. Elektromagnes do przyciągania żelaznych części urządzeń.

4.10. GŁOŚNIK I MIKROFON

Głośnik służy do przetwarzania drgań elektrycznych na mechaniczne, a mikrofon przetwarza drgania mechaniczne na elektryczne. Obydwa te urządzenia nazwać możemy krótko przetwornikami elektroakustycznymi. Istnieje kilka typów mikrofonów i głoś-



4.25. Budowa głośnika elektrodynamicznego.

ników, z których najważniejszą rolę odgrywają *mikrofony i głośniki elektrodynamiczne*, działające na podobnej zasadzie. Budowę tego typu głośnika pokazano na rysunku 4.25. Magnes pierścieniowy M wraz z nabiegunnikami A i B tworzy obwód magnetyczny. W szczelinie tego obwodu znajduje się cewka C nawinięta bardzo cienkim drutem. Korpus cewki łączy się z membraną T. Gdy przez cewkę płynie sygnał prądowy, który zostaje zamieniony na drganie akustyczne, na cewkę C działa siła w kierunku zaznaczonym na rysunku, proporcjonalna do prądu. Zatem T drga w takt zmian natężenia prądu, a głośnik przetwarza sygnał elektryczny na mechaniczny. Wsporniki W służą do zamocowania membrany.

Mikrofon elektrodynamiczny różni się od głośnika kształtem membrany, wymiarami magnesu cewki itp. Membrana mikrofonu posiada kąt α bliski $\pi/2$ (90°). Obecnie często stosuje się *mikrofony krystaliczne*. Wykorzystuje się w nich piezoelektryczne właściwości niektórych materiałów. Własności piezoelektryczne polegają na tym, że na skutek zmian natężenia przyłożonego pola elektrycznego zmieniają się wymiary próbki i odwrotnie na skutek zmian wymiarów powstają na powierzchni materiału ładunki elektryczne, a tym samym napięcie.

4.11. PRZYRZĄDY ELEKTRONICZNE

Do przyrządów elektronicznych zaliczamy m.in. zasilacze, generator akustyczny, wzmacniacze, oscylografy katodowe i woltomierze lampowe. *Zasilacze* składają się z układu transformatorów oraz lamp prostowniczych lub diod półprzewodnikowych i służą do otrzymywania prądu stałego o określonym napięciu. Dobre zasilacze zaopatrzone są ponadto w układy elektroniczne służące do stabilizowania prądu lub napięcia, tzn. utrzymywania jego wartości stałej w długim czasie oraz do regulacji napięcia dostarczanego przez zasilacz. Zasilacze czerpią energię z sieci prądu przemiennego.

Generatorem nazywamy układ, w którym energia źródeł zasilania dostarczana zazwyczaj w postaci prądu stałego ulega przemianie na energię drgań elektrycznych o żądanym przebiegu. Do budowy takich układów wykorzystuje się obwody drgające w połączeniu z lampami elektronowymi lub tranzystorami. Generatorem akustycznym nazywamy generator drgań sinusoidalnych o częstościach akustycznych 20–20 000 Hz. Częstość drgań generatora może być zmienna i może obejmować cały zakres częstości akustycznych.

Wzmacniaczem nazywamy układ pozwalający na zwiększenie mocy sygnału, lecz zachowujący jego kształt. Do budowy wzmacniaczy wykorzystuje się również lampy elektronowe.

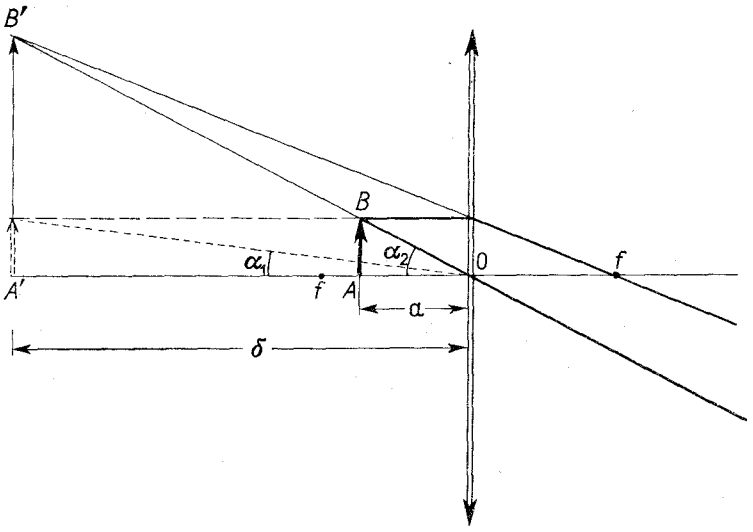
Oscylografem katodowym nazywamy układ składający się z lampy oscylograficznej, zasilacza dającego napięcia potrzebne do zasilania lampy i generatora drgań piłowych (np. relaksacyjnych) przesuwającego cyklicznie plamkę z lewej strony ekranu ku prawej, a następnie przesuwającego ją bardzo szybko na powrót w stronę lewą. W oscylografie znajdują się również wzmacniacze wzmacniające sygnały małej mocy do wartości, która wystarcza do przesunięcia plamki lampy oscylograficznej.

Woltomierz lampowy jest miernikiem elektronicznym o dużym oporze wewnętrznym rzędu megaoma na każdy wolt mierzonego napięcia. Z tego powodu woltomierze lampowe nadają się do pomiaru napięć źródeł o bardzo małej mocy, gdy pomiar zwykłym woltomierzem o stosunkowo małym oporze wewnętrznym obarczony jest bardzo dużym błędem. Woltomierze lampowe przeznaczone do pomiaru bardzo małych napięć przemiennych zaopatrzone są we wzmacniacz lampowy wzmacniający mierzony sygnał.

4.12. LUPA

Lupą nazywamy soczewkę zbierającą, w której przedmiot znajduje się pomiędzy ogniskiem a soczewką. Daje ona obraz prosty, pozorny i powiększony (por. rysunek 4.26). Lupę stosujemy celem zwiększenia kąta, pod którym widzimy przedmiot. Gdy chcemy

rozróżnić drobne szczegóły przedmiotu gołym okiem, zbliżamy przedmiot zwiększając tym samym kąt widzenia. Nie możemy jednak zbliżyć go dowolnie, gdyż ogranicza to zdolność akomodacyjna oka. Dla normalnego oka tzw. punkt bliski, tzn. odległość od oka, w której widzimy przedmiot ostro, wynosi około 15 cm. Przy mniejszych odległościach nie możemy otrzymać ostrego obrazu. Oglądając przedmiot z tak bliskich odległości zauważymy szybkie zmęczenie oka. Odległość, z której możemy oglądać przedmiot bardzo długo nie odczuwając zmęczenia nazywamy, odległością dobrego widzenia, wynosi ona ok. $\delta = 25$ cm. Oglądając przedmiot przez lupę dobieramy w taki sposób odległość a (rys. 4.26), by obraz powstał w odległości dobrego widzenia. Odległość oka od soczewki jest wtedy ze względu na ostrość i powiększenie obojętna. Jednak pole widzenia maleje w miarę oddalania oka od soczewki, wtedy wyraźniej dostrzega się również zniekształcenia wywołane wadami soczewki. W dobrych lupach stosuje się układy optyczne celem zmniejszenia wpływu wad w szczególności aberracji sferycznej i chromatycznej.



4.26. Powstawanie obrazu w lupie.

Powiększeniem W lupy nazywamy stosunek kąta α_2, pod którym widzimy przedmiot pod lupą, do kąta α_1, pod którym widzielibyśmy ten sam przedmiot nie stosując lupy. W obydwu przypadkach zakładamy, że oglądamy przedmiot z odległości dobrego widzenia, a oko znajduje się tuż za soczewką. Zatem

$$W = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \tag{4.7}$$

Zakładając dla małych kątów, że $\operatorname{tg} \alpha \simeq \alpha$ lub inaczej, że przedmiot i obraz leżą na łuku o promieniu δ otrzymamy

$$\alpha_1 = \frac{AB}{\delta} \quad \text{oraz} \quad \alpha_2 = \frac{A'B'}{\delta}, \quad \text{stąd} \quad W = \frac{A'B'}{AB}.$$

Z podobieństwa trójkątów OAB i $OA'B'$ wynika

$$W = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\delta}{a}. \tag{4.8}$$

Dla omawianego przypadku stosuje się wzór soczewkowy

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{\delta}, \quad \text{skąd} \quad a = \frac{f\delta}{f+\delta}.$$

Podstawiając ostatni wynik do równania (4.8) otrzymamy

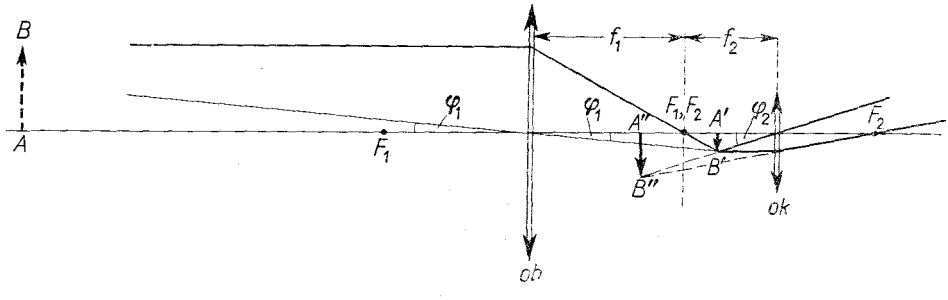
$$W = \frac{\delta}{f} + 1. \tag{4.9}$$

Zatem powiększenie lupy jest stosunkiem odległości dobrego widzenia do ogniskowej lupy powiększonym o jedność. Zależy więc ono od indywidualnej cechy oka ludzkiego, jaką jest odległość dobrego widzenia.

Lupy stosujemy bardzo często do odczytywania wskazań mierników a szczególnie do odczytywania noniusza. Ustawiamy wtedy lupę możliwie blisko przedmiotu (skali) i odsuwając ją powoli dobieramy odległość w ten sposób, by otrzymać najlepsze warunki odczytu. W niektórych przypadkach lupa jest wbudowana w przyrząd.

4.13. LUNETA

Lunetę tworzy układ dwóch soczewek: obiektyw i okular. Obiektyw posiada zazwyczaj dużą średnicę i długą ogniskową f_1, a okular posiada małą średnicę i małą ogniskową f_2. Soczewki posiadają wspólną oś optyczną, a ich wzajemna odległość wynosi w przybliżeniu $l = f_1 + f_2$. Luneta służy do oglądania przedmiotów odległych. Obraz dawany przez obiektyw leży bardzo blisko płaszczyzny ogniskowej obiektywu i jest on



4.27. Powstawanie obrazu w lunecie.

rzeczywisty i odwrócony. Okular jest lupą, przez którą oglądamy obraz $A'B'$. Stąd ostatecznie otrzymujemy obraz pozorny odwrócony $A''B''$. Zadaniem lunety nie jest tworzenie obrazu, którego wymiary liniowe byłyby powiększone, lecz zwiększenie kąta widzenia przedmiotu. Powiększenie kątowe W definiujemy jako

$$W = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \tag{4.10}$$

stosunek kąta widzenia przedmiotu z użyciem lunety φ_2 do kąta widzenia bez lunety φ_1. Ponieważ zakładaliśmy, że obraz $A'B'$ tworzy się bardzo blisko płaszczyzny ogniskowej, w przybliżeniu możemy założyć, że powstaje on w ognisku F_1, F_2. Wtedy zakładając tg $\varphi \simeq \varphi$ zgodnie z rysunkiem (4.27) możemy napisać

$$\varphi_1 = \frac{A'B'}{f_1} \quad \text{oraz} \quad \varphi_2 = \frac{A'B'}{f_2}.$$

Podstawiając te wyrażenia do równania (4.10) otrzymamy

$$W = \frac{f_1}{f_2}, \tag{4.11}$$

co oznacza, że powiększenie kątowe lunety jest równe stosunkowi ogniskowych obiektywu i okularu.

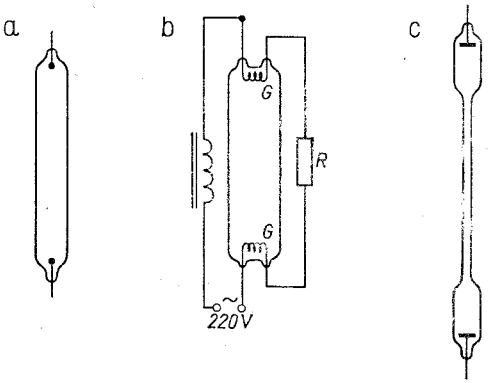
W laboratorium zazwyczaj stosuje się zmodyfikowaną lunetę, która daje obraz prosty i daje się przystosować do odległości bliskich. Odwrócenie obrazu uzyskuje się przez zastosowanie dodatkowej soczewki lub przez wielokrotne odbicie w pryzmatach (lornetka). Celem umożliwienia dostosowania lunety do oglądania przedmiotów z różnych odległości stosuje się mechanizm, który pozwala na przesuwanie okularu wzdłuż osi optycznej lunety. Mechanizm ten składa się zazwyczaj z zębatki połączonej z okularem oraz kółka zębatego, połączonego z pokrętłem. Obracając pokrętłem przesuwamy okular. Przy oglądaniu przedmiotów bliskich obraz $A'B'$ tworzy się za blisko okularu i okular musimy odsuwać wydłużając tym samym lunetę.

Opisana powyżej luneta nazywa się *lunetą Keplera*. Stosowana bywa również *luneta Galileusza*, w której okular jest soczewką rozpraszającą. Daje ona obraz prosty.

4.14. LAMPY WIDMOWE I FILTRY

W optyce poza normalnymi źródłami światła, z którymi spotykamy się na codzień, stosuje się tzw. *lampy widmowe*, czyli źródła dające światło o określonych długościach fal. W lampach tych wykorzystuje się *elektroluminescencję*, czyli świecenie par sodu, rtęci, helu, argonu itp. na skutek wyładowań elektrycznych. Świecenie par rtęci i innych pierwiastków wykorzystuje się w *lampach rtęciowych i sodowych, kadmowych* itp. Wyładowania zachodzą już przy napięciu 220 V. Palnik lampy rtęciowej jest zatopioną rurką szklaną, do której wprowadzone są dwie elektrody (rys. 4.28a). Wewnątrz rurki znajduje się kilka kropelek rtęci i nieco gazu szlachetnego. Po przyłożeniu napięcia następują wyładowania w gazie szlachetnym i powstaje słabe świecenie. Rurka w czasie wyładowań nagrzewa się skutkiem czego powoli paruje rtęć, która w stanie gazowym zaczyna również świecić. W rurce zwiększa się ciśnienie i natężenie światła. W szereg z palnikiem musi być włączony opornik ograniczający prąd. Na światło lampy rtęciowej składają się wszystkie długości fal emitowanych przez pary rtęci. Bardzo ważną rolę odgrywają *lampy sodowe*, bowiem w świetle widzialnym pary sodu emitują jedną tylko linię widmową o długości $\lambda = 589$ nm (ściślej dwie linie mało różniące się długością fali $\lambda_1 = 588{,}995$ nm, $\lambda_2 = 589{,}592$ nm). Lampa sodowa daje światło monochromatyczne. Palnik lampy sodowej posiada nieco inną budowę niż palnik lampy rtęciowej (rys. 4.28b). Posiada on dodatkowo grzejniki G, które

początkowo ogrzewają palnik i zmuszają sód do szybkiego parowania. W szereg z palnikiem sodowym łączy się dławik D ograniczający prąd. Grzejniki połączone są w ten sposób, że początkowo płynie przez nie prąd o stosunkowo dużym natężeniu, które maleje w miarę podgrzewania i wzrostu prądu wyładowania w rurce. Wyładowania w gazach rozrzedzonych wytwarza się również w *rurkach geisslerowskich* (rys. 4.28c). W tym przypadku niezbędne jest bardzo wysokie napięcie z cewki Ruhmkorffa. Światło rurek geisslerowskich składa się z linii widmowych gazu wypełniającego rurkę (wodór, hel, argon, azot, tlen itp.).



4.28. Palniki lamp widmowych: rtęciowej (a), sodowej (b), rurka geisslerowska (c).

Do usunięcia z wiązki pewnych długości fal służą filtry. Istnieją dwa rodzaje filtrów: *absorpcyjne* i *interferencyjne*. W pierwszych wykorzystuje się zjawisko absorpcji niektórych długości fal przy przejściu światła przez różnego rodzaju środowiska. Substancją taką zabarwia się szkło lub pokrywa jego powierzchnię. Wiązka światła przechodzącego zawiera zazwyczaj fale zawarte tylko w niewielkim przedziale od λ_1 do λ_2. Wadą filtrów absorpcyjnych jest stosunkowo duża szerokość pasma $\Delta\lambda$ oraz silna absorpcja przechodzącego światła, przepuszczają one co najwyżej 50% światła z interesującego nas zakresu; ponadto inne długości fal nie są dokładnie wygaszone. Filtr interferencyjny jest płytką o płasko wyszlifowanych powierzchniach pokrytych warstwą półprzepuszczalną np. srebrem. Światło wchodzące do płytki jest w niej wielokrotnie odbijane na drugą stronę przechodzą tylko te długości fal, które nie ulegają wygaszeniu na skutek interferencji, czyli spełniają warunek

$$k\lambda = 2dn\cos\beta, \tag{4.12}$$

gdzie k — ilość odbić, λ — długość fali, d — grubość płytki, n — jej współczynnik załamania, β — kąt załamania światła. Grubość d płytki można dobrać w ten sposób, by dwa promienie, które wewnątrz płytki uległy k i $k+1$-krotnemu odbiciu, po wyjściu z płytki wygaszały się dla wszystkich długości fal światła widzialnego z wyjątkiem wąskiego przedziału długości od λ_1 do λ_2. Wtedy przez płytkę przechodzi światło prawie monochromatyczne. Filtry interferencyjne są produkowane w szerokim asortymencie i za ich pomocą z światła białego wydzielić można dowolną długość fali.

5. WAŻENIE I WYZNACZANIE GĘSTOŚCI

5.01. WPŁYW WYPORU POWIETRZA NA WYNIK WAŻENIA

Na każde ciało w środowisku płynnym (gazie lub cieczy) działają siły wyporu F_w, które zgodnie z prawem Archimedesa, są równe ciężarowi wypartego płynu. Ciężar wypartego płynu wyraża się iloczynem jego gęstości ϱ, objętości V i przyspieszenia ziemskiego g; wtedy

$$F_w = V\varrho g.$$

Ważąc ciało w powietrzu nie porównujemy rzeczywistych ciężarów mg, lecz ciężary zmniejszone o siłę wyporu powietrza

$$mg - \varrho_p V_0 g = m^* g - \varrho_p V g$$

lub

$$m - \varrho_p V_0 = m^* - \varrho_p V,$$

gdzie m oznacza masę odważników, dla których masa nominalna jest masą rzeczywistą, m^* — masę rzeczywistą ciała ważonego, ϱ_p — gęstość powietrza. Ze względów praktycznych wyrażenie typu $m^* - \varrho_p V$ przekształcimy w następujący sposób:

$$m^* - \varrho_p V = m^* - V\varrho \frac{\varrho_p}{\varrho} = m^* - m^* \frac{\varrho_p}{\varrho} = m^*(1-\delta),$$

$$\delta = \frac{\varrho_p}{\varrho}. \tag{5.2}$$

W ogólnym przypadku δ oznacza stosunek gęstości środowiska, w którym ważymy do gęstości substancji ważonej. Przekształcając w podobny sposób obydwie strony równania (5.2) otrzymamy

$$m(1-\delta_0) = m^*(1-\delta),$$

stąd

$$m = m^* \frac{1-\delta_0}{1-\delta}. \tag{5.3}$$

Mnożąc licznik i mianownik ostatniego wyrażenia przez $(1+\delta)$ i zaniedbując wielkości bardzo małe $\delta_0\delta$ oraz δ^2, otrzymamy

$$m^* = m\left(1+\frac{\varrho_p}{\varrho}-\frac{\varrho_p}{\varrho_0}\right) \tag{5.4}$$

lub

$$m^* = m(1+\delta-\delta_0). \tag{5.4a}$$

Z wzoru powyższego wynika, że rzeczywista masa ciała ważonego jest równa masie odważników tylko wtedy, gdy gęstość ciała ważonego ϱ i odważników ϱ_0 jest taka sama.

Przykład. Ważąc wodę $\left(\varrho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$ w powietrzu $\left(\varrho_p = 1{,}29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$ za pomocą odważników mosiężnych $\left(\varrho_0 = 8{,}5\cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$ otrzymujemy następującą wartość poprawki $(1+\delta-\delta_0) = 1{,}00114$. Pisząc równanie (5.4) w postaci

$$\frac{m^*-m}{m} = \frac{\varrho_p}{\varrho}-\frac{\varrho_p}{\varrho_0}$$

otrzymamy na błąd względny Δm_w (zgodnie z definicją jest on równy lewej stronie ostatniego wyrażenia) wartość 0,00114, to znaczy około $0{,}1\,^0/_{00}$.

5.02. ZWIĄZEK GĘSTOŚCI Z MASĄ DROBINOWĄ

Zgodnie z definicją, gęstością ϱ nazywamy stosunek masy danego ciała do jego objętości, czyli

$$m = \varrho V.$$

Jeżeli rozważanym ciałem jest jeden kilomol gazu w warunkach normalnych ($\tau = 0°\text{C}$, $p_0 = 760$ Tr), to zgodnie z definicją, ma on masę m równą jego masie drobinowej μ ($m = \mu$g) i zajmuje objętość V_{mol}, zwaną objętością molową, która zgodnie z twierdzeniem Avogadra jest wielkością stałą równą dla wszystkich gazów, a ostatni wzór przyjmuje postać

$$\mu = \varrho_0 \cdot V_{\text{mol}}, \tag{5.5}$$

gdzie ϱ_0 oznacza gęstość gazu w warunkach normalnych, a $V_{\text{mol}} = 22{,}4136\ \text{dm}^3\cdot\text{mol}^{-1}$.

5.1. HYDROSTATYCZNA METODA WYZNACZANIA GĘSTOŚCI

Cel: wyznaczenie gęstości dwóch brył i sprawdzenie zgodności wyników uzyskanych metodą hydrostatyczną z wynikami otrzymanymi drogą bezpośredniego pomiaru masy i objętości.

Przyrządy: waga analityczna (§ 3.4), suwmiarka lub mikromierz (§ 3.1).

Zagadnienia: wagi i ważenie (§ 3.4 oraz 5.01–02).

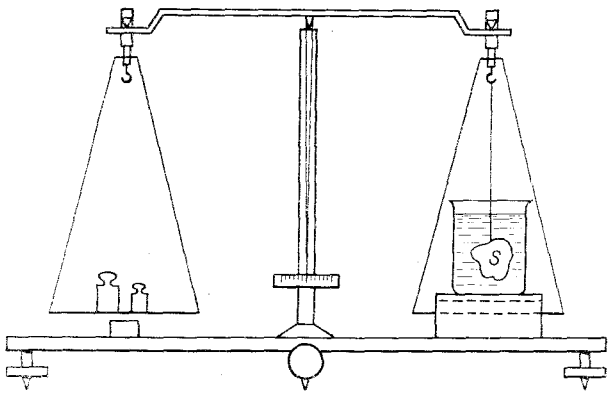
Wprowadzenie

Celem wyznaczenia objętości i gęstości dowolnego ciała stałego musimy wyznaczyć masę m_s ciała, masę m_p ciała zawieszonego na cienkim drucie ważoną wraz z drutem oraz pozorną masę m_w tego samego ciała zanurzonego w cieczy o znanej gęstości ϱ_w.

Bezpośredni wynik każdego ważenia jest obarczony błędem spowodowanym wyporem powietrza. Różnica ΔF sił wyporu działających na ciało ważone w cieczy (m_w) i w powietrzu (m_p) jest proporcjonalna do różnicy wskazań wagi $m_p - m_w$ i wyraża się wzorem:

$$\Delta F = (m_p - m_w)(1 - \delta_0)g,$$

w którym wyrażenie $(1 - \delta_0)$ jest poprawką na siły wyporu odważników. W przypadku pomiaru m_w w cieczy zanurzone jest nie tylko ważone ciało o objętości V_s, lecz również



5.1. Ważenie ciała w wodzie.

$\frac{1}{n}$ -ta część drutu, którego całkowitą objętość oznaczymy przez ΔV. Zgodnie z wzorem (5.1) w cieczy działa siła wyporu $\left(V_s + \frac{1}{n}\Delta V\right)\varrho_w g$. W powietrzu na tę samą objętość $\left(V_s + \frac{1}{n}\Delta V\right)$ działa siła wyporu $\left(V_s + \frac{1}{n}\Delta V\right)\varrho_p g$. Stąd różnica sił wyporu ΔF wynosi

$$\Delta F = \left(V_s + \frac{1}{n}\Delta V\right)(\varrho_w - \varrho_p)g.$$

Porównując obydwa wyrażenia na ΔF obliczyć możemy objętość V_s otrzymując

$$V_s = \frac{(m_p - m_w)(1 - \delta_0) - \frac{1}{n}\Delta V(\varrho_w - \varrho_p)}{\varrho_w - \varrho_p}. \tag{5.6}$$

Zgodnie z równaniem (5.4a) rzeczywista masa ciała stałego wynosi $m_s(1 + \delta - \delta_0)$. Dzieląc tę masę przez objętość wyrażoną wzorem (5.6) otrzymamy gęstość ciała

$$\varrho_s = (\varrho_w - \varrho_p)\frac{m_s(1 + \delta - \delta_0)}{(m_p - m_w)(1 - \delta_0) - \frac{1}{n}\Delta V(\varrho_w - \varrho_p)}. \tag{5.7}$$

Przy założeniach $\varrho_w \gg \varrho_p$ i $V_s \gg \Delta V$ zaniedbać możemy wszystkie poprawki otrzymując następujące wzory przybliżone:

$$V_s = \frac{m_p - m_w}{\varrho_w}, \tag{5.6a}$$

$$\varrho_s = \varrho_w \frac{m_s}{m_p - m_w}. \tag{5.7a}$$

Metodą hydrostatyczną wyznaczyć możemy również względną gęstość cieczy. Ważąc ciało o masie m_s w cieczy o znanej gęstości ϱ_w oraz w cieczy o nieznanej gęstości ϱ napisać możemy dwa następujące związki:

$$(m_p - m_w)(1 - \delta_0) = \left(V_s - \frac{1}{n}\Delta V\right)(\varrho_w - \varrho_p),$$

$$(m_p - m_w)(1 - \delta_0) = \left(V_s - \frac{1}{n}\Delta V\right)(\varrho - \varrho_p),$$

gdzie m oznacza wynik ważenia ciała zanurzonego w nieznanej cieczy. Zakładamy, że w obydwu pomiarach taka sama część drutu zanurzona jest w cieczy. Dzieląc powyższe równania stronami i obliczając ϱ otrzymamy związek

$$\varrho = \frac{m_p - m}{m_p - m_w}\varrho_w + \left(1 - \frac{m_p - m}{m_p - m_w}\right)\varrho_p.$$

Jeżeli $\varrho_w \gg \varrho_p$, możemy zaniedbać drugi wyraz prawej strony niniejszego równania otrzymując wzór przybliżony

$$\varrho = \frac{m_p - m}{m_p - m_w}\varrho_w.$$

W przypadku, gdy nie jest wymagana bardzo duża dokładność pomiary gęstości cieczy wykonać możemy za pomocą wagi Mohra. Jest to nierównoramienna dźwignia dwustronna. Na dłuższym ramieniu podzielonym na 10 równych części zawieszamy na cienkim drucie ciało ważone, którym jest szklany nurek wypełniony częściowo śrutem ołowianym, a niekiedy zaopatrzony również w termometr. Ramię krótsze jest obciążone ciężarkiem, który w powietrzu równoważy ciężar nurka. Gdy nurek znajduje się w cieczy, zachwianą równowagę przywracamy obciążając ramię dłuższe konikami. Ciężar P najcięższego konika na 10-tej podziałce równoważy siłę wyporu wody destylowanej o temperaturze 4°C (gęstość 1 g/cm^3). Koniki lżejsze posiadają ciężary $0{,}1P$, $0{,}01P$ oraz $0{,}001P$ i teoretycznie pozwalają wyznaczyć gęstość z dokładnością do czwartego miejsca znaczącego.

Pomiary

Jedna z badanych brył posiada kształt regularny. Jej wymiary mierzymy za pomocą mikromierza lub suwmiarki. Mierzymy długość i średnice drutów, na których bryły będą zawieszone oraz temperaturę τ wody. Przed przystąpieniem do ważenia sprawdzamy i ewentualnie korygujemy ustawienie wagi analitycznej (§ 3.4). Jeżeli nie dysponujemy wagą automatyczną, wyznaczamy jej czułość. Obydwie bryły ważymy z dokładnością do 0,1 mg (m_{sr}, m_{sn}). W czasie drugiego ważenia (m_{pr}, m_{pn}) bryły zawieszamy na haczyku znajdującym się w górnej części szalki, w taki sam sposób, w jaki będą one ważone w cieczy. Po wykonaniu pomiarów w powietrzu ustawiamy zlewkę z wodą destylowaną, na specjalnej podstawce w taki sposób, by całe ciało było zanurzone w wodzie, a szalka nie dotykała podstawki. Ważymy po kolei obydwa ciała zanurzone w wodzie (m_{wr}, m_{wn}) i każdorazowo określamy jaka część drutu znajduje się pod powierzchnią wody. Notujemy dokładności wszystkich pomiarów.

Obliczenia

Dla bryły o regularnych kształtach obliczamy objętość V_r' z wymiarów geometrycznych. Znając kształt bryły potrzebny wzór do obliczenia objętości wyprowadzamy samodzielnie. Obliczamy gęstość tej bryły $\varrho_r' = \frac{m_{sr}^*}{V_r'}$, w tym przypadku nie uwzględniając poprawki 5.4. Korzystając z wykonanych pomiarów obliczamy objętości i gęstości obydwu brył z wzorów (5.6) i (5.7). Występującą we wzorach (5.6) i (5.7) gęstość wody w temperaturze τ, powietrza i odważników (mosiądzu) przyjmujemy z tablic. Obliczamy również gęstość i objętość brył z wzorów przybliżonych (5.6a) i (5.7a).

Wzory potrzebne do obliczania błędów V i ϱ wyprowadzamy z wzorów przybliżonych (5.6a) lub (5.7a). Zależnie od sposobu w jaki zaplanowaliśmy i wykonaliśmy pomiary obliczamy odchylenia standardowe lub błędy maksymalne. Dla brył o regularnych kształtach obliczamy błąd gęstości obliczonej teoretycznie ϱ_r' i sprawdzamy zgodność wyników ϱ_r i ϱ_r' uzyskanych na dwóch drogach. Sprawdzamy, czy wielkość błędu usprawiedliwia konieczność stosowania poprawek na wypór uwzględnionych w równaniach (5.6) i (5.7). W tym celu sprawdzamy w jakim stosunku różnica $|\varrho - \varrho_a|$, gdzie ϱ obliczone z wzoru (5.7), a ϱ_a z przybliżonego wzoru (5.7a) pozostaje do błędu $S_{\bar{\varrho}}$ lub $\Delta\varrho$. Poprawki są konieczne, jeżeli

$$|\varrho - \varrho_a| \geqslant S_{\bar{\varrho}}.$$

5.2. PIKNOMETR

Cel: wyznaczanie zależności gęstości roztworu wodnego od jego stężenia lub wyznaczanie gęstości ciała stałego.

Przyrządy: waga analityczna (§ 3.4), piknometr z termometrem, woda destylowana, roztwory lub ciało stałe.

Zagadnienia: wagi i ważenie (§ 3.4 i 5.01–02), roztwory (S2, § 16).

Wprowadzenie

Piknometrem (rys. 5.2) nazywamy kolbę szklaną, zamkniętą dokładnie doszlifowanym korkiem, w którym znajduje się kapilarny otwór. W nowszych piknometrach korkiem jest doszlifowany termometr, a kapilara znajduje się z boku. W niektórych piknometrach zaznaczono kreską dokładny poziom, do którego ciecz powinna wypełniać kapilarę. Gdy kreski brak, ciecz musi wypełniać całą kapilarę. Piknometr służy do wyznaczania gęstości względnej.

a. Wyznaczanie gęstości cieczy. Celem wyznaczenia gęstości cieczy wykonać musimy następujące ważenia:

m_p — piknometru pustego,

m_w — piknometru wypełnionego cieczą wzorcową,

m_c — piknometru wypełnionego cieczą o nieznanej gęstości.

Zgodnie z definicją gęstość zawartej w piknometrze cieczy wyraża się wzorem*:

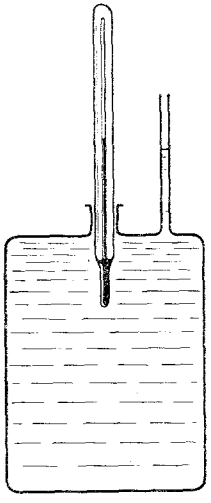
* W przypadku, gdy objętość piknometru jest znana, wzory powyższe można zastosować wprost do obliczania gęstości.

$$\varrho_c = \frac{m_c^* - m_p^*}{V},$$

$$\varrho_w = \frac{m_w^* - m_p^*}{V},$$

gdzie gwiazdką oznaczono wartości rzeczywiste (por. § 5.01). Eliminując z tych równań objętość piknometru otrzymamy następujący wzór na gęstość względną cieczy

$$d_c = \frac{\varrho_c}{\varrho_w} = \frac{m_c^* - m_p^*}{m_w^* - m_p^*}. \tag{5.8}$$



5.2. Piknometr.

Różnice mas występujących w liczniku i mianowniku ostatniego wzoru oznaczają faktycznie masę badanej cieczy oraz wody. Stąd wystarczy uwzględnić poprawki wynikające z sił wyporu tylko dla masy cieczy $(m_c^* - m_p^*)$ oraz masy wody $(m_w^* - m_p^*)$. Zgodnie z równaniem (5.4a) mamy

$$d_c = \frac{\varrho_c}{\varrho_w} = \frac{(m_c - m_p)(1 + \delta_c - \delta_0)}{(m_w - m_p)(1 + \delta_w - \delta_0)}. \tag{5.9}$$

Dla cieczy o gęstości zbliżonej do gęstości wody $\varrho_c \simeq \varrho_w$ poprawki upraszczają się i nie potrzeba ich uwzględniać, wtedy

$$d_c = \frac{\varrho_c}{\varrho_w} = \frac{m_c - m_p}{m_w - m_p}. \tag{5.9a}$$

W poprawkach δ_c i δ_w, po prawej stronie równania (5.9) występują gęstości obydwu cieczy. Gęstość wody odczytać możemy z tablic fizycznych, natomiast dla nieznanej cieczy wystarczy przyjąć przybliżoną wartość gęstości ϱ_c', którą obliczymy z równania (5.9a).

b. Wyznaczanie gęstości ciała stałego. Przyjmując oznaczenia, V — objętość ciała stałego i V_p — objętość piknometru, zgodnie z § 5.01 masę rzeczywistą w poszczególnych przypadkach wyrazić możemy następująco:

1. Ciała badanego $m^* - V\varrho_p = m(1-\delta_0)$
2. Piknometru z wodą $m_w^* - V_p\varrho_p = m_w(1-\delta_0)$
3. Piknometru z wodą i ciałem badanym $m_c^* - V_p\varrho_p = m_c(1-\delta_0)$.

Rzeczywista masa m^* ciała stałego jest równa różnicy $m_c^* - (m_w^* - V\varrho_w)$, gdzie $V\varrho_w$ jest masą wody wypartej z piknometru przez ciało, czyli $m^* = m_c^* - m_w^* + V\varrho_w$. Przekształcając m_c^* i m_w^* w sposób podobny jak w wyrażeniu (5.2) otrzymamy

$$m^* - V\varrho_w = (m_c - m_w)(1-\delta_0).$$

Ostatnie równanie wraz z wyrażeniem 1. stanowi układ równań liniowych, z których obliczyć możemy m^* i V

$$\begin{aligned} m^*(\varrho_w - \varrho_p) &= [m\varrho_w - (m_c - m_w)\varrho_p](1-\varrho_0), \\ V(\varrho_w - \varrho_p) &= [m - (m_c - m_w)](1-\delta_0). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dzieląc powyższe równania stronami otrzymamy

$$\varrho = \frac{m^*}{V} = \frac{m\varrho_w - (m_c - m_w)\varrho_p}{m - m_c + m_w}. \tag{5.11}$$

Zakładając $\varrho_\rho \gg \varrho_w$ otrzymamy przybliżoną postać wzorów

$$V_a = \frac{m - m_c + m_w}{\varrho_w} \tag{5.10a}$$

oraz

$$\varrho_a = \varrho_w \frac{m}{m - m_c + m_w}. \tag{5.11a}$$

Pomiary

W obydwu omawianych przypadkach wszystkie pomiary masy, wymienione w wprowadzeniu, wykonujemy z dokładnością 0,1 mg. W przypadku, gdy nie dysponujemy wagą automatyczną stosować musimy metodę interpolacji (§ 3.4). W obydwu przypadkach mierzymy i zapisujemy temperaturę ważonej cieczy.

Obliczenia

Gęstość badanej cieczy obliczamy z wzoru (5.9a), poprawek nie uwzględniamy. Jeżeli wynik pomiaru gęstości względnej znacznie różni się od 1, wtedy wykonujemy dokładne obliczenia według wzoru (5.9). Gęstość ciała stałego obliczamy z wzoru (5.11), potrzebne gęstości przyjmujemy z tablic fizycznych uwzględniając temperaturę pomiaru.

Wzory służące do obliczania błędów wyprowadzamy z równań przybliżonych (5.9a) lub (5.11a), co jest uzasadnione przybliżonym charakterem obliczeń błędów, które obliczamy dla wszystkich wyznaczonych wielkości. Dyskutujemy zgodność uzyskanych wyników z danymi z tablic fizycznych (§ 2.4). Sprawdzamy czy w omawianym przypadku uzasadnione jest stosowanie poprawek uwzględnionych w równaniu

(5.11). W tym celu obliczamy gęstość ϱ_a z równania (5.11a). Jeżeli powstała różnica przekracza wartość błędu $|\varrho - \varrho_a| \geqslant |\Delta\varrho|$, wtedy zachodzi konieczność uwzględnienia poprawek.

5.3. WYZNACZANIE GĘSTOŚCI PARY METODĄ MEYERA

Cel: wyznaczanie gęstości zredukowanej chloroformu lub eteru i obliczenie masy drobinowej.

Przyrządy: przyrząd Meyera, waga analityczna (§ 3.4), barometr naczyniowy (§ 3.8), termometr, suwmiarka, fen (§ 3.10).

Zagadnienia: prawa przemian gazów doskonałych (S2, § 9) ważenie (§ 3.4, 5.01–02), prawo Avogadra (S2, § 55).

Wprowadzenie

W omawianym doświadczeniu gęstość wyznaczamy wprost z masy m i objętości V_T gazu, który powstał na skutek wyparowania cieczy w podwyższonej temperaturze. Ze względu na zależność gęstości od temperatury, musimy obliczyć jaką gęstość będzie posiadał gaz w warunkach normalnych ($T = 273{,}15$ K; $p_0 = 760$ Tr). Musimy przy tym założyć, że para się nie skropli i stosuje się do równania Clapeyrona

$$pV = \frac{p_0 V_0}{T_0} T.$$

W przemianie prowadzącej do warunków normalnych masa gazu nie ulega zmianie, czyli

$$m = \varrho_T V = \varrho_0 V_0, \quad \text{stąd} \quad \frac{V_0}{V} = \frac{\varrho_T}{\varrho_0}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania Clapeyrona otrzymamy

$$\varrho_0 = \varrho_T \frac{p_0}{T_0 p} T$$

lub po podstawieniu wartości liczbowych na $p_0 = 760$ Tr, $T_0 = 273{,}15$ K oraz na p ciśnienia zredukowanego h_0, będziemy mieli

$$\varrho_0 = \varrho_T \frac{760}{273{,}15} \frac{T}{h_0}. \tag{5.12}$$

Podstawiając ponadto $\varrho_T = m/V_T$, otrzymamy

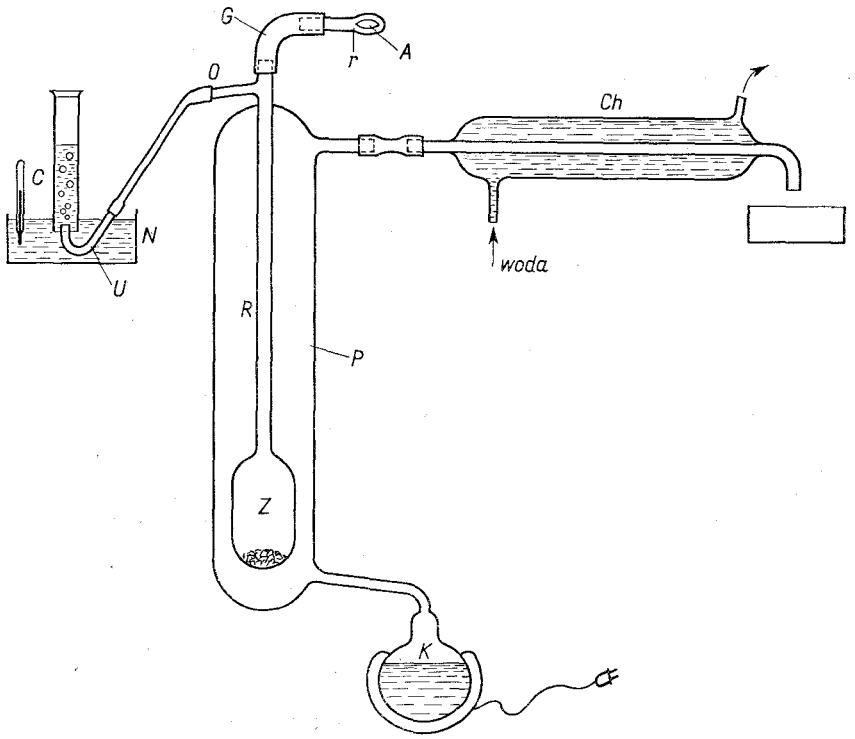
$$\varrho_0 = \frac{760}{273{,}15} \frac{mT}{V_T h_0}. \tag{5.13}$$

Ciśnień p_0 i h_0 nie sprowadzamy do układu SI, lecz wyrażamy je w Tr = mm Hg.

Aparatura

Właściwy przyrząd Meyera (rys. 5.3) składa się z długiej rury szklanej R zakończonej u dołu zbiornikiem Z. U góry rura jest połączona wężem gumowym G z krótką rurką r. W górnej części rury istnieje odgałęzienie O połączone wężykiem gumowym z rurką szklaną U, którą można wprowadzić pod cylinder szklany C. Cylinder jest odwrócony, a jego koniec jest zanurzony w wodzie wypełniającej naczynie N. Zbiornik Z wraz

z rurką R jest otoczony zewnętrzną osłoną szklaną P i może być podgrzewany strumieniem pary pochodzącej z kolby k podgrzewanej palnikiem lub elektrycznie. Para wychodząca na zewnątrz skrapla się w chłodnicy Ch, przez której płaszcz zewnętrzny przepuszczamy wodę z wodociągu. Na dnie zbiornika Z umieszczamy sprężynki z drutu miedzianego, które ochraniają spadającą ampułkę A przed zbiciem. Ampułka jest zamykana na szlif, jej pojemność wynosi ok. 0,1 cm^3.



5.3. Aparatura W. Meyera do wyznaczania gęstości pary.

Pomiary

Początkowo ustawiamy całą aparaturę w sposób pokazany na rysunku. Wypełniamy kolbę k wodą i podgrzewamy do wrzenia. Wyjmujemy rurkę r i w ciągu 10–15 minut gotujemy wodę w kolbie. W tym czasie rurka R i zbiorniczek Z ogrzewają się, a zawarte w nim resztki cieczy wyparowują. Równocześnie napełniamy cylinder C wodą, odwracamy i zanurzamy w zbiorniku N i zamocowujemy w taki sposób, by do cylindra nie weszło powietrze. Następnie przystępujemy do napełniania ampułki. W tym celu suszymy ją dokładnie w strumieniu ciepłego powietrza, ważymy na wadze analitycznej z dokładnością do 0,1 mg, napełniamy badaną cieczą, zamykamy korkiem, osuszamy i ponownie ważymy z dokładnością do 0,1 mg. Ampułkę ostrożnie wkładamy do rurki r. Rurkę tę nakładamy na wężyk G, a koniec rurki U wkładamy do wody w naczyniu N, w ten sposób, by jej wylot nie znalazł się pod cylindrem C. Przez dłuższą chwilę (ok. 3 min) przepuszczamy parę, by zbiornik ogrzał się do temperatury wrzenia wody.

Jeżeli z wylotu rurki U nie wychodzą już pęcherzyki powietrza, przystępujemy do pomiaru. Koniec rurki U wprowadzamy pod cylinder C, rurkę r ustawiamy pionowo. Ampułka spada na dno zbiornika Z, tam się ogrzewa, a zawarta w niej ciecz wypycha szlif, wyparowuje i wypiera powietrze ze zbiornika Z. Powietrze rurką O przechodzi do cylindra C. Czekamy do chwili, gdy z wylotu rurki U przestaną wydobywać się pęcherzyki powietrza (ok. 10 min). Następnie odczytujemy objętość V wypartego powietrza i wysokość h_w słupka wody w cylindrze C. (Poprawny wynik dla ampułki 0,1 cm^3 — ok. 14 cm^3 wypartego powietrza.) Mierzymy temperaturę τ cieczy w naczyniu N i ciśnienie barometryczne h z dokładnością do 0,1 mm Hg.

W doświadczeniu postępujemy w opisany sposób, a wyniki zapisujemy w załączonej tabelce

Nazwa cieczy		Błąd pomiaru
Masa ampułki z korkiem	$m_1 = \ldots$	$\Delta m_1 = \ldots$
Masa wypełnionej ampułki	$m_2 = \ldots$	$\Delta m_2 = \ldots$
Masa cieczy $m = m_2 - m_1$	$m = \ldots$	$\Delta m = \ldots$
Objętość wypartego powietrza	$V_T = \ldots$	$\Delta V_T = \ldots$
Wysokość słupka wody	$h_w = \ldots$	$\Delta h_w = \ldots$
Temperatura wody w °C	$\tau = \ldots$	$\Delta \tau = \ldots$
Odczyt wskazania barometru	$h = \ldots$	$\Delta h = \ldots$
Temperatura pokojowa w °C	$\tau_p = \ldots$	$\Delta \tau_p = \ldots$
Prężność pary nasyconej w temperaturze τ (z tablic)	$p' = \ldots$	

Obliczenia

Celem obliczenia interesującej nas gęstości ϱ_0 musimy z doświadczenia wyznaczyć wszystkie wielkości wchodzące do wzoru (5.13). Masę m obliczamy jako różnicę mas ampułki napełnionej i pustej. Na T przyjmujemy temperaturę wody w naczyniu N wyrażoną w skali Kelvina. Objętość V_T została odczytana wprost na cylindrze. Ciśnienie h_0 jest równe zredukowanemu ciśnieniu atmosferycznemu $h - 0{,}00016 h\tau$ (wzór 3.10) pomniejszonemu o ciśnienie hydrostatyczne słupka wody i ciśnienie nasyconej pary wodnej znajdującej się powyżej cieczy w cylindrze. Ciśnienie hydrostatyczne słupka wody o wysokości h_w wyrażone w milimetrach słupka rtęci wyrazi się wzorem $h_w \frac{\varrho_{[H_2O]}}{\varrho_{Hg}}$ gdzie stosunek gęstości $\varrho_{H_2O}/\varrho_{Hg} = 1/13{,}6$. Zatem ostatecznie otrzymamy

$$h_0 = h - \frac{h_w}{13{,}6} - 0{,}00016 h\tau - p',$$

gdzie prężność pary wodnej p' dla temperatury τ odczytujemy z tablic. Zatem ostateczny wzór na gęstość ϱ_0 przyjmuje postać

$$\varrho_0 = \frac{m760(273{,}15 + \tau)}{V_T\left(h - 0{,}00016 h\tau - \frac{h_w}{13{,}6} - p'\right)273{,}15}.$$

Podstawiając do powyższego wzoru dane z tabeli pomiarów otrzymamy gęstość zredukowaną do warunków normalnych. Masę drobinową μ obliczymy z wzoru (5.5).

Ze względu na jednokrotny pomiar wchodzących do wzoru wielkości, obliczamy jedynie błędy maksymalne $\Delta\varrho_0$ i $\Delta\mu$ przyjmując $\Delta V_{mol} = 0$. Sprawdzamy zgodność uzyskanego wyniku z wartością μ podaną w tablicach.

5.4. METODA BUNSENA

Cel: wyznaczenie gęstości względnej gazu metodą Bunsena, obliczenie masy drobinowej tego gazu.
Przyrządy: efuzjometr Bunsena, sekundomierz (§ 3.5), termometr, zawory (§ 3.11).
Zagadnienia: gęstość, masa drobinowa (§ 5.01–02), równanie Bernoulliego (S1, § 86–88, H1, § 18.1–5).

Wprowadzenie

Ciśnienie gazu zamkniętego w cylindrze C (rys. 5.4) wynosi

$$p = p_0 + x\varrho_w g, \tag{5.14}$$

gdzie p_0 — ciśnienie atmosferyczne, ϱ_w — gęstość wody, a x — wysokość słupka wody. Cylinder zakończony jest trójdrożnym zaworem kurkowym i w przypadku pokazanym na rysunku gaz może wypływać przez dyszę D o przekroju q z prędkością v. Zakładając nieściśliwość gazu i pomijając lepkość możemy przyjąć, że objętość gazu wypływającego w jednostce czasu $V = qv$ jest równa zmianie objętości gazu w cylindrze C (przekrój q_C) na skutek przesuwania się zwierciadła wody z prędkością v_w,

więc

$$qv = q_C v_w. \tag{5.15}$$

Ponadto z równania Bernoulliego zastosowanego do dyszy i powierzchni wody wynika:

$$p + \frac{1}{2} v_w^2 + y\varrho g = p_0 + \frac{1}{2}\varrho v^2 + h\varrho g.$$

Podstawiając (5.14) otrzymamy

$$[x\varrho_w - (h-y)\varrho]g = \frac{1}{2}\varrho v^2\left[1 - \left(\frac{v_w}{v}\right)^2\right].$$

Zakładamy, że dla niezbyt małych wartości x wielkość $x\varrho_w \gg (h-y)\varrho$, oraz $\varrho_w \gg \varrho$, co pozwala zaniedbać składnik $(h-y)\varrho$. Uwzględniając ponadto związek (5.15) otrzymamy

$$x\varrho_w g = \frac{1}{2}\varrho v^2\left[1 - \left(\frac{q}{q_C}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\varrho v_C^2\left[\left(\frac{q_C}{q}\right)^2 - 1\right]. \tag{5.16}$$

Wykonując pomiar dla badanego gazu ($\varrho = \varrho_g$ i $v = v_g$) oraz dla powietrza ($\varrho = \varrho_p$, $v = v_p$) tym samym przyrządem, tzn. dla tych samych wartości x, ϱ_w, q, q_C, możemy napisać następujące dwa związki:

$$2x\varrho_w g = \varrho_g v_g^2\left[1 - \left(\frac{q}{q_C}\right)^2\right] \quad \text{oraz} \quad 2x\varrho_w g = \varrho_p v_p^2\left[1 - \left(\frac{q}{q_C}\right)^2\right],$$

porównując prawe strony tych równań otrzymamy

$$\frac{\varrho_g}{\varrho_p} = \frac{v_p^2}{v_g^2}.$$

Z równania powyższego wynika, że gęstość wypływającego gazu jest odwrotnie proporcjonalna do prędkości jego wypływu co oznacza również, że pod dużym ciśnieniem gaz wypływa wolniej niż pod małym (gęstość jest proporcjonalna do ciśnienia).

Ponieważ zgodnie z definicją $v_C = \frac{dy}{dt}$ z drugiej części równania (5.16) otrzymamy

$$\frac{dy}{dt} = C\sqrt{\frac{x}{\varrho}}, \quad \text{gdzie} \quad C^2 = \frac{2\varrho_w g}{\left(\frac{q_C}{q}\right)^2 - 1},$$

skąd

$$dt = \frac{\sqrt{\varrho}}{C}\frac{dy}{\sqrt{x}}, \quad \text{oraz} \quad t = \frac{\sqrt{\varrho}}{C}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{x}}.$$

Wykonując pomiary dla badanego gazu (t_g, ϱ_g) oraz dla powietrza (t_p, ϱ_p) możemy napisać

$$t_g = \frac{\sqrt{\varrho_g}}{C}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{x}} \quad \text{i} \quad t_p = \frac{\sqrt{\varrho_p}}{C}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{x}}.$$

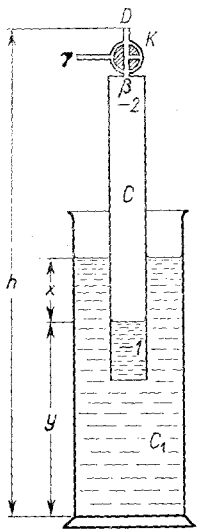
Wynika stąd następująca proporcja

$$\frac{\varrho_g}{\varrho_p} = \frac{t_g^2}{t_p^2}, \tag{5.17}$$

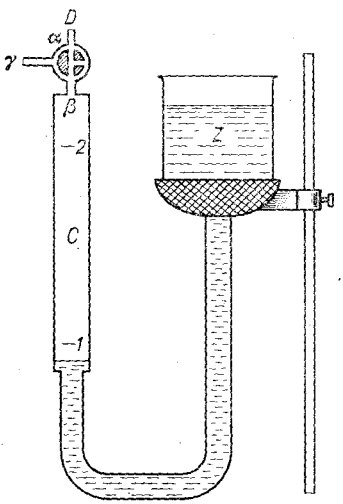
przy założeniu, że granice całkowania są takie same w obydwu przypadkach.

Aparatura

Aparatura pokazana na rysunku 5.4 składa się z cylindra C, na którym znaczkami *1* i *2* oznaczono objętość, dla której mierzyć będziemy czas wypływu. U góry cylinder zakończony jest trójdrożnym zaworem kurkowym K i dyszą D, przez którą gaz wypływa.



5.4. Efuzjometr Bunsena.



5.5. Inna postać wypływomierza Bunsena.

Do ramienia γ zaworu podłączyć można butlę CO_2 lub innego gazu. Cylinder C wchodzi do dużego cylindra C_1 wypełnionego wodą. Napełniając cylinder powietrzem ustawiamy kurek w położeniu II (rys. 3.29) i unosimy cylinder w górę, do takiego położenia, w którym jego dolna krawędź znajduje się jeszcze pod powierzchnią wody. Po wypełnieniu cylindra zamykamy zawór (położenie IV) i opuszczamy C do dna C_1. Wykonując pomiar ustawiamy kurek w położeniu II i mierzymy sekundomierzem czas wypełniania się cylindra wodą. Wypełniając cylinder badanym gazem zbiornik z gazem podłączamy

po ramienia γ (sposób obsługi butli z gazem technicznym znajdzie czytelnik w § 3.11). Wypływomierz Bunsena może być również zbudowany w sposób pokazany na rys. 5.5. Wtedy wypełniając cylinder C gazem opuszczamy zbiornik Z do dołu, po czym zamykamy zawór K i podnosimy zbiornik Z w górę. Pomiar wykonujemy w taki sam sposób jak przyrządem z rysunku 5.4.

Pomiary i obliczenia

Wykonujemy próbne pomiary czasu wypływu, a następnie planujemy liczbę pomiarów, które pozwolą obliczyć odchylenia standardowe średniej z poziomem ufności 0,7 oraz 0,999 bez konieczności stosowania metody Studenta–Fishera. Korzystając z wzoru (5.5) obliczamy masę drobinową gazów jednoskładnikowych.

5.5. GĘSTOŚĆ WZGLĘDNA GAZU

Cel: wyznaczanie gęstości względnej kilku gazów, obliczenie ich masy drobinowej.

Przyrządy: waga (§ 3.4), manometr i barometr (§ 3.8), pompa rotacyjna (§ 3.10), zawory (§ 3.11).

Zagadnienia: wpływ wyporu na ważenie, wyznaczanie masy drobinowej (§ 5.01–02), gazy doskonałe (S2, § 3, 4, 8, 9), piknometr (§ 5.2).

Wprowadzenie

Zasada pomiaru jest identyczna jak w przypadku piknometru (§ 5.2). Ważymy kolbę szklaną będącą odpowiednikiem piknometru, wypełnioną badanym gazem — m_g, gazem wzorcowym — m_w oraz kolbę pustą — m_p, a gęstość gazu obliczamy wzorem (5.9a), który w omawianym przypadku przyjmuje postać

$$\varrho_{gT} = \varrho_{wT} \frac{m_g - m_p}{m_w - m_p}. \tag{5.18}$$

Zamiast gazu wzorcowego pomiar możemy wykonać względem wody, lecz wtedy musimy uwzględnić wpływ temperatury i ciśnienia na wynik pomiarów. Zakładając, że gaz stosuje się do równania Clapeyrona napiszemy

$$p_{gT} V_{gT} = \frac{p_0 v_0}{T_0} T_g, \tag{5.19}$$

gdzie p_{gT} i V_{gT} oznaczają odpowiednio ciśnienie i objętość gazu w temperaturze T, a T_g temperaturę pomiaru i V_0 objętość gazu w warunkach normalnych (p_0 = = 760 mm Hg, T_0 = 273,15 K). W przemianie prowadzącej do warunków normalnych masa gazu $m = \varrho V$ nie ulega zmianie, czyli musi zachodzić związek

$$V_{gT} \varrho_{gT} = V_0 \varrho_{g0},$$

skąd wynika

$$\frac{V_{gT}}{V_0} = \frac{\varrho_{g0}}{\varrho_{gT}}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (5.19) otrzymamy

$$\frac{\varrho_{g0}}{\varrho_{gT}} = \frac{p_0}{T_0 p_{gT}} T_g$$

lub po podstawieniu wartości liczbowych na p_0 i T_0

$$\varrho_{g0} = \varrho_{gT} \frac{760}{273{,}15 h_0} T_g, \tag{5.20}$$

gdzie symbol h_0 oznacza zredukowane ciśnienie barometryczne (§ 3.8, por. wzór 3.10).

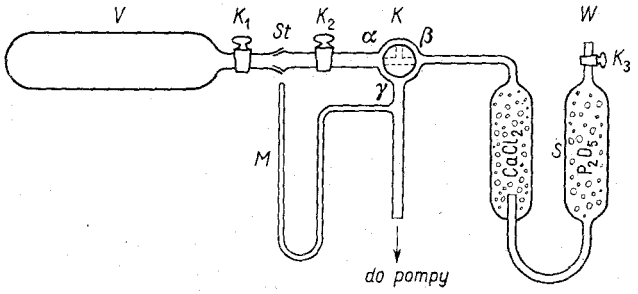
Podstawiając na ϱ_{gT} wyrażenie (5.18) otrzymamy

$$\varrho_{g0} = \frac{m_g - m_p}{m_w - m_p} \cdot \varrho_{wT} \frac{760}{273{,}15 h_0} T_g, \tag{5.21}$$

gdzie wskaźnik w dotyczy cieczy wzorcowej. W przypadku pomiaru gęstości jednego gazu względem drugiego, poprawek związanych z wyporem stosować nie musimy, pod warunkiem, że obydwa gazy stosują się do równania gazu doskonałego. Stosunek gęstości takich gazów nie zależy od temperatury.

Aparatura

Aparaturę służącą do wyznaczania gęstości gazu względem powietrza pokazano na rysunku 5.6. Składa się ona z kolby szklanej V o objętości 1–2 dm^3, manometru skróconego M, suszki S, trzech zaworów jednodrożnych K_1, K_2 i K_3 oraz zaworu trójdrożnego K. Do odpompowania służy pompa rotacyjna dająca próżnię rzędu 10^{-2} Tr.



5.6. Aparatura do opróżniania kolby z powietrza i wypełniania jej badanym gazem.

Kolba połączona jest z pozostałą częścią aparatury szlifem stożkowym St umożliwiającym łatwe jej odłączenie. W przypadku, gdy gęstość gazu wyznaczamy względem wody, aparaturę można uprościć. Objętość kolby nie powinna wtedy przekroczyć 100 cm^3. Nie jest również konieczny manometr, a pompę rotacyjną można zastąpić pompą wodną Bunsena. Cała aparatura umocowana jest na odpowiednim statywie.

Pomiary

Doświadczenie wykonujemy w następujący sposób. Stożek St pokrywamy cienką warstwą smaru próżniowego i łączymy kolbę V z pozostałą częścią aparatury. Otwieramy zawory K_1 i K_2, a zawór trójdrożny K ustawiamy w położeniu pokazanym na rysunku 3.29b, IV łącząc aparaturę próżniową z kolbą V. Zmiany ciśnienia obserwu-

jemy na manometrze M. Gdy poziomy w obydwu ramionach wyrównają się, zamykamy zawory K_1 i K_2, wyłączamy pompę, odłączamy kolbę i ważymy na wadze analitycznej w przypadku, gdy jej objętość jest rzędu 100 cm^3, lub na laboratoryjnej, gdy objętość ta jest rzędu 2 dm^3. Otrzymujemy wynik oznaczony symbolem m_p. Po wykonaniu tego pomiaru kolbę ponownie łączymy z aparaturą, odpompowujemy otwierając zawory K_1 i K_2. Po odpompowaniu otwieramy zawór K_3, a zawór K ustawiamy w położeniu II (por. rysunek 3.29b). Kolba wypełnia się suchym powietrzem. Zamykamy zawory K_1, K_2 i K_3, odłączamy kolbę i ważymy otrzymując m_w. Przy trzecim pomiarze do wylotu suszki w miejscu W podłączamy butlę z dwutlenkiem węgla. Przed podłączeniem kolby, przy otwartym zaworze K_2 a zaworze K w położeniu III przepłukujemy suszkę dwutlenkiem węgla, celem usunięcia resztek powietrza. Następnie ustawiamy zawory K_3 i K w sposób pozwalający na odpompowanie kolby i włączamy pompę na czas około 10-ciu minut. Otwieramy zawór K_3, a K ustawiamy w położeniu II i otwieramy dopływ dwutlenku. Dwutlenek węgla wypełnia kolbę do ciśnienia nieco wyższego od atmosferycznego. Celem wyrównania ciśnienia z atmosferycznym odłączamy butlę z dwutlenkiem węgla i dopiero po upływie ok. 5 sekund, gdy ciśnienia wyrównają się, zamykamy zawory K_1, K_2 i K_3. Odłączamy kolbę i ważymy ją. Otrzymujemy pomiar wielkości m_g. Podobny eksperyment jak z dwutlenkiem węgla wykonać możemy również z innymi gazami, np. świetlnym.

W przypadku, gdy gęstość gazu mierzymy względem wody, dwa etapy doświadczenia (pomiar wielkości m_p i m_g) wykonujemy w taki sam sposób. Kolbę odpompowujemy zawsze w czasie 10 minut. W przypadku pomiaru z wodą odpompowaną kolbę zanurzamy w destylowanej i przegotowanej wodzie (pozbawionej resztek gazu) i pod wodą otwieramy zawór K_1. Temperatura wody musi być równa temperaturze pokojowej. Kolba wypełnia się wodą, lecz pozostaje część niewypełniona, w której skupiają się resztki powietrza. Zamykamy zawór K_1, suszymy dokładnie kolbę i ważymy (m_w). W tym przypadku nie jest istotnie ważne dokładne odpompowanie kolby, ponieważ ciecz wzorcowa — woda wypełnia tylko taką objętość, jaka została dokładnie opróżniona. Resztki gazu skupiają się już pod normalnym ciśnieniem w pozostałej części kolby.

Obliczenia

W przypadku pomiaru względem powietrza gęstość obliczamy z wzoru (5.21), a względem wody z równania (5.18). Potrzebną do obliczeń gęstość wody lub powietrza bierzemy z tablic. Dla przypadku z dwutlenkiem węgla obliczamy masę drobinową z wzoru (5.5). Błędy obliczamy dla wszystkich wyznaczonych w doświadczeniu wielkości. Sprawdzamy zgodność wyników z danymi z tablic.

5.6 GĘSTOŚĆ BEZWZGLĘDNA GAZU

Cel: wyznaczenie gęstości bezwzględnej kilku gazów i obliczenie ich masy drobinowej.

Przyrządy: waga analityczna (§ 3.4), manometry i barometr (§ 3.8), pompa rotacyjna (§ 3.10), zawory (§ 3.11).

Zagadnienia: wpływ wyporu na ważenie, wyznaczanie masy drobinowej (§ 5.01–02), gazy doskonałe (S2, § 3, 4, 8, 9) oraz przeczytać opis doświadczenia 5.5.

Wprowadzenie

W doświadczeniu wyznaczamy gęstość wprost z definicji, jako stosunek masy gazu do objętości $\varrho = mV^{-1}$. W tym celu musimy zważyć pewną objętość V gazu. Ważymy więc pustą kolbę szklaną, a następnie tę samą kolbę wypełnioną badanym gazem. Musimy jednak pamiętać, że gęstość gazu zależy od temperatury i ciśnienia. Zależnością tą rządzi równanie charakterystyczne gazu doskonałego

$$pV = p_0 V_0 \frac{T}{T_0},$$

gdzie $p_0 = 760$ mm Hg, $T_0 = 273{,}15$ K. Mnożąc odwrotność powyższego równania przez masę gazu i uwzględniając definicję gęstości $\varrho = \frac{m}{V}$ otrzymamy

$$\varrho = \varrho_0 \frac{T_0}{p_0} \frac{p}{T}. \tag{5.22}$$

Po odpompowaniu w kolbie pozostaje pewna masa $m_1 = \varrho V$ gazu pod ciśnieniem p_1. Korzystając z zależności (5.22) otrzymamy

$$m_1 = V\varrho_0 \frac{T_0 p_1}{p_0 T}.$$

Masa gazu po napełnieniu kolby w tej samej temperaturze T wynosi

$$m_2 = V\varrho_0 \frac{T_0 p_2}{p_0 T}.$$

Ilość gazu wprowadzonego do kolby wynosi $m_2 - m_1 = V\varrho_0 \frac{T_0(p_2 - p_1)}{p_0 T}$, a jego gęstość w warunkach normalnych obliczona z ostatniego równania

$$\varrho_0 = \frac{m_2 - m_1}{V} \frac{Tp_0}{T_0(p_2 - p_1)}. \tag{5.23a}$$

Chcąc dobrze wyznaczyć gęstość gazu musimy uwzględnić poprawki na siłę wyporu powietrza. Zgodnie z równaniem (5.4) poprawki mas m_2 i m_1 wynoszą $\left(1 + \frac{\varrho_p}{\varrho} - \frac{\varrho_p}{\varrho_0}\right)$, gdzie ϱ oznacza średnią gęstość kolby, ϱ_0 — odważników, ϱ_p — powietrza, a równanie (5.23a) przyjmie postać

$$\varrho_0 = \frac{m_2 - m_1}{V} \frac{Tp_0}{T_0(p_2 - p_1)} \left(1 + \frac{\varrho_p}{\varrho} - \frac{\varrho_p}{\varrho_0}\right). \tag{5.23}$$

Wpływ siły wyporu można również wyeliminować przez tarowanie wagi. W tym celu na drugiej szalce wagi umieszczamy zamkniętą kolbę tej samej wielkości co kolba ważona. Siły wyporu działające wtedy na obydwie szalki wagi są równe i znoszą się wzajemnie. Drobne różnice masy obydwu kolb wyrównujemy odważnikami. Siły wyporu działające na odważniki zaniedbujemy. Oznaczając masy odważników służących do wyznaczania masy kolby wypełnionej gazem i pustej przez m_2' i m_1' otrzymamy

$$\varrho_0 = \frac{m_2' - m_1'}{V} \frac{Tp_0}{T_0(p_2 - p_1)}. \tag{5.23b}$$

Aparatura i pomiary

Pomiary wykonujemy za pomocą aparatury pokazanej na rysunku 5.6 i omawianej w doświadczeniu 5.5. Postępując w podobny sposób, jak w doświadczeniu 5.5, ważymy kolbę pustą (m_1') pod ciśnieniem p_1 ustawiając na prawej szalce wagi kolbę — tarę, następnie ponownie odpompowujemy, napełniamy kolbę badanym gazem i ponownie ważymy (m_2). Notujemy wskazanie manometru skróconego przy pierwszym odpompowaniu oraz stan barometru h. Podobne pomiary wykonujemy dla innych gazów wyznaczonych w instrukcji i powtarzamy je 2–3-krotnie, do obliczania błędów stosujemy metodę Studenta–Fishera.

Obliczenia

Gęstość ϱ_0 badanych gazów obliczamy z wzoru (5.23b). Dla przypadku gazów jednoskładnikowych obliczamy masę drobinową z wzoru (5.5). Wyprowadzamy wzór na błąd $S_{\overline{\varrho_0}}$ i obliczamy błąd dla każdego gazu oddzielnie. Obliczamy również błąd masy drobinowej. Sprawdzamy zgodność wyników z danymi z tablic fizycznych.

6. KINEMATYKA I DYNAMIKA

6.1. RUCH CIAŁA O ZMIENNEJ MASIE

Cel: badanie sił odrzutu za pomocą spadkownicy Atwooda.
Przyrządy: spadkownica, sekundomierz (§ 3.5).
Zagadnienia: zasady dynamiki (S1, § 10–15; P1, § 32–50), ruch rakiet (K, str. 206; S1, § 24 i 25)

Wprowadzenie

Na nici przerzuconej przez lekki bloczek C zawieszone są dwa cylindry z wodą. Cylinder A ma mały otwór w dnie, a cylinder B ma dwa otwory w przeciwległych ściankach bocznych. Średnice otworów dobrane są w ten sposób, by prędkość wypływu wody

$$\frac{dm}{dt} = \varepsilon = \text{const} \tag{6.1}$$

była równa dla obydwu cylindrów. Jeżeli więc masy obydwu cylindrów z wodą są równe w chwili $t = 0$, to mimo wypływu wody pozostają równe po dowolnym czasie t. Załóżmy, że w chwili t układ porusza się w sposób pokazany na rysunku 6.1. Prędkość wypływającej wody mierzona względem cylindra A wynosi u, a względem nieruchomego układu odniesienia $u-v$. Na skutek wypływu wody cylinder doznaje działania siły, zwanej siłą odrzutu, równej prędkości zmiany pędu $-\frac{dm}{dt}(u-v)$. Ponadto na cylinder działa siła T wywierana przez nić oraz siła $-mg$ wywołana przyciąganiem ziemskim. Równanie ruchu cylindra A przyjmuje postać

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dm}{dt}(u-v) + T - mg.$$

Ponieważ

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}, \tag{6.1a}$$

otrzymamy

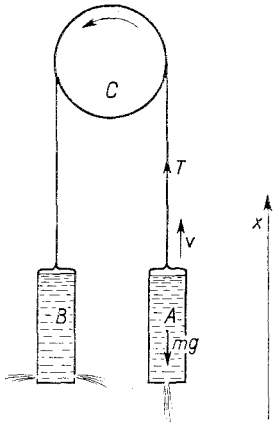
$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} + T - mg. \tag{6.2}$$

Na cylinder B działa również siła T oraz $-mg$. Ponadto doznaje on działania siły $\frac{dm}{dt}(-v)$, przy czym wypływająca woda nie wnosi własnego przyczynku z powodu przeciwnych kierunków wypływu z obydwu otworów. Równanie ruchu cylindra B przyjmuje postać

$$-\frac{dp}{dt} = -v\frac{dm}{dt} + T - mg,$$

skąd po uwzględnieniu (6.1a)

$$-m\frac{dv}{dt} = T - mg. \tag{6.3}$$



6.1. Zasada doświadczenia dotyczącego ruchu ciała o zmiennej masie.

Odejmując równanie (6.3) od (6.2) otrzymamy

$$2m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} \quad \text{lub} \quad dv = \frac{u}{2}\frac{dm}{m}.$$

Całkując powyższe wyrażenie i przyjmując, że w chwili $t = 0$, $m = m_0$, $v = 0$, otrzymamy

$$v = \frac{u}{2}\ln\frac{m_0}{m}. \tag{6.4}$$

Równanie powyższe różni się od sławnego równania Ciołkowskiego, dotyczącego ruchu rakiet, jedynie współczynnikiem 2, co intuicyjnie tłumaczy się faktem, iż przyspieszamy

dwa cylindry. Dalsze uproszczenie otrzymamy zakładając, że woda wypływa powoli i po czasie t wypływa masa m_1, gdzie $m_1 \ll m_0$, wtedy

$$\ln \frac{m_0}{m} = \ln \frac{m_0}{(m_0 - m_1)} \cdot \frac{(m_0 + m_1)}{(m_0 + m_1)} = \ln \frac{m_0^2 + m_0 m_1}{m_0^2 - m_1^2}.$$

Zaniedbując m_1^2 wobec m_0^2 otrzymamy*

$$\ln \frac{m_0}{m} = \ln \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right) = \frac{m_1}{m_0}.$$

Zatem ostatecznie równanie (6.4) przyjmuje postać

$$v = \frac{u}{2} \frac{m_1}{m_0}. \tag{6.5}$$

Masę m_1 wody, która wypłynęła w czasie t otrzymamy z równania (6.1) przy założeniu, że dla $t = 0$ $m_1 = 0$, po scałkowaniu otrzymamy $m_1 = \varepsilon t$, a równanie (6.5) przyjmie postać

$$v = \frac{u}{2m_0} \varepsilon t.$$

Chcąc otrzymać wyrażenie na drogę x równanie powyższe musimy ponownie scałkować względem czasu. Uwzględniając warunek, że $v = 0$ dla $t = 0$ otrzymamy

$$x - x_0 = \frac{u}{4m_0} \varepsilon t^2. \tag{6.6}$$

W podobnych warunkach dla ruchu jednostajnie przyspieszonego droga wyraża się wzorem

$$x - x_0 = \frac{1}{2} a t^2 \tag{6.7}$$

Zatem ruch zachodzący pod wpływem siły odrzutu jest ruchem jednostajnie przyspieszonym i jego przyspieszenie a_0 wynosi**

$$a_0 = \frac{u\varepsilon}{2m_0} \tag{6.8}$$

Prędkość u obliczyć możemy w przybliżeniu, zakładając, że energia kinetyczna wypływającej wody jest równa energii potencjalnej powierzchni wody w cylindrze mierzonej względem dna tego cylindra.

$$mg\bar{h} = \frac{mu^2}{2},$$

skąd

$$u = \sqrt{2g\bar{h}}, \tag{6.9}$$

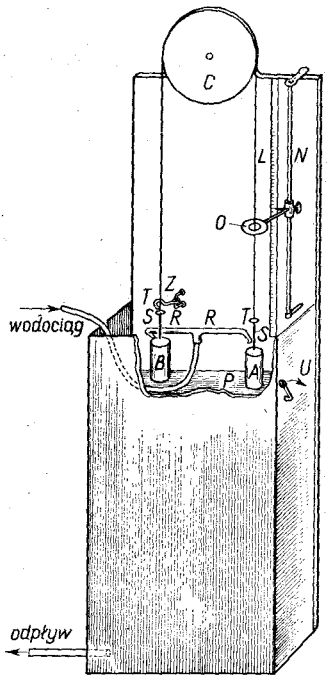
gdzie $\bar{h}$ oznacza średni poziom wody w cylindrze w czasie od $t = 0$ do $t = t$.

* Ostatni wynik uzyskujemy rozwijając na szereg wyrażenie logarytmiczne $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ dla $-1 < x < +1$.

** Przyspieszenie rakiety wyraża się wzorem $a_r = \frac{u\varepsilon}{m_0}$.

Aparatura

Budowę aparatury pokazano na rysunku 6.2. Ścianki boczne cylindrów A i B wykonane są ze szkła i zaopatrzone w podziałkę wyskalowaną w cm^3. Metalowe dna cylindrów posiadają otwory tak dobrane, by prędkości wypływu były równe dla obydwu cylindrów. Cylindry poruszają się wewnątrz gabloty o przezroczystej ścianie przedniej. Dolna część gabloty jest wodoszczelna, a w odległości 10 cm od podstawy znajduje się odpływ podłączony do instalacji kanalizacyjnej. Górną część przedniej ściany gabloty tworzą przezroczyste drzwi (nieuwzględnione na rysunku). W dolnej części gabloty znajduje się ruchoma podstawka P. Uchwyt U pozwala na ustawienie podstawki w po-



6.2. Spadkownica do badania ruchu ciała o zmiennej masie.

zycji poziomej, wtedy na niej spoczywać mogą cylindry lub na opuszczenie jej w dół, co jest równoważne wprowadzeniu układu w ruch. Z podstawką P związany jest również układ rurek R służących do napełniania cylindrów. Gdy podstawka znajduje się w położeniu poziomym, wtedy otwory rurek znajdują się nad cylindrami. Opuszczenie podstawki powoduje automatycznie odsunięcie rurek w bok. Rurki R połączone są wężem gumowym z instalacją wodną. Cylindry połączone są z nicią poprzez pręty S i krążki T; w środku krążka znajduje się mały otworek, przez który przechodzi nić. Zasuwka Z unieruchamia krążek T_B, a tym samym cały układ. Do zatrzymania układu służy pierścień O przesuwalny w kierunku pionowym wzdłuż pręta N. Jego położenie określa długość drogi przebytej przez cylinder A, można je odczytać na skali L. Nić jest przerzucona przez bloczek C o bardzo małym tarciu. Woda znajdująca się na dnie gabloty stanowi ewentualną amortyzację dla spadającego cylindra B. Pracując urządzeniem nie należy podnosić platformy dopóki odbywa cylindry nie znajdują się ponad nią, gdyż można zrzucić nić z bloczka C.

Pomiary

Pomiary rozpoczynamy od wyznaczenia prędkości wypływu wody z cylindrów. W tym celu otwieramy górną część gabloty, a cylindry unieruchomiamy za pomocą zasuwki Z. Napełniamy cylindry wodą, niezbyt silnym strumieniem, by woda nie rozpryskiwała się. Cylindry uważamy za napełnione, jeżeli woda zaczyna się przelewać spływając po zewnętrznych ściankach. Wtedy zamykamy dopływ wody i mierzymy sekundomierzem czas wypływu np. 50, 100, 150 cm^3 wody z cylindra A. Objętość wypływającej wody odczytujemy na skali cylindra. Pomiary powtarzamy trzykrotnie. Obliczamy prędkość wypływu każdej z mierzonych objętości wody oraz średnią prędkość wypływu u_A. Takie same pomiary wykonujemy dla cylindra B otrzymując u_B. Przyrząd nadaje się do dalszych pomiarów, jeżeli $u_A = u_B = u$. Ważymy puste cylindry i mierzymy ich objętość celem ustalenia m_0. Mierzymy dokładnie wysokość h_0 cylindra A od otworu do górnej krawędzi, a następnie odległości h_k od otworu do k-tej kreski skali cylindra odpowiadającej 200, 150, 100 i 50 cm^3. Przystępując do badań siły odrzutu zwalniamy zasuwkę Z, nastawiamy pierścień O na pożądane położenie np. 50 cm, zamykamy gablotę i napełniamy cylindry wodą. Przed rozpoczęciem ruchu cylinder B powinien opierać się o podstawkę P i znajdować się o 1–2 mm niżej od cylindra A. Zwalniamy układ przesuwając uchwyt U szybkim ruchem. Równocześnie włączamy sekundomierz. Sekundomierz wyłączamy w momencie, gdy usłyszymy uderzenie krążka T_A o pierścień O. Notujemy poziom wody h_0 w chwili rozpoczęcia ruchu i h_i w chwili zatrzymania układu. Podobne pomiary wykonujemy dla około 6-ciu różnych wartości drogi x. Wyniki notujemy w następujących kolumnach tabelki: 1. x, 2. t, t_1, t_2, t_3 ..., 3. $\bar{t}$, $4\bar{t}^2$, 5. a_0, 6. h_i, 7. $\bar{h}$, 8. a_0'. Sposób wykonania pomiarów musi pozwolić obliczyć odchylenie standardowe $S_{\bar{a}}$ przy 1–2 wartościach x.

Obliczenia

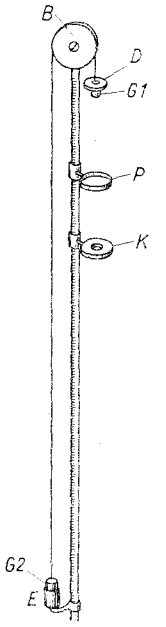
Wykreślamy zależność masy $m = \varrho V$ wypływającej wody od czasu wypływu i dyskutujemy otrzymany wykres, nachylenie jest równe ε. Sporządzamy wykres zależności odczytu na podziałce cylindra k od wysokości słupka wody h_k, który pozwoli nam ustalić wartości $\bar{h}_i = \frac{1}{2}(h_0 + h_i)$. Obliczamy przyspieszenie a_0 z wzoru (6.7) przy $x_0 = 0$ dla wszystkich pomiarów, a następnie $\bar{a}_0$. Korzystając z wyznaczonej prędkości wypływu ε obliczamy teoretyczne wartości przyspieszenia odrzutu a_0' z wzoru, który otrzymamy podstawiając (6.9) do równania (6.8). Obliczamy a_0' dla wartości $\bar{h}$ odpowiadającej jednemu z pomiarów przyspieszenia. Dla tej samej wartości $\bar{h}$ obliczamy ε korzystając z wykresu $k(h_k)$. Dyskutujemy zgodność wyników a_0 i a_0' oraz wyniki doświadczenia.

6.2. SPADKOWNICA ATWOODA

Cel: badanie ruchu jednostajnego i jednostajnie zmiennego za pomocą spadkownicy.
Przyrządy: sekundomierz (§ 3.5), waga (§ 3.4).
Zagadnienia: kinematyka (S1, § 4–9; P1, § 6–14), dynamika (S1, § 10–15; P1, § 32–50).

Aparatura

Aparatura (rys. 6.3) składa się z bloczka B o bardzo małym współczynniku tarcia, dwóch równych ciężarków $G1$ i $G2$ zawieszonych na nici przerzuconej przez bloczek, elektromagnesu E, który może utrzymać ciężarek $G2$ w dowolnym położeniu, dodatkowego ciężarka D zwanego konikiem, pierścienia P służącego do zatrzymania konika, skali S oraz podstawki K zatrzymującej ciężarek $G1$. Pierścień i podstawkę można przesuwać wzdłuż skali regulując tym samym drogę, na której ciężarek $G1$ porusza się ruchem przyspieszonym lub jednostajnym.



6.3. Spadkownica Atwooda.

W chwili początkowej ciężarek $G2$ jest utrzymywany w dolnym położeniu przez elektromagnes E. Na ciężarek $G1$ nakładamy konik, odczytujemy jego położenie x_0. Wielkość $x_i - x_0$ jest drogą w ruchu jednostajnie przyspieszonym, którym rządzi prawo

$$x_i = x_0 + \frac{1}{2} a t_i^2. \tag{6.10}$$

Drogę od pierścienia (x_i) do podstawki (x_j) układ przebędzie ruchem jednostajnym, gdyż pozbawiony konika jest dokładnie zrównoważony

$$x_j - x_i = v t_j. \tag{6.11}$$

Pomiary

Celem zbadania ruchu jednostajnie przyspieszonego dobieramy położenie x_i pierścienia P, a podstawkę K ustawiamy zawsze ok. 10 cm poniżej pierścienia. Mierzymy czas t_i, który upływa od momentu zwolnienia ciężarka $G2$ (sekundomierz włączamy w chwili naciśnięcia przycisku w obwodzie elektromagnesu) do chwili, w której usły-

szymy uderzenie konika o pierścień (wyłączamy sekundomierz). Pomiary wykonujemy dla około 10-ciu różnych dróg $x_i - x_0$.

Badając ruch jednostajny ustalamy położenie pierścienia x_i i nie zmieniamy go. Zmieniamy natomiast położenie x_j podstawki. Mierzymy czas t_j trwania ruchu jednostajnego włączając sekundomierz w chwili uderzenia konika o pierścień, a wyłączamy w chwili uderzenia ciężarka *G1* w podstawkę *K*.

Obliczenia

Stosując metodę najmniejszych kwadratów obliczamy teoretyczne wartości nachylenia obydwu mierzonych zależności liniowych jakimi są: równanie (6.10) w układzie współrzędnych $x_i - x_0$ i t_i^2 oraz (6.11) w układzie $x_j - x_i$ i t_j. Znając parametry a_1, b_1 oraz a_2, b_2 tych linii wykonujemy wykresy krzywych teoretycznych, na które nanosimy punkty pomiarowe i sprawdzamy zgodność punktów pomiarowych z wyliczonymi prostymi. Znając nachylenie prostych obliczamy ponownie przyspieszenie $a = 2a_1$ i prędkość $v = a_2$. Sprawdzamy zgodność wyników uzyskanych obydwiema metodami.

6.3. RUCH W UKŁADZIE WIRUJĄCYM

Cel: wyznaczanie prędkości początkowej kulki wybiegającej z wyrzutnika, przy zaniedbaniu tarcia.
Przyrządy: sekundomierz (§ 3.5).
Zagadnienia: dynamika (S1, § 10–15; H1, § 5.6), siły w układach przyspieszonych (S1, § 38–41).

Wprowadzenie

W układzie wirującym występuje przyspieszenie Coriolisa **a** (S1, § 41):

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega},$$

gdzie **v** oznacza prędkość ciała, a $\boldsymbol{\omega}$ — prędkość kątową układu wirującego. W omawianym doświadczeniu ruch kulki odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu układu wirującego, wektor $\boldsymbol{\omega}$ jest więc zawsze prostopadły do wektora **v** i przyspieszenie Coriolisa możemy napisać w postaci skalarnej

$$a = 2v\omega. \tag{6.12}$$

Istnieją dwa sposoby opisu zjawisk zachodzących w wirującym układzie odniesienia: opis z punktu widzenia obserwatora ruchomego (a) związanego z układem oraz opis obserwatora nieruchomego (b). Obydwa opisy zilustrujemy na przykładzie kulki poruszającej się w układzie wirującym. Z punktu widzenia obserwatora ruchomego ruch ciała od punktu *O* do punktu *A* (rys. 6.4a) możemy rozpatrywać jako nałożenie się dwóch ruchów: ruchu jednostajnego wzdłuż prostej *OB*, w którym droga *R* wyraża się wzorem

$$R = vt$$

oraz z ruchu jednostajnie przyspieszonego po łuku *BA*. W drugim przypadku droga równa długości łuku αR wyraża się wzorem

$$\alpha R = \frac{at^2}{2}.$$

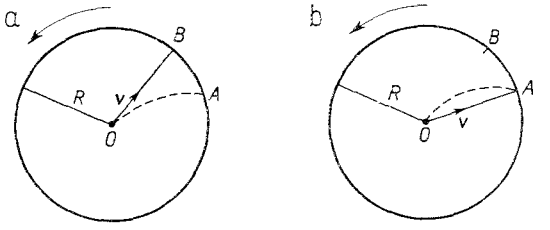
Eliminując czas z ostatnich dwóch równań, otrzymamy

$$a = \frac{2\alpha v^2}{R}.$$

Porównując przyspieszenie wyrażone ostatnim wzorem z przyspieszeniem Coriolisa (6.12), otrzymamy następujący wzór na prędkość ciała

$$v = \frac{R\omega}{\alpha}, \tag{6.13}$$

gdzie kąt α musi być wyrażony w radianach.



6.4. Ruch kulki w układzie wirującym z punktu widzenia obserwatora ruchomego (a) i nieruchomego (b).

Przyjmując za punkt wyjścia stanowisko obserwatora nieruchomego (b), stwierdzimy, że kulka zgodnie z I zasadą dynamiki porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej OA (rys. 6.4b). Drogę OA wynoszącą R przebywa ona w czasie t:

$$t = \frac{R}{v}.$$

W tym samym czasie tarcza obróci się o kąt α, który zgodnie z definicją prędkości kątowej wyraża się wzorem

$$\alpha = \omega t.$$

Łącząc ostatnie dwa wzory, otrzymamy związek (6.13).

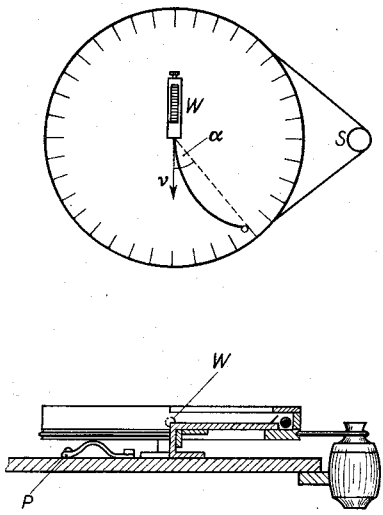
Aparatura

Przyrząd składa się z tarczy wprowadzonej w ruch obrotowy za pomocą silnika elektrycznego S (rys. 6.5). Prędkość kątową tarczy zmieniać można za pomocą autotransformatora, z którego zasilany jest silnik. Wyrzutnik W służy do wprowadzenia w ruch kulki metalowej. Budowę wyrzutnika W pokazano na rysunku 6.9. Do uwolnienia kulki służy przycisk P. Jest on połączony ze sprężyną, która po naciśnięciu przycisku unosi się w górę. W tarczy pod wyrzutnikiem znajduje się dźwignia d służąca do zwolnienia wyrzutnika. Kulka zostaje zwolniona w chwili, gdy w czasie obrotu tarczy nad sprężyną połączoną z przyciskiem P znajdzie się dźwignia wyrzutnika. Wyrzutnik napinamy w czasie, gdy tarcza jest nieruchoma. Na obwodzie tarczy znajdują się przegródki; do jednej z nich wpada kulka.

Pomiary

Liczymy ilość przegródek znajdujących się na obwodzie tarczy, obliczamy jakiemu kątowi odpowiada odstęp między dwiema przegródkami oraz mierzymy promień tarczy.

Pomiary wykonujemy w następujący sposób. Napinamy wyrzutnik, wkładamy kulkę stalową i włączamy silnik. Mierzymy czas trwania 10 obrotów tarczy ($10T$). Naciskając przycisk P uwalniamy kulkę, która biegnie po torze pokazanym na rysunku 6.5



6.5. Przyrząd do badania ruchu w układzie wirującym.

i wpada do jednej z przegródek. Wyłączamy silnik i zapisujemy numer przegródki. Pomiar powtarzamy przynajmniej 3-krotnie. Błąd odczytu kąta jest równy kątowi, jakiemu odpowiada szerokość połowy przegródki. Pomiar prędkości kulki powtarzamy jeszcze przy dwóch innych prędkościach tarczy (tzn. przy dwóch innych napięciach autotransformatora). Przy wszystkich 9-ciu pomiarach naprężenie sprężyny wyrzutnika musi być dokładnie takie samo. Identyczne pomiary powtarzamy dla innej prędkości kulki, to znaczy przy innym napięciu sprężyny. Łącznie wykonujemy przynajmniej 27 pomiarów.

Obliczenia

Obliczamy dla każdego pomiaru prędkość kątową ω ze wzoru $\omega = 2\pi T^{-1}$ oraz kąt odpowiadający przegródce, do której wpadła metalowa kulka α_k. Z wzoru (6.13) obliczamy prędkość v. Obliczamy wartości średnie $\overline{v}$ dla każdego naciągu sprężyny. Wyprowadzamy wzory potrzebne do obliczenia błędów ω i $\overline{v}$. Błędy obliczamy dla jednego z pomiarów każdej serii, odpowiadającej temu samemu naciągowi sprężyny wyrzutnika. Przyjmujemy, że wartości średnie obarczone są takim samym błędem.

6.4. WSPÓŁCZYNNIK TARCIA

Cel: wyznaczenie kinematycznego i statycznego współczynnika tarcia dwoma sposobami, jako stosunku siły tarcia do siły przyciskającej oraz jako tangensa kąta tarcia.

Zagadnienia: zasady dynamiki (S1, § 10–15; H1, § 5.6; P1, § 32–49).

Wprowadzenie

Ciało porusza się ruchem jednostajnym tylko wtedy, gdy działamy na nie siłą F_p równoważącą siłę tarcia T. Siła tarcia jest proporcjonalna do siły F_n z jaką ciało działa na podłoże

$$T = \mu F_n. \tag{6.14}$$

Współczynnik proporcjonalności μ nazywamy współczynnikiem tarcia. Jest on wielkością niemianowaną i zależy od rodzaju trących się powierzchni. Wartość siły tarcia w ruchu jest mniejsza od siły tarcia w spoczynku. Rozróżniamy więc dwa współczynniki tarcia: kinetyczny współczynnik tarcia μ_k dla ciał znajdujących się w ruchu oraz statyczny współczynnik tarcia μ_s dla ciał znajdujących się w spoczynku. Zawsze $\mu_k < \mu_s$.

Rozważmy przypadek ciała zsuwającego się po równi pochyłej (rys. 6.6). Ciężar G rozkłada się na dwie składowe. Wzdłuż równi działa składowa $F_p = G\sin\alpha$, natomiast na równię działa siła $F_n = G\cos\alpha$. Kąt α możemy dobrać w taki sposób, by składowa F_p równoważyła siłę tarcia $T(F_p = -T)$. Wtedy klocek zsuwa się ruchem jednostajnym i równanie (6.14) przyjmuje postać

$$G\sin\alpha = \mu_k G\cos\alpha,$$

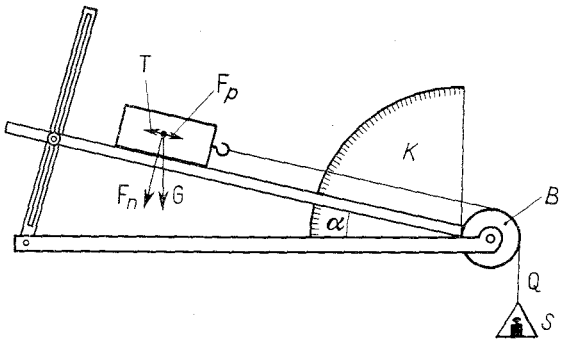
skąd

$$\mu_k = \operatorname{tg}\alpha. \tag{6.15}$$

Tak więc kinematyczny współczynnik tarcia jest równy tangensowi kąta zwanego kątem tarcia. Statycznemu współczynnikowi tarcia odpowiada kąt α_s.

Aparatura

Przyrząd (rys. 6.6) składa się z wypolerowanej deski, której kąt nachylenia względem poziomu zmieniać można w granicach od 0 do $\pi/3$ (60°). Kąt ten odczytuje się na kątomierzu K. Do klocka przyczepić można nić obciążoną szalką S. Bloczek B ma bardzo mały współczynnik tarcia.



6.6. Równia pochyła.

Pomiary

Ważymy szalkę i klocki z dokładnością do 0,1 g. Na poziomo ustawionej równi ($\alpha = 0$) umieszczamy klocek wykonany z badanego materiału. Obciążenie szalki dobieramy w ten sposób, by wprowadzony w ruch klocek poruszał się ruchem jednostaj-

nym. Siła tarcia jest wtedy równa ciężarowi Q szalki wraz z odważnikami. Celem dokładnego określenia błędu pomiaru wyznaczamy wartość najmniejszą Q_1 oraz największą Q_2, przy których ruch klocka uważamy za jednostajny. Przyjmujemy, że siła tarcia T, co do wartości jest równa średniej arytmetycznej ciężarów Q_1 i Q_2, a błąd maksymalny ΔT jest równy połowie różnicy tych wartości

$$|\Delta T| = \frac{1}{2}|Q_2 - Q_1|. \tag{6.16}$$

Podobne pomiary wykonujemy dla przypadku tarcia statycznego. Dla jednego z klocków badamy zależność siły tarcia od siły przyciskającej. W tym celu mierzymy siłę tarcia klocka nieobciążonego oraz siłę tarcia tego samego klocka obciążonego ciężarkami o masach m, $2m$, $3m$ i $4m$.

Wykonując powyższe pomiary zamiast szalki zastosować możemy dynamometr. Przez Q_1 i Q_2 rozumieć będziemy wtedy granice, w których zmienia się wychylenie w czasie ruchu. W drugim etapie wyznaczamy wartość kinematycznego α_k i statycznego α_s kąta tarcia. W tym celu wartość kąta α dobieramy w taki sposób, by klocek poruszał się ruchem jednostajnym (kąt tarcia kinematycznego α_k) lub nieruchomy klocek został wprawiony w ruch (kąt tarcia statycznego α_s).

Obliczenia

Obliczamy wartości współczynników tarcia μ_k oraz μ_s wyznaczonych obydwiema metodami oraz ich błędy pomiarowe. Końcowe zestawienie wyników zapisujemy w sposób pozwalający na łatwe porównanie wyników uzyskanych dwiema metodami. Sporządzamy wykres wyznaczonej w doświadczeniu zależności siły tarcia od obciążenia. Wykres ten powinien przedstawiać linię prostą.

6.5. BADANIE ZDERZEŃ

Cel: sprawdzenie słuszności praw rządzących zderzeniami; wyznaczenie prędkości z jaką poruszała się kulka przed zderzeniem niesprężystym.

Przyrządy: waga laboratoryjna (§ 3.4), suwmiarka (§ 3.1).

Zagadnienia: zasada zachowania energii (S1, § 24; P1, § 93, 94, K, str. 171), zachowanie pędu (S1, § 24; P1, § 49; K, str. 94 i 197), zderzenia (S1, § 27; P1, § 51–54; K, str. 200; H1, § 10).

Wprowadzenie

Zderzeniami rządzą prawa: zachowania pędu i zachowania energii. Zgodnie z prawem zachowania pędu suma pędów przed zderzeniem musi być równa sumie pędów po zderzeniu. Oznaczając masy kulek przez m_1 i m_2, ich prędkości przed zderzeniem przez v_1 i v_2, a po zderzeniu przez v_1' i v_2' zasadę zachowania pędu możemy napisać następująco:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{6.17}$$

Dla realizowanego w doświadczeniu przypadku, przedstawionego schematycznie na rysunku 6.7, w przypadku gdy $m_1 < m_2$, zasada zachowania pędu przyjmuje postać

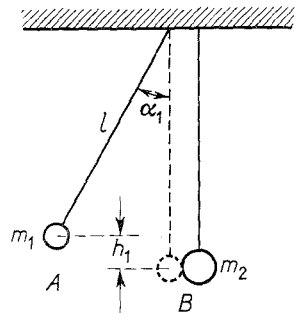
$$m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{6.18}$$

Prędkości kulek określamy z kątów maksymalnego odchylenia od położenia wyjściowego. Odchylona początkowo o kąt α_1 kulka A posiada energię potencjalną $m_1 g h_1$. Gdy kulkę zwolnimy, energia ta zamienia się całkowicie na energię kinetyczną

$$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2, \tag{6.19}$$

gdzie v_1 jest prędkością kulki A w chwili zderzenia. Między wzniesieniem kulki h_1 (rys. 6.7) a kątem α_1 istnieje związek

$$h_1 = l(1-\cos\alpha_1).$$



6.7. Rysunek pomocniczy do obliczania energii odchylanej kulki.

Podstawiając tę wartość do równania (6.19) otrzymamy

$$v_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_1)}. \tag{6.20a}$$

Oznaczając przez β_1 i β_2 kąty odchylenia kulek A i B po zderzeniu możemy ich prędkości v_1' i v_2' przedstawić w postaci

$$v_1' = \sqrt{2gl(1-\cos\beta_1)}, \tag{6.20b}$$

$$v_2' = \sqrt{2gl(1-\cos\beta_2)}. \tag{6.20c}$$

Podstawiając prędkości (6.20a–c) do równania (6.18) i wykonując proste przekształcenia matematyczne otrzymamy

$$m_1 = m_2 \frac{\sqrt{1-\cos\beta_2}}{\sqrt{1-\cos\alpha_1}+\sqrt{1-\cos\beta_1}}. \tag{6.21}$$

W przypadku zderzeń niesprężystych, w chwili zderzenia obydwa ciała łączą się w jedno, które dalej porusza się z prędkością u. Dla takiego przypadku zasada zachowania pędu (6.17) przyjmuje postać

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1+m_2)u. \tag{6.22}$$

Ponieważ w omawianym doświadczeniu realizowany będzie przypadek, w którym $u_2 = 0$, otrzymamy $m_1 u_1 = (m_1+m_2)u$. Dla odróżnienia od przypadku poprzedniego zmieniamy oznaczenia mas, niech $m_1 = m$, $m_1 = m_p$ otrzymując

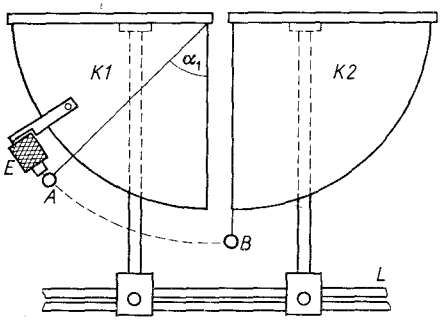
$$m u_1 = (m+m_p)u. \tag{6.23}$$

Oznaczając przez γ kąt, o który odchyli się układ $(m+m_p)$ po zderzeniu i wykonując proste przeliczenia podobne jak w przypadku zderzeń sprężystych, z równania (6.23) otrzymamy

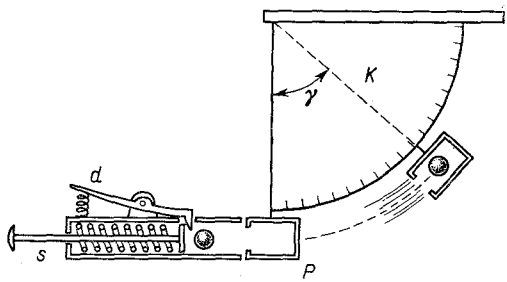
$$u = \frac{m+m_p}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\gamma)}. \tag{6.24}$$

Aparatura

Przyrząd do badania zderzeń sprężystych przedstawiony na rysunku 6.8 składa się z dwóch kątomierzy *K1* i *K2*, zamocowanych na statywach, które mogą przesuwać się wzdłuż ławy *L*. Na kątomierzu *K1* zamocować można elektromagnes *E* służący do utrzymania kulki w położeniu odchylonym. W przypadku zderzeń niesprężystych kątomierz *K1* zastępujemy sprężynowym wyrzutnikiem *W*, a w miejsce kulki *B* zawieszamy metalowy pojemnik *P*, do którego może zostać wstrzelona kulka z wyrzutnika. Budowę pojemnika i wyrzutnika pokazano na rysunku 6.9. Zaczep utrzymuje sprężynę w stanie napiętym. Naciskając na dźwignię *d* zwalniamy sprężynę, która rozprężając się udziela przyspieszenia kulce. Ruch sprężyny ogranicza suwak *s* skonstruowany w taki sposób, że może przesuwać się tylko do położenia *r*.



6.8. Przyrząd do badania zderzeń sprężystych.



6.9. Przyrząd do badania zderzeń niesprężystych.

Pomiary

Ważymy kulki oraz pojemnik z dokładnością do 0,1 g. Dobieramy je w taki sposób, aby w przypadku zderzeń sprężystych masa kulki *A* była mniejsza od masy kulki *B*. Mierzymy długości *l* zawieszenia kulek. Mierzymy średnice kulek i w przypadku zestawu 6.8 kątomierze rozsuwamy na taką odległość, by swobodnie zwisające kulki stykały się.

a. Zderzenia sprężyste. Elektromagnes włączamy do źródła prądu, a jego położenie na kątomierzu *K1* ustalamy w ten sposób, by kąt α_1 wynosił 30–70°. Zbliżamy kulkę do elektromagnesu, który utrzymuje ją w położeniu wychylonym. Po wyłączeniu prądu w obwodzie elektromagnesu kulka opada wzdłuż łuku *AB* i zderza się z kulką *B*. Kulka *B* odchyla się o kąt β_2, a kulka *A* zmienia kierunek ruchu i odchyla się o kąt β_1. Pomiar kątów powtarzamy wielokrotnie, by otrzymać przynajmniej 10 pewnych pomiarów kątów β_1 i β_2. Pomiary powtarzamy dla trzech różnych wartości kąta α_1.

b. Zderzenia niesprężyste. Przyrząd ustawiamy w sposób pokazany na rysunku 6.9. Napinamy sprężynę wyrzutnika i wprowadzamy do niego kulkę. Kontrolujemy czy oś wyrzutnika leży w jednej linii z osią pojemnika. Naciskamy dźwignię d, zwalniając tym samym sprężynę wyrzutnika. Kulka wpada do pojemnika, który odchyla się od pionu o kąt γ. Pomiary wykonujemy dla kilku różnych kulek, a kąty γ odczytujemy wielokrotnie.

Obliczenia

a. Zderzenia sprężyste. Dla każdej wartości kąta α_1 obliczamy średnie wartości kątów β_1 i β_2, a masę m_1 z wzoru (6.21). Jako wynik ostateczny przyjmujemy średnią arytmetyczną $\overline{m}_1$. Obliczając błędy przyjmujemy $\Delta\alpha = 0$, a dla β_1 i β_2 obliczamy błędy średnie kwadratowe średniej arytmetycznej. Błąd $S_{\overline{m}_1}$ obliczamy tylko dla jednego α_1 i przyjmujemy, że wynik ostateczny uśredniony dla wszystkich wartości α_1 obarczony jest takim samym błędem. Sprawdzamy zgodność ostatecznego wyniku m_1 z wynikiem bezpośredniego ważenia.

b. Zderzenia niesprężyste. Obliczamy średnią wartość kąta γ dla każdej z kulek metalowych i prędkości u ze wzoru (6.24). Dla każdej kulki obliczamy błąd $S_{\overline{u}}$.

6.6. CZAS TRWANIA ZDERZENIA

Cel: wyznaczenie czasu, w którym zderzające się kule pozostają w zetknięciu, parametrów deformacji kul — wysokości i promienia czaszy deformacji, maksymalnej siły nacisku i modułu Younga.

Przyrządy: woltomierz elektrostatyczny (§ 18.01),

Zagadnienia: własności sprężyste ciał (§ 7.01; S1, § 70–78), teoria rozładowania kondensatora (§ 19.4, P2, § 49), zderzenia (§ 6.5; P1, § 51–54; S1, § 27; K, str. 94, 200; H1, § 10).

Wprowadzenie

Zasada zachowania pędu pozwala obliczyć prędkość kul po zderzeniu, lecz nie tłumaczy zjawisk zachodzących podczas zderzenia. Przekazywanie energii w czasie zderzenia zachodzi pośrednio poprzez energię sprężystą i odbywa się w czasie T. Czas trwania zderzenia można zmierzyć wykorzystując w tym celu zjawisko rozładowania kondensatora. Napięcie U na okładkach kondensatora zwartego opornikiem R maleje w sposób wykładniczy

$$U = U_0 \exp\left(-\frac{T}{RC}\right).$$

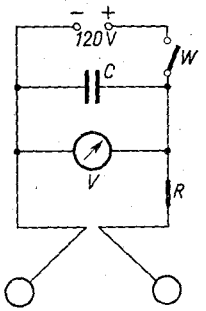
W obwodzie elektrycznym 6.10 zderzające się kule spełniają równocześnie rolę wyłącznika, który zwiera okładki kondensatora w czasie, gdy kulki stykają się, a więc w czasie trwania zderzenia. Spadek napięcia na kondensatorze jest więc miarą czasu trwania zderzenia. Czas T obliczyć możemy z ostatniego wzoru

$$T = RC \ln \frac{U_0}{U}. \tag{6.25}$$

W czasie zderzenia kule deformują się. Deformacja polega na wgnieceniu do wnętrza kuli części objętości mającej kształt czaszy o wysokości h i promieniu podstawy r. Promień r jest największym promieniem koła zetknięcia kul. Wysokość czaszy kulistej

możemy obliczyć zakładając, że od chwili pierwszego zetknięcia, ruch kul jest ruchem jednostajnie opóźnionym i po czasie $t = T/2$ prędkość kul maleje do zera. Stąd droga w ruchu jednostajnie opóźnionym jest równa wysokości czaszy kulistej i wyraża się wzorem:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2.$$



6.10. Obwód do pomiaru czasu trwania zderzeń.

Przyspieszenie w ruchu jednostajnie opóźnionym, w którym prędkość końcowa jest równa zeru wynosi

$$a = -\frac{v_0}{t}.$$

Z ostatnich dwóch równań otrzymamy

$$h = \frac{v_0 t}{2}. \tag{6.26}$$

Występującą w powyższym wzorze prędkość v_0 możemy obliczyć z wzoru (6.20a). W oparciu o twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego, wyprowadzić możemy następujący związek, łączący promień podstawy czaszy kulistej z jej wysokością

$$r^2 = 2Rh - h^2,$$

gdzie R oznacza promień kuli. Ze względu na małą wartość wysokości czaszy kulistej, drugi wyraz w powyższym wzorze zaniedbujemy otrzymując

$$r = \sqrt{2Rh}. \tag{6.27}$$

Zderzające się kule działają na siebie siłą $F(l)$ rosnącą liniowo wraz z deformacją do wartości F_n dla $l = h$. Wykonują one wtedy pracę

$$E_s = L = \frac{1}{2} F_n h,$$

która jest równa zgromadzonej w nich energii sprężystej E_s. Zgodnie z zasadą zachowania energii, energia E_s jest równa energii kinetycznej kul

$$E_k = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

skąd

$$F_n = \frac{mv_0^2}{h}. \tag{6.28}$$

Wzór powyższy pozwala określić maksymalną siłę nacisku kul, w chwili gdy ich prędkość jest równa zeru.

Możemy ponadto wyznaczyć moduł Younga, korzystając z wzoru określającego zbliżenie środków zderzających się kul (M. T. Huber, Teoria sprężystości, cz. I, Warszawa 1954, § 108)

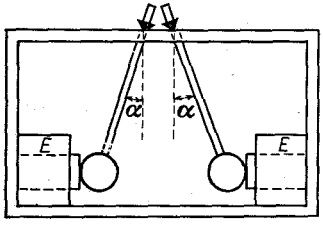
$$2h = \frac{3}{2}\frac{F_n}{r}\frac{1-\mu^2}{E},$$

gdzie E jest modułem Younga, a μ — współczynnikiem Poissona, który dla żelaza lanego wynosi 0,26. Zatem moduł Younga wyrazi się wzorem

$$E = 0{,}699\,\frac{F_n}{rh}. \tag{6.29}$$

Aparatura

Pokazany na rysunku 6.11 przyrząd składa się z dwóch kul stalowych zawieszonych na metalowych prętach. Górne części prętów zaopatrzone są w pryzmaty ograniczające wahania do płaszczyzny rysunku oraz w zaciski przeznaczone do połączenia przewodów elektrycznych. Podstawa, na której wspierają się pryzmaty, wykonana jest z izolatora.



6.11. Przyrząd do badania czasu trwania zderzeń.

Przyrząd zaopatrzony jest w mechanizm służący do utrzymywania kul w położeniu odchylonym od pionu o kąt α. Mechanizm składa się z dwóch szeregowo połączonych elektromagnesów E. Gdy przez elektromagnesy przepływa prąd i gdy zbliżymy do nich kule, to zostaną one przyciągnięte. Wyłączenie prądu powoduje równoczesne zwolnienie obydwu kul. Obwód elektryczny (rys. 6.10) zawiera następujące elementy: kondensator C o pojemności 2–4 μF, opornik R o oporze rzędu setek omów, woltomierz V i wyłącznik W. Należy stosować woltomierz elektrostatyczny, gdyż prąd płynący przez inne woltomierze rozładowuje kondensator uniemożliwiając wykonanie pomiarów.

Pomiary

Mierzymy średnice kul, odległości l środków kul od osi obrotu wahadeł, i kąt odchylenia α, opór elektryczny stosowanego opornika połączonego szeregowo ze stykającymi się kulami oraz zapisujemy pojemność C kondensatora i masę kul m. Łączymy obwód

elektryczny według schematu 6.10. Włączamy prąd w obwodzie elektromagnesów i odchylamy kule po czym ładujemy kondensator przez zamknięcie wyłącznika W na czas około 1 min i odczytujemy napięcie U_0. Przerywając na chwilę obwód elektromagnesów zwalniamy kule. W chwili, gdy nastąpi zderzenie, prąd w obwodzie elektromagnesów włączamy ponownie. Kule zostaną przyciągnięte, a dalsze zderzenia uniemożliwione. Odczytujemy ponownie napięcie U. Pomiary U_0 i U powtarzamy 15-krotnie.

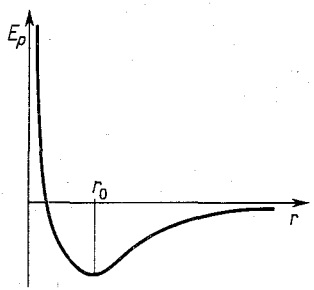
Obliczenia

Obliczamy wartości średnie U_0 i U oraz błąd średni kwadratowy średniej arytmetycznej tych wielkości. Następnie korzystając z uzyskanych wyników i wzorów od (6.25) do (6.29) obliczamy po kolei czas trwania zderzenia $t = T/2$ i pozostałe wielkości: h, r, F_n oraz E. Wyprowadzamy wzory służące do obliczania błędów tych wielkości. Obliczamy błędy wszystkich wyznaczanych wielkości oraz dyskutujemy zgodność wyniku uzyskanego dla E z wartością odczytaną w tablicach dla żelaza lanego.

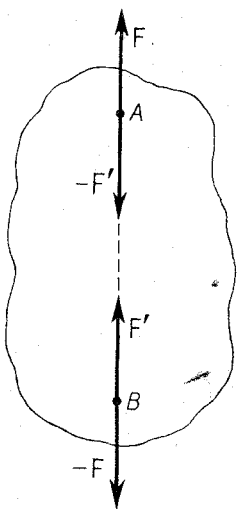
7. WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTE CIAŁ STAŁYCH

7.01. DEFINICJE PODSTAWOWYCH WIELKOŚCI

Na rysunku 7.1 przedstawiono zależność energii potencjalnej E_p atomów w ciele stałym od ich wzajemnej odległości. W równowadze trwałej kryształ posiada minimum energii, czyli atomy muszą znajdować się w odległości r_0 odpowiadającej minimum krzywej 7.1. Każdej zmianie odległości r między atomami towarzyszy pojawienie się, tzw. *sił spójności* działających w kierunku przywrócenia odległości r_0 (przy zmniejszeniu r pojawiają się siły odpychające, a przy zwiększeniu r — przyciągające). Siły spójności

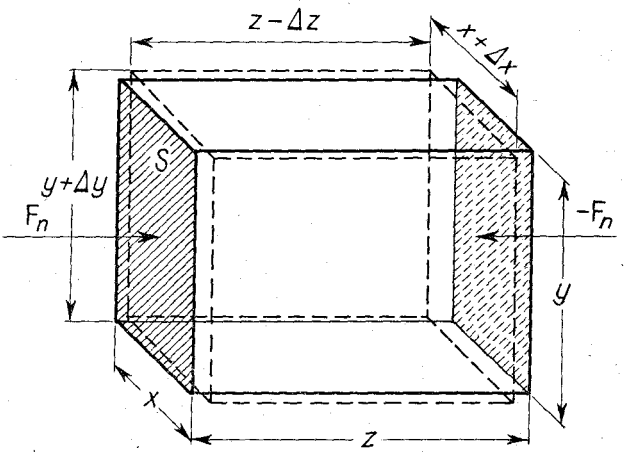


7.1. Zależność energii potencjalnej układu dwóch atomów od ich wzajemnej odległości.



7.2. Siły zewnętrzne $\mathbf{F}$ i $-\mathbf{F}$ są równoważone przez siły spójności $-\mathbf{F}'$ i $\mathbf{F}'$.

równoważą działające na ciało siły zewnętrzne. Na przykład dwie równe co do wartości leżące na jednej prostej i przeciwnie skierowane siły F i $-F$ (rys. 7.2) nie mogą spowodować ruchu ciała, lecz działając na dwa różne punkty (różne atomy A i B) rozerwałyby ciało, gdyby nie były zrównoważone siłami $-F'$, F' działającymi również na punkty A i B lecz skierowanymi przeciwnie. Siły $-F'$ i F' są siłami spójności. Siły spójności są w przybliżeniu proporcjonalne do zmiany odległości między atomami.



7.3. Odkształcenie prostopadłościanu pod wpływem sił normalnych.

Ze zmianą odległości atomów wiąże się makroskopowa deformacja ciała zwana *odkształceniem*. Odkształcenie znikające z chwilą usunięcia sił odkształcających, nazywamy *odkształceniem sprężystym*, a zjawisko — *sprężystością*. Odkształcenie, które nie znika po usunięciu siły, nazywamy *odkształceniem plastycznym*, a zjawisko — *plastycznością*. Siły odkształcające mogą działać prostopadle albo stycznie do powierzchni. Siły F_n i $-F_n$ (rys. 7.3) działające prostopadle na całą powierzchnię S nazywamy siłami normalnymi, a *naprężeniem normalnym* σ stosunek siły F_n do powierzchni S:

$$\sigma = \frac{F_n}{S}. \tag{7.1}$$

Na skutek działania naprężenia normalnego ciało odkształca się. Miarą wielkości odkształcenia jest *odkształcenie względne* ε będące stosunkiem zmiany długości Δz do długości początkowej z:

$$\varepsilon = \frac{\Delta z}{z}. \tag{7.2}$$

Siły deformujące ciało działać mogą również stycznie do jego powierzchni (rys. 7.4). Stosunek siły stycznej F_s do powierzchni S, na którą ona działa, nazywamy *naprężeniem stycznym* τ

$$\tau = \frac{F_s}{S}. \tag{7.3}$$

W tym przypadku rolę względnego odkształcenia spełnia kąt ścinania γ. Odkształceniami sprężystymi ciał stałych rządzi *prawo Hooke'a*, mówiące, że naprężenie jest proporcjo-

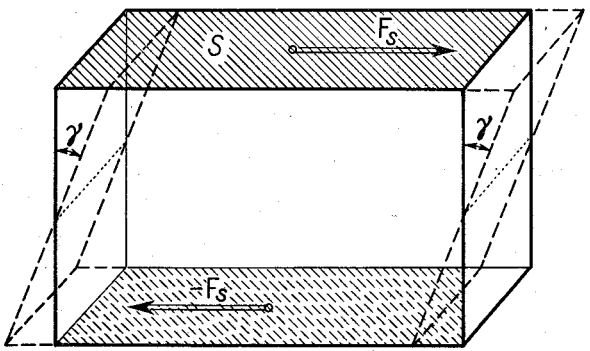
nalne do odkształcenia. Dla przypadku naprężenia normalnego prawo to wyrazić można wzorem

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{7.4}$$

który stosuje się zarówno do naprężeń dodatnich jak i ujemnych, tzn. dla rozciągania i ściskania. W przypadku naprężenia stycznego prawo Hooke'a wyraża się wzorem

$$\tau = G\gamma. \tag{7.5}$$

Współczynnik proporcjonalności E nazywa się *modułem Younga* i posiada wymiar naprężenia $N \cdot m^{-2}$ (odkształcenie względne jest wielkością niemianowaną por. wzór 7.2). Współczynnik G zwany *modułem sztywności* ma wymiar $N \cdot m^{-2} \cdot rad^{-1}$.



7.4. Odkształcenie prostopadłościanu pod wpływem sił stycznych.

Przy odkształceniu sprężystym następującym pod wpływem działania sił normalnych następuje nie tylko zmiana długości l, lecz również poszczególnych wymiarów o wartości Δy i Δx. Doświadczalnie można wykazać słuszność związku

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y}. \tag{7.6}$$

Względne zwężenie $\frac{\Delta y}{y}$ jest proporcjonalne do względnego wydłużenia

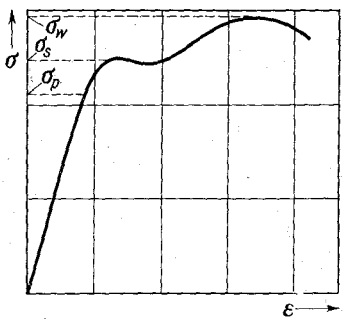
$$\frac{\Delta y}{y} = \nu \frac{\Delta z}{z}. \tag{7.7}$$

Współczynnik proporcjonalności ν nazywa się *współczynnikiem Poissona* i jest wielkością niemianowaną. Dla większości materiałów wartość współczynnika Poissona zawarta jest w granicach od 0,2 do 0,4. Gdyby w czasie deformacji nie zachodziła zmiana objętości, to współczynnik Poissona przybierałby wartość $\nu = 0{,}5$. Pomiędzy trzema wymiennymi współczynnikami istnieje następujący związek

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{7.8}$$

Uwzględniając fakt, że ekstremalne wartości ν mogą przyjmować wartości od 0 do 0,5, możemy wnioskować z równania (7.8), że wartość modułu sztywności G musi być zawarta w granicach od $\frac{1}{2}E$ do $\frac{1}{3}E$.

Prawo Hooke'a nie jest spełnione dla dowolnych naprężeń, a jedynie dla mniejszych od pewnego naprężenia zwanego *granicą proporcjonalności* σ_p (patrz rys. 7.5). Po przekroczeniu granicy proporcjonalności odkształcenie nie stosuje się już do prawa Hooke'a. *Granicą sprężystości* σ_s nazywamy takie naprężenie, po przekroczeniu którego ciało nie powraca już do poprzednich wymiarów z dokładnością do 0,003 %. *Granicą wytrzymałości*



7.5. Graficzny obraz odkształceń sprężystych.

σ_w nazywamy takie naprężenie, przy którym ciało ulega zniszczeniu (zerwanie, zgniecenie itp). Gdy dla ciała istnieje duża różnica pomiędzy wartością granicy sprężystości i wytrzymałości, to wtedy ciało poddaje się łatwo obróbce plastycznej (kucie, zginanie, walcowanie, rozciąganie, tłoczenie itp). Ciała takie nazywamy ciałami plastycznymi. W przeciwnym przypadku ciało nazywamy ciałem kruchym (żeliwo, szkło, ceramika itp.).

7.1. WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTE GUMY

Cel: wyznaczenie modułu Younga, modułu sztywności oraz współczynnika Poissona dla gumy.
Przyrządy: czujniki mikrometryczne, suwmiarka (§ 3.1), waga (§ 3.4).
Zagadnienia: własności sprężyste ciał (§ 7.01; S1, § 70–78; J, § 8), źródła sił spójności ciał stałych (S2, § 55 i 56).

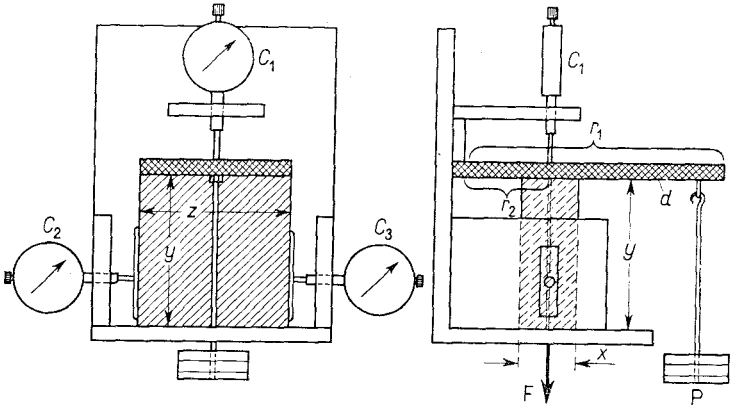
Aparatura

Pomiary wykonujemy na gumce kreślarskiej (do wycierania) posiadającej kształt prostopadłościanu. Do wyznaczenia modułu Younga i współczynnika Poissona służy przyrząd pokazany na rysunku 7.6. Na górną powierzchnię gumki nakładamy płytkę d, która jest dźwignią jednostronną. Do końca dźwigni przyczepiamy szalkę, na którą nakładać można ciężarki o równych masach. Nałożenie ciężarka o ciężarze $P = mg$ jest równoważne działającej na gumkę sile o wartości

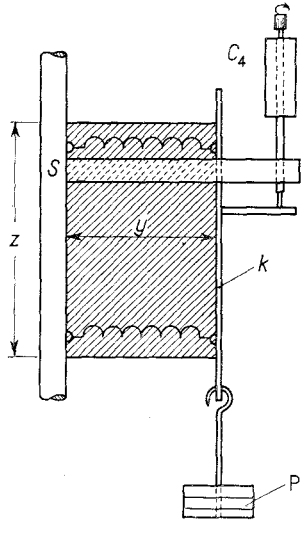
$$F_n = P\frac{r_1}{r_2}.$$

Przez r_1 oznaczono odległość punktu zaczepienia szalki od punktu podparcia dźwigni, a przez r_2 odległość środka gumki od punktu podparcia dźwigni. Pod wpływem działania siły F_n gumka odkształca się. Zmniejszenie wysokości gumki rejestruje czujnik C_1,

a poszerzenie jej wymiarów poprzecznych — czujniki C_2 i C_3. Do wyznaczenia modułu sztywności służy przyrząd pokazany na rysunku 7.7. Prostopadłościenną gumkę przymocowujemy za pomocą czterech sprężynek w sposób pokazany na rysunku. Siłę styczną do powierzchni prostopadłościanu przykładamy, obciążając płytkę k. Kąt ścinania jest stosunkiem przesunięcia płytki, które mierzymy za pomocą czujnika C_4, do grubości y prostopadłościanu. Celem uniknięcia poślizgu gumki powierzchnia płytki k i ścianka S są oklejone papierem ściernym.



7.6. Przyrząd do pomiaru modułu Younga gumy.



7.7. Przyrząd do pomiaru modułu sztywności gumy.

Pomiary

Moduł Younga i współczynnik Poissona wyznaczamy za pomocą przyrządu pokazanego na rysunku 7.6. Po ustawieniu przyrządu odczytujemy wskazania czujników, a następnie nakładamy kolejny ciężarek i ponownie odczytujemy wskazania czujników

C_1, C_2 i C_3. Pomiary wykonujemy przynajmniej dla 6-ciu ciężarków. Mierzymy długości poszczególnych krawędzi gumki oraz ramiona r_1 i r_2 dźwigni. Pomiary modułu sztywności wykonujemy za pomocą przyrządu pokazanego na rys. 7.7. Dla sześciu różnych obciążeń mierzymy wskazania czujnika C_4.

Obliczenia

Korzystając z wyników pierwszej części doświadczenia obliczamy F_n, Δy i Δz licząc od stanu nieobciążonego, a następnie σ, ε, moduł Younga E, współczynnik Poissona ν. Błędy tych wielkości obliczamy metodą najmniejszych kwadratów (§ 2.6). W oparciu o uzyskane dane wykreślamy krzywe teoretyczne $\sigma(\varepsilon)$ oraz ε od $\frac{\Delta z}{z}$, a następnie na wykresy nanosimy punkty pomiarowe. Dyskutujemy przebieg wykresów oraz zgodność wyników z danymi z tablic. W podobny sposób opracowujemy drugą część doświadczenia, z którego obliczamy moduł sztywności G. Współczynnik Poissona ν' obliczamy ze wzoru (7.7) oraz niezależnie z wzoru (7.8) otrzymując wartość ν' i błąd standardowy średniej $S_{\bar{\nu}}$. Sprawdzamy zgodność wyników ν ν' otrzymanych różnymi metodami.

7.2. WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTE MIEDZI

Cel: wyznaczenie modułu Younga oraz granic proporcjonalności, sprężystości i wytrzymałości drutu miedzianego.

Przyrządy: mikromierz (§ 3.1), katetometr (§ 3.2) lub układ do pomiaru wydłużenia metodą optyczną (§ 3.3).

Zagadnienia: własności sprężyste ciał stałych (§ 7.01; S1, § 70–78; J, § 8); źródła sił spójności ciał stałych (S2, § 55 i 56).

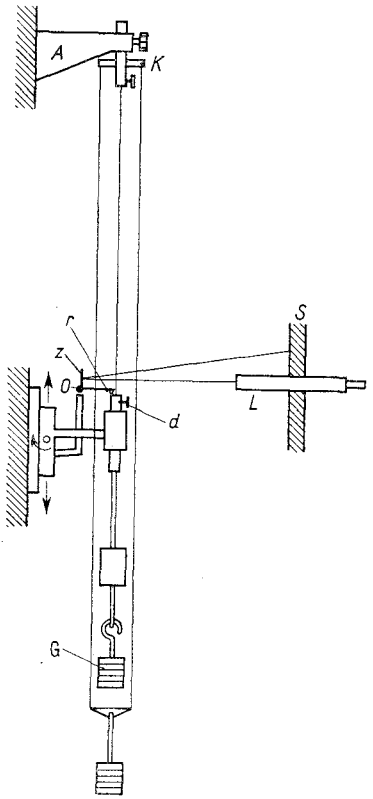
Aparatura

Mierząc moduł Younga wprost z wydłużenia stosujemy naprężenie nie przekraczające granicy proporcjonalności. Odkształcenia są wtedy bardzo małe i do ich pomiaru stosować możemy metodę optyczną (§ 3.3) lub czujnik mikrometryczny. Budowę prostej aparatury do pomiaru modułu Younga drutu pokazano na rysunku 7.8. Drut L długości 2–3 m obciążony jest ciężarkami G. Na dolnym uchwycie d przewodu wspiera się ramię r zwierciadła Z, które może obracać się swobodnie wokół osi O. Lunetka L i skala S służą do pomiaru wydłużenia. Celem uniknięcia błędów spowodowanych przesunięciem punktu zawieszenia A drutu, ciężarki, które aktualnie nie są stosowane do obciążenia drutu, zawieszone są na dodatkowym uchwycie K. Stąd siła działająca na punkt A jest stała.

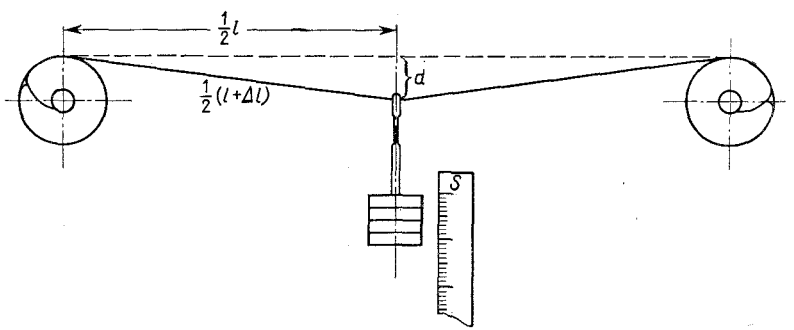
W przypadku, gdy badamy zachowanie się drutu przy ciśnieniach przekraczających granicę proporcjonalności, odkształcenia są bardzo duże i metoda optyczna odczytu wydłużenia jest zbyt precyzyjna. Stosunkowo dokładnie wykonać można pomiary zarówno poniżej, jak i powyżej granicy proporcjonalności za pomocą urządzenia z rysunku 7.9. Mierzymy wychylenie d za pomocą miarki milimetrowej S lub katetometru.

Wydłużenie Δl obliczamy z trójkąta $\frac{l}{2}, d, \frac{l}{2}+\frac{\Delta l}{2}$ zaniedbując wyraz zawierający bardzo małą wielkość $(\Delta l)^2$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{2d^2}{l^2}. \tag{7.9}$$



7.8. Przyrząd do pomiaru modułu Younga drutu.



7.9. Przyrząd do badania własności plastycznych miedzi.

Pomiary

Długość drutu mierzymy miarką milimetrową, ponieważ błąd względny tego pomiaru jest niewielki oraz mierzymy średnicę drutu mikromierzem w 10-ciu różnych miejscach. Mierząc moduł Younga przy naprężeniach mniejszych od granicy proporcjonalności stosujemy aparaturę z rysunku 7.8. Notujemy wskazanie zerowe układu odczytowego, a następnie mierzymy wskazania d_n przy kolejnych obciążeniach G_n drutu. Wykonujemy około 10 takich pomiarów.

Wyznaczając granice proporcjonalności, sprężystości i wytrzymałości stosujemy aparaturę z rysunku 7.9 i postępujemy w sposób następujący. Zakładamy badany drut miedziany, zwracając uwagę na prawidłowe jego zamocowanie, tak aby nie nastąpiła deformacja lub zerwanie. Zawieszamy szalkę w połowie długości drutu i odczytujemy jej położenie na skali S bezpośrednio lub za pomocą katetometru. Następnie na szalkę obciążającą drut nakładamy jeden ciężarek i odczytujemy położenie szalki. Następnie zdejmujemy ciężarek i powtórnie odczytujemy położenie szalki. Jeżeli wróciła do pierwotnego położenia, nakładamy dwa ciężarki i powtarzamy te same obserwacje. Jeżeli po zdjęciu n-tego ciężarka szalka nie wróci do położenia, które zajmowała przy n-1 ciężarkach, to przekroczyliśmy granicę sprężystości. Po przekroczeniu granicy sprężystości ciężarków nie zdejmujemy, lecz pomiary wykonujemy do chwili zerwania drutu. Wyniki pomiarów notujemy w tabeli zawierającej w kolejnych wierszach: wskazanie d, obciążenie G, wydłużenie Δl, wydłużenie względne ε, naprężenie σ. Pomiary powtarzamy przynajmniej dwukrotnie i notujemy ich dokładności.

Obliczenia

Obliczamy wydłużenia względne i naprężenie dla każdego obciążenia i wykreślamy zależność $\sigma(\varepsilon)$. Z wykresu określamy nachylenie odcinka prostoliniowego, które zgodnie z definicją (7.4) jest równe modułowi Younga. Określamy granice proporcjonalności, sprężystości i wytrzymałości. Z wykresu określamy błąd modułu Younga jako błąd nachylenia. Błędy z jakimi wyznaczyliśmy granice σ_p, σ_s i σ_w odpowiadają połowie masy ciężarka. Porównujemy uzyskane wyniki z danymi z tablic fizycznych. Nachylenie prostoliniowego odcinka prostej oraz błąd modułu Younga określić możemy również metodą najmniejszych kwadratów (§ 2.6).

7.3. UGIĘCIE PRĘTÓW

Cel: wyznaczenie modułu Younga prętów z strzałki ugięcia.

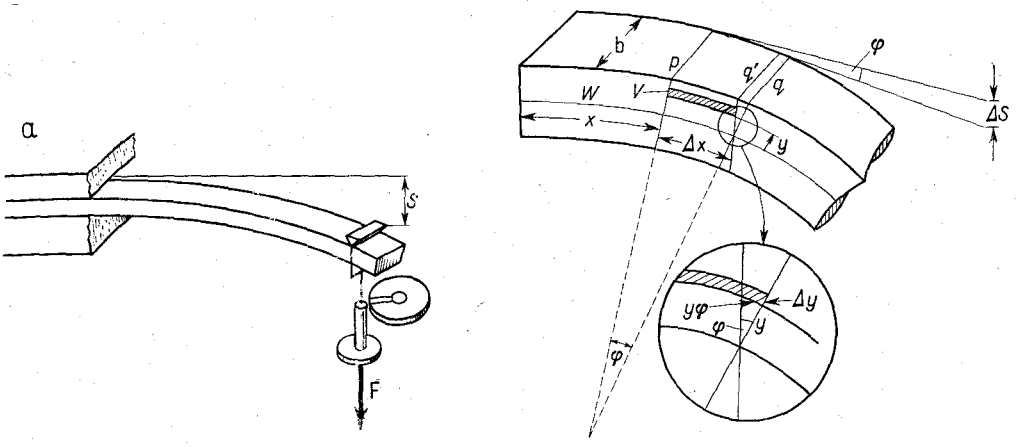
Przyrządy: pręty z kompletem statywów, czujnik mikrometryczny, przymiar, mikromierz (§ 3.1).

Zagadnienia: własności sprężyste ciał (§ 7.01; S1, § 70–78, J, § 8), źródła sił spójności ciał stałych (S2, § 55 i 56).

Wprowadzenie

Załóżmy, że lewy koniec belki jest zamocowany poziomo, a do jej prawego końca przykładamy siłę (obciążenie). Pod wpływem działania tej siły belka ugnie się w sposób pokazany na rysunku 7.10a. Górne warstwy ugiętej belki wydłużają się, a warstwy dolne ulegają skróceniu. W środku wysokości belki istnieje tzw. warstwa obojętna W, której długość nie ulega zmianie (rys. 7.10b). Zarówno do wydłużenia, któremu ulega górna

część belki, jak i do skrócenia (część dolna) stosuje się prawo Hooke'a (7.4). Oznaczmy przez S strzałkę ugięcia, czyli odchylenie prawego końca belki od położenia belki nieobciążonej. Celem wyprowadzenia interesującego nas związku zastanowimy się, jakim zmianom na skutek ugięcia ulegają przekroje p i q (rys. 7.10), odległe od punktu zamocowania belki o x oraz $(x+\Delta x)$. Przed odkształceniem belki przekroje te były równo-



7.10. Ugięcie belki.

ległe do siebie, a po ugięciu tworzą kąt φ. Przez punkt, w którym płaszczyzna q przecina warstwę W, przeprowadzimy płaszczyznę q' równoległą do płaszczyzny p. Na skutek ugięcia warstwa V, znajdująca się w odległości y od warstwy W, wydłuża się o φy. Weźmy pod uwagę element belki o długości Δx, grubości Δy i szerokości b. Przekrój jego powierzchni prostopadłej do długości belki wynosi $b \cdot \Delta y$. Siła powodująca odkształcenie tego elementu zgodnie z równaniami (7.1), (7.2) i (7.4) wyraża się wzorem

$$F_n = \sigma \Delta S = E\varepsilon \Delta S,$$

a ponieważ

$$\varepsilon = \frac{\varphi y}{\Delta x} \quad \text{oraz} \quad \Delta S = b\Delta y,$$

otrzymamy

$$F_n = E\frac{\varphi y}{\Delta x} b\Delta y.$$

Moment tej siły względem warstwy W wynosi

$$M = y\Delta F_n = E\frac{\varphi}{\Delta x} y^2 b\Delta y.$$

Sumując powyższe wyrażenia na wszystkie wartości y otrzymamy

$$M = E\frac{\varphi}{\Delta x}\int_{-r}^{+r} y^2 b\,dy.$$

Jeżeli ponadto wprowadzimy oznaczenie

$$H = b\int_{-r}^{+r} y^2 dy, \tag{7.10}$$

to ostatnie równanie przyjmie postać

$$M = E\frac{\varphi}{\Delta x}H. \tag{7.11}$$

Belkę odkształca moment pochodzący od zewnętrznej siły F

$$M = [l-(x+\Delta x)]F,$$

gdzie l oznacza długość belki, a wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest ramieniem przekroju q. Po zaniedbaniu małej wielkości Δx ostatnie równanie przyjmie postać

$$M = (l-x)F. \tag{7.12}$$

Kąt φ jest zawarty również między stycznymi do belki w punktach, w których przekroje p i q przecinają górną powierzchnię belki; zatem możemy napisać

$$\varphi = \frac{\Delta S}{l-x}. \tag{7.13}$$

Porównując wzory (7.11) i (7.12) oraz uwzględniając związek (7.13), otrzymamy

$$\Delta S = \frac{F}{EH}(l-x)^2\Delta x.$$

Całkowitą strzałkę ugięcia otrzymamy, sumując analogiczne wyrażenia dla wszystkich odcinków Δx. Jeżeli sumowanie zastąpimy całkowaniem, otrzymamy

$$S = \frac{F}{EH}\int_0^l (l-x)^2 dx$$

lub po scałkowaniu

$$S = \frac{1}{3}\frac{F}{EH}l^3. \tag{7.14}$$

Wartość współczynnika H zależy od kształtu i wymiarów geometrycznych belki. W przypadku, gdy przekrój belki posiada kształt prostokąta o wysokości h i szerokości b, to równanie (7.10) przyjmie postać

$$H_\square = b\int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy,$$

co po scałkowaniu daje

$$H_\square = \frac{1}{12}bh^3. \tag{7.15a}$$

Całkowanie podobnego wyrażenia dla kołowego przekroju belki daje

$$H_\bigcirc = \frac{\pi}{4}r^4. \tag{7.15b}$$

Podstawiając wyrażenie (7.15a) lub (7.15b) do (7.14), otrzymamy następujące wzory na strzałkę ugięcia belki jednostronnie zamocowanej o przekroju prostokątnym i wysokości h:

$$s_\square = \frac{4}{bh^3}\frac{l^3}{E}F \tag{7.16a}$$

oraz dla belki okrągłej o promieniu r:

$$s_{\bigcirc} = \frac{4}{3\pi r^3}\frac{l^3}{E}F. \tag{7.16b}$$

Wzór (7.14) można dostosować do przypadku, gdy belka jest podparta na dwóch końcach i obciążona w środku siłą F. Belka zachowuje się wtedy w taki sposób, jak gdyby była zamocowana w środku, a na każdy z jej końców działała siła $F/2$ skierowana ku górze. Siła $F/2$ działa wtedy na połowę belki — $l/2$. Podstawiając do wzoru (7.14) zamiast długości l wartość $\frac{l}{2}$ oraz zamiast siły F wartość $\frac{F}{2}$, otrzymamy następujący wzór na strzałkę ugięcia

$$s' = \frac{1}{48H}\frac{l^3}{E}F. \tag{7.17}$$

Dla belki zamocowanej dwustronnie podobne rozumowanie doprowadzi do wniosku, że zamiast P i l należy do wzoru (7.14) podstawić $\frac{1}{4}F$ i $\frac{1}{4}l$, wówczas strzałka s'' wyrazi się wzorem

$$s'' = \frac{1}{768H}\frac{l^3}{E}F. \tag{7.18}$$

Podstawiając do wzorów (7.17) lub (7.18) wyrażenia na H określone wzorami (7.15a) lub (7.15b) otrzymamy ostatecznie następujące związki:

$$s'_{\square} = \frac{1}{4bh^3}\frac{l^3}{E}F, \tag{7.17a}$$

$$s'_{\bigcirc} = \frac{1}{12\pi r^4}\frac{l^3}{E}F, \tag{7.17b}$$

$$s''_{\square} = \frac{1}{64bh^3}\frac{l^3}{E}F, \tag{7.18a}$$

$$s''_{\bigcirc} = \frac{1}{191\pi r^4}\frac{l^3}{E}F. \tag{7.18b}$$

Aparatura

Przyrząd składa się z dwóch podpórek, zawieszenia do szalki, szalki lub zaczepu do ciężarków i ciężarków. Strzałkę ugięcia mierzymy za pomocą czujnika mikrometrycznego lub odpowiednio skonstruowanego mikromierza. Górna część podpórek, na których opiera się belka, posiada kształt pryzmatów i jest przykręcona dodatkowymi śrubami. Dzięki takiej konstrukcji podpórki mogą służyć również do zamocowania pręta.

Pomiary

Na wstępie za pomocą mikromierza mierzymy wymiary poprzeczne belki przynajmniej w 10 różnych miejscach. Następnie umieszczamy belkę na podpórkach, zawieszamy szalkę i ustawiamy urządzenie do odczytu strzałki (czujnik lub mikromierz).

Mierzymy długość belki (odległość między miejscem zamocowania i punktem zawieszenia szalki w przypadku pręta jednostronnie zamocowanego lub między ostrzami podpórek w przypadku pręta dwustronnie podpartego). Obciążenie zmieniamy skokowo. Ciężar F odpowiadający skokowi dobieramy w taki sposób, by ugięcie belki wzrosło o 0,5 mm. Wskazanie czujnika lub mikromierza odczytujemy dla belki nieobciążonej oraz dla obciążeń F, $2F$, ... $6F$. Pomiary powtarzamy przynajmniej dla trzech belek o różnych przekrojach.

Obliczenia

Opracowując wyniki wykreślamy zależność strzałki ugięcia od obciążenia. Zgodnie z (7.14) nachylenie a uzyskanej prostej wynosi $a = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EH}$ dla belki jednostronnie zamocowanej. W zależności od kształtu i sposobu zamocowania belki nachylenie wyrażać się będzie różnymi wzorami. Spośród wzorów (7.16) do (7.18) wybieramy wzór odpowiadający warunkom doświadczenia i obliczamy moduł Younga E oraz $S_{\bar{E}}$ metodą najmniejszych kwadratów (2.6). Sporządzamy wykres zależności strzałki od obciążenia, nanosimy punkty pomiarowe i dyskutujemy uzyskane wyniki. Porównujemy je z danymi z tablic fizycznych.

7.4. WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI METODĄ STATYCZNĄ

Cel: wyznaczenie modułu sztywności dwóch prętów.

Przyrządy: waga laboratoryjna (§ 3.4), mikromierz, miarka milimetrowa, katetometr lub czujnik mikrometryczny (§ 3.1).

Zagadnienia: własności sprężyste ciał (§ 7.01; S1, § 70–78; J, § 8), moment siły (S1, § 48 i 49; P1, § 120–124).

Wprowadzenie

Każdy element skręcanego drutu ulega deformacji pokazanej na rysunku 7.11, która jest właściwie deformacją prostego ścinania pokazanego na rys. 7.4. Celem wyprowadzenia związku matematycznego pomiędzy modułem sztywności G i momentem M sił skręcających drut zastanowimy się nad zachowaniem cylindrycznego wycinka drutu o promieniu wewnętrznym r', grubości dr' i długości l równej długości całego drutu. Wycinek ten pokazano na rys. 7.12, na którym nie zachowano proporcji występujących w rzeczywistości $l \gg r'$. Dla pierścienia pokazanego na rysunku zgodnie z równaniem (7.5) zachodzi

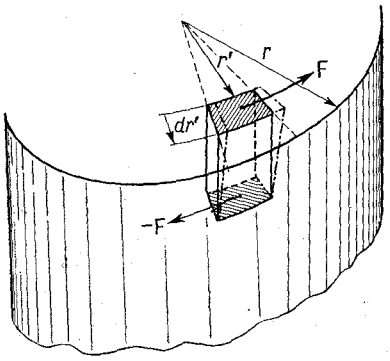
$$\tau = G\frac{s}{l},$$

gdzie $\frac{s}{l} = \gamma$. Ponieważ zachodzi jednocześnie związek $\alpha = \frac{s}{r'}$, otrzymamy

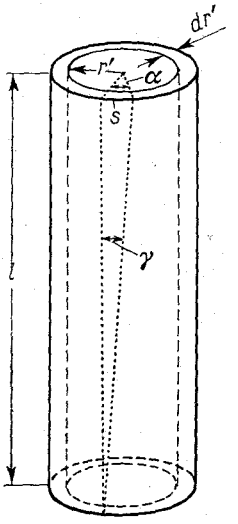
$$\tau = G\frac{r'}{l}\alpha$$

Powierzchnia przekroju interesującego nas pierścienia wynosi $S = 2\pi r' dr'$. Oznaczając ponadto działającą na pierścień siłę styczną przez dF_s i korzystając z wzoru (7.3) ostatnie wyrażenie możemy przekształcić

$$dF_s = 2\pi r' dr' G \frac{r'}{l} \alpha.$$



7.11. Odkształcenie elementów skręcanego pręta.



7.12. Odkształcenie cylindrycznej warstwy skręcanego pręta.

Mnożąc obustronnie przez r' otrzymamy moment siły

$$dM = \frac{2\pi G}{l} \alpha r'^3 dr'.$$

Sumując podobne przyczynki pochodzące od wszystkich pierścieni, czyli całkując po r' w granicach od $r' = 0$ do $r' = r$ otrzymamy

$$M = \frac{2\pi G\alpha}{l} \int_0^r r'^3 dr',$$

skąd ostatecznie otrzymujemy następujące wyrażenie na moment siły

$$M = \frac{\pi G r^4}{2l} \alpha. \tag{7.19}$$

Aparatura

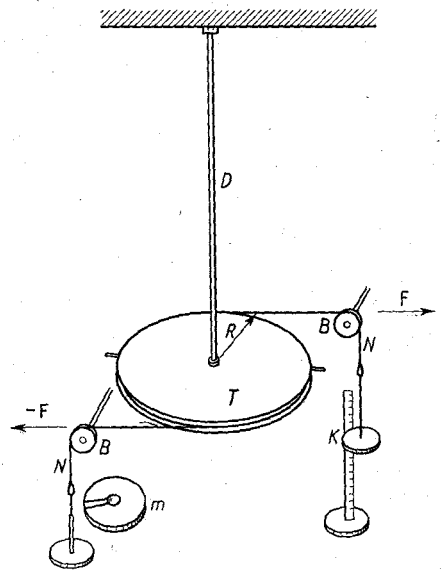
Aparatura (rys. 7.13) składa się z badanego pręta D, tarczy T o promieniu R, która na bocznej krawędzi posiada dwa rowki do prowadzenia nici N, N. Za pośrednictwem przerzuconych przez bloczki B nici przykładamy siły tworzące moment skręcający. Zastosowana tarcza daje gwarancję, że ramię a tym samym i moment siły pozostaje stały mimo skręcania się dolnego końca pręta. Jeżeli nici działają siłami F i $-F$, to działający

na pręt moment sił wynosi $M = 2RF$. Podstawiając powyższe wyrażenie do równania (7.19) i uwzględniając związek $F = mg$, otrzymamy

$$G = \frac{4lRmg}{\pi r^4 \alpha}. \tag{7.20}$$

Wszystkie występujące w ostatnim równaniu wielkości można mierzyć doświadczalnie. Kąt α mierzy się zazwyczaj pośrednio jako stosunek łuku s (równego przesunięciu jednego z ciężarków) do promienia tarczy R

$$\alpha = s/R.$$



7.13. Aparatura do badania modułu sztywności metodą statyczną.

Przesunięcie ciężarka mierzyć możemy miarką milimetrową, lub dokładniej za pomocą katetometru względnie czujnika mikrometrycznego (§ 3.1 i 3.2). Podstawiając w równaniu (7.20) $\alpha = s/R$ otrzymamy

$$G = \frac{4lR^2mg}{\pi r^4 s}. \tag{7.20a}$$

W przypadku, gdy skręcenie pręta jest bardzo małe, kąt α mierzyć możemy również metodą optyczną (§ 3.3 i wzór 3.3).

Pomiary

Mierzymy długość pręta, masy ciężarków, promień tarczy oraz przynajmniej w 10-ciu miejscach średnicę pręta. Wyznaczamy następnie przebieg zależności kąta α od masy zawieszonych ciężarków zawieszanych zawsze parami, by obciążenie obydwu nici było równe. Jako pomiar zerowy przyjmujemy przypadek, gdy nici obciążone są tylko samymi szalkami. Wykonujemy pomiar próbny, analizujemy wpływ poszczególnych

błędów wielkości prostych i planujemy właściwe pomiary w ten sposób, by uzyskać minimalny błąd S_G. Wykonujemy pomiary dla kilku różnych obciążeń. Podobne pomiary wykonujemy dla prętów wykonanych z innych materiałów.

Obliczenia

Dla każdego pomiaru obliczamy m i s, a następnie G z równania (7.20) lub (7.20a). Jako wynik końcowy przyjmujemy dla każdego pręta wartość średnią $\bar{G}$. Odchylenia standardowe S_G obliczamy dla jednego wyniku każdej serii pomiarów i przyjmujemy, że wartości średnie obarczone są takim samym błędem. Dyskutujemy zgodność uzyskanych wyników z danymi z tablic fizycznych.

7.5. WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI METODĄ DYNAMICZNĄ

Cel: wyznaczenie modułu sztywności dwóch drutów.
Przyrządy: mikromierz (§ 3.1), sekundomierz (§ 3.5).
Zagadnienia: własności sprężyste ciał (§ 7.01; S1, § 70–78; J, § 8), drgania harmoniczne proste (§ 10.01; S1, § 43–45).

Wprowadzenie

W omawianym doświadczeniu, moduł sztywności wyznacza się z okresu drgań torsyjnych, zawieszonej na badanym pręcie bryły zwanej wibratorem. Są to drgania harmoniczne proste zachodzące wokół podłużnej osi pręta. W omawianym przypadku równanie (7.19) jest identyczne z równaniem ruchu harmonicznego prostego (10.1), jeżeli

$$D = \frac{\pi G r^4}{2l}. \tag{7.21}$$

Okres drgań oscylacyjnych bryły m zawieszonej na pręcie, zgodnie z teorią drgań, wyraża się wzorem (10.9)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{D}}. \tag{7.22}$$

Równanie powyższe pozwala wprost z okresu drgań torsyjnych obliczyć moment kierujący D, a tym samym moduł sztywności G (7.21). Moment bezwładności $\mathcal{J}$ wibratora możemy obliczyć teoretycznie w przypadku, gdy posiada on prosty kształt, i możemy zastosować jeden z wzorów tabeli II. Moduł sztywności wyrazi się wtedy wzorem, który otrzymamy podstawiając wzór (7.21) do (7.22)

$$G = \frac{8\pi \mathcal{J} l}{T^2 r^4}, \tag{7.23a}$$

W przypadku, gdy momentu bezwładności wibratora nie da się obliczyć wprost, możemy do wibratora dołączyć bryłę w o znanym momencie bezwładności $\mathcal{J}_1$ i zmierzyć okres drgań T_1, który wyrazi się wzorem

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}+\mathcal{J}_1}{D}}. \tag{7.24}$$

Z równań (7.22) i (7.24) eliminujemy $\mathcal{J}$ otrzymując

$$D = \frac{4\pi^2 \mathcal{J}_1}{T_1^2 - T^2}.$$

Podstawiając D z równania (7.21) otrzymamy

$$G = \frac{8\pi l \mathcal{J}_1}{r^4 (T_1^2 - T^2)}. \tag{7.23b}$$

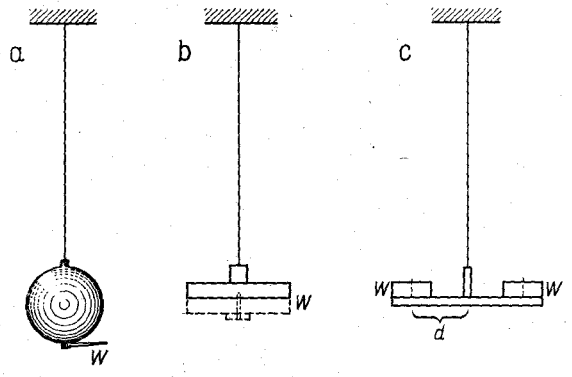
Wzór, którym wyraża się moment bezwładności wibratora, zależy od jego budowy. Na rysunku 7.14 przedstawiono najczęściej spotykane rozwiązanie. W przypadku 7.14a, gdy wibratorem jest kula, jej moment bezwładności oblicza się z wzoru $\mathcal{J} = \frac{2}{5} m r_k^2$ (tabl. II), a wynik ostateczny otrzymujemy podstawiając tę wartość do wzoru (7.23a). W przypadku pokazanym na rysunku 7.14b korzystamy z wzoru (7.23b) interpretując $\mathcal{J}_1$ jako moment bezwładności walca W. W przypadku pokazanym na rys. 7.14c na wibrator nakładamy dodatkowe walce W w taki sposób, że ich osie nie pokrywają się z osią drgań. Zgodnie z prawem Steinera (P1, § 151), moment bezwładności tych walców wyraża się wzorem

$$\mathcal{J}_1 = N\mathcal{J}_0 + Nmd^2, \tag{7.25}$$

gdzie $\mathcal{J}_0$ oznacza moment bezwładności walca względem własnej osi symetrii równoległej do osi drgań, N — ilość walców, m — masę pojedynczego walca, d — odległość między osią walca i osią drgań.

Pomiary

Najczęściej spotykamy przypadek z rysunku 7.14c. Mierzymy wtedy długość l pręta, średnice wewnętrzne r_w i zewnętrzne r_z walców W, ich masy m_w oraz odległość d. Gdy istnieje możliwość umieszczenia walców w różnych odległościach $d_1, d_2, \ldots$, mierzymy wszystkie te odległości. Wykonujemy próbną serię pomiarów, po czym analizujemy wpływ błędów poszczególnych wielkości na błąd wyniku końcowego i planujemy poszczególne pomiary w taki sposób, by błąd $S_{\bar{G}}$ był najmniejszy. Celem uproszczenia rachunku błędów do wzoru (7.23b) podstawiamy $T_1^2 - T_2^2 = (T_1 + T_2)(T_1 - T_2)$. Błąd okresu możemy wyznaczyć mierząc czas nie jednego, lecz $t = nT$ okresów.



7.14. Różne postaci wibratora do wyznaczania modułu sztywności metodą dynamiczną.

Pomiary wykonujemy dla różnych obciążeń i notujemy dokładnie rozmieszczenie walców w poszczególnych pomiarach, a odpowiednie okresy oznaczamy: $T_1, T_2, \ldots$

Obliczenia

Wykonując obliczenia wyprowadzamy każdorazowo właściwą postać wzoru na $\mathcal{J}_1$ i podstawiając ją do (7.23b) otrzymujemy ostateczną postać wzoru na moduł sztywności. S_G obliczamy dla jednego z wykonanych pomiarów i przyjmujemy, że wartość średnia jest obarczona takim samym błędem. Sprawdzamy wzajemną zgodność wyników oraz ich zgodność z tablicami fizycznymi.

7.6. BADANIE SPRĘŻYNY

Cel: sprawdzenie wzoru na okres drgań podłużnych obciążonej sprężyny oraz wyznaczenie modułu sztywności sprężyny i modułu Younga.

Przyrządy: mikromierz (§ 3.1), waga (§ 3.4), sekundomierz lub zegarek z sekundnikiem (§ 3.5).

Zagadnienia: własności sprężyste ciał (§ 7.01; S1, § 70–78; J, § 8), ruch harmoniczny prosty (§ 10.01) oraz wprowadzenia do doświadczeń 7.3 i 7.4.

Wprowadzenie

a. *Drgania podłużne sprężyny*. Zawieszona na sprężynie masa m_g wykonuje drgania harmoniczne proste. Drgań tych nie można jednak opisać prostym równaniem (10.1a). W omawianym przypadku drga nie tylko masa m_g, lecz również elementy sprężyny, dając własny przyczynek F_s do siły F występującej w równaniu (10.1a)

$$(F+F_s)+kx = 0. \tag{7.26}$$

Weźmy pod uwagę odcinek sprężyny o długości dz znajdujący się w odległości z od punktu zamocowania. W czasie drgań, wychyleniu masy m_g o odcinek x odpowiada wychylenie punktu A (i związanego z nim odcinka sprężyny dz) o odcinek x_i. Dla jednorodnej sprężyny musi zachodzić związek:

$$x_i = \frac{z}{h} x.$$

Różniczkując powyższe wyrażenie dwukrotnie względem czasu, otrzymamy związek pomiędzy przyspieszeniem a_i punktu A oraz przyspieszeniem a masy m_g

$$a_i = \frac{z}{h} a.$$

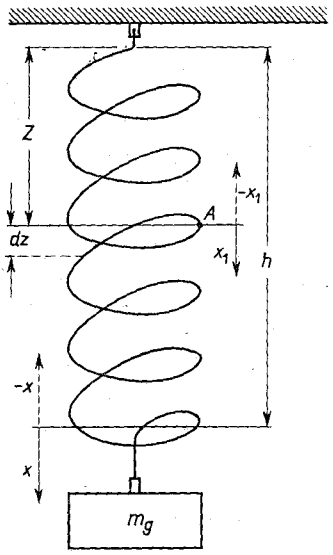
Masa m_i elementu dz wyraża się wzorem

$$m_i = m\frac{dz}{h},$$

gdzie m oznacza masę sprężyny. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona siła F_i działająca na element dz wynosi $F_i = m_i a_i$, skąd

$$F_i = \left(m\frac{dz}{h}\right)\left(\frac{z}{h}a\right).$$

Siła ta, za pośrednictwem sprężyny przenosi się na masę m_g i na punkt zawieszenia. Przyczynek działający na masę m_g zmienia się od 0 dla $z = 0$ do maksimum wynoszącego $\frac{a}{h}\,dz$ dla $z = h$. Ogólnie biorąc część $\frac{z}{h}$ tej siły działa na masę m_g. Stąd siłę F_s otrzy-



7.15. Drgania sprężyny.

mamy sumując przyczynki $\frac{z}{h}F_i$ dla całej sprężyny, czyli

$$F_s = \int_0^h \frac{z}{h}\left(m\frac{dz}{h}\right)\left(\frac{z}{h}a\right),$$

co po scałkowaniu daje

$$F_s = \frac{m}{3}a.$$

Tak więc równanie (7.26) przyjmuje postać

$$\left(m_g + \frac{m}{3}\right)a + kx = 0.$$

Okres drgań sprężyny, analogicznie jak w przypadku omówionym w § 10 (równ. 10.9a) wyraża się wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_g + \frac{m}{3}}{k}}. \tag{7.27}$$

b. Moduł sztywności G. Przy rozciąganiu sprężyny, drut z którego jest ona wykonana, doznaje skręcenia (patrz rys. 7.16). Moment skręcający M działający na drut sprężyny wyraża się wzorem

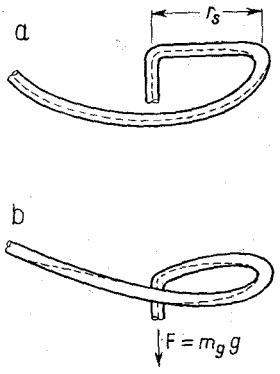
$$M = r_s m_g g, \tag{7.28}$$

gdzie r_s oznacza promień sprężyny (ramię). Moment ten (por. wzór 7.19) wyraża się wzorem

$$M = \frac{1}{2}\pi G r^4 \frac{\alpha}{l}, \tag{7.29}$$

gdzie r oznacza promień drutu, α — kąt o jaki jeden koniec drutu skręca się względem drugiego, a l — długość drutu sprężyny. Długość drutu sprężyny jest równa iloczynowi długości jednego zwoju $2\pi r_s$ razy liczba zwojów N,

$$l = 2\pi r_s N. \tag{7.30}$$



7.16. Skręcenie drutu przy rozciąganiu sprężyny.

Znając całkowite wydłużenie sprężyny kąt α można wyliczyć

$$\alpha = \frac{\Delta h}{r_s}. \tag{7.31}$$

Porównując momenty (7.28) i (7.29) oraz podstawiając (7.30) oraz (7.31) po prostych przekształceniach otrzymamy

$$m_g = \frac{r^4 G}{4 r_s^3 N g} \Delta h. \tag{7.32}$$

Równanie powyższe jest równaniem prostej $m_g(\Delta h)$, której nachylenie a wyraża się wzorem

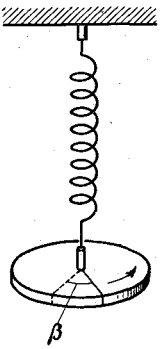
$$a = \frac{r^4 G}{4 r_s^3 N g}. \tag{7.33}$$

c. Moduł Younga E. Skręcenie sprężyny wokół osi równoległej do jej długości spowoduje zmianę średnicy r_s sprężyny; wtedy drut, z którego ona jest wykonana, doznaje ugięcia. Ugięcie to zachodzi w płaszczyźnie zwojów i jak wykazano we wprowadzeniu do doświadczenia (7.3), można je sprowadzić do prostego przypadku wydłużenia i skracania. Jeżeli sprężynę skręconą o kąt β (rys. 7.17) zwolnimy, to wykonuje ona drgania harmoniczne proste wokół położenia równowagi. Zgodnie z równaniem (10.9) okres tych drgań wyraża się wzorem

$$T_t = 2\pi\sqrt{\mathfrak{J}/D}, \tag{7.34}$$

gdzie przez $\mathcal{J}$ oznaczamy moment bezwładności masy zawieszonej na sprężynie, a przez D moment kierujący. Zgodnie z definicją (10.1) moment kierujący jest stosunkiem momentu siły do kąta β:

$$D = \frac{M}{\beta}.$$



7.17. Pobudzanie sprężyny do drgań torsyjnych.

Wartość momentu siły M obliczono uprzednio (równ. 7.11) i dla naszej sprężyny wynosi on

$$M = \frac{EH}{l}\beta.$$

Zatem moment kierujący wyraża się wzorem

$$D = \frac{EH}{l}.$$

Korzystając z wzoru (7.15b) otrzymamy

$$D = E\frac{\pi r^4}{4l}.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (7.34), otrzymamy następujący związek łączący okres drgań torsyjnych sprężyny z modułem Younga

$$T_t = 2\pi\sqrt{\frac{4l\mathcal{J}}{\pi E r^4}}.$$

Uwzględniając ponadto związek (7.30), otrzymamy

$$T_t = 2\pi\sqrt{\frac{8r_s N\mathcal{J}}{Er^4}}. \tag{7.35}$$

Aparatura

W skład przyrządu wchodzi sprężyna stalowa, której górny koniec jest zamocowany. Do dolnego końca sprężyny można zamocować walec, stosowany przy wyznaczaniu modułu Younga lub walec szalkę, którą stosujemy przy wyznaczaniu modułu sztywności. Szalka przy jej obciążaniu przesuwa się na tle pionowej podziałki służącej do pomiaru wydłużenia sprężyny.

Pomiary i obliczenia

Wszystkie pomiary mas wykonujemy za pomocą wagi laboratoryjnej, średnicę drutu mierzymy za pomocą mikromierza, a inne pomiary wykonujemy za pomocą miarki milimetrowej. Do sprężyny przyczepiamy szalkę i nakładając na nią kolejne odważniki mierzymy zależność wydłużenia sprężyny Δh od masy odważników. Pomiary te wykonujemy dla 10 różnych obciążeń tak dobranych, by szalka znajdowała się na tle podziałki. Po wykonaniu powyższych pomiarów obciążenie dobieramy w taki sposób, by szalka znajdowała się w połowie długości skali, wprawiamy ją w drgania podłużne i mierzymy czas trwania 100 drgań.

Wyniki pomiarów notujemy następująco:

1. Masa sprężyny	$m = \ldots$	$\Delta m = \ldots$		
2. Masa szalki	$m_s = \ldots$	$\Delta m_s = \ldots$		
3. Masa walca	$m_w = \ldots$	$\Delta m_w = \ldots$		
4. Średnica zwojów sprężyny	$2r_s = \ldots$	$r_s = \ldots$	$\Delta r_s = \ldots$	
5. Średnica drutu sprężyny	$2r = \ldots$	$r = \ldots$	$\Delta r = \ldots$	
6. Średnica walca mosiężnego	$2r_w = \ldots$	$r_w = \ldots$	$\Delta r_w = \ldots$	
7. Czas 100 drgań podłużnych sprężyny obciążonej masą	$100T = \ldots$	$T = \ldots$	$\Delta T = \ldots$	
8. Czas n drgań torsyjnych sprężyny obciążonej walcem	$nT_t = \ldots$	$T_t = \ldots$	$\Delta T_t = \ldots$	

Celem wyznaczenia modułu Younga sprężynę obciążamy ciałem o regularnych kształtach, najlepiej walcem, zawieszonym w ten sposób, by jego oś symetrii była równoległa do osi sprężyny. Wyprowadzamy wzór na moment bezwładności ciała $\left(\text{dla walca } \mathcal{J} = \frac{1}{2} m_w r_w^2\right)$ i podstawiając go do wzoru (7.35) otrzymujemy wzór, z którego obliczyć możemy moduł Younga E. Mierzymy okres drgań torsyjnych (tzn. zachodzących wokół osi sprężyny) i analizujemy wpływ błędów poszczególnych wielkości prostych na błąd wyniku końcowego. Planujemy pomiary w taki sposób, by błąd wyniku końcowego był jak najmniejszy. Podobnie analizujemy wyniki pomiaru modułu sztywności (wzór 7.33). Wykonujemy ostateczne pomiary.

Korzystając z wykonanych pomiarów i wzoru (7.27), obliczamy teoretyczną wartość okresu drgań podłużnych T' i jego błąd $\Delta T'$. Sprawdzamy czy wielkości T i T' spełniają kryterium zgodności wyników. Obliczamy wydłużenie sprężyny Δh i obliczamy metodą najmniejszych kwadratów nachylenie a linii $m_g(\Delta h)$ oraz błąd $S_{\bar{a}}$. Wykonujemy wykres $m_g(\Delta h)$, na którym najpierw nanosimy linię o nachyleniu a, a następnie punkty pomiarowe. Obliczamy ostateczne wartości E, $S_{\bar{E}}$, G, $S_{\bar{G}}$. Korzystając z równania (7.8) obliczamy współczynnik Poissona ν (błędu $\Delta\nu$ nie liczymy).

8. DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

8.1. WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI METODĄ DRGAŃ TORSYJNYCH

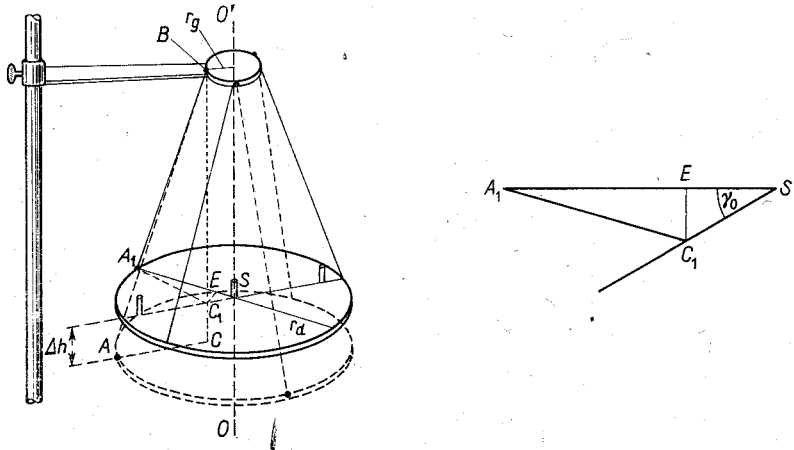
Cel: wyznaczenie z okresu drgań torsyjnych platformy momentów bezwładności różnych brył, elipsoidy bezwładności oraz sprawdzenie twierdzenia Steinera.

Przyrządy: sekundomierz (§ 3.5), suwmiarka (§ 3.1), waga laboratoryjna (§ 3.4).

Zagadnienia: dynamika bryły sztywnej (S1, § 55, 56, 59; P1, § 149–153, K rozdz. 8), drgania harmoniczne proste (§ 10.01; S1, § 43 i 44, K rozdz. 7).

Wprowadzenie i aparatura

Przyrząd (rys. 8.1) składa się z dwóch kolistych platform, z których górna jest nieruchoma i połączona na stałe ze statywem, a dolna o większej średnicy jest zawieszona na trzech niciach n i może oscylować wokół osi OO'.



8.1. Platforma do wyznaczania momentów bezwładności.

Przy skręceniu o kąt γ_0 dolnej platformy energia potencjalna wzrośnie o wartość

$$E_p = mg\Delta h,$$

gdzie Δh oznacza wzniesienie platformy mierzone względem położenia początkowego d $\gamma = 0$, a m — jej masę. Po zwolnieniu platforma zaczyna wykonywać drgania torsyjne (oscylacje), a jej energia potencjalna zamienia się na kinetyczną, ta znów na potencjalną itd. W chwili, gdy $\gamma = 0$, energia kinetyczna wynosi

$$E_k = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega_0^2,$$

gdzie $\mathcal{J}$ oznacza moment bezwładności, a ω_0 — maksymalną prędkość kątową (dla $\gamma = 0$). Zgodnie z zasadą zachowania energii zachodzi

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega_0^2. \tag{8.1}$$

Wielkości ω_0 oraz Δh musimy wyrazić przez inne wielkości.

Obliczenie ω_0. Oscylacje platformy dolnej są drganiami harmonicznymi prostymi i kąt γ wyrazić można wzorem (por. wzory 10.6 i 10.4a)

$$\gamma = \gamma_0 \sin\frac{2\pi}{T}t,$$

gdzie γ_0 oznacza amplitudę, a T — okres drgania. Prędkość kątowa $\left(\omega = \frac{d\gamma}{dt}\right)$ wynosi

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\gamma_0 \cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Maksymalna wartość prędkości kątowej

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\gamma_0 \tag{8.2}$$

występuje dla $\cos\frac{2\pi}{T}t = 1$, to znaczy dla $t = 0, \frac{1}{2}T, T, \ldots$

Obliczenie Δh. Zgodnie z rysunkiem 8.1 wartość $\Delta h = BC - BC_1$. Mnożąc i dzieląc powyższe wyrażenie przez $(BC + BC_1)$ otrzymamy

$$\Delta h = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}. \tag{8.3}$$

Odcinek BC jest przyprostokątną w trójkącie ABC, wobec tego

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (r_d - r_g)^2, \tag{8.4}$$

gdzie l oznacza długość nici. Odcinek BC_1 jest przyprostokątną w trójkącie A_1BC_1, zatem

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2.$$

Bok A_1C_1 jest równocześnie przeciwprostokątną w trójkącie A_1C_1E o bokach $A_1E = r_d - r_g\cos\gamma_0$ oraz $C_1E = r_g\sin\gamma_0$, zachodzi więc związek

$$(A_1C_1)^2 = (A_1E)^2 + (C_1E)^2 = r_d^2 + r_g^2 - 2r_dr_g\cos\gamma_0.$$

Zatem odcinek BC_1 jest określony równaniem

$$(BC_1)^2 = l^2 - (r_d^2 + r_g^2 - 2r_dr_g\cos\gamma_0). \tag{8.5}$$

Podstawiając wyrażenia (8.4) i (8.5) do równania (8.3) otrzymamy

$$\Delta h = \frac{2r_dr_g(1 - \cos\gamma_0)}{BC + BC_1}.$$

Z własności funkcji trygonometrycznych wynika: $(1 - \cos\gamma_0) = 2\sin^2\frac{\gamma_0}{2} \simeq \frac{1}{2}\gamma_0^2$ dla $\gamma \ll 1$ rad, a ponadto w przybliżeniu przyjąć możemy $BC \simeq BC_1 \simeq l$. Zatem ostatnie równanie przyjmie postać

$$\Delta h = \frac{r_dr_g\gamma_0^2}{2l}. \tag{8.6}$$

Podstawiając związki (8.2) i (8.6) do równania (8.1) otrzymamy ostatecznie:

$$\mathcal{J} = \frac{mr_dr_gg}{4\pi^2 l}T^2. \tag{8.7}$$

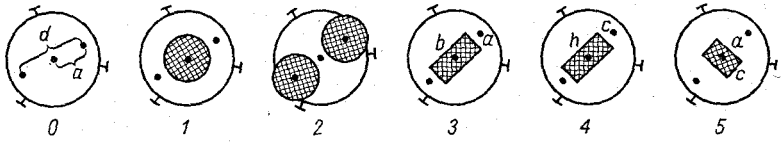
Na dolnej platformie znajdują się trzy kołeczki, na które można nakładać dodatkowe ciała o nieznanym momencie bezwładności. W tym przypadku zamiast momentu bezwładności $\mathcal{J}$ z równania (8.7) otrzymamy $\mathcal{J}_i$, łączny moment bezwładności platformy

oznaczony teraz przez $\mathcal{J}_0$ oraz bryły $\mathcal{J}_{id}$ i ze względu na addytywność momentów bezwładności otrzymamy

$$\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_{id}. \tag{8.8}$$

Na rysunku 8.2 pokazano sposoby umieszczania walców (*1* i *2*) i prostopadłościanu (*3–5*). W przypadku, gdy ciało o masie m_w znajduje się na jednym z bocznych kołeczków odległych o a od osi obrotu, jego moment bezwładności określa twierdzenie Steinera*

$$\mathcal{J}_{id} = \mathcal{J}_{i0} + m_w a^2. \tag{8.9}$$



8.2. Sposoby rozmieszczania ciał na platformie.

Pomiary i obliczenia

Mierzymy średnice platform ($2r_d$ i $2r_g$), średnice walców $2r_i$, długości l_k poszczególnych nici, odległości kołeczków a i masy badanych brył (m_w i m_p). Mierzymy okres drgań torsyjnych pustej platformy. Analizujemy wpływ błędów poszczególnych wielkości na błąd wyniku końcowego i planujemy właściwe pomiary, w tym również ilość mierzonych wahnięć platformy. Pomiary ostateczne wykonujemy dla platformy pustej i obciążonej na różne sposoby co pokazano na rysunku 8.2.

Obliczamy momenty bezwładności $\mathcal{J}_i (i = 0,1, \ldots, 5)$ z wzoru (8.7), momenty bezwładności $\mathcal{J}_{id}$ samych brył (wzór 8.8) oraz odchylenia standardowe. W przypadku *1* (rys. 8.2) $\mathcal{J}_{1d}$ jest momentem bezwładności walca; obliczamy go również z wymiarów geometrycznych ($\mathcal{J}_g$) i sprawdzamy zgodność obydwu wyników. W przypadku *2* (rys. 8.2), zgodnie z twierdzeniem Steinera (8.9) istnieje związek

$$\mathcal{J}_{2d} = 2\mathcal{J}_{20} + \frac{1}{2} m_w d^2,$$

gdzie $\mathcal{J}_{20}$ oznacza moment bezwładności walca względem osi przechodzącej przez jego środek masy równoległej do osi oscylacji; stąd musi on być równy $\mathcal{J}_{10}$ z przypadku *1*. Zgodność wyników $\mathcal{J}_{10}$ i $\mathcal{J}_{20}$ jest dowodem słuszności twierdzenia Steinera. W ostatnich trzech przypadkach $\mathcal{J}_{3b}$, $\mathcal{J}_{4d}$, $\mathcal{J}_{5d}$ oznacza trzy główne momenty bezwładności graniastosłupa, pierwiastki z odwrotności tych momentów są równe długości trzech półosi elipsoidy bezwładności.

8.2. WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI METODĄ STOLIKA BALANSOWEGO

Cel: wyznaczanie za pomocą stolika balansowego momentu bezwładności i sprawdzanie twierdzenia Steinera.

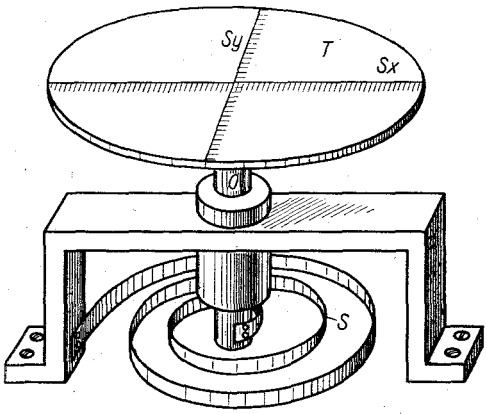
Przyrządy: sekundomierz (§ 3.5), suwmiarka (§ 3.1).

Zagadnienia: dynamika bryły sztywnej (S1, § 55 i 56, 59; P1, § 149–153; K rozdz. 8), drgania harmoniczne proste (§ 10.01; S1, § 43 i 44; K, rozdz. 7).

* Twierdzenie Steinera w naszej literaturze bywa nazywane prawem Steinera, twierdzeniem o osiach równoległych lub twierdzeniem o momentach bezwładności.

Wprowadzenie i aparatura

W omawianym doświadczeniu stosuje się przyrząd składający się z płaskiego, okrągłego, poziomo ustawionego stolika T, osadzonego na prostopadłej osi O (rys. 8.3). Oś znajduje się w środku symetrii stolika i jest osadzona w łożyskach o bardzo małym tarciu. Do osi zamocowany jest jeden koniec spiralnej sprężyny S, drugi jej koniec jest zamocowany do podstawy stolika. Na stoliku znajdują się dwie, wzajemnie prostopadłe, przechodzące przez oś obrotu podziałki Sx i Sy, pozwalające odczytywać położenie ciała. W stoliku znajduje się również szereg małych otworków, w które możemy wkładać kołeczki celem unieruchomienia badanego ciała.



8.3. Stolik balansowy do wyznaczania momentu bezwładności.

Zgodnie z równaniem (10.9) kwadrat okresu drgań wychylonego z położenia równowagi stolika wyraża się wzorem

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{\mathcal{J}_0}{D}. \tag{8.10}$$

W przypadku, gdy na stoliku znajduje się dodatkowe wzorcowe ciało, to okres drgań przyjmie postać

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_w}{D}, \tag{8.11}$$

gdzie $\mathcal{J}_w$ oznacza moment bezwładności dodatkowego ciała liczony względem osi oscylacji. Jeżeli dodatkowym ciałem będzie np. walec osadzony współosiowo ze stolikiem, to jego moment bezwładności $\mathcal{J}_w$ możemy obliczyć z wymiarów geometrycznych $\left(\mathcal{J}_w = \frac{1}{2} mr^2\right)$, a z równań (8.10) i (8.11) możemy wyznaczyć moment kierujący D, który wynosi

$$D = \frac{4\pi^2 \mathcal{J}_w}{T^2 - T_0^2}. \tag{8.12}$$

Znając moment kierujący i mierząc okres T_i, dla stolika obciążonego dowolną bryłą otrzymamy

$$T_i^2 = 4\pi^2 \frac{\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_i}{D}, \tag{8.13}$$

gdzie $\mathcal{J}_i$ oznacza moment bezwładności bryły względem osi oscylacji. Eliminując $\mathcal{J}_0$ z wzorów (8.10) i (8.13) oraz podstawiając na D wartość z równania (8.12) otrzymamy

$$\mathcal{J}_i = \frac{T_0^2 - T_i^2}{T_0^2 - T^2} \mathcal{J}_w. \tag{8.14}$$

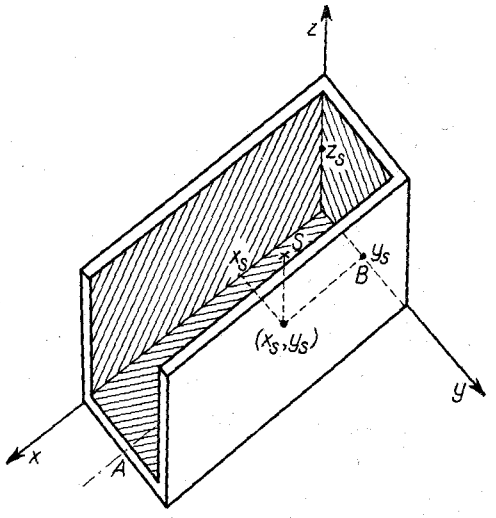
Jeżeli środek masy nie leży na osi oscylacji, to zgodnie z twierdzeniem Steinera*

$$\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_{i0} + ma^2, \tag{8.15}$$

gdzie $\mathcal{J}_{i0}$ — moment bezwładności bryły względem osi równoległej do osi oscylacji, lecz przechodzącej przez środek masy, a — odległość tych dwóch osi. Zatem moment $\mathcal{J}_i$ jest najmniejszy wtedy, gdy $a = 0$, tzn. środek masy bryły leży na osi oscylacji. Podstawiając (8.15) do (8.13) otrzymamy wyrażenie typu

$$T_i^2 = C^2 + \frac{4\pi^2 m}{D} a^2,$$

z którego wynika, że również okres drgań torsyjnych osiąga wartość najmniejszą ($T_i = C$), gdy $a = 0$. Własność tę możemy wykorzystać do wyznaczenia środka masy dowolnej bryły. W tym celu na bryle obieramy dowolny układ współrzędnych x, y, z (rys. 8.4), może to być nawet układ ukośnokątny. Osie jego rysujemy na ścianach bryły. Ustawiamy bryłę na stoliku w ten sposób, by oś x była równoległa do podziałki Sx i mierzymy zależność okresu oscylacji dla różnych położeń bryły uzyskanych przez równoległe jej przesuwanie wzdłuż podziałki Sx. Zależność $T_x(Sx)$ ma minimum, gdy środek masy



8.4. Przykład łączenia układu współrzędnych z bryłą o nieznanych momentach bezwładności.

leży na osi Sy. Odczytana na osi x związanej z bryłą współrzędna x_s wyznaczona punktem $Sx = 0$, czyli osią Sy podziałki znajdującej się na stoliku, jest x-ową współrzędną środka masy bryły. Celem wyznaczenia y_s bryłę ustawiamy w takim położeniu, by x_s znalazła się nad linią podziałki Sy. Badamy zależność okresu od położenia odczytanego

* Porównaj uwaga str. 176.

na podziałce Sy postępując podobnie jak w przypadku poprzednim. Celem wyznaczenia współrzędnej z_s bryłę obracamy na jedną ze ścian bocznych i pomiary wykonujemy w taki sam sposób jak przy wyznaczaniu x_s.

Pomiary

Mierzymy średnicę wzorcowego walca oraz ważymy go. Mierzymy następujące okresy drgań: T_0, gdy stolik jest pusty, T_1 — stolika obciążonego walcem umieszczonym koncentrycznie oraz T_2, gdy walec nie leży współosiowo. Analizujemy wpływ błędów poszczególnych wielkości prostych na wynik końcowy J_i (równ. 8.14) i planujemy właściwe wykonanie pomiarów. Wykonujemy pomiary ostateczne dla walca umieszczonego koncentrycznie i ekscentrycznie. Następnie przystępujemy do wyznaczenia środka masy bryły pokazanej na rysunku 8.4 oraz do pomiaru jej głównych momentów bezwładności. Początkowe położenie bryły odpowiada wskazaniom $Sx = 0$, $Sy = 0$ (początek układu x, y, z musi być na przecięciu podziałek Sx i Sy). Dla każdej osi układu x, y, z wykonujemy pomiary zależności np. $T_x(Sx)$ dla 6 do 10 położeń bryły rozmieszczonych równomiernie na przestrzeni od $Sx = 0$ do $Sx = a$. Wykreślamy zależność $T_x(Sx)$ i z wykresu wyznaczamy x_s. W podobny sposób postępujemy wyznaczając y_s i z_s. Znając położenie środka masy wyznaczamy okres T_{iy}, gdy bryła leży na stoliku płaszczyzną wyznaczoną osiami y, z, a punkt o współrzędnych y_s i z_s znajduje się nad środkiem stolika. Podobnie wyznaczamy okresy T_{iy} (wtedy bryła leży na powierzchni wyznaczonej współrzędnymi x, z) oraz T_{iz}. Notujemy dokładności wykonanych pomiarów.

Obliczenia

W oparciu o wyniki pomiarów wykonanych dla koncentrycznie umieszczonego walca oraz łącząc wzory (8.14) i (8.15) obliczamy a'. Z pomiarów wykonanych dla bryły umieszczonej w odległości a od środka stolika po wyznaczeniu położenia jej środka masy obliczamy według wzoru (8.14) trzy główne momenty bezwładności. Obliczamy błąd Δa_i dla jednego z pomiarów. Przyjmujemy, że inne pomiary obarczone są takim samym błędem. Sprawdzamy zgodność wyników a_i' z bezpośrednimi odczytami a_i ze skali stolika. Obliczamy błąd jednego z głównych momentów bezwładności badanej bryły.

8.3. RUCH OBROTOWY BRYŁY

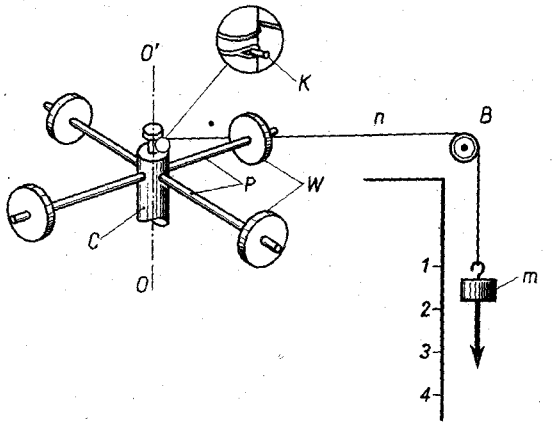
Cel: wyznaczenie momentu bezwładności przyrządu, masy walca oraz sprawdzenie równania $M = J\alpha$.

Przyrządy: mikromierz (§ 3.1), sekundomierz (§ 3.5).

Zagadnienia: dynamika bryły sztywnej (S1, § 55–57; P1, § 149–153, K rozdz. 8).

Wprowadzenie i aparatura

W doświadczeniu posługujemy się zmodyfikowanym wahadłem Oberbecka (rys. 8.5). Walec metalowy C jest osadzony na łożyskach kulkowych i może obracać się wokół osi OO'. Z walcem połączone są cztery pręty stalowe P, na których osadzone są walce W.



8.5. Przyrząd do badania ruchu obrotowego bryły.

Walce W można przesuwać wzdłuż prętów. Górna część walca C ma kształt szpulki, a ponadto w zwężonej części znajduje się kołeczek K, który służy do zaczepienia pętli nici n. Przyrząd jest zamocowany na statywie i może być zaopatrzony w urządzenie unieruchamiające. Chcąc wprowadzić przyrząd w ruch obrotowy przerzucamy nić przez bloczek B i obciążamy masą m.

Równanie ruchu obrotowego bryły ma postać

$$\mathbf{M} = \mathcal{J}\boldsymbol{\alpha}, \tag{8.16}$$

a w omawianym przypadku moment siły wyraża się wzorem

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{g}, \tag{8.17}$$

gdzie r_1 oznacza promień tej części walca C, na którą nawija się nić. Moment bezwładności $\mathcal{J}$ jest równy sumie momentu $\mathcal{J}_C$ — walca C, $4\mathcal{J}_p$ — prętów P, oraz walców W — $4\mathcal{J}_w + 4m_w\left(\frac{d}{2}\right)^2$. W ostatnim przypadku m_w oznacza masę walca W, d — odległość przeciwległych walców, $\mathcal{J}_w$ — moment bezwładności walca W względem osi a równoległej do osi OO', przechodzącej przez jego środek masy. Wyraz $m_w\left(\frac{d}{2}\right)^2$ jest przyczynkiem wynikającym z twierdzenia Steinera*. Zatem po wykonaniu dodawania mamy

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_C + 4\mathcal{J}_p + 4\mathcal{J}_w + m_w d^2,$$

a wprowadzając oznaczenie

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_C + 4\mathcal{J}_p + 4\mathcal{J}_w \tag{8.18}$$

otrzymamy

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + m_w d^2. \tag{8.19}$$

Przyspieszenie kątowe α określamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym, który dla przypadku ruchu obrotowego ma postać

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}, \tag{8.20}$$

* Patrz uwaga str. 176.

gdzie φ jest tu kątem o jaki obróci się przyrząd w czasie t działania momentu siły. Można napisać $\varphi = 2\pi N$, gdzie 2π oznacza pełen kąt (jeden obrót), a N — ilość zwojów nici. Zatem ostatni wzór przyjmie postać

$$\alpha = \frac{4\pi N}{t^2}. \tag{8.21}$$

Podstawiając wyrażenia (8.17), (8.19) i (8.21) do równania (8.16) oraz zaniedbując zapis wektorowy (jest to uzasadnione wzajemną prostopadłością wektorów $\mathbf{r}_1, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}$), otrzymamy

$$mr_1 g = (\mathcal{J}_0 + m_w d^2)\frac{4\pi N}{t^2}.$$

Skąd po prostych przekształceniach algebraicznych otrzymamy

$$t^2 = \frac{4\pi N \mathcal{J}_0}{mr_1 g} + \frac{4\pi N m_w}{mr_1 g} d^2. \tag{8.22}$$

W układzie współrzędnych prostokątnych, w którym na osi y odkładamy t^2, a na osi x — wartość d^2, równanie (8.22) jest równaniem prostej

$$y = ax + b. \tag{8.23}$$

Zgodnie z interpretacją geometryczną tego równania wartość odciętej w punkcie $x = 0$ jest równa b, czyli współrzędnej miejsca, w którym prosta przecina oś y, natomiast a jest nachyleniem prostej. Obydwie te wielkości określić możemy z wykresu. Porównując równania (8.22) i (8.23), otrzymamy

$$b = \frac{4\pi N \mathcal{J}_0}{mr_1 g}, \tag{8.24}$$

$$a = \frac{4\pi N m_w}{mr_1 g}. \tag{8.25}$$

Prostoliniowy przebieg zależności $t^2(d^2)$ jest dowodem słuszności naszych założeń, czyli równania (8.16).

Znając wymiary geometryczne przyrządu możemy obliczyć moment bezwładności $\mathcal{J}_0$. Zgodnie z wzorami zamieszczonymi w tablicy II. Przyczynek $\mathcal{J}_C$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{J}_C = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2,$$

gdzie r_i oznacza promienie poszczególnych części walca C. Masy m_i wyrażamy następująco: $m_i = \pi \varrho r_i^2 h_i$, gdzie h_i oznacza wysokość części walcą o promieniu r_i, ϱ — gęstość. Zatem

$$\mathcal{J}_C = \frac{1}{2}\pi\varrho \sum_i r_i^4 h_i.$$

Moment bezwładności pręta o promieniu r_p i długości l względem osi przechodzącej przez jeden z końców wyraża się wzorem

$$\mathcal{J}_p = \frac{1}{3}\pi\varrho r_p^2 l^3.$$

W podobny sposób wyprowadzić możemy wzór na moment bezwładności walca W względem osi przechodzącej przez jego środek masy, a prostopadłej do jego osi, otrzymując

$$\mathcal{J}_w = \pi r_w^2 h_w \varrho \left(\frac{1}{4} r_w^2 + \frac{1}{12} h_w^2\right),$$

gdzie r_w oznacza promień walca W, a h_w — jego wysokość. Podstawiając trzy ostatnie wyrażenia do równania (8.8) otrzymamy

$$\mathcal{J}_0 = \pi \varrho \left(\frac{1}{2} \sum_i r_i^4 h_i + \frac{4}{3} r_p^2 l^3 + r_w^4 h_w + \frac{1}{3} r_w^2 h_w^3\right). \tag{8.26}$$

Pomiary

Mierzymy następujące części przyrządu: promienie poszczególnych części walca C (r_1, r_2, r_3), długości poszczególnych części walca (h_1, h_2, h_3), promień pręta $P(r_p)$, długość pręta l, promień walca $W(r_w)$, wysokość walca $W(h)$ oraz masę ciężarka (m). Przechodząc do właściwych pomiarów ustawiamy walce W w równych, dość znacznych odległościach od osi obrotu, a końce prętów zabezpieczamy nakrętkami. Na górną część walca C nawijamy nić. Zwracamy uwagę na to, by nić nawinięta była w jednej warstwie. Po przerzuceniu nici przez bloczek B, obciążeniu jej masą m i zwolnieniu przyrządu powinien on zostać wprawiony w ruch obrotowy.

Doświadczenie rozpoczynamy od wykonania pomiarów pozwalających na sprawdzenie czy przyrząd porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Jeżeli ruch obrotowy jest ruchem jednostajnie przyspieszonym, tzn. stosującym się do równania (8.20), to ruchem jednostajnie przyspieszonym musi być również ruch postępowy ciężarka m, co oznacza, że droga s_j powinna wyrazić się wzorem $s_j = \frac{1}{2} a_0 t_j^2$. Stąd spodziewamy się, że wykreślona zależność $s_j(t_j^2)$ musi być linią prostą. Celem sprawdzenia powyższego wniosku mierzymy czas spadania ciężarka z 6-ciu różnych wysokości s_j i wykreślamy zależność $s_j(t_j^2)$.

W następnej części mierzymy zależność czasu spadania ciężarka ze stałej wysokości s_c od odległości d przeciwległych walców W. W tej części bardzo istotną rolę odgrywa staranność wykonania pomiarów, a w szczególności stałość wysokości s_c, którą osiągamy przez nawinięcie na szpulkę, zawsze dokładnie takiej samej liczby N zwojów nici. Pomiary wykonujemy dla 6-ciu różnych odległości d zawartych w przedziale od l do $\frac{l}{2}$.

Obliczenia

W oparciu o wyniki pierwszej części doświadczenia, obliczamy metodą najmniejszych kwadratów (§ 2.6) nachylenie α prostej $s(t^2)$, które zgodnie z równaniem ruchu przyspieszonego jest równe $a_0 = 2a'$*. W następnym etapie w oparciu o wyniki części drugiej doświadczenia obliczamy dla każdego punktu t^2 i d^2, a następnie metodą najmniejszych kwadratów nachylenie a krzywej $t^2(d^2)$, rzędną b oraz odchylenie standar-

* a' oznacza nachylenie prostej $s\,(t^2)$.

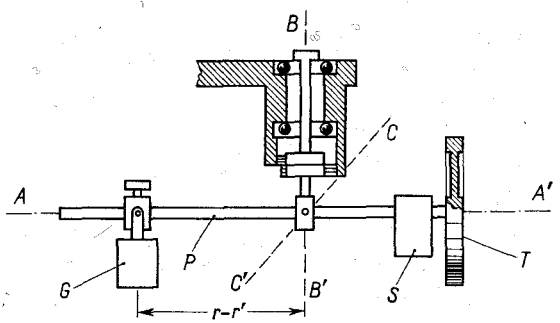
dowe średnich $S_{\bar{a}}$ i $S_{\bar{b}}$. Korzystając z równań (8.24) i (8.25) obliczamy J_0 oraz m_w. W oparciu o wymiary geometryczne i wzór (8.26) obliczamy moment bezwładności J'_0, gęstość przyjmujemy z tablic. Sprawdzamy zgodność wyników J_0 i J'_0.

8.4. GIROSKOP

Cel: wyznaczanie momentu bezwładności tarczy giroskopu oraz sprawdzenie równania precesji.
Przyrządy: sekundomierz (§ 3.5), tachometr (§ 3.9).
Zagadnienia: zasady dynamiki bryły sztywnej (S1, § 55–58; P1, § 143–148), zjawisko precesji (S1, § 60–64; P1 § 155–167; K, rozdz. 8).

Wprowadzenie i aparatura

Giroskopem nazywamy bryłę sztywną osadzoną na osi będącej równocześnie swobodną osią obrotu i osią największego momentu bezwładności. Oś obrotu AA' giroskopu może obracać się wokół dwóch innych osi: BB' oraz CC' pokazanych na rys. 8.6.



8.6. Budowa giroskopu.

Bryłą sztywną jest tarcza mosiężna T napędzana lekkim silnikiem elektrycznym S. Pręt P, na którym osadzony jest silnik z tarczą, jest podparty powyżej środka ciężkości i stanowi dźwignię dwustronną, na której ciężar tarczy T jest zrównoważony ciężarkiem G o masie m.

Ruchem giroskopu rządzą zasady dynamiki bryły sztywnej. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki moment siły M jest pochodną momentu pędu L względem czasu

$$M = \frac{dL}{dt}. \tag{8.27}$$

Analogicznie do zasady pędu i popędu równanie powyższe możemy napisać w postaci

$$dL = Mdt. \tag{8.28}$$

W przypadku, gdy nie występuje wypadkowy moment siły ($M = 0$), równanie (8.27) przyjmuje postać $\frac{dL}{dt} = 0$, skąd wynika

$$L = \text{const}.$$

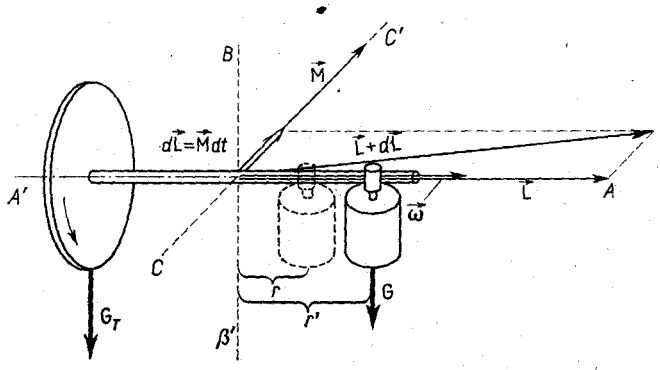
Ostatni związek stanowi treść zasady zachowania momentu pędu. Gdy na ciało nie działa moment sił lub działające momenty równoważą się, to wartość i kierunek momentu pędu pozostają stałe. Ze względu (S1, § 55) na związek

$$L = \mathcal{J}\omega \tag{8.29}$$

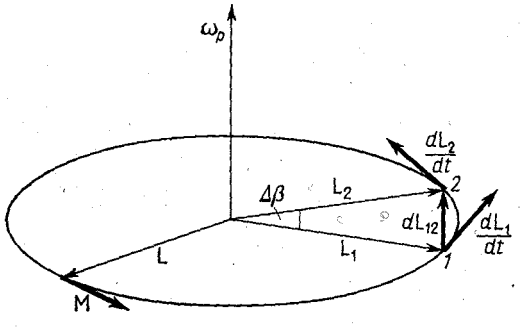
zasadę zachowania momentu pędu możemy przedstawić w postaci

$$\mathcal{J}\omega = \text{const}. \tag{8.30}$$

Wynika stąd, że gdy na bryłę nie działa moment siły ($M = 0$), a jej moment bezwładności $\mathcal{J}$ jest stały, prędkość kątowa ω musi być stała (zarówno jej wartość jak i kierunek). Siła leżąca na linii przechodzącej przez środek masy bryły wywołuje ruch postępowy zgodny z II zasadą dynamiki ($F = ma$). Stąd też giroskop zachowuje stałą prędkość kątową ω i oś obrotu nawet wtedy, gdy będziemy obracać lub przemieszczać jego podstawę.



8.7. Wyjaśnienie przyczyn precesji.



8.8. Obrót wektora momentu pędu.

Gdy na giroskop działa moment M równoległy do osi CC' (rys. 8.7), jego moment pędu L w dowolnie małym odcinku czasu dt wzrasta o dL (wyrażający się wzorem 8.28). Wektor dL jest więc równoległy do wektora M, a prostopadły do L. Nie zmienia on wartości wektora L, lecz jego kierunek. Ponieważ moment siły M działa w sposób ciągły, w sposób ciągły zmienia się również kierunek całkowitego momentu pędu L. Ze względu na stałość $\mathcal{J}$ (por. wzór 8.29) prędkość kątowa zmienia się w taki sam sposób jak moment pędu, stąd cały giroskop obraca się wokół osi BB' (rys. 8.7). Taki obrót giroskopu pod wpływem zewnętrznego momentu M nazywamy precesją. W przypadku, gdy moment

siły M jest równoległy do osi CC', to moment pędu L zmienia swój kierunek w sposób ciągły, a jego koniec zatacza koło o promieniu L (rys. 8.8). Zgodnie z definicją pochodnej, dla skalarnej wartości momentu pędu zachodzą następujące związki:

$$\frac{dL}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{łuk}(1,2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L \Delta \beta}{\Delta t} = L \frac{d\beta}{dt},$$

skąd

$$\frac{dL}{dt} = L\omega_p,$$

gdzie $\omega_p = \frac{d\beta}{dt}$ oznacza prędkość kątową precesji. Uwzględniając związek (8.27) otrzymamy

$$M = L \cdot \omega_p.$$

Związek powyższy w zapisie wektorowym po uwzględnieniu równania (8.29) ma postać

$$\mathbf{M} = \mathcal{J}\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}. \tag{8.31a}$$

W przypadku, gdy występujące w powyższym równaniu wektory momentu pędu $\mathbf{M}$, prędkości kątowych $\boldsymbol{\omega}_p$ i $\boldsymbol{\omega}$ pozostają zawsze wzajemnie prostopadłe (co w przybliżeniu jest zachowane w giroskopie) związek (8.31a) można zapisać również w postaci skalarnej

$$M = \mathcal{J}\omega_p\omega. \tag{8.31}$$

Na giroskop działają zawsze dwa momenty siły: tarczy M_T i ciężarka M_G. Gdy są one zrównoważone ($M_T + M_G = M = 0$), precesja nie występuje ($\omega_p = 0$). Gdy ciężarek G o masie m przesuniemy, zmieniamy ramię od wartości r do r', i działa wypadkowy moment $M = (r - r')mg$. Podstawiając powyższe wyrażenie do wzoru (8.31) otrzymamy

$$\mathcal{J} = \frac{(r - r')mg}{\omega_p \omega}. \tag{8.32}$$

Moment bezwładności $\mathcal{J}'$ tarczy obliczyć możemy również teoretycznie z wymiarów geometrycznych, korzystając z wzorów podanych w tablicy II. Musimy zsumować przyczynek od zewnętrznego, pogrubionego pierścienia (porównaj rys. 8.6) oraz od części wewnętrznej otrzymując wzór

$$\mathcal{J}' = \frac{1}{2}\varrho v_2(r_2^2 + r_1^2) + \frac{1}{2}\varrho v_1 r_1^2,$$

gdzie $v_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)d_2$ oraz $v_1 = \pi r_1^2 d_1$ są objętościami poszczególnych części tarczy T. Po przekształceniach otrzymamy

$$\mathcal{J}' = \frac{1}{2}\pi\varrho[r_2^4 d_2 - (d_2 - d_1)r_1^4]. \tag{8.33}$$

Pomiary

Doświadczenie rozpoczynamy od pomiarów wykonywanych jednorazowo: średnica zewnętrzna tarczy $2r_2$, średnica części wewnętrznej $2r_1$, grubość części zewnętrznej d_2, grubość części wewnętrznej d_1, masa ciężarka m, ramię w równowadze r, ilość obrotów na sekundę N (pomiar tachometrem), szybkość kątowa (rad/s).

Celem przyłożenia dodatkowego momentu siły lewą ręką przytrzymujemy pręt giroskopu, a prawą zmieniamy ramię r ciężarka G. Pręt zwalniamy nadając mu uprzednio prędkość precesji. Przy szybkim zwalnianiu pręta ruch nie jest stabilny. Na skutek tarcia w czasie ruchu precesyjnego występuje powolny obrót wokół osi CC' zgodny z kierunkiem działania momentu wypadkowego M_p. Celem zmniejszenia powstałego stąd błędu należy zwolnić giroskop w położeniu nieznacznie odchylonym od poziomu, w kierunku przeciwnym względem kierunku działania momentu M_p. Po zwolnieniu ramienia wykonujemy pomiar czasu t trwania kilku okresów T_p analizujemy wpływ błędów poszczególnych wielkości prostych na wynik końcowy i określamy właściwy sposób ich pomiaru. Pomiary wykonujemy kilkakrotnie dla czterech różnych wartości r'(r'_1 i $r'_2 < r$ oraz r'_3 i $r'_4 > r$). Wszystkie wartości r' powinny znacznie różnić się od wartości r w położeniu równowagi.

Obliczenia

Obliczamy okresy precesji T_i dla każdego pomiaru, a dla każdej wartości r'_i okres średni T_i, częstość precesji $\omega_{pi} = 2\pi T_i$ oraz moment bezwładności $\mathcal{J}_i$ z wzoru (8.32). Obliczamy również średnią wartość momentu bezwładności $\bar{\mathcal{J}}$. Korzystając ze wzoru (8.33) obliczamy moment bezwładności $\mathcal{J}'$ z wymiarów geometrycznych. Obliczamy błędy $S_{\bar{\mathcal{J}}}$ i $S_{\mathcal{J}'}$ lub $\Delta\mathcal{J}$ i sprawdzamy zgodność wyników $\bar{\mathcal{J}}$ i $\mathcal{J}'$. Zgodność taka jest dowodem słuszności równania precesji.

8.5. MOMENT GIROSKOPOWY

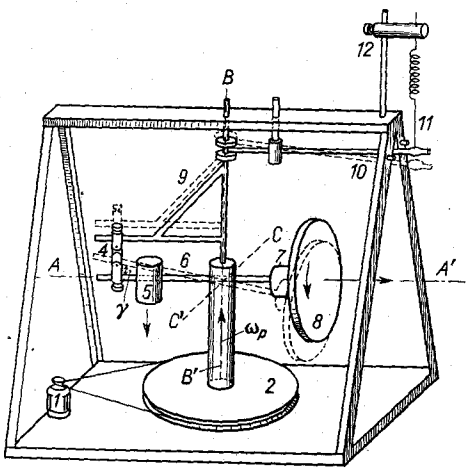
Cel: wyznaczenie momentu bezwładności tarczy giroskopu i sprawdzenie równania precesji (8.31).
Przyrządy: sekundomierz (§ 3.5), tachometr (§ 3.9), autotransformator (§ 4.5), suwmiarka (§ 3.1).
Zagadnienia: omówione w literaturze podanej poprzednio do doświadczenia 8.4 oraz przeczytać wprowadzenie do doświadczenia 8.4.

Wprowadzenie i aparatura

Omawiane doświadczenie jest podobne do doświadczenia z giroskopem, w którym do giroskopu przykładaliśmy moment siły i mierzyliśmy prędkość kątową precesji. W obecnym doświadczeniu wprawiamy giroskop w ruch precesyjny i będziemy mierzyć wartość momentu siły. W obliczeniach, podobnie jak poprzednio, opierać się będziemy na wzorze (8.32). Podstawową częścią przyrządu jest giroskop składający się z tarczy mosiężnej (8), silnika elektrycznego (7), pręta stalowego (6) i ciężarka (5) — rys. 8.9. Statyw giroskopu jest osadzony na łożyskach kulkowych, zaopatrzony w koło pasowe (2) i może zostać wprawiony w ruch obrotowy za pomocą silnika (1). Częstość obrotu silnika wprawiającego w ruch precesyjny giroskop ω_p można regulować za pomocą autotransformatora. W dolnej części statywu, poniżej koła pasowego znajduje się kolektor, przez który doprowadza się prąd do silnika tarczy giroskopu. Giroskop osadzony jest w statywie na osi w taki sposób, że może odchylać się o niewielki kąt od położenia równowagi.

Przez ω oznaczymy prędkość kątową tarczy giroskopu, przez ω_p prędkość kątową obrotu statywu. Kierunki tych wektorów zaznaczono na rysunku 8.9. Zgodnie z wzorem

(8.31) na giroskop działa wtedy moment siły M i giroskop będzie usiłował obrócić się wokół osi CC'. Obrót nie dochodzi do skutku, ponieważ moment M jest kompensowany. Mechanizm służący do kompensowania momentu działa w sposób następujący. Pręt giroskopu, na skutek wprawienia giroskopu w ruch obrotowy, obraca się o kąt γ w kierunku wyznaczonym przez moment M. Ruch ten zostaje przekazany za pomocą złącza przegubowego (4) na przenośnik (9). Przenośnik obraca się wraz z giroskopem, jego końce zamocowane są w łożyskach. Przenośnik może przesuwać się o kilka milimetrów w górę i w dół. Siła reakcji łożysk wystarcza do skompensowania dowolnie dużego momentu. Na skutek przesunięcia przenośnika prawy koniec dźwigni (10) przesuwa się w dół. Celem wyznaczenia wartości momentu kompensującego za pomocą dynamometru sprowadzamy prawe ramię dźwigni do pierwotnego położenia równowagi, które jest wyznaczone poziomem górnej krawędzi występów (11). Napięcie dynamometru zmieniamy, przesuwając jego punkt zaczepienia (12) w górę lub w dół.



8.9. Przyrząd do pomiaru momentu giroskopowego.

Wyliczamy wielkość momentu kompensującego M_k, działającego na giroskop wtedy, gdy dynamometr działa na dźwignię siłą F_k. Ponieważ punkt podparcia dźwigni znajduje się w odległości $\frac{1}{4}$ długości ramienia dźwigni od osi obrotu, na przenośnik działa siła $F_p = 3F_k$. Siła ta jest przekazywana za pośrednictwem złącza przegubowego na giroskop. Jeżeli przez r oznaczymy odległość punktu zaczepienia od osi obrotu, to moment kompensujący działający na giroskop wyrazi się wzorem

$$M_k = rF_p$$

(Ze względu na prostopadłość wektorów $\mathbf{r}$ i $\boldsymbol{F}_p$ zaniedbaliśmy we wzorze powyższym zapis wektorowy.) Ostatecznie otrzymamy więc następujący związek między momentem kompensującym i siłą kompensującą F_k

$$M_k = 3rF_k. \tag{8.34}$$

Pomiary

Wykonujemy pomiary wielkości nie zmieniających się w czasie doświadczenia wymiarów tarczy: średnicy zewnętrznej r_2 i wewnętrznej r_1 oraz grubości jej części zewnętrznej d_2 i wewnętrznej d_1, masy m ciężarka G, ramienia r giroskopu w równowadze, liczbę obrotów tarczy na sekundę N. Sprawdzamy prawidłowość punktu podparcia dźwigni. Usuwamy złącze przegubowe i sprawdzamy czy giroskop jest zrównoważony. Zakładamy na powrót złącze i mierzymy ramię r, które jest odległością od osi obrotu do punktu zaczepienia złącza na pręcie giroskopu. Przy zluźnionym dynamometrze górna krawędź końca dźwigni powinna leżeć na jednej linii z górną krawędzią występów. Jeżeli dźwignia zajmuje inne położenie, to przesuwamy oś obrotu dźwigni w górę lub w dół. Po sprawdzeniu przyrządu włączamy silnik giroskopu i po trzech minutach, gdy tarcza giroskopu osiągnie maksymalną częstość, mierzymy częstość tarczy tachometrem. Włączamy silnik napędzający statyw, zasilany za pośrednictwem autotransformatora prądem przemiennym. Giroskop zostaje wprawiony w ruch obrotowy o częstości obrotów nie przekraczającej 0,2 obr/min. Równowaga dźwigni zostaje zachwiana. Dobieramy wartość siły kompensującej tak, by prawy koniec dźwigni sprowadzić do położenia pierwotnego. Za pomocą sekundomierza mierzymy okres precesji. W oparciu o wyniki serii próbnej planujemy pomiary ostateczne. Pomiary te wykonujemy przynajmniej dla 6-ciu różnych wartości ω_p.

Obliczenia

Korzystając z wyznaczonych długości ramion dźwigni (11) sprawdzamy słuszność wzoru (8.34) i ewentualnie poprawiamy współczynniki. Następnie ze wzoru $\omega_p = 2\pi N/t$ obliczamy częstość obrotów silnika giroskopu. Ostateczny wzór na $\mathcal{J}$ otrzymamy podstawiając na M do wzoru (8.31) wartość z wzoru (8.34). Obliczamy błąd $\Delta\mathcal{J}$ dla jednego z pomiarów i przyjmujemy ten błąd również dla wyniku końcowego. Z wzoru (8.33) obliczamy moment bezwładności tarczy $\mathcal{J}'$ oraz błąd tej wielkości. Sprawdzamy zgodność wyników $\mathcal{J}$ i $\mathcal{J}'$, która jest dowodem słuszności równania (8.31).

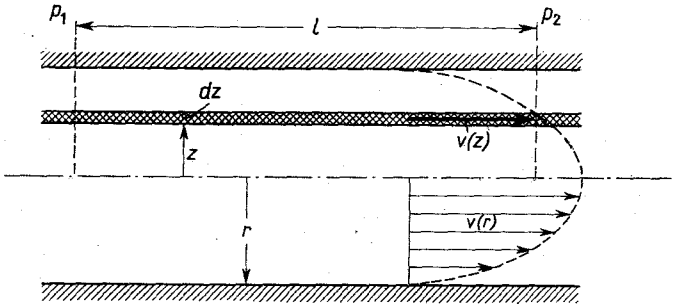
9. PRZEPŁYW PŁYNÓW

9.01. PRAWA RZĄDZĄCE PRZEPŁYWEM (S1, § 86–96)

Rysunek 9.1 pokazuje schematycznie rozkład prędkości drobin cieczy lub gazu w rurce (obydwa stany skupienia określamy wspólną nazwą — płyny), w której ruch jest spowodowany niewielką różnicą ciśnień $(p_1 - p_2)$. Wszystkie drobiny poruszają się w kierunkach równoległych do osi rurki z prędkościami malejącymi ze wzrostem odległości od osi rurki. Płyn podzielić możemy na współosiowe cylindry o promieniu z i grubości dz i założyć, że wewnątrz każdego cylindra wszystkie drobiny poruszają się z tą samą prędkością $v(z)$. Gdy przez ścianki tak pomyślanych cylindrów drobiny nie przechodzą, mówimy o przepływie *laminarnym*. Gdy istnieje duży przepływ drobin przez ścianki, przepływ nazywamy *burzliwym* lub *turbulentnym*. W przypadku przepływu burzliwego prędkości zmieniają się w sposób nieregularny i zależą od czasu.

W przepływie laminarnym istnieje wymiana drobin przez ścianki walców, spowodowana ruchem cieplnym i działająca na rzecz wyrównania prędkości drobin między sąsiadującymi walcami. Działanie to opisujemy ilościowo siłą *tarcia wewnętrznego* F_t proporcjonalną do powierzchni walców S oraz do gradientu prędkości $\frac{dy}{dz}$ (definicja gradientu, patrz S1, § 18)

$$F_t = \eta S \frac{dv(z)}{dz}. \tag{9.1}$$



9.1. Rozkład prędkości przepływu w rurce.

Współczynnik proporcjonalności η nazywamy *współczynnikiem lepkości*. Różnica ciśnień $p_1 - p_2$ powoduje ruch płynu działając na cylinder o promieniu z siłą

$$F = \pi z^2 (p_1 - p_2). \tag{9.2}$$

W przypadku, gdy $F_t + F = 0$, wystąpi przepływ *stacjonarny*. Podstawiając (9.1) i (9.2) oraz $S = 2\pi z l$ do powyższego warunku, całkując i porządkując otrzymamy

$$v(z) = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} z^2.$$

Z uwagi na warunki brzegowe prędkość $v(z)$ musi być największa dla $z = 0$, a $v(r) = 0$ dla $z = r$. Stąd poprawna postać ostatniego wyrażenia jest następująca

$$v(z) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (r^2 - z^2). \tag{9.3}$$

Objętość cieczy przepływającej w czasie t przez rozważany walec wyraża się wzorem

$$\frac{dV}{t} = 2\pi z\, dz\, v(z).$$

Podstawiając na $v(z)$ wyrażenie (9.3) otrzymamy

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{4\eta l} \int_0^r (r^2 - z^2) 2z\, dz,$$

skąd

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi(p_1 - p_2) r^4}{8\eta l}. \tag{9.4}$$

Jest to *równanie Hagena–Poiseuille'a* mówiące, że prędkość przepływu laminarnego przez rurkę jest proporcjonalna do różnicy ciśnień i czwartej potęgi promienia rurki, a odwrotnie proporcjonalna do jej długości.

Często stosujemy pojęcie *prędkości średniej* $\bar{v}$ zdefiniowanej wzorem

$$\frac{V}{t} = \pi r^2 \bar{v}. \tag{9.5}$$

Porównując (9.4) i (9.5) otrzymamy wyrażenie na prędkość średnią

$$\bar{v} = \frac{(p_1 - p_2) r^2}{8 \eta l}. \tag{9.6}$$

Równanie Hagena–Poiseuille'a (9.4) stosuje się tylko do przepływu laminarnego w przypadku, gdy energia kinetyczna E_k jest mniejsza od pracy W poruszającej płyn

$$W > E_k. \tag{9.7}$$

Praca wykonana przez różnicę ciśnień $(p_1 - p_2)$ wynosi

$$W = \pi r^2 (p_1 - p_2) l, \tag{9.8}$$

a energia kinetyczna cząsteczek w cylindrze z rysunku 9.1 wyraża się wzorem

$$dE_k = \frac{1}{2} [v(z)]^2 dm.$$

Podstawiając na $dm = 2z\,dz\,l\varrho$ oraz wyrażenie (9.3) na $v(z)$ otrzymamy

$$dE_k = \left(\frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} \right)^2 (r^2 - z^2)^2 \pi \varrho l z\,dz.$$

Całkując powyższe wyrażenie w granicach od $z = 0$ do $z = r$, otrzymamy

$$E_k = \frac{\pi \varrho (p_1 - p_2)^2 r^6}{96 \eta^2 l}$$

lub po wprowadzeniu prędkości średniej z (9.6)

$$E_k = \pi r^2 (p_1 - p_2) \frac{\varrho \bar{v} r}{\eta} \frac{r}{12}. \tag{9.9}$$

Podstawiając wyrażenie

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho \bar{v} r}{\eta}, \tag{9.10}$$

zwane liczbą Reynoldsa do równania (9.9) otrzymamy

$$E_k = \pi r^2 (p_1 - p_2) \mathrm{Re} \frac{r}{12}. \tag{9.11}$$

Podstawiając (9.8) i (9.11) do nierówności (9.7) otrzymamy następujący warunek laminarności przepływu

$$l > \frac{\mathrm{Re}}{12} r = \frac{\varrho \bar{v} r}{\eta} \frac{r}{12}. \tag{9.12}$$

Tak więc ostatecznie charakter przepływu jest określony wartością *liczby Reynoldsa* Re zdefiniowanej wzorem (9.10). Z dokładnych pomiarów wynika, że przepływ lami-

narny zachodzi, gdy $\mathrm{Re} < 1160$. Jest to również warunkiem stosowalności równania Hagena–Poiseuille'a (9.4).

Drugim podstawowym prawem rządzącym przepływem jest równanie Bernoulliego (S1, § 87; H1, § 18.4; J, § 11.5), które mówi, że w dowolnym punkcie suma ciśnienia p, i tzw. „ciśnienia prędkości" $\frac{1}{2}\varrho v^2$ oraz ciśnienia hydrostatycznego ϱgh jest wielkością stałą

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho gh = \text{const}. \tag{9.13}$$

ϱ oznacza tu gęstość płynu, v — prędkość przepływu w danym punkcie, h — wysokość słupa płynu. Równanie Bernoulliego stosować możemy również tylko w przypadku, gdy spełniona jest nierówność (9.12).

9.1. PRĘDKOŚĆ PRZEPŁYWU

Cel: zbadanie rozkładu prędkości w strudze gazu, pomiar prędkości przepływu wody w rurce.
Przyrządy: dmuchawa (§ 3.10), manometr cieczowy (§ 3.8), sekundomierz (§ 3.5).
Zagadnienia: dynamika cieczy i gazów (§ 9.01; S1, § 86–92; H1, § 18.1–18.7).

Wprowadzenie

Na prawie Bernoulliego oparte są metody pomiaru prędkości przepływu za pomocą rurki Prandtla (rys. 9.2), dla której suma trzech składników występująca po lewej stronie równania (9.13) będzie taka sama w punkcie *1* jak i w punkcie *2*. Oznaczając wielkości dotyczące punktów *1* i *2* odpowiednimi wskaźnikami cyfrowymi oraz zaniedbując wyraz ϱgh, który przy poziomym ustawieniu rurki oraz jej małych rozmiarach można uważać za stały i niezależny od położenia, a więc taki sam w punkcie *1* jak i w punkcie *2*, równanie (9.13) zapisać możemy w postaci

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2.$$

Różnicę ciśnień $p_1 - p_2$ mierzymy manometrem cieczowym, dla którego $p_1 - p_2 = \varrho_c g \delta h$ (§ 3.8), a ponieważ $v_1 = 0$, ostatnie równanie przyjmie postać

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\varrho_c g}{\varrho}}\sqrt{\delta h}. \tag{9.14}$$

Równanie Bernoulliego można również zastosować do przypadku pokazanego na rys. 9.3. Zaniedbując wyraz określający ciśnienie hydrostatyczne dla punktów *1* i *2* otrzymamy

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2,$$

skąd

$$\varrho_c g \delta h = \frac{1}{2}\varrho(v_1^2 - v_2^2), \tag{9.15}$$

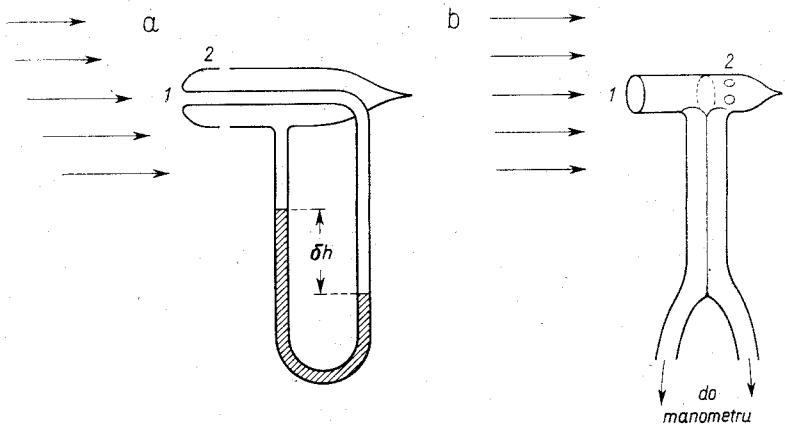
gdzie ϱ_c oznacza gęstość cieczy manometrycznej, a ϱ — gęstość płynu przepływającego.

W przypadku cieczy możemy zmierzyć objętość V wypływającej cieczy w czasie t i znając przekroje obliczyć średnie prędkości przepływu w przekroju *1* i *2*.

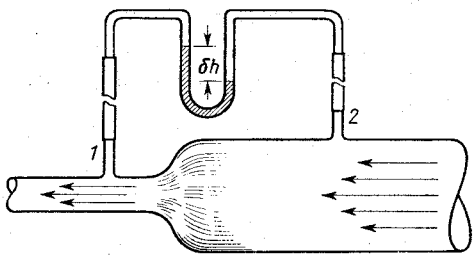
$$v_i = \frac{l_i}{t},$$

gdzie l_i oznacza średnią drogę cieczy w czasie t. Ponieważ $l_i = \frac{V}{S_i}$, gdzie $S_i = \pi r_i^2$ oznacza powierzchnię przekroju rurki, otrzymamy

$$v_i = \frac{V}{S_i t} = \frac{V}{\pi r_i^2 t}.$$



9.2. Rurka Prandtla.



9.3. Różnica ciśnień w częściach rurki o różnych przekrojach.

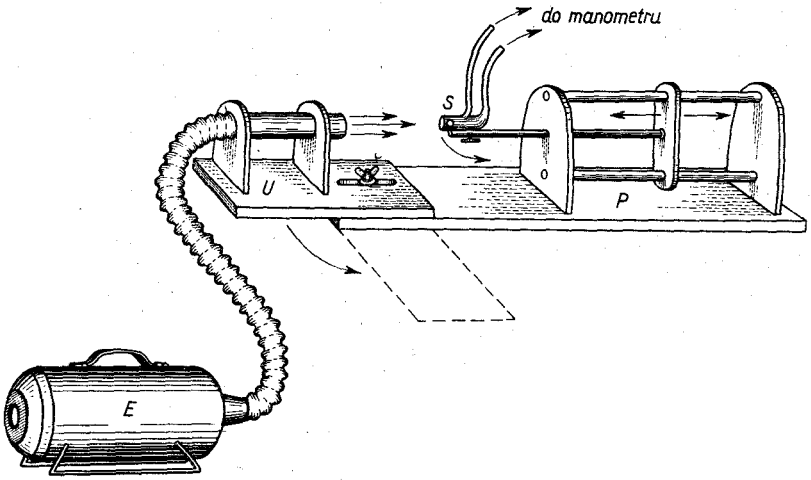
Podstawiając powyższe wyrażenie do wzoru (9.15) otrzymamy po prostych przekształceniach

$$\varrho_c = \varrho \frac{V^2(r_2^4 - r_1^4)}{2\pi^2 g t^2 r_1^4 r_2^4 \delta h}. \tag{9.16}$$

Aparatura

Aparatura do pomiaru przepływu powietrza (rys. 9.4) składa się z odkurzacza elektrycznego E oraz urządzenia P pozwalającego na przesuwanie sondy S w dowolne położenie wzdłuż strumienia. Obracając część U, w której zamocowany jest wylot rury odkurzacza oraz sondę S o 90° zgodnie ze strzałkami, aparaturę możemy wykorzystać do pomiaru rozkładu prędkości w strumieniu. Na górnej prowadnicy M służącej

do wodzenia sondy znajduje się skala służąca do określania względnego położenia sondy. W doświadczeniu bada się również przepływ wody w rurce o zmiennym przekroju (rys. 9.2).



9.4. Aparatura do pomiaru prędkości przepływu.

Pomiary

1. Rozkład prędkości wzdłuż osi strumienia. Aparaturę ustawiamy w sposób pokazany na rysunku 9.4. Wylot dmuchawy U ustawiamy w takiej odległości, by sondę S dało się przesunąć do lewego skrajnego położenia. Następnie włączamy odkurzacz i odczytujemy różnicę wskazań w ramionach manometru dla 10–15 położeń sondy.

2. Rozkład prędkości w kierunku prostopadłym do osi strumienia. Ustawiamy sondę i dmuchawę U w kierunku prostopadłym do osi przesuwu sondy i wykonujemy analogiczne pomiary jak w części pierwszej, przesuwając sondę prostopadle do osi strumienia. Odczyty wykonujemy w odstępach 2–3 mm na odcinku l, dla którego $\delta h \neq 0$. Analogiczne pomiary wykonujemy dla trzech różnych odległości dmuchawy, np. 20, 30, 40 cm.

3. Wyznaczenie gęstości cieczy manometrycznej w oparciu o wzór (9.16). W tym celu mierzymy następujące nie zmieniające się wielkości: grubość zewnętrzną rurki w miejscu węższym $2r_1'$, grubość zewnętrzną rurki w miejscu szerszym $2r_2'$, grubość szkła d (rys. 9.3) Włączamy wodę i regulujemy przepływ tak, by wypełniła cały przekrój rury w obydwu jej częściach. Mierzymy sekundomierzem czas t wypływu objętości V. Podstawiamy dużą zlewkę pod strumień wypływającej wody włączając równocześnie sekundomierz. Wyłączamy go w chwili, gdy częściowo wypełnione wodą naczynie wysuwamy spod strumienia. Ilość wody mierzymy za pomocą cylindra miarowego. Bezpośrednio po pomiarze objętości odczytujemy położenie słupków cieczy w manometrze. Pomiary powtarzamy przy innej prędkości przepływu wody.

Obliczenia

Dla pomiarów wykonanych z powietrzem obliczamy prędkości według wzoru (9.14). Wykonujemy dwa wykresy: zależności prędkości przepływu wzdłuż strumienia od odległości od wylotu dmuchawy oraz zależności prędkości przepływu od położenia

liczonego prostopadle do osi strumienia. W ostatnim przypadku wszystkie trzy krzywe nanosimy na jednym arkuszu. Korzystając z pomiarów wykonanych z wodą obliczamy gęstość cieczy manometrycznej z wzoru (9.16). Zgodność uzyskanego wyniku z danymi z tablic jest potwierdzeniem słuszności równania Bernoulliego, z którego wyszliśmy. Błędy obliczamy dla jednej wybranej prędkości powietrza z każdej serii wykonanych pomiarów oraz dla gęstości cieczy manometrycznej.

9.2. LICZBA REYNOLDSA

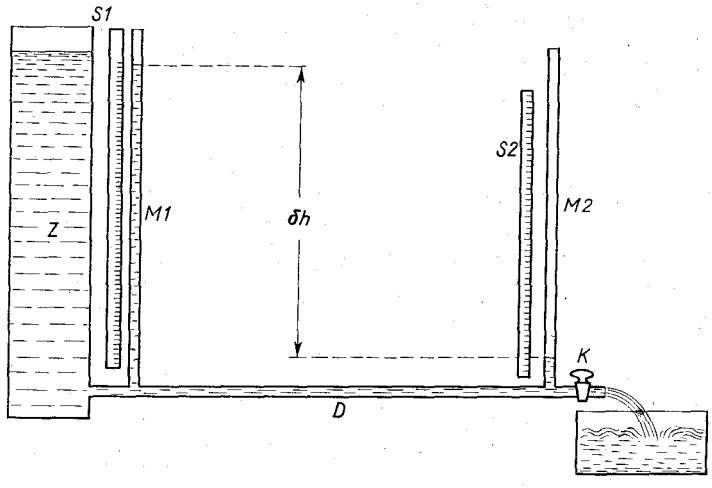
Cel: określenie prędkości rozgraniczającej przepływ laminarny i burzliwy, obliczenie promienia rury i liczby Reynoldsa.

Przyrządy: cylinder miarowy.

Zagadnienia: dynamika płynów (§ 9.01; S1, § 86–92; H1, § 18.1–18.7).

Aparatura

Aparatura (rys. 9.5) składa się ze zbiornika Z o wysokości ok. 1 m, rurki D o długości ok. 2 m ($2r = 3{,}5$ mm), dwóch rurek $M1$ i $M2$ zaopatrzonych w podziałki $S1$ i $S2$ służących do pomiaru różnicy ciśnień $(p_1 - p_2)$ oraz zaworu kurkowego K. Różnicy



9.5. Aparatura do wyznaczania liczby Reynoldsa.

ciśnień $(p_1 - p_2)$ nie mierzymy wprost, lecz obliczamy ją z różnicy wysokości δh dwóch słupków cieczy w rurkach $M1$ i $M2$, skąd mamy

$$p_1 - p_2 = \varrho g \delta h.$$

Podstawiając powyższy związek do równania Hagena–Poiseuille'a (9.4) otrzymamy

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi \varrho g r^4}{8 \eta l} \delta h. \tag{9.17}$$

Pomiary

Doświadczenie rozpoczynamy od napełnienia zbiornika Z. Następnie podstawiamy pod koniec rurki D cylinder miarowy o objętości ponad 1 l, otwieramy kurek K włączając równocześnie sekundomierz. W czasie wypływu cieczy odczytujemy na podziałkach $S1$ i $S2$ wysokości słupków cieczy w rurkach $M1$ i $M2$. Po wypłynięciu ok. 1 l cieczy zamykamy K wyłączając równocześnie sekundomierz. Pomiary powtarzamy do chwili, gdy poziom cieczy w zbiorniku *2* zmaleje do ok. 100 mm.

Obliczenia

Sporządzamy wykres zależności $\frac{V}{t}(\delta h)$. Określamy nachylenie prostoliniowego odcinka linii przedstawionej na wykresie. Nachylenie to, zgodnie z równaniem (9.17) wyraża się wzorem

$$a = \frac{\pi \varrho g r^4}{8 \eta l},$$

z którego obliczyć możemy promień r rurki D. Część wykresu odbiegającą od prostoliniowości określa ruch burzliwy. Określamy wartość δh_g, dla której kończy się przepływ laminarny i dla tego właśnie punktu obliczamy liczbę Reynoldsa z wzoru, który otrzymamy podstawiając do równania (9.10) wartość z równania (9.5)

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho}{\pi \eta r} \frac{V}{t}.$$

Liczby Reynoldsa obliczamy ponadto dla dwóch innych wartości ciśnienia, z których każdy leży po innej stronie δh_g. Sprawdzamy czy dla odcinka prostoliniowego spełniona jest nierówność (9.12). Obliczamy błędy $\Delta \mathrm{Re}$ otrzymanych wartości liczby Reynoldsa.

9.3. DOŚWIADCZENIE STOKESA

Cel: wyznaczanie dynamicznego współczynnika lepkości cieczy bardzo lepkiej.
Przyrządy: sekundomierz (§ 3.5), waga analityczna (§ 3.4).
Zagadnienia: przepływ gazów i cieczy (§ 9.01; S1, § 86–92 H1, § 18.1–18.7).

Wprowadzenie

Ciecz zwilżająca pokrywa cienką warstwą ciała w niej zanurzone np. kulkę metalową. W przypadku, gdy kulka jest w ruchu, tarcie występuje wewnątrz samego płynu pomiędzy jego warstwami (rys. 9.6) między kulką i płynem. Kulka unosi ze sobą warstwę przylegającego płynu, a ten na skutek zjawiska tarcia wewnętrznego wprawia w ruch następne warstwy. Z omawianych powyżej powodów siła oporu F_T jaki płyn stawia poruszającej kulce zależy od współczynnika lepkości płynu i wyraża się wzorem Stokesa

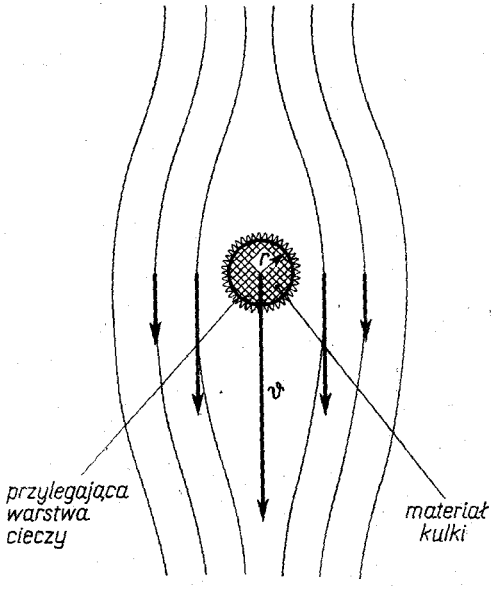
$$F_T = 6\pi \eta r v. \tag{9.18}$$

Jeżeli kulka wykonana jest z materiału o gęstości ϱ większej od gęstości ϱ_p płynu, to ruch może następować na skutek działania siły ciężkości $F_G = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho_k g$.

Ponieważ jednak kulka spada, w ośrodku płynnym działa na nią dodatkowo siła wyporu F_w, która zgodnie z prawem Archimedesa wyraża się wzorem $F_w = -\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_p g$. Sumując wszystkie siły działające na kulkę, otrzymamy

$$F = F_T + F_g + F_w,$$

$$F = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_k g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_p g - 6\pi\eta r v. \tag{9.19}$$



9.6. Ruch kulki w płynie.

Trzeci wyraz prawej strony ostatniego wyrażenia zależy od prędkości i istnieje taka prędkość v_0, przy której siła F jest równa zeru, co oznacza, że kulka porusza się ruchem jednostajnym (I zasada dynamiki). Jeżeli prędkość jest różna od $v_0 (v \neq v_0)$, to kulka porusza się ruchem przyspieszonym i jej prędkość wzrasta lub maleje do chwili osiągnięcia wartości v_0. Równanie (9.18) stosuje się ściśle tylko w przypadku, gdy kulka porusza się w ośrodku o nieograniczonej szerokości i gdy mamy do czynienia z ruchem laminarnym. W przypadku, gdy kulka porusza się w rurze o promieniu r_R, wypełnionej cieczą, wtedy równanie Stokesa (9.18) przyjmuje postać

$$F_T = -6\pi\eta r v \left(1 - \frac{r}{r_R}\right)^{-n}.$$

Uwzględniając tę poprawkę w równaniu (9.19) i zakładając $F = 0$ oraz $v = l/t$, gdzie t — czas spadania kulki, otrzymamy

$$\eta = \frac{2(\varrho_k - \varrho_p) g r^2 t}{9l} \left(1 - \frac{r}{r_R}\right)^n, \tag{9.20}$$

n należy wyznaczyć doświadczalnie (patrz obliczenia).

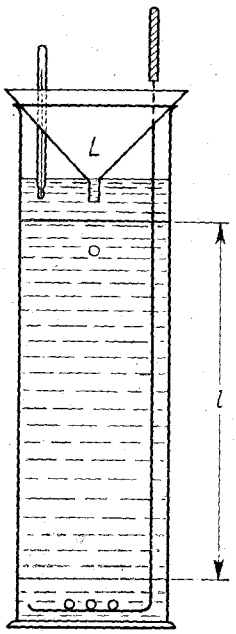
Założenie laminarności ruchu jest spełnione, gdy liczba Reynoldsa (9.10), która w tym przypadku wyraża się wzorem

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho_p v r}{\eta}$$

est nieduża.

Aparatura

Aparatura (rys. 9.7) składa się z cylindra szklanego o wysokości ok. 50 cm i promieniu $r_R > 5$ cm. Cylinder wypełniamy badaną cieczą. Kulki powinny spadać mniej więcej wzdłuż osi cylindra; można je odpowiednio skierować za pomocą lejka L. Omawiana metoda pomiaru nadaje się wyłącznie do cieczy o dużym współczynniku lepkości. Dla innych cieczy czas spadania kulki jest niemierzalnie mały. Wadą metody jest konieczność stosowania dużej ilości cieczy.



9.7. Aparatura Stokesa.

Pomiary

Pomiary wykonujemy dla kilku kulek, spośród których dwie z tego samego materiału powinny posiadać różne średnice. Na początku kulki dokładnie oczyszczamy z resztek oleju, ważymy na wadze analitycznej i mierzymy wielokrotnie ich średnicę za pomocą mikromierza (po każdym pomiarze kulkę nieco obracamy). Mierzymy wielokrotnie czas spadania każdej kulki na drodze l. Początek drogi l powinien znajdować się w odległości kilku centymetrów od powierzchni cieczy, gdyż w pierwszej chwili kulka nie porusza się jeszcze ruchem jednostajnym. Koniec drogi obieramy w pobliżu dna na-

czynia. Gdy dysponujemy dużą ilością takich samych kulek, to możemy wziąć po dziesięć z poszczególnych rodzajów, zmierzyć jednokrotnie średnicę i czas spadania każdej z nich. Zważyć możemy je wtedy łącznie.

Obliczenia

Korzystając z wyników uzyskanych dla małej i dużej kulki, wykonanych z tego samego materiału określamy wykładnik potęgowy n w równaniu (9.20). Wychodząc z założenia, że pomiary wykonane dla obydwu kulek muszą dać taką samą wartość współczynnika lepkości, otrzymamy

$$r_1^2 t_1 \left(1 - \frac{r_1}{r_R}\right)^n = r_2^2 t_2 \left(1 - \frac{r_2}{r_R}\right)^n,$$

skąd po prostych przekształceniach

$$n = \log\left(\frac{r_2^2 t_2}{r_1^2 t_1}\right) : \log\left(\frac{r_R - r_1}{r_R - r_2}\right).$$

Po określeniu n obliczamy η z równania (9.20) dla każdej kulki lub dla każdego rodzaju kulek. Jako wynik ostateczny przyjmujemy wartość średnią $\overline{\eta}$. Obliczamy błąd gęstości $\Delta\varrho_k$ oraz współczynnika lepkości $\Delta\eta$ dla tej samej kulki (lub tego rodzaju kulek), której czas spadania jest średnio długi. Uzyskaną z tych obliczeń wartość $\Delta\eta$ przyjmujemy również dla $\overline{\eta}$.

9.4. WISKOZYMETR HÖPPLERA

Cel: wyznaczenie przebiegu zależności współczynnika lepkości wody od temperatury w zakresie od temperatury pokojowej do 95°C.

Przyrządy: wiskozymetr i termostat Höpplera (§ 3.7), sekundomierz (§ 3.5), termometr kontaktowy (§ 3.6).

Zagadnienia: dynamika gazów i cieczy (§ 9.01; S1, § 86–92; H1, § 18.1–18.7), również przeczytać wprowadzenie do doświadczenia 9.3.

Wprowadzenie

Spadek kulki w płynie ulega znacznemu zwolnieniu w rurce o średnicy nieznacznie przekraczającej średnicę kulki. Wtedy rurkę musimy ustawić nieco ukośnie, gdyż przy ustawieniu pionowym ruch kulki nie jest jednostajny. Przy ustawieniu skośnym kulka toczy się po ściance rurki. Do omawianego przypadku stosuje się również wzór (9.20) zapisany w postaci

$$\eta = K(\varrho_k - \varrho_p)t, \tag{9.21}$$

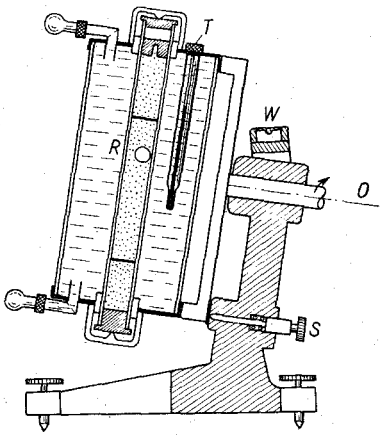
gdzie K jest stałą przyrządu, którą wyznaczamy z pomiaru wykonanego dla płynu o znanym współczynniku lepkości. Współczynnik lepkości zależy w dużym stopniu od temperatury. Dla cieczy zależnością tą rządzi prawo

$$\eta(T) = A\exp\left(\frac{B}{T}\right), \tag{9.22}$$

gdzie T — temperatura w skali Kelvina, a A i B — stałe charakteryzujące ciecz.

Aparatura

Schematycznie budowę wiskozymetru pokazano na rysunku 9.8. Rurka R, w której mierzymy czas spadku kulki, otoczona jest płaszczem wodnym. Temperaturę wody regulujemy ultratermostatem. Jeden z korków zamykających rurkę (na rys. 9.8 górny) jest wydrążony i zaopatrzony w wentyl. W temperaturze pokojowej wydrążenie to pozostaje puste. W miarę podgrzewania objętość cieczy wzrośnie i wydrążenie wypełnia się, a ciśnienie wzrasta tylko nieznacznie. Pomiar czasu opadania kulki można powtarzać



9.8. Wiskozymetr Höpplera.

wielokrotnie. Wystarczy każdorazowo obrócić przyrząd o kąt π wokół osi O. Śruba S służy do unieruchomienia rurki. Poziomica W służy do kontroli ustawienia przyrządu. Przyrząd zaopatrzony jest w kilka kulek, przeznaczonych do pomiaru cieczy o różnej lepkości oraz jedną przeznaczoną do pomiaru lepkości gazu.

Pomiary

Poprawne wyniki uzyskuje się tylko wtedy, gdy przyrząd jest bardzo czysty. Stąd przed pomiarem należy wnętrze rurki R oraz kulkę dokładnie oczyścić i przemyć alkoholem lub eterem. Ciecz przeznaczoną do pomiaru należy wygotować, by w ten sposób pozbawić ją resztek gazów, zakłócających pomiar. Przed rozpoczęciem pomiarów ciecz badaną wygotowujemy, ochładzamy do temperatury pokojowej, po czym wypełniamy rurkę wiskozymetru. Usunąć musimy pęcherzyki powietrza, które pozostały na ściankach. Wkładamy kulkę i zamykamy rurkę korkiem zwracając uwagę na to, by wydrążenie w korku nie było całkowicie wypełnione cieczą. Nastawiamy odpowiednią temperaturę na termometrze kontaktowym i włączamy ultratermostat. Czas spadku kulki mierzymy sekundomierzem, ponieważ czas ustalania się temperatury jest dość długi. Czas spadku kulki mierzymy do chwili, gdy uzyskamy przynajmniej trzy powtarzające się wyniki, dokładną wartość temperatury odczytujemy na termometrze T znajdującym się w wiskozymetrze. Pomiary wykonujemy dla temperatury od pokojowej do 95°C w odstępach 10°C. Jako błąd pomiaru przyjmujemy błąd termometru ΔT.

Obliczenia

Korzystając z wzoru (9.21) i odczytując z tablic wartość η dla temperatury 20°C, obliczamy stałą K (ϱ_k przyjmujemy z tablic). Dla innych temperatur obliczamy współczynnik lepkości mając wartość stałej K. Do wzoru (9.21) podstawiamy na t wartość średnią z końcowych pomiarów dających powtarzalne wyniki. Obliczamy błędy stałej K i współczynnika lepkości; ten ostatni dla 2 punktów pomiarowych.

Wykreślamy na papierze półlogarytmicznym zależność $\eta\left(\frac{1}{T}\right)$ lub na papierze milimetrowym zależność $\log \eta$ od $\frac{1}{T}$. Korzystając z powyższego wykresu obliczamy stałe A i B z równania (9.22). W tym celu zauważymy, że równanie (9.22) można napisać w postaci

$$\log\eta = B\log e \cdot \frac{1}{T} + \log A,$$

która przypomina równanie prostej

$$y = ax + b.$$

Zatem nachylenie prostej ($a = B\log e$) pozwoli wyznaczyć stałą B, a jej przecięcie z osią $\log \eta$ ($b = \log A$) pozwoli obliczyć stałą A. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia nachylenia prostej i punktu przecięcia z osią $\log \eta$. Obliczamy również błędy maksymalne wielkości A i B.

9.5. WISKOZYMETRY KAPILARNE

Cel: badanie zależności współczynnika lepkości od temperatury.

Przyrządy: dowolny wiskozymetr kapilarny, termometr kontaktowy (§ 3.6), ultratermostat (§ 3.7), sekundomierz (§ 3.5).

Zagadnienia: dynamika płynów (§ 9.01; S1, § 86–92; H1, § 18.1–18.7); przeczytać również punkt o aparaturze z § 9.2 oraz wprowadzenie z § 9.4.

Wprowadzenie

Zdefiniowany równaniem (9.1) współczynnik lepkości wyznaczyć można za pomocą lepkościomierzy kapilarnych, których działanie oparte jest na przepływie cieczy przez kapilary (rurki włoskowate o średnicy mniejszej od 1 mm). Przepływem cieczy przez kapilary rządzi prawo Hagena–Poiseuille'a (wzór 9.9). W omawianym przypadku najwygodniej przyjąć je w postaci przedstawionej wzorem (9.17)

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi g r^4 \delta h}{8l} \frac{\varrho}{\eta}. \tag{9.23}$$

Badając przepływ tych samych objętości V różnych cieczy przez tę samą kapilarę (to samo r, l i δh) stwierdzimy, że czasy przepływu są różne dla różnych cieczy. Jeżeli dla badanej cieczy przyjmiemy oznaczenia z wzoru (9.23), to dla cieczy wzorcowej (wody) napisać możemy

$$\frac{V}{t_w} = \frac{\pi g r^4 \delta h}{8l} \frac{\varrho_w}{\eta_w}. \tag{9.24}$$

Dzieląc stronami równania (9.23) i (9.24) otrzymamy

$$\frac{\eta}{\eta_w} = \frac{\varrho t}{\varrho_w t_w}. \tag{9.25}$$

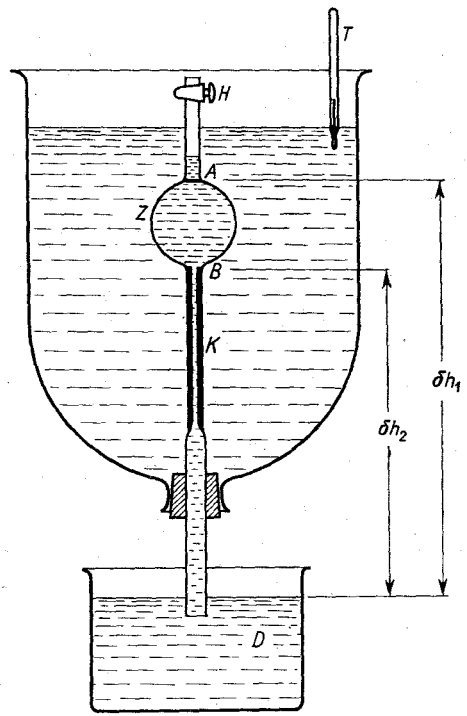
Współczynnik lepkości zależy bardzo silnie od temperatury. Stąd przy pomiarach należy bardzo dokładnie kontrolować stałość temperatury. Można również badać zależność współczynnika lepkości od temperatury względem jego wartości dla ściśle określonej temperatury np. 20°C. Wtedy wzór (9.25) przyjmie postać

$$\eta\tau = \eta_{20}\frac{t\tau}{t_{20}}. \tag{9.26}$$

W ostatnim wzorze założyliśmy, że $\varrho_\vartheta = \varrho_{20}$, co jest spełnione z wystarczającą dokładnością.

Aparatura

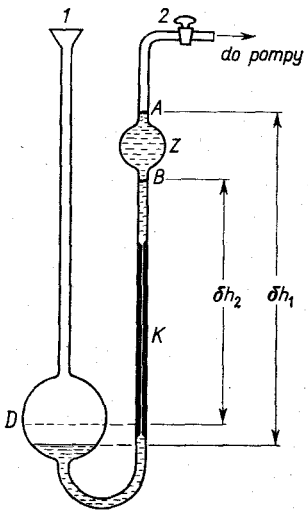
Pierwowzorem dla wszystkich wiskozymetrów jest *wiskozymetr Arrheniusa* pokazany na rysunku 9.9. Badana ciecz wypływa ze zbiornika Z przez kapilarę K do zbiornika D. Mierzy się czas t, w ciągu którego przepłynie ciecz zawarta między znaczkami A i B.



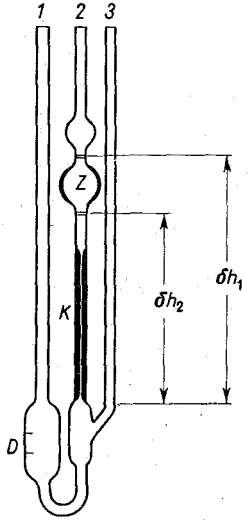
9.9. Wiskozymetr Arrheniusa.

Zamykając kurkiem H zbiornik Z uniemożliwiamy wypływ cieczy. Celem utrzymania stałej temperatury wiskozymetr umieszcza się w kąpieli wodnej, której temperaturę mierzy się termometrem T. Jak łatwo zauważyć, w czasie wypływu cieczy ze zbiornika Z zmienia się wysokość słupka cieczy od δh_1 do δh_2. Zmiany te zaniedbaliśmy w rów-

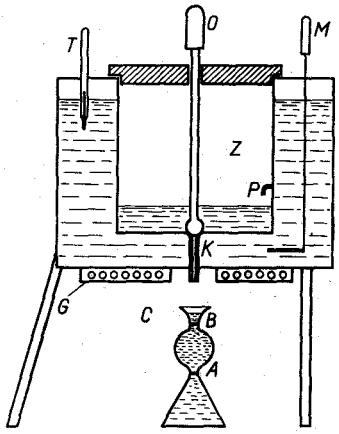
naniach (9.25) i (9.26) wprowadzając tym samym do równań pewną niedokładność. Zbiornik Z jest tak zbudowany, by różnicę pomiędzy δh_1 i δh_2 zmniejszyć do minimum. Nieco uproszczoną postać ma *wiskozymetr Ostwalda* (rys. 9.10). Wymaga on stosunkowo małej ilości cieczy, którą można wielokrotnie przepompowywać ze zbiornika D do zbiornika Z i wielokrotnie powtarzać pomiar czasu. Zbiornik D jest zazwyczaj



9.10 Wiskozymetr Ostwalda.



9.11. Wiskozymetr Ubbelohde.



9.12. Wiskozymetr Englera.

znacznie większy od zbiornika Z celem zmniejszenia różnic wysokości słupka δh. Dalszym ulepszeniem wiskozymetru Ostwalda jest *wiskozymetr Ubbelohde* (rys. 9.11), w którym wprowadzono dodatkową rurkę *3* zapewniającą stałe ciśnienie (atmosferyczne) na dolnym końcu kapilary. Przy przepompowaniu cieczy, górną część rurki *3* należy zamknąć. Do omawianej grupy wiskozymetrów kapilarnych zaliczamy również *wisko-*

zymetr Englera, którego schemat pokazano na rysunku 9.12. Zbiornik Z znajduje się tu w kąpieli wodnej, której temperaturę można zmieniać, podgrzewając ją grzałką G. Kapilara K jest stosunkowo krótka. Ilość wypływającej cieczy mierzy się cylindrem miarowym C lub specjalnym pojemnikiem, na którym znajdują się znaczki A i B odpowiadające znaczkom z rysunków 9.9, 9.10 i 9.11. Początkowy poziom cieczy w zbiorniku Z musi sięgać do kolca P. Ponadto wiskozymetr zaopatrzony jest w mieszadło M, termometr T oraz zatyczkę O służącą do zamknięcia wlotu kapilary.

Pomiary

Niezależnie od rodzaju stosowanego wiskozymetru pomiary wykonujemy w taki sam sposób. W przypadku, gdy stosujemy wiskozymetr Ostwalda lub Ubbelohde musimy umieścić go w kąpieli wodnej, a jej temperaturę regulować za pomocą ultratermostatu Höpplera (lub w inny sposób). Początkowo termostat lub płaszcz wodny napełniamy wodą o temperaturze pokojowej, a wiskozymetr badaną cieczą, np. wodą destylowaną. Następnie mierzymy czas przepływu wody przez kapilarę. W tym celu wodę przepompowujemy do zbiornika Z w ten sposób, by powierzchnia wody znajdowała się powyżej znaczka A. Następnie otwierając kurek H lub odłączając pompkę (zależnie od typu wiskozymetru) pozwalamy wodzie przepływać i sekundomierzem mierzymy czas, w ciągu którego powierzchnia wody przesunie się od znaczka A do znaczka B. W przypadku wiskozymetru Englera otwieramy zatyczkę O. Pomiar powtarzamy trzykrotnie. Następnie podwyższamy temperaturę o 5°C i pomiary powtarzamy. Postępując w ten sposób dalej mierzymy czas przepływu wody od temperatury pokojowej do 95°C. Wyniki ujmujemy w tabelkę zawierającą następujące rubryki: temperatura, czas przepływu (trzy rubryki), czas średni oraz współczynnik lepkości. Notujemy dokładności stosowanych przyrządów.

Obliczenia

Korzystając z wzoru (9.26) obliczamy dla każdej temperatury współczynnik lepkości η_ϑ względem współczynnika lepkości dla temperatury 20°C. Dla tej temperatury współczynnik lepkości przyjmujemy z tablic. Dla trzech temperatur obliczamy błąd $\Delta\eta_\vartheta$. Wykreślamy zależność współczynnika lepkości od temperatury.

9.6. LEPKOŚĆ POWIETRZA

Cel: wyznaczenie bezwzględnego współczynnika lepkości powietrza.
Przyrządy: kompresor (§ 3.10), sekundomierz (§ 3.5), manometr rtęciowy (§ 3.8), zawory (§ 3.11).
Zagadnienia: dynamika płynu (§ 9.01; S1, § 86, 92; H1, § 18.1–18.7), prawa gazowe (S2, § 3,9).

Wprowadzenie

Równanie Hagena–Poiseuille'a (9.4) dla bardzo krótkiego odcinka rurki o długości dx zapisać można w postaci

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx}, \tag{9.27}$$

gdzie dp oznacza spadek ciśnienia na odcinku dx. W przypadku gazów uwzględnić musimy ograniczenia wynikające z dużej ściśliwości. Zgodnie z prawem Clapeyrona objętość V wyrazić możemy wzorem

$$V = \frac{nRT}{p}. \tag{9.28}$$

Po podstawieniu powyższego wyrażenia do równania (9.27) i wykonaniu prostych przekształceń algebraicznych otrzymamy zależność

$$pdp = \frac{8\eta nRT}{\pi r^4 t}\,dx,$$

która po scałkowaniu na całą długość rurki (od $x = 0$ do $x = l$) i wykonaniu prostych przekształceń przyjmuje postać

$$\frac{nRT}{p_0} = \frac{\pi r^4 (p_0^2 - p_z^2)}{16\eta l p_0}\,t, \tag{9.29}$$

gdzie p_z i p_0 oznaczają ciśnienia na początku rurki i przy jej końcu. Zakładamy, że gaz wypływa swobodnie z rurki do pomieszczenia, w którym panuje ciśnienie atmosferyczne p_0. W tych warunkach gaz zajmuje objętość $V_0 = \frac{nRT}{p_0}$ (por. równanie 9.28), a równanie (9.29) przyjmuje postać

$$V_0 = -\frac{\pi r^4 (p_z^2 - p_0^2)}{16\eta l p_0}\,t.$$

Po zróżniczkowaniu względem czasu równanie przybiera postać

$$\frac{dV_0}{dt} = -\frac{\pi r^4 (p_z^2 - p_0^2)}{16\eta l p_0}. \tag{9.30}$$

Na skutek wypływu gazu ciśnienie w zbiorniku zmienia się. Zakładając, że wypływ odbywa się izotermicznie, zgodnie z prawem Boyle'a–Mariotte'a ($p_0 V_0 = p_z V_z$) możemy napisać

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{V_z}{p_0}\frac{dp_z}{dt}.$$

Porównując ostatnie dwa równania otrzymamy

$$-\frac{\pi r^4 (p_z^2 - p_0^2)}{16\eta l} = V_z \frac{dp_z}{dt}.$$

Całkujemy powyższe wyrażenie uwzględniając, że ciśnienie w zbiorniku zmaleje od wartości p_1 do p_2, wtedy

$$-\frac{\pi r^4}{16\eta l V_z}\int_0^t dt = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp_z}{p_z^2 - p_0^2}$$

i otrzymamy

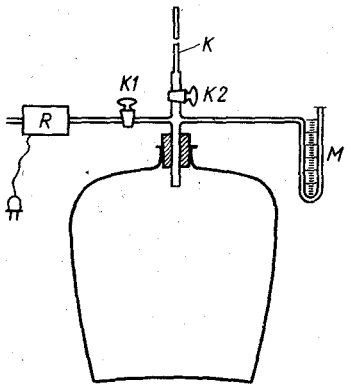
$$-\frac{\pi r^4}{16\eta l V_z}\,t = \frac{1}{2p_0}\ln\frac{p_z - p_0}{p_2 - p_0}\Bigg|_{p_1}^{p_2}.$$

Stąd współczynnik lepkości wyraża się wzorem

$$\eta = \frac{\pi r^4 p_0}{8 l V_z} \frac{t}{\ln \frac{p_1 - p_0}{p_1 + p_0} - \ln \frac{p_2 - p_0}{p_2 + p_0}}. \tag{9.31}$$

Aparatura

Aparatura (rys. 9.13) składa się z kompresora R pompującego powietrze do zbiornika Z o pojemności ok. 50 litrów. Ciśnienie w zbiorniku mierzymy za pomocą manometru rtęciowego (mierzącego ciśnienie do 100 mm Hg). Powietrze wypływa przez rurkę K o długości ok. 1 m i średnicy 1,5 mm. Zawory K_1 i K_2 służą do zamykania poszczególnych wylotów.



9.13. Aparatura do pomiaru lepkości powietrza.

Pomiary

Pomiary sprowadza się do pomiaru czasu, w ciągu którego ciśnienie w zbiorniku Z spada od wartości p_1 do wartości p_2. Ciśnienia odczytujemy na manometrze, a czas mierzymy sekundomierzem. Wszystkie dane notujemy w tabeli. Celem wykonania pomiaru włączamy kompresor R, otwieramy zawór K_1 i czekamy do chwili, gdy ciśnienie wzrośnie do ok. 100 mm Hg. Następnie zamykamy zawór K_1 i otwieramy K_2. Włączamy sekundomierz w chwili, gdy słupek rtęci mija kreskę oznaczającą ciśnienie p_1, a wyłączamy przy p_2. Po czym zamykamy zawór K_2 i zapisujemy wyniki. Dyskutujemy wpływ poszczególnych wielkości prostych na wynik końcowy i na tej podstawie określamy liczbę pomiarów, które wykonać musimy celem uzyskania najlepszego wyniku. Takie same pomiary wykonujemy przy innych wartościach p_1 i p_2.

Obliczenia

Dla każdej serii pomiarów obliczamy średni czas wypływu, a następnie współczynnik lepkości z wzoru (9.31). Jako wynik końcowy przyjmujemy średnią arytmetyczną uzyskanych wartości. Dla jednej z serii obliczamy błąd i odchylenie standardowe średniej. Przyjmujemy, że wynik końcowy obarczony jest takim samym błędem jak wynik obliczanej serii.

DRGANIA I AKUSTYKA

10. DRGANIA BRYŁ

10.01. DRGANIA HARMONICZNE PROSTE (S1, § 43 i 44; K1, rozdz. 7)

Drganiami harmonicznymi prostymi nazywamy drgania odbywające się pod wpływem siły F proporcjonalnej do wychylenia x i przeciwnie skierowanej

$$F = -kx. \tag{10.1a}$$

Współczynnik proporcjonalności k o wymiarze $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ nazywamy *siłą kierującą*. W przypadku drgań torsyjnych bryły sztywnej we wzorze powyższym siłę F należy zastąpić momentem siły M, a wychylenie x kątem skręcenia φ

$$M = -D\varphi. \tag{10.1}$$

Współczynnik proporcjonalności D o wymiarze $\mathrm{N \cdot m \cdot rad^{-1}}$ nazywamy *momentem kierującym*. W dalszym ciągu zajmiemy się wyłącznie drganiami torsyjnymi bryły sztywnej. Przytaczać będziemy również wzory dla punktu, w których wychylenie będziemy oznaczać przez x. Korzystając z równania ruchu obrotowego bryły sztywnej, moment siły możemy wyrazić wzorem

$$M = \mathcal{J}\alpha,$$

gdzie przez $\mathcal{J}$ oznaczono moment bezwładności, a przez α przyspieszenie kątowe, które definiujemy jako drugą pochodną kąta względem czasu

$$\alpha = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Podstawiając ostatnie dwa wyrażenia do równania (10.1), otrzymamy

$$\mathcal{J}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -D\varphi \tag{10.2}$$

i analogiczne równanie dla drgającego punktu o masie m,

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -kx. \tag{10.2a}$$

Dzielimy równanie (10.2) przez $\mathcal{J}$ i wprowadzamy oznaczenie

$$\omega_0^2 = D/\mathcal{J}, \tag{10.3}$$

$$\omega_0^2 = k/m, \tag{10.3a}$$

(Wielkość ω_0 nazywa się *częstością kołową drgań*. Uzasadnienie tej nazwy znajdzie czytelnik w dalszych rozważaniach.), otrzymując

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \omega_0^2\varphi = 0 \tag{10.4}$$

i

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_0^2 x = 0. \tag{10.4a}$$

Równanie powyższe nazywa się *równaniem ruchu harmonicznego* prostego. Jest ono równaniem różniczkowym drugiego rzędu względem zmiennej φ. Nietrudno sprawdzić, że rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \delta), \tag{10.5}$$

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \delta). \tag{10.5a}$$

Wielkość δ nazywamy *fazą początkową* lub przesunięciem fazowym, a wielkość φ_0 — *amplitudą*.

Z własności funkcji trygonometrycznych wynika, że również funkcja

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \vartheta) \tag{10.6}$$

spełnia równanie (10.4); wtedy $\vartheta = \delta - \frac{\pi}{2}$. Rozwiązaniem równania (10.4) jest również kombinacja liniowa obydwu funkcji trygonometrycznych

$$\varphi = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t. \tag{10.6a}$$

Zależnie od potrzeby stosować będziemy jedną z wymienionych postaci rozwiązania. W obecnym paragrafie zastosujemy rozwiązanie w postaci równania (10.5). Zatem pod wpływem momentu siły M określonego równaniem (10.1) kąt φ wychylenia z położenia równowagi zmienia się periodycznie w taki sposób jak funkcja cosinus (rys. 10.1). W praktyce oznacza to, że bryła oscyluje wokół położenia równowagi z częstością kołową ω_0. Jeżeli przyjmujemy, że w chwili początkowej, gdy $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, wtedy przesunięcie fazowe $\delta = 0$ (rys. 10.1b) i rozwiązanie równania przyjmie postać

$$\varphi = \varphi_0 \cos\omega_0 t \tag{10.7}$$

i

$$x = x_0 \cos\omega_0 t. \tag{10.7a}$$

Funkcja cosinus jest funkcją periodyczną i jej wartości powtarzają się co 2π. Korzystając z powyższej własności i równania (10.7) wyznaczyć możemy *okres* T, tzn. czas, po którym funkcja cosinus wraca do początkowej wartości

$$\cos\omega_0(t+T) = \cos(\omega_0 t + 2\pi),$$

skąd

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{10.8}$$

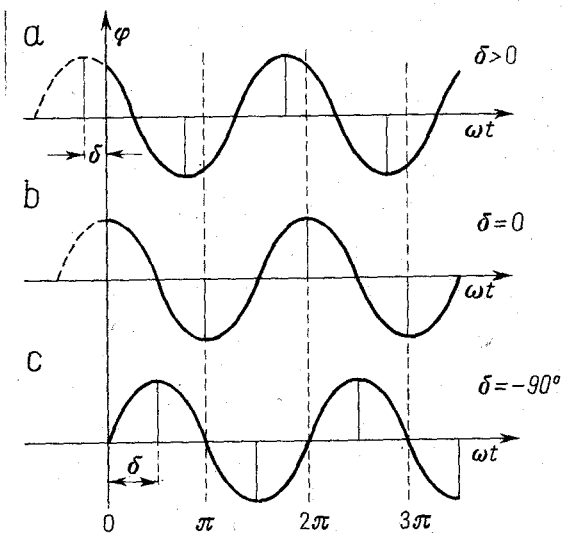
Podstawiając za ω_0 wartość z równania (10.3), otrzymamy

$$T = 2\pi\sqrt{J/D} \tag{10.9}$$

i

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}. \tag{10.9a}$$

Wzór powyższy posiada bardzo ważne znaczenie praktyczne, gdyż łączy on okres drgań bryły z jej momentem bezwładności i momentem kierującym. Przy praktycznym korzystaniu z powyższego wzoru należy pamiętać, że wszystkie wielkości muszą być określone względem tej samej osi oscylacji.



10.1. Drgania harmoniczne proste.

10.02. DRGANIA TŁUMIONE (S1, § 46; K1, rozdz. 7)

Dotychczasowe rozważania dotyczyły ruchu nietłumionego, w którym energia drgań pozostawała stała. W praktyce na skutek tarcia, oporu powietrza itp. amplituda drgań powoli maleje. Zjawisko powyższe nazywamy *tłumieniem*. Równanie drgań tłumionych możemy otrzymać przez wprowadzenie do równania (10.1) momentu siły, odpowiedzialnego za tłumienie. Można wykazać, że dla niewielkich prędkości moment ten $-H\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ jest proporcjonalny do prędkości kątowej $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Współczynnik proporcjonalności H określający tłumienie nazywamy współczynnikiem tłumienia. Zatem równanie (10.1) ruchu tłumionego ma postać

$$M = -D\varphi - H\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{10.10}$$

i

$$F = -kx - h\frac{\partial x}{\partial t}. \tag{10.10a}$$

Podstawiając $M = \mathcal{J}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ i wprowadzając oznaczenie (10.3) oraz

$$2\beta = H/\mathcal{J} \quad \text{lub} \quad \tau = \mathcal{J}/H \tag{10.11}$$

i

$$2\beta = h/m \quad \text{lub} \quad \tau = m/h, \tag{10.11a}$$

gdzie β nazywamy *współczynnikiem tłumienia*, a τ — *czasem relaksacji*, otrzymamy

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \omega_0^2\varphi = 0 \tag{10.12}$$

i

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 x = 0. \tag{10.12a}$$

Są to *równania ruchu harmonicznego tłumionego* ogólnej matematycznej postaci równania różniczkowego drugiego stopnia o stałych współczynnikach.

Równanie (10.12) ma następujące rozwiązanie szczególne

$$\varphi = \varphi_0 e^{rt} = \varphi_0 \exp(rt). \tag{10.13}$$

Obliczając pochodne tego wyrażenia, podstawiając je do równania ruchu (10.12) i upraszczając przez exp (rt) otrzymamy tzw. *równanie charakterystyczne równania różniczkowego* (10.12)

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0. \tag{10.14}$$

Rozwiązanie równania charakterystycznego ma postać

$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{10.15}$$

W zależności od wartości wyróżnika $2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$ mamy trzy przypadki: a) $\beta^2 < \omega_0^2$, b) $\beta^2 > \omega_0^2$ oraz c) $\beta^2 = \omega_0^2$.

a) Równanie charakterystyczne posiada pierwiastki zespolone postaci:

$$r_1 = -\beta + i\omega, \quad r_2 = -\beta - i\omega,$$

gdy

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \tag{10.16}$$

Podstawiając powyższe wartości do (10.13) otrzymamy dwa rozwiązania szczególne:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_0 \exp(-\beta + i\omega)t = \varphi_0 \exp(-\beta t)\exp(i\omega t) = \\ &= \varphi_0 \exp(-\beta t)(\cos\omega t + i\sin\omega t),\end{aligned} \tag{10.17}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \varphi_0 \exp(-\beta - i\omega)t = \varphi_0 \exp(-\beta t)\exp(-i\omega t) = \\ &= \varphi_0 \exp(-\beta t)(\cos\omega t - i\sin\omega t).\end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne równania (10.12) musi być zatem kombinacją liniową tych rozwiązań szczególnych.

Rozwiązanie ogólne równania ruchu tłumionego będące liczbą rzeczywistą, posiada postać:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta) \tag{10.18}$$

i

$$x = x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta). \tag{10.18a}$$

Wyrażenie $\varphi_0 \exp(-\beta t)$ spełnia rolę amplitudy drgań, która w przeciwieństwie do ruchu harmonicznego prostego, nie pozostaje stała, lecz maleje w czasie w sposób wykładniczy. Wprowadzając tu czas relaksacji (10.11)

$$\tau = \frac{1}{2\beta}, \tag{10.19}$$

amplitudę zapisać możemy w postaci wzoru

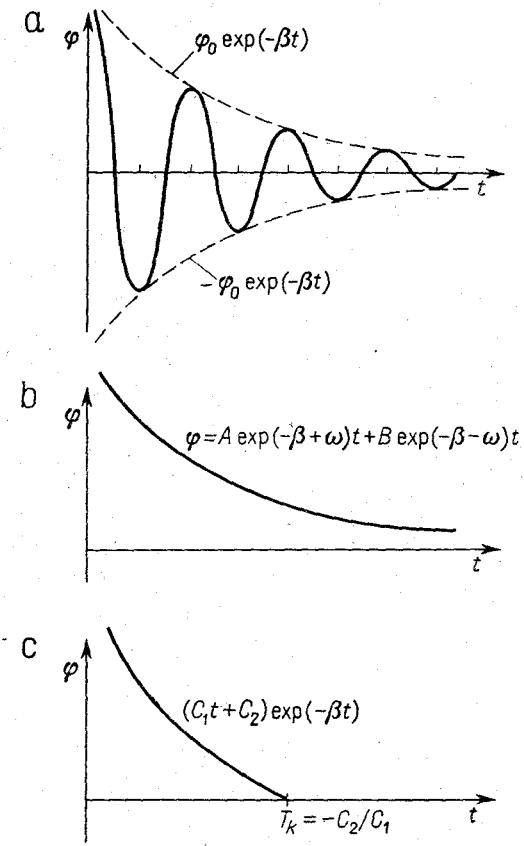
$$\varphi_0 e^{-\beta t} = \varphi_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right).$$

Z równania powyższego wynika, że po upływie czasu $t = 2\tau$ amplituda drgań maleje do $\frac{1}{e}$ wartości początkowej. Można udowodnić (patrz § 10.03), że po czasie τ energia maleje do $\frac{1}{e}$ wartości początkowej. Na tej właściwości czasu relaksacji często opiera się jego definicję. Funkcja φ (10.18) jest funkcją periodyczną, o okresie

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{10.20}$$

Uwzględniając podstawienie (10.11) i (10.3) otrzymamy

$$\begin{aligned} T &= 4\pi\mathcal{J}(4D\mathcal{J} - H^2)^{-1/2}, \\ T &= 4\pi m(4km - h^2)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{10.21}$$



10.2. Wykresy drgań: słabo tłumionych (a), silnie tłumionych (b), z tłumieniem krytycznym (c).

Graficzny obraz rozwiązania równania ruchu tłumionego (10.18) przedstawiono na rysunku 10.2a. W przypadku drgań tłumionych wprowadza się pojęcie *logarytmicznego dekrementu tłumienia* λ, który jest logarytmem stosunku dwóch kolejnych amplitud

$$\lambda = \ln[\varphi_0^{(0)}/\varphi_0^{(1)}]. \tag{10.22}$$

Korzystając z równania (10.18) możemy napisać związek

$$\lambda = \ln \frac{\varphi_0 \exp(-\beta t)}{\varphi_0 \exp[-\beta(t+T)]} = \ln(\exp \beta T),$$

skąd

$$\lambda = \beta T \quad \text{lub} \quad \lambda = \frac{T}{2\tau}. \tag{10.23}$$

Podstawiając (10.11) otrzymamy związek pomiędzy logarytmicznym dekrementem tłumienia a współczynnikami z równania ruchu (10.12).

$$\lambda = \frac{HT}{2\mathcal{J}}, \tag{10.24}$$

$$\lambda = \frac{hT}{2m}. \tag{10.24a}$$

W przypadku małego tłumienia amplituda $\varphi_0^{(0)}$ mało różni się od amplitudy następnej $\varphi_0^{(1)}$ i pomiar λ (wzór 10.23) staje się niemożliwy. Definicja stosuje się jednak dla dowolnych dwóch amplitud, zatem możemy napisać szereg następujących związków:

$$\lambda = \ln \frac{\varphi_0^{(0)}}{\varphi_0^{(1)}},$$

$$\lambda = \ln \frac{\varphi_0^{(1)}}{\varphi_0^{(2)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda = \ln \frac{\varphi_0^{(N-1)}}{\varphi_0^{(N)}}.$$

Dodając wszystkie te wyrażenia i wykonując proste przekształcenia algebraiczne, otrzymamy

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \frac{\varphi_0^{(0)}}{\varphi_0^{(N)}}. \tag{10.22a}$$

b) W tym przypadku równanie charakterystyczne ma pierwiastki rzeczywiste postaci:

$$r_1 = -\beta+\omega, \quad r_2 = -\beta-\omega.$$

Podstawiając te wartości do równania (10.13) otrzymamy:

$$\varphi_1 = \exp(-\beta+\omega)t, \quad \varphi_2 = \exp(-\beta-\omega)t.$$

Powyższe rozwiązania szczególne są liniowo niezależne i rozwiązanie ogólne jest ich kombinacją liniową

$$\varphi = A\varphi_1+\beta\varphi_2.$$

Z założenia $\beta^2 > \omega_0^2$ i równania (10.15) wynika, że obydwa pierwiastki r_1 i r_2 są ujemne i funkcja φ składa się z dwóch składników malejących wykładniczo, asymptotycznie do zera. Zatem cała funkcja również maleje wykładniczo do zera (rys. 10.2b) i nie występują drgania, lecz bardzo wolny powrót do położenia równowagi.

c) Równanie charakterystyczne ma pierwiastek podwójny:

$$r = -\beta, \quad \text{skąd} \quad \varphi = Ae^{-\beta t}.$$

Celem znalezienia rozwiązania ogólnego stosujemy metodę uziemiania stałej A; zakładamy, że jest ona funkcją czasu:

$$\varphi = A(t)e^{-\beta t}.$$

Obliczając pochodne tego wyrażenia i podstawiając do równania (10.12) otrzymamy $\frac{d^2A}{dt^2} = 0$, skąd po scałkowaniu

$$A = C_1 t + C_2.$$

Rozwiązanie ogólne ma więc postać

$$\varphi = (C_1 t + C_2)\, e^{-\beta t}.$$

W tym przypadku wychylenie $\varphi = 0$ zostaje osiągnięte po skończonym czasie T_k zwanym czasem krytycznym, który zgodnie z ostatnim wzorem wynosi

$$T_k = -C_2/C_1. \tag{10.25}$$

Również w tym przypadku nie występują drgania, a stan równowagi trwałej układ osiągnie po najkrótszym czasie T_k (rys. 10.2c).

10.03. STRATY MOCY W RUCHU TŁUMIONYM; DOBROĆ (K1, rozdz. 7)

Całkowita energia E ciała wykonującego drgania składa się z energii kinetycznej E_k i potencjalne E_p. Energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$E_k = \frac{1}{2}\mathcal{J}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{10.26}$$

Podstawiając na φ wartość z równania (10.18), zakładając, że przy małym tłumieniu ($\beta < \omega_0$), to $\omega = \omega_0$ (por. wzór 10.16) oraz $\delta = 0$, otrzymamy

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \beta^2\varphi_0^2 e^{-2\beta t}\cos^2\omega_0 t + \varphi_0^2\omega_0^2 e^{-2\beta t}\sin^2\omega_0 t + 2\beta\omega_0\varphi_0^2 e^{-\beta t}\cos\omega_0 t \sin\omega_0 t.$$

Nas interesuje wartość średnia energii kinetycznej $\langle E_k\rangle$, stąd musimy uśrednić funkcje trygonometryczne występujące w powyższym wzorze. Można udowodnić, że otrzymamy następujące wartości średnie: $\langle\cos^2\omega_0 t\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle\sin^2\omega_0 t\rangle = \frac{1}{2}$ oraz $\langle\cos\omega_0 t \cdot \sin\omega_0 t\rangle = \left\langle\frac{1}{2}\sin^2\omega_0 t\right\rangle = 0$. Stąd po uśrednieniu ostatnie wyrażenie przyjmie postać

$$\left\langle\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{2}\varphi_0^2 e^{-2\beta t}(\beta^2 + \omega_0^2), \tag{10.27}$$

β^2 możemy zaniedbać wobec ω_0^2 ($\beta^2 \ll \omega_0^2$). Podstawiając w ten sposób uproszczone wyrażenie (10.27) do (10.26) otrzymamy

$$\langle E_k\rangle = \frac{1}{4}\mathcal{J}\varphi_0^2\omega_0^2\exp(-2\beta t),$$

lub po uwzględnieniu (10.19)

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{4} \mathcal{J} \varphi_0^2 \omega_0^2 \exp(-t/\tau). \tag{10.28}$$

Można udowodnić, że energia potencjalna wyraża się takim samym wzorem. Stąd też energia całkowita $\langle E \rangle = \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle$ wynosi

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{J} \varphi_0^2 \omega_0^2 e^{-t/\tau}. \tag{10.29}$$

W ruchu tłumionym tracona jest moc P. Średnie straty mocy są równe szybkości zmiany energii, czyli

$$\langle P \rangle = \frac{d}{dt} \langle E \rangle = -\frac{1}{\tau} \langle E \rangle. \tag{10.30}$$

Parametrem charakteryzującym straty mocy jest *dobroć obwodu* zdefiniowana wzorem

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia oscylatora}}{\text{średnia energia tracona w jednym okresie}}, \tag{10.31}$$

$$Q = \frac{2\pi \langle E \rangle}{\frac{1}{\tau} \langle E \rangle T} = \frac{2\pi\tau}{T} = \omega_0 \tau. \tag{10.32}$$

Zatem dobroć jest równa iloczynowi częstości kołowej ω_0 i czasu relaksacji τ.

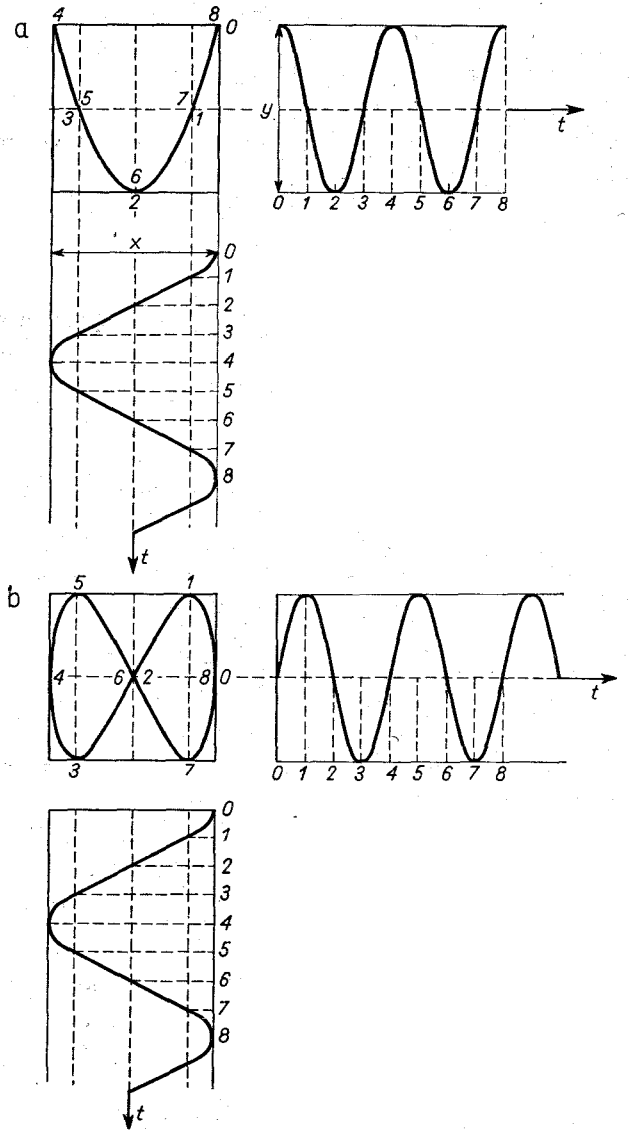
10.04. SKŁADANIE DRGAŃ WZAJEMNIE PROSTOPADŁYCH (P1, § 26–30; S1, § 44 i 45)

W przypadku, gdy ciało wykonuje równocześnie dwa drgania harmoniczne

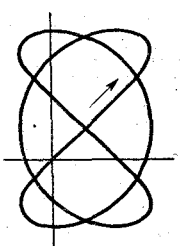
$$x = x_0 \cos(\omega_x t + \delta) = x_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{T_x} + \delta\right), \tag{10.33}$$

$$y = y_0 \cos \omega_y t = y_0 \cos 2\pi \frac{t}{T_y}, \tag{10.34}$$

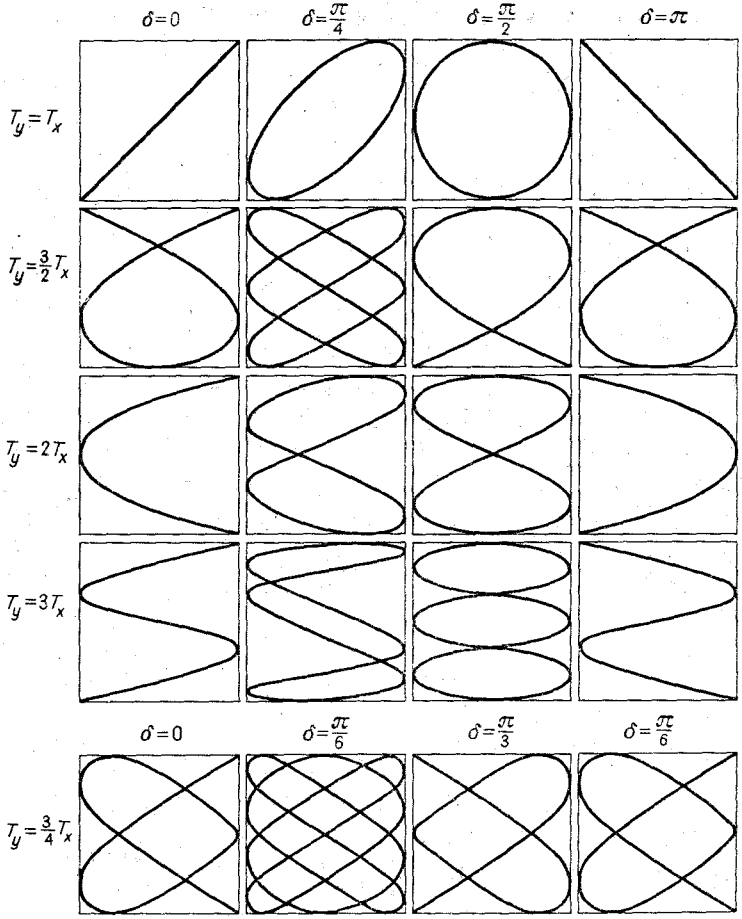
w kierunkach prostopadłych, to jego tor jest bardzo skomplikowany i nazywa się *krzywą* lub figurą *Lissajous*. Na rysunku 10.3 pokazano sposób wykreślania krzywych Lissajous. Kierunki osi czasu wykresów drgań składowych dobrano w ten sposób, by drgania zachodziły wzdłuż właściwych osi współrzędnych. Obrano równą skalę na osi czasu obydwu wykresów drgań składowych. Punkty przecięcia odciętych dla czasów 0, 1, 2, ..., 8 wyznaczają położenia kolejnych punktów krzywej Lissajous. Obydwa wykresy 10.3 dotyczą przypadku $T_x = 2T_y$ oraz $x_0 = y_0$. Dla krzywej a) $\delta = 0$, a dla krzywej b) $\delta = \pi/2$. Jak z powyższego wynika, kształt krzywej zależy nie tylko od stosunku okresów, lecz również od fazy początkowej δ. W przypadku, gdy amplitudy drgań składowych różnią się ($x_0 \neq y_0$), krzywe mieszczą się w prostokątach o bokach $2x_0$ i $2y_0$.



10.3. Składanie drgań prostopadłych dla $\delta = 0$ (a) oraz $\delta = -90°$ (b)



10.4. Określanie stosunku częstości drgań składowych krzywej Lissajous dla $\frac{N_x}{N_y} = \frac{2}{3}$.



10.5. Przykłady krzywych Lissajous.

Okresem krzywej nazywamy czas T_0, po którym drgające ciało zakreśli całą krzywą, tzn. wróci do punktu wyjściowego. Zatem po okresie T_0 obydwie współrzędne muszą przyjąć takie same wartości jak na początku ruchu, co matematycznie oznacza, że argumenty mogą różnić się o całkowitą wielokrotność 2π:

$$\frac{2\pi}{T_x}(t+T_0)+\varphi = \frac{2\pi}{T_x}t+\varphi+2\pi N_x,$$

$$\frac{2\pi}{T_y}(t+T_0) = \frac{2\pi}{T_y}t+2\pi N_y.$$

Z równań powyższych wynika związek

$$T_0 = T_x N_x = T_y N_y$$

lub

$$\frac{T_x}{T_y} = \frac{N_y}{N_x}. \tag{10.35}$$

Częstość zdefiniowana wzorem $\omega = \frac{2\pi}{T}$ spełnia związek wynikający z powyższego równania

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_x}{N_y}. \tag{10.35a}$$

Stosunek $\frac{N_x}{N_y}$ jest równy stosunkowi liczby przecięć krzywej Lissajous z prostą równoległą do osi x do liczby przecięć krzywej z prostą równoległą do osi y; zilustrowano to na przykładzie pokazanym na rysunku 10.4. Ze związków (10.35) i (10.35a) wynika, że stosunek częstości lub okresów jest równy stosunkowi dwóch liczb całkowitych. W przypadku, gdy liczby te są liczbami całkowitymi mniejszymi od 10, przebiegi krzywych są względnie proste i ze stosunku ilości przecięć krzywych z prostymi równoległymi do osi określić możemy stosunek częstości drgań składowych. Dla przykładu na rysunku 10.5 pokazano kilka prostych przypadków krzywych dla różnych wartości fazy początkowej δ. Jeżeli stosunek okresów obydwu drgań składowych wyraża się ułamkiem, którego licznik i mianownik mało różnią się od liczb całkowitych N_x i N_y mniejszych od 10, to przebieg krzywej odpowiada stosunkowi N_x/N_y, lecz zmienia się ciągle, przyjmując kolejno wszystkie kształty odpowiadające temu stosunkowi przy zmieniającej się fazie.

10.1. WAHADŁO FIZYCZNE

Cel: wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego i momentu bezwładności bryły płaskiej.

Przyrządy: sekundomierz (§ 3.5).

Zagadnienia: ruch harmoniczny prosty (§ 10.01; K1, rozdz. 7; S1, § 43 i 44; J, § 15.1–15.4), przyciąganie ziemskie (S1, § 35; P1, § 62 i 63), dynamika bryły sztywnej (S1, § 55–58; P1, § 143–148).

Wprowadzenie

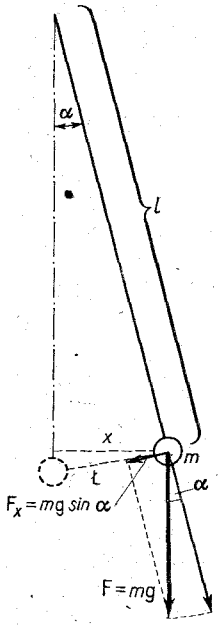
Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny o masie m zawieszony na nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości l. W rzeczywistości każde wahadło musi być zbudowane w ten sposób, że nić jest nieco rozciągliwa i posiada pewną masę, a kulka metalowa zawieszona na tej nici jest większa od punktu matematycznego. Dla wahadła matematycznego pokazanego na rysunku 10.6 wzór (10.9a) ulegnie modyfikacji. Wahadło wychylone o kąt α porusza się po łuku $Ł$. Przyczyną tego ruchu jest składowa siły ciężkości $F_x = mg\sin\alpha$ skierowana stycznie do łuku. Siła kierująca k (por. wzór 10.1a) jest stosunkiem siły F_x do wychylenia, które w przybliżeniu wynosi x, wtedy związek $k = \frac{mg}{x}\sin\alpha$, a dla małych wychyleń ($\sin\alpha \simeq \alpha$) zachodzi $k = \frac{mg}{l}$. Podstawiając to wyrażenie do równania (10.9a) otrzymamy

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{10.36}$$

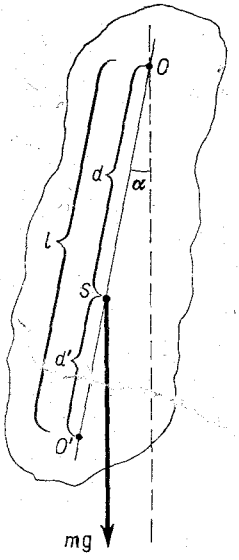
Wzór (10.9) określa okres drgań tzw. wahadła fizycznego, czyli bryły, która może obracać się wokół osi nie przechodzącej przez środek ciężkości. Jeżeli wahadło zawiesimy

w taki sposób, by jego oś była pozioma i wychylimy o mały kąt α z położenia równowagi, to wykonuje ona oscylacje. Ruch wahadła fizycznego dla małych wartości kąta α jest ruchem harmonicznym prostym. Moment siły M dla wahadła wyraża się wzorem

$$M = -mgd\sin\alpha,$$



10.6. Wahadło matematyczne.



10.7. Wahadło fizyczne.

gdzie d — oznacza odległość środka ciężkości od punktu podparcia (rys. 10.7). Ze względu na małą wartość kąta α moment siły możemy wyrazić wzorem:

$$M = -mgd\alpha,$$

zatem zgodnie z równaniem (10.1) moment kierujący wyrazi się wzorem

$$D = mgd. \tag{10.37}$$

Moment bezwładności, zgodnie z twierdzeniem Steinera* możemy przedstawić równaniem

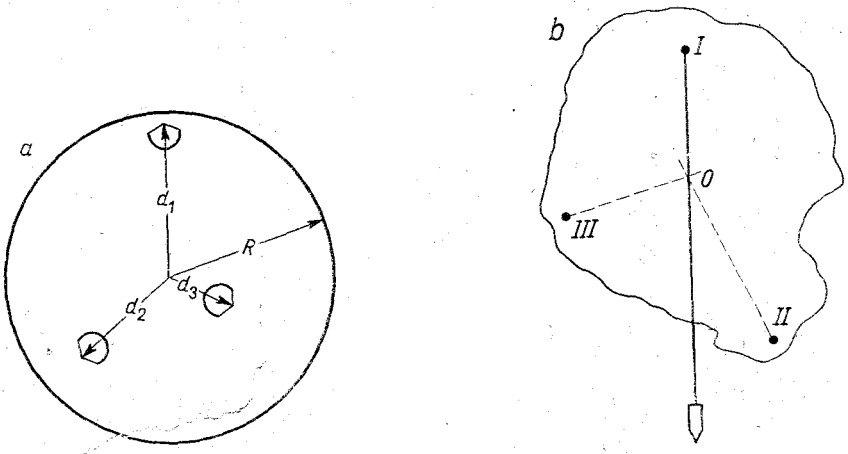
$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s + md^2,$$

gdzie $\mathcal{J}_s$ oznacza moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości równoległej do osi oscylacji. Podstawiając wyrażone w ten sposób wartości momentu kierującego i momentu bezwładności do równania (10.9), otrzymamy następujący wzór na okres oscylacji

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{J}_s + md^2}{mgd}}. \tag{10.38}$$

* Porównaj uwaga str. 176.

Znając okres oscylacji bryły o regularnych kształtach i znanej masie m na przykład krążka o promieniu R zawieszonego w punkcie odległym o d od środka masy z równania (10.38) możemy obliczyć przyspieszenie ziemskie. W przypadku, gdy kształt bryły jest bardziej skomplikowany, wzór powyższy może posłużyć do wyznaczenia jej momentu bezwładności J_s pod warunkiem, że znamy położenie środka ciężkości, masę ciała



10.8. Wyznaczanie środka masy bryły płaskiej.

i wartość przyspieszenia ziemskiego. Stosunkowo łatwo można wyznaczyć położenie środka ciężkości dla bryły płaskiej. Leży on na przecięciu linii pionów wykreślonych dla dwóch niezależnych punktów zawieszenia (rys. 10.8). Dla pokazanej na rysunku bryły płaskiej moment bezwładności wyrazi się następującym wzorem

$$J_s = md\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - d\right). \tag{10.38a}$$

Pomiary

W pierwszej części doświadczenia wyznaczamy przyspieszenie ziemskie za pomocą wahadła wykonanego ze stalowego krążka. Krążek posiada trzy otwory (rys. 10.8a) służące do zawieszenia (osie obrotu). Mierzymy promień krążka R, jego grubość h, odległość d_i punktów zawieszenia od środka masy i czas trwania N wahnięć dla jednego sposobu zawieszenia krążka. Analizujemy wpływ błędów wielkości prostych na wynik końcowy i planujemy właściwy sposób pomiaru poszczególnych wielkości. Wpływ błędu pomiaru okresu zmniejszamy mierząc czas trwania dużej liczby N okresów. Pomiary czasu powtarzamy dwukrotnie celem wyeliminowania ewentualnych pomyłek.

W drugiej części doświadczenia wyznaczamy środek masy i moment bezwładności bryły płaskiej, drewnianej o nieregularnym kształcie (rys. 10.8b). Celem wyznaczenia jej środka masy zawieszamy ją na kolejnych trzech zawieszeniach i każdorazowo wykreślamy linię pionu. Punkt przecięcia tych linii wyznacza położenie środka masy. Masę bryły wyznaczamy na wadze uchylnej (sklepowej) i wykonujemy dla niej takie same pomiary okresów jak w przypadku krążka stalowego. Notujemy dokładności przyrządów.

Obliczenia

Dla krążka obliczamy przyspieszenie ziemskie z równania (10.38) dla każdego sposobu zawieszenia oraz wartość średnią $\bar{g}$. Moment bezwładności obliczamy z wzoru $\mathcal{J}_s = \frac{1}{2} mR^2$ (tablica II). Podstawiamy $m = \varrho V$ i przyjmujemy z tablic gęstość stali, objętość obliczamy z wymiarów geometrycznych. Błąd Δg obliczamy dla dwóch skrajnych wartości d. Zakładamy, że błąd średniej arytmetycznej $\Delta \bar{g}$ jest równy średniej wartości wyliczonych błędów.

Dla nieregularnej bryły obliczamy moment bezwładności z równania (10.38a) dla każdego z pomiarów przyjmując na g wartość z tablic. Błąd $\Delta \mathcal{J}_s$ obliczamy dla pomiaru odpowiadającego średniej wartości d i przyjmujemy tę wartość dla średniej arytmetycznej $\Delta \bar{\mathcal{J}}_g$.

10.2. WAHADŁO REWERSYJNE

Cel: wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego.

Przyrządy: sekundomierz (§ 3.4).

Zagadnienia: ruch harmoniczny prosty (§ 10.01; S1, § 43 i 44; K, rozdz. 7); przyciąganie ziemskie (S1, § 33–35; P1, § 62 i 63); dynamika bryły sztywnej (S1, § 55–58; P1, § 143–148); wprowadzenie do doświadczenia 10.1.

Wprowadzenie

Wprowadzając do równania (10.38) oznaczenie

$$l = d + \frac{\mathcal{J}_s}{md}, \tag{10.39}$$

wyrazimy okres wahadła fizycznego wzorem (10.36). Tak więc formalnie okres drgań wahadła fizycznego wyraża się takim samym wzorem jak wahadła matematycznego o długości l. Wielkość l nazywamy długością zredukowaną wahadła fizycznego. Punkt O' leżący na prostej OS, odległy o l od punktu O nazywamy środkiem wahań wahadła fizycznego (rys. 10.7). Jeżeli wahadło zamocujemy w ten sposób, że będzie mogło wahać się wokół osi przechodzącej przez środek wahań O', to okres wyrazi się wzorem

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}_s + md'^2}{mgd}}.$$

Długość zredukowana wyrazi się wtedy wzorem

$$l' = d' + \frac{\mathcal{J}_s}{md}, \tag{10.40}$$

a okres

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}.$$

Udowodnimy, że okresy T i T' są równe. W tym celu zauważymy, że zachodzi związek

$$l - d = d'. \tag{10.41}$$

Różnicę $l-d$ z równania (10.41) możemy porównać z różnicą $l-d$ obliczoną z wzoru (10.39), skąd otrzymujemy

$$\frac{J_s}{md'} = d.$$

Podstawiając tę wielkość do równania (10.40) otrzymamy $l' = d' + d$, skąd po podstawieniu pod d' wartości z równania (10.41) wynika związek

$$l = l'.$$

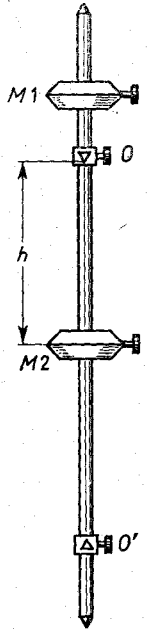
Równość długości zredukowanych oznacza również równość okresów

$$T = T'.$$

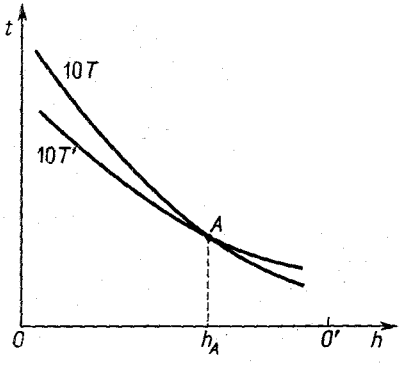
Zatem okres oscylacji wahadła fizycznego wokół osi przechodzącej przez punkt O jest taki sam jak okres oscylacji wokół osi równoległej przechodzącej przez jego środek wahań O'. Zjawisko to wykorzystuje się do wyznaczania przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego czyli odwracalnego.

Aparatura

Wahadło rewersyjne (Katera) składa się z metalowego pręta, na którym osadzone są dwie soczewki metalowe *M1* i *M2* oraz dwa ostrza O i O' zwrócone ku sobie, w kolejności pokazanej na rysunku 10.9. Zarówno ostrza jak i soczewki można przesuwać wzdłuż pręta. Położenie soczewek można dobrać w ten sposób, by okres oscylacji T wokół osi O był równy okresowi T' wokół osi O'.



10.9. Wahadło rewersyjne.



10.10. Przykładowy wykres zależności okresu wahadła od położenia soczewki *M2*.

Pomiary i obliczenia

Ostrza O i O' zamocowujemy na stałe w dużej odległości wzajemnej. Również soczewkę *M1* zamocowujemy na stałe. Mierzymy zależności okresów T i T' od odległości h między ostrzem O i soczewką *M2*. Dla każdej odległości h_i mierzymy czasy trwania 10-ciu wahnięć t_i oraz t'_i, wokół odpowiednich osi O lub O' odwracając każdorazowo wahadło. Kolejne punkty pomiarowe ($i = 1, 2, \ldots$) wybieramy przesuwając soczewkę *M2* co 5–10 cm, począwszy od minimalnej wartości h (*M2* najbliżej O), skończywszy na wartości maksymalnej (*M2* jak najbliżej O'). Wyniki wpisujemy w tabeli zawierającej w kolejnych wierszach: liczbę kolejną pomiaru i, odległość h_i, czas $t_i = 10T$ (dla wahań wokół osi O), czas $t_i = 10T'$ (wokół osi O'). Wykreślamy zależność okresów T_i i T'_i albo czasów t_i i t'_i od wartości h_i dla obydwu sposobów zawieszania wahadła w sposób pokazany na rysunku 10.10. Obydwie krzywe przetną się w punkcie A odpowiadającym wartości h_A*. Gdy soczewka *M2* znajduje się w odległości h_A od ostrza O, zachodzi równość okresów $T = T'$.

Soczewkę *M2* umieszczamy dokładnie w odległości h_A i wyznaczamy dokładnie okresy wahań dla obydwu sposobów zawieszenia. Jeżeli okresy te nie są dokładnie równe, przesuwamy soczewkę *M2* o ok. 1 cm w jednym lub w drugim kierunku i powtarzamy pomiary. Położenie soczewki *M2* poprawiamy do czasu, gdy uzyskamy bardzo dobrą zgodność okresów T i T'. Zgodność taką stwierdzimy najściślej mierząc czas trwania dużej liczby wahnięć (np. rzędu 100). Obliczamy dokładnie okres wahań dla przypadku $T = T'$, a następnie przyspieszenie ziemskie z wzoru (10.36). Obliczamy również błąd przyspieszenia.

10.3. KRZYWE LISSAJOUS

Cel: badanie zjawiska, wzorcowanie generatora.

Przyrządy: oscylograf katodowy (§ 24.01–03), generatory akustyczne (§ 4.11).

Zagadnienia: drgania harmoniczne proste (§ 10.01; S1, § 43 i 44; K1, rozdz. 7), nakładanie drgań (§ 10.03; P1, § 26–30; S1, § 44 i 45).

Aparatura

W omawianym doświadczeniu stosujemy dwie metody nakładania drgań: *mechaniczną* i *elektroniczną*.

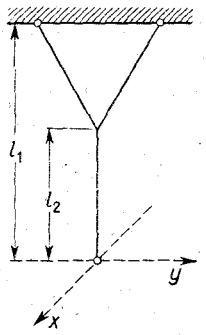
a. Do otrzymywania drgań metodą mechaniczną służy wahadło podwójne pokazane na rysunku 10.11. Jego górna część może drgać tylko wzdłuż osi x, natomiast dolna zarówno wzdłuż osi x jak y. Długość poszczególnych części wahadła można zmieniać. Pod wahadłem znajduje się stolik. Rolę masy odgrywa lejek wypełniony piaskiem. Wysypujący się z lejka piasek pozostawia na stoliku ślad toru, po którym poruszało się wahadło. Wykonując doświadczenie należy zwrócić uwagę na to, by piasek sypał się tylko w ciągu jednego okresu T_0. Ze względu na niedokładne dobranie okresów faza krzywej ulega ciągłej zmianie i krzywa zakreślona w czasie drugiego okresu nie pokrywa się zupełnie dokładnie z krzywą w okresie pierwszym. Okresy drgań poszczególnych części wahadła zmieniają się wraz z ich długością. Korzystając z wzoru na okres wa-

* Może się zdarzyć, że krzywe nie przecinają się. Wtedy należy zmienić położenie ostrzy i soczewki *M1* oraz powtórzyć pomiary.

hadła matematycznego (10.36), można łatwo wykazać, że stosunek okresów obydwu części wahadeł jest równy pierwiastkowi ze stosunku ich długości

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}. \tag{10.42}$$

b. Do nakładania drgań elektrycznych stosujemy oscylograf katodowy. W lampie znajdują się dwie pary płytek odchylających, ustawione względem siebie prostopadle. Jeżeli do jednej z par przyłożymy napięcie, to wiązka elektronów ulegnie odchyleniu.



10.11. Wahadło podwójne.

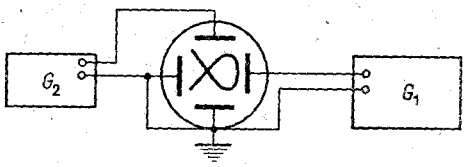
Przyłożenie napięcia o amplitudzie zmieniającej się w sposób sinusoidalny wprawi wiązkę elektronów w drgania harmoniczne proste wzdłuż osi równoległej do osi kondensatora. Jeżeli napięcie sinusoidalne przyłożymy do obydwu par płytek, to na wiązkę elektronów nałożą się dwa drgania wzajemnie prostopadłe i kreśli ona na ekranie lampy krzywe Lissajous. Źródłem napięcia zasilającego obydwie pary płytek są dwa generatory akustyczne. Jeden z generatorów wytwarza drgania stałej częstości, a częstość drugiego można zmieniać w szerokim zakresie.

Pomiary

a. Otrzymywanie figur w sposób mechaniczny. Celem tej części doświadczenia jest uzyskanie krzywych dla następujących stosunków okresów: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. Zgodnie z wzorem (10.42) odpowiadają tym stosunkom okresów następujące stosunki długości wahadeł: $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{9}$. Dobieramy odpowiedni stosunek długości poszczególnych części wahadła. Wahadło puszczamy w ruch, wychylając je z położenia równowagi wzdłuż linii tworzącej kąt 45° z płaszczyznami wahań obydwu części wahadła. Niekiedy dla uzyskania prawidłowego przebiegu krzywej musimy skorygować obliczone teoretycznie długości wahadeł. Po dobraniu długości poszczególnych części wahadła napełniamy lejek piaskiem, zastawiając palcem jego otwór. Wahadło wprawiamy w ruch tylko na czas trwania jednego pełnego obiegu (okresu). Po upływie tego czasu wahadło zatrzymujemy zatykając równocześnie palcem otwór lejka. Próby powtarzamy do chwili uzyskania prawidłowego przebiegu krzywej i krzywą przerysowujemy do protokołu.

b. Metoda elektroniczna. Celem tej części doświadczenia jest wzorcowanie generatora. Łączymy obwód elektryczny według schematu przedstawionego na rysunku 10.12

oraz włączamy do sieci prądu przemiennego oscylograf i obydwa generatory. Po ukazaniu się plamki na ekranie dobieramy wzmocnienie w ten sposób, by obraz zajmował cały ekran, lecz nie wychodził poza jego powierzchnię. Następnie dobieramy częstość generatora zmiennego w ten sposób, by otrzymać prostą figurę. Ze względu na niewystarczającą stabilność aparatury elektronicznej oraz niewielkie odchylenia częstości generatorów od dokładnych wartości odpowiadających obserwowanej krzywej, obraz ustawicznie się zmienia. Obserwujemy ciągłe przejścia od jednej wartości fazy względnej



10.12. Układ elektroniczny do badania figur Lissajous.

do drugiej wartości, podobne do tych jakie pokazano w kolejnych wierszach na rysunku 10.5. W doświadczeniu musimy zaobserwować najprostszą postać figury, przerysować ją do protokołu, odczytać i zapisać odpowiadającą jej częstość generatora wzorcowego i błąd tego odczytu. Podobne obserwacje wykonujemy dla 10-ciu różnych figur odpowiadających 10-ciu częstościom generatora wzorcowego.

Obliczenia

Opracowanie wyników polega na określeniu dla wszystkich figur uzyskanych na oscylografie ilorazu liczby przecięć N_x krzywej z prostą równoległą do osi x do liczby przecięć N_y krzywej z prostą równoległą do osi y, z którego to stosunku, zgodnie z wzorem (10.35a) i rysunkiem 10.4 możemy wyznaczyć częstość generatora nieznanego. Pomocnicze linie nie powinny przechodzić przez miejsca, w których figura przecina się. W rozważaniach przyjęliśmy, że znany generator jest podłączony do płytek x. Jeżeli jest on połączony z płytkami y, to wyznaczyć musimy stosunek odwrotny, $T_x = T_y \frac{N_y}{N_x}$. Błąd obliczamy dla jednego z pomiarów zakładając, że wielkości N_x i N_y nie są obarczone błędem. Obliczamy średnią wszystkich uzyskanych w doświadczeniu wartości częstości oraz obliczamy jej błąd średni kwadratowy średniej arytmetycznej. Określa on wartość serii pomiarów.

10.4. WAHADŁA SPRZĘŻONE

Cel: wyznaczenie częstości I i II drgania normalnego oraz częstości dudnień momentów: kierującego i sprzęgającego.

Przyrządy: suwmiarka (§ 3.1), waga techniczna (§ 3.4), sekundomierz (§ 3.5).

Zagadnienia: ruch harmoniczny (§ 10.01–10.04; S1, § 43 i 44; K1, rozdz. 7; wahadła sprzężone (§ 3,3).

Wprowadzenie

Wahadłami sprzężonymi nazywamy układ dwóch wahadeł fizycznych rys. 10.13, zaopatrzonych w urządzenie służące do przekazywania energii drgań od jednego wahadła do drugiego. Sprzężenie obydwu wahadeł może następować pośrednio poprzez

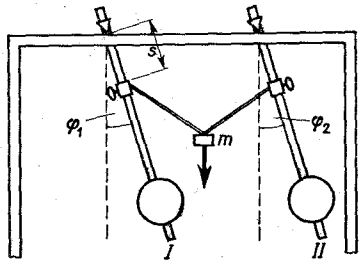
statyw, na którym zawieszone są obydwa wahadła lub bezpośrednio przez sprężynę, albo poprzez obciążoną w środku nić. Pierwszy rodzaj sprzężenia dla wahadeł zawieszonych na sztywnych statywach jest bardzo słaby, stąd w doświadczeniu stosujemy sprzężenie bezpośrednie. Moment kierujący każdego z wahadeł, zgodnie z wzorem (10.37) wynosi

$$D = mgl,$$

gdzie m oznacza masę wahadła, l — odległość środka ciężkości od osi obrotu. Ponadto w przypadku wahadeł sprzężonych występuje moment sprzęgający D_s. Wartość tego momentu zależy od odległości s punktu zaczepienia siły sprzęgającej, od osi obrotu oraz od różnicy faz obydwu wahadeł

$$D_s = D_s(s, \varphi_1 - \varphi_2). \tag{10.43}$$

W przypadku wahadeł sprzężonych, których okresy drgań własnych są bardzo zbliżone, występują tzw. dudnienia o następującym przebiegu. Załóżmy, że w chwili początkowej wahadło II jest nieruchome, natomiast wahadło I wykonuje drgania.



10.13. Wahadła sprzężone.

Wtedy wahadło II (nieruchome) zacznie drgać i jego amplituda stale rośnie, natomiast amplituda drgań wahadła I maleje. Amplituda drgań wahadła II rośnie do chwili, gdy amplituda wahadła I zmaleje do zera (rys. 10.14). Następnie drgania przekazywane są znowu do wahadła I. Czas, po którym amplituda drgań jednego z wahadeł wraca do początkowej wartości, nazywamy okresem dudnień T_d, a odpowiadającą mu częstość ω_d — częstością dudnień. Przekazywania drgań nie obserwuje się, jeżeli wahadła wykonują tzw. drgania normalne. W przypadku pierwszego drgania normalnego obydwa wahadła drgają w zgodnej fazie ($\varphi_1 = \varphi_2$) i nie działa moment sprzęgający, bowiem $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$; drganie to zachodzi z częstością kołową ω_1 zwaną pierwszą częstością normalną i odpowiadającym jej okresem T_1. Dla drugiego drgania normalnego $\varphi_1 = -\varphi_2$ wprowadza się drugą częstość normalną ω_2 i okres T_2.

Równanie ruchu (10.4) każdego z wahadeł musi być uzupełnione składnikiem określającym wpływ momentu sprzęgającego (10.43), stąd przyjmują one postać

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \tag{10.44}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi_2 + k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \tag{10.45}$$

gdzie

$$\omega_0^2 = \frac{D}{\mathcal{J}}, \quad \text{a} \quad k = \frac{D_s}{\mathcal{J}}. \tag{10.46}$$

Podstawiając

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \text{oraz} \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{10.47}$$

oraz dodając względnie odejmując stronami równania ruchu otrzymamy

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \omega_0^2 \psi_1 = 0, \tag{10.48}$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} + (\omega^2 + 2k)\psi_2 = 0. \tag{10.49}$$

Równanie ruchu każdego wahadła sprzężonego oraz pierwszego drgania normalnego przyjmuje postać (10.48), natomiast równanie ruchu drugiego drgania normalnego ma postać (10.49). Stąd też zgodnie z równaniem (10.48) częstość kołowa pierwszego drgania normalnego jest równa częstości wahadła swobodnego

$$\omega_1 = \omega_0. \tag{10.50}$$

Odpowiednio otrzymamy z równania (10.49) częstość drgania normalnego II przy założeniu, że $\omega_0 \gg k$,

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k} \simeq \omega_0 + \frac{k}{\omega_0}. \tag{10.51}$$

Uwzględniając zastosowane poprzednio podstawienia (10.46) otrzymamy

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{\mathcal{J}}}, \tag{10.52}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{\mathcal{J}}} + \frac{D_s}{\sqrt{\mathcal{J}D}}. \tag{10.53}$$

Uwzględniając (10.52) i (10.53) równania ruchu (10.48) i (10.49) przyjmą postać

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \omega_1^2 \psi_1 = 0,$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} + \omega_2^2 \psi_2 = 0.$$

Oznaczając przez C wychylenie dla $t = 0$, otrzymamy następujące rozwiązania tych równań:

$$\psi_1 = C\cos\omega_1 t \text{ i } \psi_2 = C\cos\omega_2 t,$$

co zgodnie z podstawieniami (10.47) daje następujące wyrażenie na φ_1 i φ_2:

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = C\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t,$$

$$\varphi_2 = \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} = C\sin\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t. \tag{10.54}$$

W wyrażeniach powyższych wielkości:

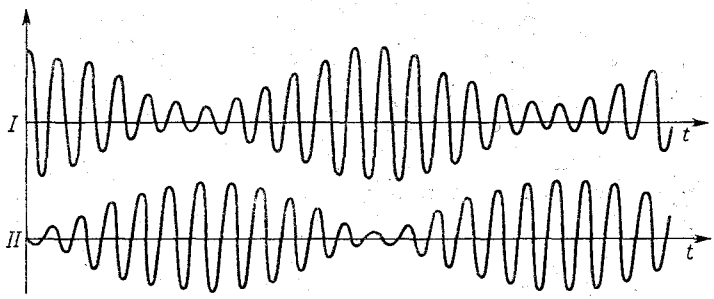
$$A_1 = C\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t \quad \text{i} \quad A_2 = C\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$$

możemy uważać za powoli zmieniające się w czasie amplitudy. Tak więc równania (10.54) dają ściśle matematyczny opis krzywych z rysunku 10.14. Amplituda po czasie T_d wrócić musi do pierwotnej wartości, czyli zgodnie z ostatnimi wyrażeniami otrzymamy

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}T_d = \pi,$$

skąd

$$\omega_2-\omega_1 = \omega_d = \frac{2\pi}{T_d}. \tag{10.55}$$



10.14. Drgania dwóch równych wahadeł sprzężonych (dudnienia).

Podstawiając wyrażenia (10.52) i (10.53) otrzymamy

$$\omega_d = \frac{D_s}{\sqrt{\mathcal{J}D}}. \tag{10.56}$$

Pomiary

Mierzymy poszczególne części wahadeł, ważymy je i tak ustawiamy, by okresy obydwu wahadeł były równe. Mierzymy czas t dziesięciu wahnięć każdego z nich. Sprzęgamy wahadła zamocowując nić do prętów wahadeł w odległości 5–10 cm od osi obrotu, czyli ostrza pryzmatu. Mierzymy czas dziesięciu wahnięć, gdy układ wykonuje pierwsze lub drugie drgania normalne (t_1 i t_2) oraz czas t_d trwania kilku dudnień. Badamy zależność momentu sprzęgającego D_s od odległości s punktu zaczepienia nici sprzęgającej od osi obrotu wahadeł. Mierzymy w tym celu czas trwania kilku dudnień przynajmniej dla 10-ciu różnych wartości s.

Obliczenia

Uśredniamy wyniki pomiaru czasu drgań swobodnych (t_0), pierwszych drgań normalnych oraz dudnień; obliczamy okres T_1 oraz częstość $\omega_1 = 2\pi T_1^{-1}$ drgań normalnych oraz dudnień (T_d, ω_d). Sprawdzamy słuszność równania (10.55). Równanie powyższe jest spełnione, gdy spełniona jest nierówność (por. § 2.4b)

$$|\omega_d-(\omega_2-\omega_1)| \leqslant |\Delta\omega_d|+|\Delta\omega_2|+|\Delta\omega_1|.$$

Korzystając ze związku (10.52) obliczamy moment kierujący D. Moment bezwładności $\mathcal{J}$ wahadła obliczamy jako sumę momentu pręta $\left(\mathcal{J}_p = \frac{1}{3} m_p l^2\right)$ i momentu bezwładności walca względem osi obrotu $\left(\mathcal{J}_w = \frac{1}{2} m_w r^2 + m_w (l+r)^2\right)$, stąd ostatecznie

$$\mathcal{J} = \frac{1}{3} m_p l^2 + \frac{1}{2} m_w r^2 + m_w (l+r)^2 .$$

Obliczamy błędy: momentu bezwładności, częstości dudnień oraz częstości normalnych. Korzystając z wyników drugiej części doświadczenia, z wzoru (10.56) obliczamy moment sprzęgający D_s dla każdego pomiaru. Obliczamy błąd ΔD_s dla kilku wartości s. Zależność $D_s(s)$ wykreślamy i dla kilku punktów zaznaczamy błąd. Na zakończenie krótko dyskutujemy wyniki.

10.5. REZONANS MECHANICZNY

Cel: wyznaczenie logarytmicznego dekrementu tłumienia, czasu relaksacji, współczynnika tłumienia oraz przebiegu krzywej rezonansu.

Przyrządy: amperomierz (§ 18.01–03, opornik suwakowy (§ 4.2), autotransformator (§ 4.5), suwmiarka (§ 3.1), sekundomierz (§ 3.5).

Zagadnienia: ruch harmoniczny prosty i tłumiony (§ 10.01–03, S1, § 46 i 47; K1, rozdz. 7), dynamika bryły sztywnej (S1, § 55–58, P1, § 143–148), prądy wirowe (S3, § 78; P2, § 126, J, § 15.1–15.8).

Wprowadzenie

Drgania wymuszone występują wtedy, gdy na ciało działa moment siły

$$M_w = M_0 \cos \omega t , \tag{10.57}$$

który zmienia się w czasie zarówno co do wielkości jak i kierunku. Ogólne równanie ruchu wymuszonego otrzymamy, jeżeli w równaniu ruchu tłumionego (10.10) uwzględnimy moment wymuszający

$$M = -D\varphi - H\frac{\partial \varphi}{\partial t} + M_0 \cos \omega t . \tag{10.58}$$

Stosując oznaczenia (10.3) oraz (10.11) i wprowadzając oznaczenie

$$P = M_0/\mathcal{J} \tag{10.59}$$

do równania ruchu wymuszonego, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \varphi - 2\beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P \cos \omega t . \tag{10.60}$$

Rozwiązując powyższe równanie, zastosujemy podstawienie

$$\varphi = \psi \cos(\omega t + \delta). \tag{10.61}$$

Wprowadzając powyższe oznaczenie do równania drgań tłumionych oraz wykonując proste przekształcenia matematyczne, otrzymamy:

$$-\psi\omega^2 \cos\delta \cos\omega t + \psi\omega^2 \sin\delta \sin\omega t =$$
$$= (-\omega_0^2 \psi \cos\delta + 2\beta\psi\omega \sin\delta + P)\cos\omega t + (\omega_0^2 \psi \sin\delta + 2\beta\psi\omega \cos\delta)\sin\omega t .$$

Równanie powyższe musi spełniać się tożsamościowo, zatem musi zachodzić równość współczynników przy $\cos \omega t$ oraz $\sin \omega t$:

$$\psi(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\delta - 2\beta\psi\omega\sin\delta = P, \tag{10.62}$$

$$\psi(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\delta + 2\beta\psi\omega\cos\delta = 0. \tag{10.63}$$

Fazę drgań δ obliczyć można z równania (10.63)

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{10.64}$$

Z równania powyższego wynika, że drgania wymuszone są zgodne w fazie z momentem wymuszającym tylko wtedy, gdy nie występuje tłumienie ($\beta = 0$). Z równań (10.62) i (10.63) obliczyć możemy również amplitudę drgań ψ. W tym celu obydwa równania podnosimy do kwadratu i sumujemy, otrzymując:

$$\psi = P[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{-1/2}. \tag{10.65}$$

Amplituda ψ posiada największą wartość wtedy, gdy mianownik równania (10.65) jest najmniejszy, a więc gdy pochodna mianownika względem częstości siły wymuszającej ω jest równa zeru

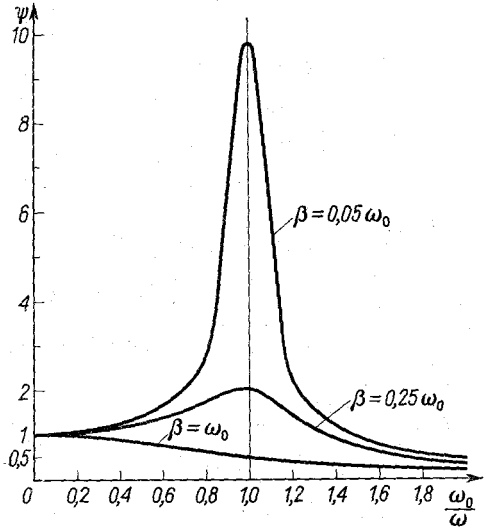
$$\frac{\partial}{\partial\omega}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = 0,$$

skąd otrzymamy warunek

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2. \tag{10.66}$$

Przypadek, w którym amplituda drgań wymuszonych przyjmuje największą wartość, nazywamy rezonansem. Amplitudę drgań w warunkach rezonansu obliczamy, podstawiając w równaniu (10.65) za ω wartość z równania (10.66)

$$\psi_{rez} = P[2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}]^{-1}. \tag{10.67}$$



10.15. Krzywe rezonansu dla różnych wartości współczynnika tłumienia

Na rysunku 10.15 przedstawiono zależność amplitudy drgań od częstości siły wymuszającej. Zależność ta nazywa się krzywą rezonansu.

Straty mocy, dobroć. Celem obliczenia pracy wykonywanej przez siłę wymuszającą zauważymy, że moc wyraża się wzorem

$$\langle P\rangle = \left\langle M_w \frac{d\varphi}{dt}\right\rangle. \tag{10.68}$$

Moment wymuszający wyraża się wzorem (10.57), wychylenie φ otrzymamy podstawiając amplitudę (10.65) do (10.61)

$$\varphi = \frac{P}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]^{1/2}}\cos(\omega t+\delta).$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do (10.68) otrzymamy

$$\langle P\rangle = \frac{PM_0\omega}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta\omega^2]^2}\langle\cos\omega t\sin(\omega t+\delta)\rangle. \tag{10.69}$$

Ponieważ $\langle\sin(\omega t+\delta)\rangle = \langle\sin\omega t\cos\delta+\cos\omega t\sin\delta\rangle$

$$\text{i}\quad \langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle = \left\langle\frac{1}{2}\sin 2\omega t\right\rangle = 0 \quad \text{oraz} \quad \langle\cos^2\omega t\rangle = \frac{1}{2},$$

otrzymamy

$$\langle\cos\omega t\sin(\omega t+\delta)\rangle = \langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle\cos\delta+\langle\cos^2\omega t\rangle\sin\delta = \frac{1}{2}\sin\delta.$$

Korzystając z wzoru (10.64) oraz tożsamości $\sin\delta = \dfrac{-\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}}$ otrzymamy

$$\sin\delta = \frac{2\beta\omega}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]^{1/2}}.$$

Podstawiając wyniki uśrednień oraz powyższe wyrażenie na $\sin\delta$ do (10.69) i korzystając z (10.59) oraz (10.19) otrzymamy

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{J}P^2\frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2-\omega^2)^2-\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}. \tag{10.70}$$

W przypadku rezonansu, gdy $\omega = \omega_0$, moc absorbowana wynosi

$$P_{\text{rez}} = \frac{1}{2}\mathcal{J}P^2\tau. \tag{10.71}$$

Wprowadzimy pojęcie połówkowej szerokości krzywej rezonansu $(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}$. Jest to $(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}} = \omega_0-\omega$ odchylenie częstości ω od częstości rezonansu ω_0, przy którym moc czerpana przez układ zmaleje do połowy wartości rezonansowej $\left(\frac{P_{\text{rez}}}{2}\right)$. Porównując połowę wartości mocy w rezonansie (10.71) z wyrażeniem (10.70), otrzymamy

$$\frac{\tau}{2} = \frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2},$$

skąd

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} = \frac{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)}{\omega} \simeq \frac{\omega_0 2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}}{\omega},$$

$$\frac{1}{\tau} \simeq 2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}, \tag{10.72a}$$

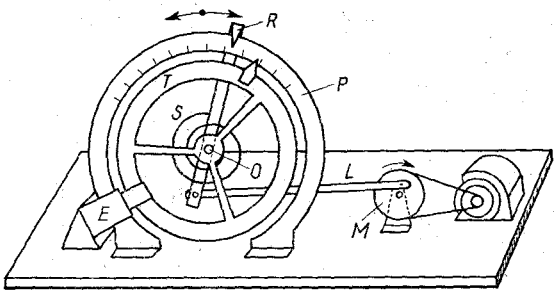
czyli całkowita szerokość krzywej rezonansu jest równa odwrotności czasu relaksacji. Podstawiając powyższe wyrażenie do (10.32) otrzymamy wyrażenie na dobroć

$$Q = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}}, \tag{10.72}$$

a więc dobroć jest równa stosunkowi częstości rezonansowej do całkowitej szerokości krzywej rezonansu (mierzonej w połowie wysokości tej krzywej).

Aparatura

Podstawową częścią przyrządu jest wahadło balansowe zbudowane podobnie jak w zegarach. Składa się ono z tarczy balansowej T (rys. 10.16) połączonej sprężyną S z ramieniem R. Tarcza wraz z ramieniem osadzone są na wspólnej osi O. Dla zmniejszenia strat energii wskutek tarcia tarcza osadzona jest na łożyskach kulkowych. Ruch tarczy można tłumić za pomocą elektromagnesu E. Źródłem siły hamującej ruch tarczy



10.16. Przyrząd do badania rezonansu mechanicznego.

są prądy wirowe powstające w części tarczy znajdującej się w polu magnetycznym wytworzonym przez elektromagnes. Za pomocą pręta L można przyłożyć do ramienia sinusoidalnie zmieniający się moment kierujący. Działanie tego momentu przenosi się poprzez sprężynę na tarczę balansową. Jego źródłem jest silnik napędzający mimośrodową tarczę M. Wychylenie tarczy balansowej oraz ramienia obserwować można na skali P.

Pomiary

Na wstępie mierzymy następujące wymiary tarczy balansowej: średnicę zewnętrzną $2R$, średnicę wewnętrzną $2r$, szerokość szprych s i grubość tarczy h.

a. Wyznaczanie logarytmicznego dekrementu tłumienia. Łączymy obwód elektromagnesu według rys. 4.15, a silnik poprzez autotransformator do sieci prądu przemien-

nego. Ramię R ustawiamy w takim położeniu, by jego strzałka wskazywała zero na skali. Tarczę wychylamy z położenia równowagi w prawo do położenia zaznaczonego pełną kreską podziałki (np. 4). Po zwolnieniu tarcza waha się i jej amplituda powoli maleje. Zapisujemy amplitudę N-tego wychylenia w prawo. Liczbę wychyleń dobieramy w taki sposób, by ostatnia odczytana amplituda pokrywała się z jedną z kresek skali (np. 2,5 lub 3). Mierzymy czas trwania N wahnięć. Podobne pomiary wykonujemy przynajmniej dla 6-ciu wartości natężeń prądu w obwodzie elektromagnesu. Dla każdej z wartości natężenia prądu wykonujemy po trzy pomiary.

b. Wyznaczanie krzywej rezonansu. W obwodzie elektromagnesu włączamy prąd o natężeniu 2–3 A. Jeżeli w czasie wykonywania tej części doświadczenia natężenie prądu ulegnie zmianie, należy je skorygować za pomocą opornika R (rys. 4.15). Włączamy silnik do źródła prądu i zmieniając powoli częstość obrotów silnika za pomocą autotransformatora obserwujemy przy jakim położeniu suwaka występuje rezonans. W miarę wzrostu częstości obrotów silnika amplituda drgań powoli rośnie, osiąga maksymalną wartość dla częstości rezonansowej, po czym znowu maleje. Natężenie prądu elektromagnesu korygujemy do takiej wartości, by w rezonansie amplituda była duża, lecz mieściła się w skali P. Musimy zaobserwować i zapisać, w jakim przedziale położeń suwaka autotransformatora mieści się krzywa rezonansu. W wyznaczonym przedziale położeń suwaka wybieramy przynajmniej 10 punktów, dla których wykonamy pomiary. Punkty wybieramy w taki sposób, by po obydwu stronach punktu odpowiadającego rezonansowi była taka sama ich liczba. Dla każdej wybranej w ten sposób częstości mierzymy maksymalną amplitudę drgań tarczy oraz czas trwania 10 wahnięć ramienia R. Wykonujemy prowizoryczny wykres zależności amplitudy od czasu i sprawdzamy czy wybrane przez nas punkty dobrze wyznaczają przebieg krzywej. Jeżeli w pewnych częściach krzywej, a szczególnie w pobliżu jej maksimum brakuje punktów, wykonujemy pomiary dodatkowe.

Obliczenia

Obliczamy moment bezwładności tarczy balansowej $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_p$, który jest sumą momentu bezwładności obręczy $\mathcal{J}_0$ i prętów „szprych" $\mathcal{J}_p$. Ostateczną postać wzoru na $\mathcal{J}$ wyprowadzamy korzystając z wzorów podanych w tablicy II i wyrażając w uzyskanych wzorach masę przez gęstość. Korzystając z wzoru (10.22a) obliczamy logarytmiczny dekrement tłumienia dla każdego z pomiarów. Obliczamy średnie wartości dla pomiarów wykonanych przy tym samym natężeniu prądu. Z wzoru (10.23) obliczamy czasy relaksacji oraz ze wzoru (10.24) wartości współczynnika tłumienia H, a z wzoru (10.32) dobroć obwodu. Wykreślamy zależność czasu relaksacji τ od natężenia I prądu płynącego przez elektromagnes. Wyniki pomiaru krzywej rezonansu opracowujemy następująco. Obliczamy częstość drgań ω siły wymuszającej i wykreślamy zależność amplitudy drgań od częstości siły wymuszającej (krzywą rezonansu). Z wykresu określamy częstość rezonansową ω_0 i szerokość krzywej rezonansu $2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}$ oraz obliczamy dobroć z wzoru (10.72).

Obliczamy amplitudę M_0 momentu wymuszającego z wzoru, który otrzymamy podstawiając (10.67) do (10.59). Przyjmujemy wartość β obliczoną w pierwszej części doświadczenia dla prądu o natężeniu stosowanym przy wyznaczaniu krzywej rezo-

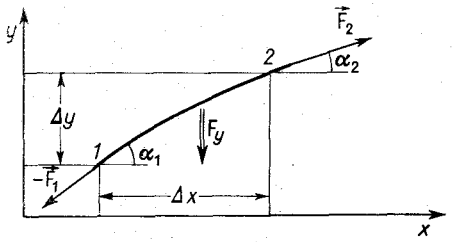
nansu. Na ω_0 przyjmujemy częstość drgań swobodnych, a na ψ_{rez} wartość z wykresu. Obliczamy błędy: momentu bezwładności, częstości drgań własnych przy $I = 0$, czasu relaksacji τ, współczynników tłumienia β i H (te ostatnie z pomiarów wykonanych dla natężenia prądu, przy którym wyznaczaliśmy krzywą rezonansu), amplitudy momentu siły wymuszającej i dobroci Q określanej z tłumienia i z krzywej rezonansu. Sprawdzamy zgodność wyników uzyskanych na Q dwiema różnymi metodami.

11. DRGANIA AKUSTYCZNE

11.01. RÓWNANIE FALI (C, rozdz. 2; J, § 15.11)

Na element Δx, wychylonej z położenia równowagi struny działają siły F i $-F$, tworzące z osią x niewielkie kąty α_1 i α_2 (rys. 11.1). Składowe tych sił w kierunku osi y wynoszą: $-F\sin\alpha_1$ i $F\sin\alpha_2$, a wypadkowa w kierunku osi y wynosi $F_y = F(\sin\alpha_2 - -\sin\alpha_1)$. Wychylenie struny i wartości kątów są nieznaczne, stąd przyjmujemy $\sin\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1$ oraz $\sin\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2$ i siłę wypadkową wyrażamy wzorem

$$F_y = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right].$$



11.1. Odcinek wychylonej struny.

Podstawiając $F_y = \varrho S\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, gdzie $\Delta m = \varrho S\Delta x$ otrzymamy równanie ruchu elementu Δx struny

$$\varrho S\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right].$$

Dzieląc powyższe równanie przez $\varrho S\Delta x$, przechodzimy do granicy $\Delta x \to dx$ i podstawiając $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ otrzymamy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\varrho S}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Podstawiając ponadto

$$c^2 = \frac{F}{\varrho S} \tag{11.1}$$

otrzymamy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{11.2}$$

Jest to *równanie różniczkowe fali* poprzecznej, rozchodzącej się w kierunku osi x. Jej drgania odbywają się wzdłuż osi y. Równanie to posiada charakter ogólny i stosuje się do fal wszelkiego typu. Jego rozwiązanie nazywa się *równaniem fali* i ma postać

$$y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \delta\right] \tag{11.3}$$

lub

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \delta\right]. \tag{11.3a}$$

Sprawdzając równanie (11.2) przez obliczenia pochodnych ze wzoru (11.3) i podstawienie otrzymamy interpretację współczynnika c

$$c^2 = \frac{\lambda^2}{T^2} \quad \text{lub} \quad c^2 = \lambda^2\nu^2; \tag{11.4}$$

jest to *prędkość rozchodzenia się fali*, λ jest jej *długością*, T — *okresem*, a ν — *częstością*. Korzystając z równania (11.1) stwierdzimy, że prędkość rozchodzenia się fali w strunie jest proporcjonalna do pierwiastka z siły naprężającej, a odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z gęstości i przekroju poprzecznego.

11.02. FALE STOJĄCE (S1, § 102 i 111; C, rozdz. 3)

Załóżmy, że wzdłuż osi x i od punktu $x_1 = 0$ do $x_2 = l$ rozchodzi się fala bez przesunięcia w fazie (por. wzór. 11.3), o równaniu

$$y_1 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

i równocześnie w ujemnym kierunku $-x$ rozchodzi się z punktu $x_2 = l$ fala

$$y_2 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right).$$

W wyniku interferencji otrzymamy falę wypadkową $y = y_1 + y_2$;

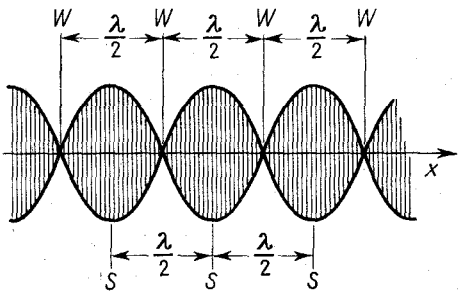
$$y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\frac{t}{T}. \tag{11.5}$$

Wyrażenie $2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$ odgrywa tu rolę, zależnej od położenia x, amplitudy drgań, zajmującej obszar zakreskowany na rysunku (11.2). Punkty W spełniające warunek

$$\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0, \quad \text{skąd} \quad 2\pi\frac{x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{czyli} \quad x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \tag{11.6}$$

w których drgania nie występują, nazywamy *węzłami*. Kolejne węzły znajdują się w punktach $x' = \frac{1}{4}\lambda$, $x'' = \frac{3}{4}\lambda$, ..., a ich wzajemne odległości wynoszą $x'' - x' = \frac{\lambda}{2}$, ... Położenie miejsc, w których występuje największa amplituda drgań, czyli tzw. *strzałek* określa warunek

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 1, \quad \text{skąd} \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = n\pi, \quad \text{czyli} \quad x = n\frac{\lambda}{2}. \tag{11.7}$$



11.2. Fala stojąca (graficzny obraz równania 11.5).

Odległość sąsiednich strzałek wynosi również $\frac{\lambda}{2}$. Obraz, który otrzymujemy w wyniku nałożenia fal biegnących w przeciwnych kierunkach, nazywamy *falą stojącą*.

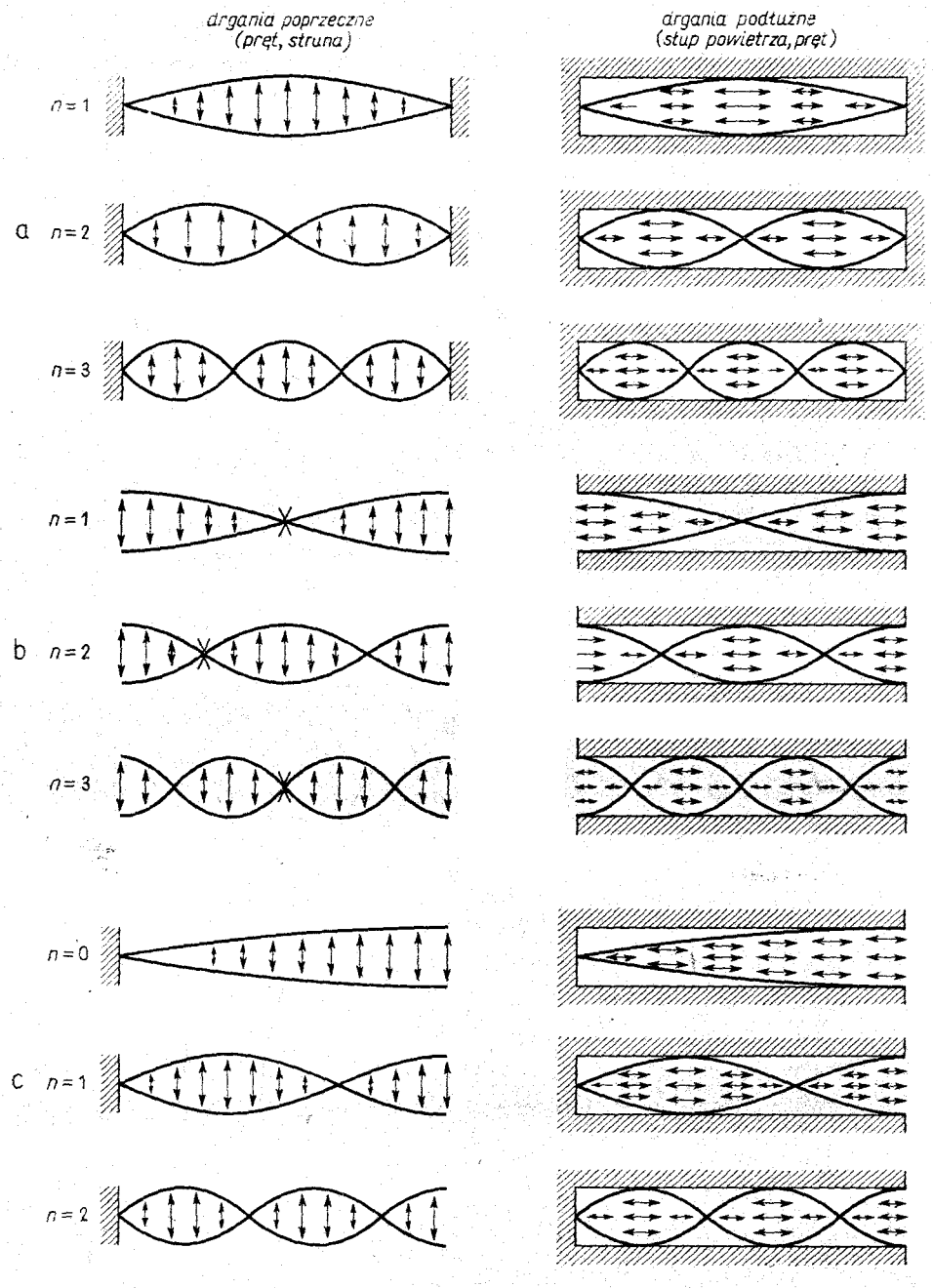
W omawianym przypadku źródło drgań znajdowało się w punkcie $x_1 = 0$, a falę biegnącą w kierunku $-x$ uzyskujemy przez odbicie fali tzw. bieżącej (czyli rozchodzącej się w kierunku $(+x)$ w punkcie $x_2 = l$. Odbicie fali następuje na każdej granicy dwóch środowisk. Gdy odbicie następuje od środowiska gęstszego, to nie jest możliwe drganie cząsteczek doń przylegających i na granicy musi wytworzyć się węzeł, czyli $\cos 2\pi \frac{l}{\lambda} = 0$, co zachodzi tylko wtedy, gdy

$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}. \tag{11.8}$$

Warunek powyższy oznacza, że fala stojąca może się wytworzyć w strunie pobudzanej do drgań na jednym końcu i ograniczonej środowiskiem gęstszym na drugim końcu tylko w przypadku, gdy na jej długości mieści się nieparzysta liczba ćwiartek fal. W przypadku odbicia od środowiska rzadszego, na końcu $(x_2 = l)$ wystąpić musi strzałka drgań, to znaczy $\left|\cos 2\pi \frac{l}{\lambda}\right| = 1$, skąd

$$l = n\frac{\lambda}{2}. \tag{11.8b}$$

Zatem w takim przypadku na długości l musi się mieścić całkowita liczba półfal. Można udowodnić, że w przypadku, gdy źródło drgań nie znajduje się w punkcie $x_1 = 0$, fala stojąca powstaje tylko wtedy, gdy długość struny spełnia następujące warunki zależne od ograniczenia obszaru:



11.3. Różne możliwe sposoby drgań prętów i słupów powietrza w przypadku, gdy obszar drgań jest ograniczony z dwu stron środowiskiem gęstszym (a), z dwu stron środowiskiem rzadszym (b), z lewej strony środowiskiem gęstszym, a z prawej rzadszym (c).

a. Granicę obydwu końców stanowi środowisko gęstsze, wtedy również $l = n\frac{\lambda}{2}$ (rys. 11.3a).

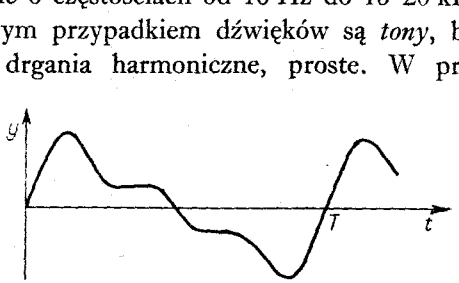
b. Granicę obydwu końców stanowi środowisko rzadsze, wtedy również $l = n$ (rys. 11.3b).

c. Jedną granicę stanowi środowisko rzadsze, a drugą środowisko gęstsze, wtedy $l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ (rys. 11.3c).

Wymienione reguły stosują się do drgań strun, prętów i słupów powietrza. W przypadku strun i prętów, reguły obowiązują zarówno dla fali poprzecznej jak dla podłużnej, a punkty zamocowania stanowią węzły drgań. Zgodnie z równaniem (11.4) częstości drgań są ściśle określone.

11.03. FALA GŁOSOWA (S1, § 107–111; C, rozdz. 4)

Ze względu na sposób drgania cząstek, fale dzielą się na podłużne i poprzeczne. W *fali podłużnej* kierunek drgań jest równoległy do kierunku rozchodzenia się, a w *fali poprzecznej* — prostopadły. Fala podłużna może rozchodzić się w każdym środowisku, natomiast fala poprzeczna tylko w ciałach stałych. W zjawiskach akustycznych występuje fala podłużna. Źródłem fali jest drgające ciało (np. struna) wzbudzające drgania w otaczającym powietrzu. Fale o częstościach od 16 Hz do 16–20 kHz ucho ludzkie odbiera jako *dźwięki*. Szczególnym przypadkiem dźwięków są *tony*, będące drganiami ściśle sinusoidalnymi; są to drgania harmoniczne, proste. W przypadku drgań złożo-



11.4. Wykres dźwięku (drganie periodyczne lecz nie siunsoidalne).

nych lecz periodycznych (np. rys. 11.4), zgodnie z teorią szeregów Fouriera, dźwięk rozłożyć możemy na tony harmoniczne, których częstości są wielokrotnością częstości najniższej ν_1 zwanej częstością lub tonem podstawowym, czyli pierwszym harmonicznym. Zazwyczaj ton podstawowy ma największą amplitudę i określa częstość dźwięku. Dźwięki aperiodyczne nie dające rozłożyć się na drgania harmoniczne nazywamy *szmerami*.

Amplituda dźwięku określa *natężenie dźwięku*, a częstości tonu podstawowego odpowiada *wysokość dźwięku*. Dźwięki różnej wysokości mogą różnić się *barwą*. O barwie dźwięku decydują natężenia (czyli amplitudy) wchodzących w jego skład wyższych drgań harmonicznych. (Barwę dźwięku określamy jako przyjemną, miękką gdy tony składowe o niskich częstościach mają stosunkowo dużą amplitudę. Przy dużej przewadze tonów wysokich barwa staje się nieprzyjemna, metaliczna.)

Fala padająca na przeszkodę ulega zawsze częściowemu odbiciu. Fala odbita nakłada się na bieżącą, stąd w pewnych przypadkach powstać może fala stojąca, a w innych ...ogłos lub *echo*. Rozróżnienie pojęć pogłosu i echa zależy od fizjologicznych własności ...rganów mowy i słuchu. Czas potrzebny do wymówienia lub usłyszenia jednej zgłoski ...ynosi około 0,1 s. Gdy równocześnie odbieramy sygnał bieżący i odbity, tzn. gdy ...chodzą one do nas w odstępie czasu krótszym od 0,1 s, wtedy fala odbita przedłuża ... bieżącą i zjawisko nazywamy pogłosem. Gdy falę bieżącą i odbitą odbieramy jako ...zielne sygnały, zjawisko nazywamy echem. Prędkość fali głosowej w powietrzu wynosi ... $m \cdot s^{-1}$ i w ciągu 0,1 s przebędzie ona 32 m. Zatem przy odbiciu fal od przeszkody ...jdującej się w odległości mniejszej od 16 m (fala drogę tę musi przebyć dwukrotnie) ...stępuje nakładanie fal czyli pogłos, a przy odległościach większych od 16 m usłyszymy ...ho.

...04. PRĘDKOŚĆ FALI W POWIETRZU (S1, § 107)

Można udowodnić (por. § 11.2, wzór 11.17), że prędkość fali podłużnej w ciele stałym o gęstości ϱ i module Younga E wyraża się wzorem

$$c = \sqrt{E/\varrho}. \tag{11.9}$$

W podłużnej fali nie zachodzi zmiana wymiarów poprzecznych i stosować możemy prawo Hooke'a (S1, § 73)

$$E = \frac{\Delta p}{-\frac{\Delta l}{l}\frac{S}{S}} = \frac{\Delta p}{-\frac{\Delta V}{V}} = -V\frac{dp}{dV}. \tag{11.10}$$

Znak minus wkazuje, że zmiany ciśnienia posiadają przeciwny znak niż zmiany objętości. ...e względu na dużą prędkość rozchodzenia się fal możemy założyć, że zachodzą one ...liabatycznie, czyli spełnione jest równanie adiabaty

$$pV^{\varkappa} = \text{const},$$

...dzie $\varkappa = c_p/c_v$. Różniczkując równanie adiabaty i dzieląc przez $V^{\varkappa}$ otrzymamy

$$\frac{dp}{dV} = -\varkappa\frac{p}{V}.$$

Podstawiając powyższy związek do (11.10) otrzymamy

$$E = \varkappa p.$$

...względniając ten związek w (11.9) prędkość fali podłużnej wyrazimy wzorem

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\varrho}}. \tag{11.11}$$

...e wzoru na gęstość $\varrho = m/V$ stosując równanie Clapeyrona otrzymamy

$$\varrho = \frac{mp}{Vp} = \frac{mp}{NRT}.$$

Ponieważ m/N = μ jest masą drobinową, stąd

$$\varrho = \frac{\mu p}{RT}.$$

Podstawiając powyższy związek do (11.11) otrzymamy

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa RT}{\mu}},$$

skąd wynika, że prędkość fali podłużnej zależy od pierwiastka z temperatury mierzonej w skali Kelvina. Stosując skalę Celsjusza $T = 273 + \tau = \frac{1}{\alpha} + \tau$, ostatni wzór napisać możemy w postaci

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa R}{\mu}\left(\frac{1}{\alpha} + \tau\right)}.$$

Oznaczając prędkość fali w temperaturze $\tau = 0°C$ przez $c_0 = \sqrt{\frac{\varkappa R}{\mu\alpha}}$ otrzymamy związek

$$c = c_0\sqrt{1 + \alpha\tau}, \tag{11.12}$$

wyrażający zależność prędkości fali głosowej od temperatury, w którym $\alpha = \frac{1}{273} \simeq$ $\simeq 0{,}04$.

11.1. ANALIZA DRGAŃ STRUNY

Cel: badanie kolejnych drgań harmonicznych struny pobudzanej metodą rezonansową.

Przyrządy: elektromagnes (§ 4.9), transformator (§ 4.5), mikromierz (§ 3.1).

Zagadnienia: drgania harmoniczne proste (§ 10.01; S1, § 43), podstawy akustyki (§ 11.01–04; S1, § 97 i 98 oraz 102 i 103; H1, § 19 i 20).

Wprowadzenie

Struna jest zawsze dwustronnie zamocowana i drga w jeden ze sposobów pokazanych na rysunku 11.3a tylko w przypadku, gdy jest pobudzana częstością ν dającą się obliczyć przez podstawienie (11.4) do (11.8b), porównaj w § 11.02 przypadek a.

$$l = n\frac{c}{2\nu_n}. \tag{11.13}$$

Podstawiając na c wyrażenie (11.1) otrzymamy

$$l = \frac{n}{2\nu_n}\sqrt{\frac{F}{\varrho S}}. \tag{11.14}$$

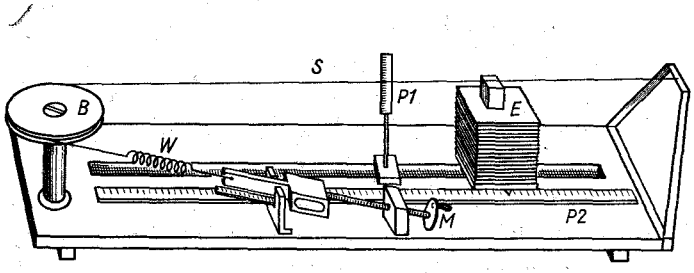
Gdy strunę pobudzamy do drgań w miejscu przypadkowym, występują w niej równocześnie wszystkie drgania spełniające warunek (11.14), a więc drgania harmoniczne o częstościach $\nu_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\varrho S}}$, $\nu_2 = 2\nu_1, \nu_3 = 3\nu_1, \ldots \nu_n = n\nu_1$ lub ogólnie

$$\nu_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\varrho S}}. \tag{11.14a}$$

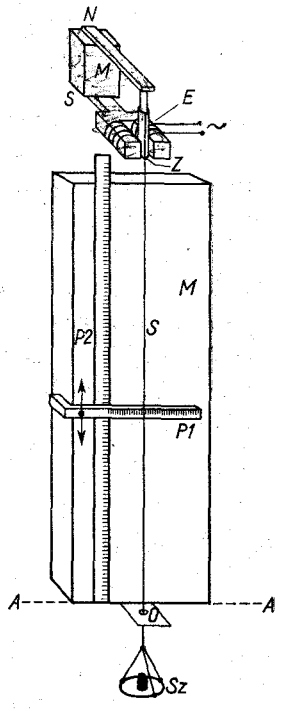
Każdy element struny wykonuje wtedy drganie wypadkowe powstałe wskutek nałożenia drgań harmonicznych prostych $\nu_1, \nu_2, \ldots$, które nie jest już drganiem sinusoidalnym, lecz zachowuje nadal periodyczność. Stosując metodę szeregów Fouriera możemy to drganie zanalizować rozkładając na drgania składowe. Pobudzając strunę do drgań w miejscu przewidzianej strzałki i dobierając wartość siły F możemy pobudzić strunę do drgań z dowolną częstością ν_n.

Aparatura

a. Struna pozioma. Zasadniczą częścią przyrządu (rys. 11.5) jest stalowa struna *S*. Pobudzana do drgań w sposób rezonansowy za pomocą elektromagnesu *E* zasilanego prądem przemiennym o częstości 50 Hz. Struna jest przyciągana przy każdym maksimum i minimum natężenia, a więc z częstością 100 Hz. Ze względu na dwustronne zamocowanie, struna wykonuje drgania pokazane na rysunku 11.3a, jeżeli spełniony jest warunek (11.14). Celem dobrania siły F zastosowano wagę sprężystą W wraz z mechanizmem



11.5. Przyrząd do analizy drgań struny stalowej.



11.6. Przyrząd do analizy drgań struny pionowej

śrubowym *M*. Amplitudę drgań odczytujemy na podziałce *P1*, a położenie elektromagnesu i podziałki *P1*, na podziałce *P2*. Bloczek *B* jest osadzony na łożysku kulkowym, dzięki czemu możemy zaniedbać tarcie. Dla wzbudzenia pierwszej harmonicznej ($n = 1$) elektromagnes ustawiamy w połowie długości struny, dla $n = 2$ na $\frac{1}{4}$ długości, dla $n = 3$ na $\frac{1}{6}$ długości lub w połowie itd. Dla zwiększenia precyzji odczytu wychylenia należy stosować oświetlenie stroboskopowe (np. lampę jarzeniową).

b. Struna pionowa. W tym przyrządzie struną może być żyłka nylonowa lub nić. Jest ona pobudzana do drgań za pomocą płaskiej żelaznej sprężyny *Z*. Dolny koniec tej sprężyny znajduje się między biegunami elektromagnesu *E* zasilanego prądem przemiennym. Sprężyna i elektromagnes stanowią części obwodu magnetycznego magnesu stałego lub elektromagnesu *M*. Zatem dolny koniec sprężyny jest stale biegunem magnesu (np. *N*) i w polu magnetycznym elektromagnesu *E* wykonuje drgania z częstością 50 Hz. (Sprężynę pobudzać można do drgań również w prostszy sposób, podobnie jak w przyrządzie z poziomą struną.) Dla uzyskania fali stojącej dobieramy obciążenie w taki sposób, by spełnione były warunki rezonansu (równanie 11.8a). Przy dokładnym dobieraniu obciążenia, poza odważnikami, stosować możemy również piasek. Można również zamiast szalki zastosować naciąg sprężynowy. Typ uzyskanej fali stojącej przedstawia rysunek 11.3c. Strzałka znajduje się na górnym końcu, a węzeł w punkcie *O*, w którym struna przeciągnięta jest przez mały otwór. Do odczytywania amplitud i położenia strzałek wzdłuż struny służą podziałki *P1* i *P2*. Struna jest rozciągnięta na tle matowej szyby *M* podświetlonej lampą jarzeniową dającą efekt stroboskopowy, co ułatwia odczyt amplitudy.

Pomiary

Sposób wykonania pomiarów nie zależy od typu stosowanego przyrządu. Jeżeli sprężyna *W* nie jest dynamometrem wyskalowanym, wzorcujemy ją wykonując pomiar zależności wydłużenia od obciążenia dla zakresu obciążeń wskazanych w instrukcji. Mierzymy długość i średnicę struny. Włączamy prąd w obwodzie elektromagnesu i siłę napinającą strunę oraz położenie elektromagnesu dobieramy w ten sposób, by uzyskać jedno z szukanych drgań harmonicznych. Analizujemy wynik pomiaru gęstości w oparciu o wzór (11.14a) i planujemy właściwy sposób pomiaru poszczególnych wielkości prostych. Wykonujemy ostateczne pomiary i mierzymy rozkład amplitud wzdłuż połowy długości fali stojącej dla 1, 2 i 3-cich drgań harmonicznych.

Obliczenia

Wykreślamy przebieg zależności amplitudy drgań od położenia dla wszystkich badanych drgań harmonicznych. Na tym samym wykresie nanosimy sinusoidę o amplitudzie równej amplitudzie drgań struny i sprawdzamy zgodność punktów doświadczalnych z przebiegiem teoretycznym. Z wzoru (11.14) lub (11.8a) obliczamy gęstość struny dla każdej harmonicznej. Przyjmujemy, że częstość drgań jest znana i wynosi 100 Hz dla przyrządu omówionego w przypadku dla struny poziomej lub 50 Hz w przypadku dla struny pionowej. Ze wzoru (11.13) obliczamy prędkość rozchodzenia się fali w strunie. Jako wynik końcowy przyjmujemy wartości średnie $\bar{\varrho}$ i $\bar{c}$. Błędy obliczamy dla gęstości i prędkości dźwięku w oparciu o wyniki uzyskane dla 1 i 2-giej harmonicznej. Sprawdzamy wzajemną zgodność wyników obydwu harmonicznych oraz zgodność z tablicami fizycznymi.

11.2. PRĘDKOŚĆ FALI W PRĘCIE

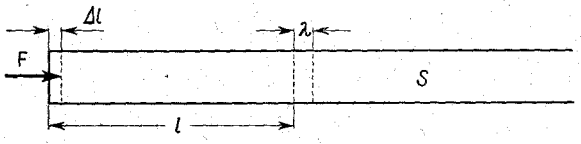
Cel: wyznaczyć prędkość rozchodzenia się podłużnej fali głosowej w kilku metalach (miedź, aluminium, żelazo...) oraz moduły Younga tych materiałów.

Przyrządy: Generator akustyczny (§ 4.11), mikrofon i głośnik (§ 4.10), woltomierz lampowy lub oscylograf katodowy (§ 24.01–03), mikromierz (§ 3.1).

Zagadnienia: drgania harmoniczne proste (§ 10.01; S1, § 43; C, rozdz. 2). Podstawy akustyki (§ 11.01–04, S1 § 97 i 98 oraz 102 i 103; H1, § 19 i 20).

Wprowadzenie

Celem wzbudzenia fali stojącej w pręcie wystarczy wywoływać periodycznie na jednym z jego końców zgęszczenie i rozrzedzenie. Załóżmy, że siła F zaczyna działać w chwili $t = 0$ (rys. 11.7) przesuwając w czasie t lewy koniec pręta w prawo na odległość $l = vt$, gdzie v jest prędkością przesunięcia tej powierzchni. Na skutek zadziałania



11.7. Rozchodzenie się zaburzeń w prętach.

siły, w pręcie rozchodzi się fala zagęszczenia, która w czasie t przesunie się na odległość $l = ct$. Zakładamy, że $v \ll c$. Odkształcenie pręta stosuje się do prawa Hooke'a (por. wzór 7.4), zatem

$$F = SE\frac{\Delta l}{l}\cdot\frac{t}{t} = SE\frac{v}{c}. \tag{11.15}$$

W ciągu następnego okresu T, który liczymy od chwili t, czoło fali zgęszczenia przesunie się dalej o odcinek $\lambda = cT$, natomiast masa odcinka λ wynosząca $m = \varrho S\lambda$ zostaje wprawiona w ruch i osiąga prędkość v. Jej przyspieszenie wynosi $a = \frac{v}{T}$. Ponieważ pozostała część pręta w czasie T nie zmieniła swej prędkości, zachodzi

$$F = ma = \varrho Scv. \tag{11.16}$$

Siły wyrażone wzorami (11.15) i (11.16) muszą być sobie równe. Z ich porównania otrzymamy wzór na prędkość c fali podłużnej w pręcie

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}. \tag{11.17}$$

Drgania stojące w pręcie pokazano na rysunku 11.3. W omawianym doświadczeniu wzbudzić można tylko te spośród drgań pokazanych na rys. 11.3b, które posiadają węzeł w połowie długości, czyli dla $n = 1, 3, 5 \ldots$ Wtedy na długości pręta mieści się nieparzysta wielokrotność połówek fal, czyli

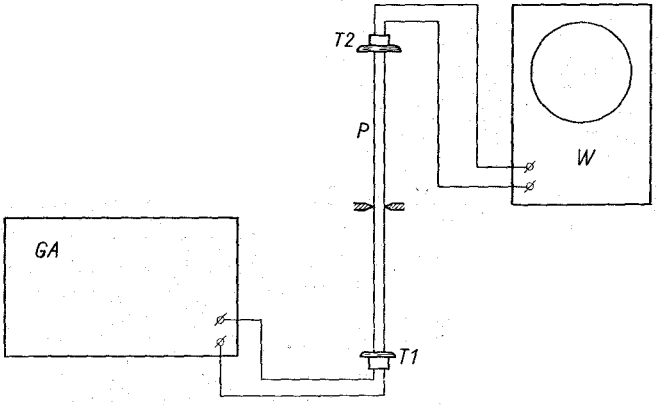
$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Podstawiając $c = \lambda\nu$ otrzymamy

$$c = \frac{2l}{2n+1}\nu. \tag{11.18}$$

Aparatura

Aparatura (rys. 11.8) składa się z generatora akustycznego *GA*, pręta *P*, dwóch elektromagnesów (z słuchawek telefonicznych) *T1* i *T2* oraz woltomierza lampowego lub oscylografu katodowego *W*. Pręt musi być umocowany w połowie długości z dokładnością do 1 mm, ponieważ od tego zależy wynik doświadczenia. Aparatura działa następująco: prąd z generatora płynie przez elektromagnes *T1*. Elektromagnes zasilany częstością ν_g dwukrotnie w ciągu okresu przyciąga koniec żelaznego pręta *P* i wzbudza w nim drgania o częstości $2\nu_g$, lecz tylko wtedy, gdy częstość $2\nu_g$ jest jedną z częstości rezonansowych ν_n pręta. Drgania pręta w elektromagnesie odbiornika *T2* wzbudzają prąd przemienny, którego amplituda jest największa wtedy, gdy warunki rezonansu spełnione są dokładnie. Istnieje niebezpieczeństwo wzbudzenia fali poprzecznej. Zapobiega temu mała szczelina (0,1–0,2 mm) między *T1* i *P*. Szczelinę można zmniejszyć stosując rdzeń z magnesu trwałego dającego natężenie pola w przybliżeniu równe natężeniu pola przemiennego. W tym przypadku częstość wzbudzanych drgań jest równa częstości generatora.



11.8. Aparatura do badania drgań pręta.

W przypadku badania pręta niemagnetycznego na jego końcach przytwierdzone są kawałki żelaza. Długość prętów jest rzędu 30–50 cm.

Pomiary

Łączymy układ według schematu 11.8 i przytwierdzamy pręt w połowie długości oraz elektromagnesy *T1* i *T2*. Włączamy generator i woltomierz (lub oscylograf), a po ich nagrzaniu powoli zwiększamy częstość generatora dobierając precyzyjnie częstości odpowiadające maksimum sygnału i zapisujemy te częstości $\nu_{g(n)}$. Pomiary wykonujemy dla kilku drgań harmonicznych w trzech prętach. Notujemy długości prętów i dokładności.

Obliczenia

Prędkości rozchodzenia się fal dźwiękowych obliczamy z wzoru (11.18) przyjmując częstość ν_g lub $2\nu_g$ (zgodnie z instrukcją). Dla każdego pomiaru określamy rząd *n* drgania. Moduł Younga obliczamy z wzoru (11.17). Jako wyniki końcowe przyjmujemy

średnią arytmetyczną wyników uzyskanych dla kolejnych drgań harmonicznych ($n = 1, 2, \ldots$). Błędy Δc i ΔE obliczamy dla pierwszego drgania harmonicznego zakładając $\Delta n = 0$. Przyjmujemy, że pozostałe wyniki obarczone są takim samym błędem jak pierwsza harmoniczna. Sprawdzamy zgodność uzyskanych wyników z tablicami fizycznymi.

11.3. BIEŻĄCA FALA GŁOSOWA

Cel: wyznaczyć prędkość fali głosowej z przesunięcia fazy występującego między głośnikiem i mikrofonem. Pomiary wykonać przy różnych częstościach.

Przyrządy: generator akustyczny, głośnik i mikrofon (4.10), oscylograf katodowy (§ 24.01–03).

Zagadnienia: akustyka (§ 11.01–04; S1, § 107, 111; H1, § 19 i 20), figury Lissajous (§ 10.04; S1, § 43–45; P1, § 26–31), gazy doskonałe (S2, § 8).

Wprowadzenie

Równanie fali głosowej (11.3) rozchodzącej się wzdłuż osi x, w dwóch punktach leżących na osi x, odległych o r, przybiera postać

$$y_1 = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\delta\right],$$
$$y_2 = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x+r}{\lambda}\right)+\delta\right]. \tag{11.19}$$

Między falą w punkcie *1* i w punkcie *2* istnieje więc dodatkowa różnica fazy $\Delta\delta = 2\pi\frac{r}{\lambda}$, która po uwzględnieniu związku (11.4) wynosi

$$\Delta\delta = 2\pi\nu\frac{r}{c}. \tag{11.20}$$

Obydwa sygnały (11.19) zamienione za pomocą mikrofonów na drgania elektryczne i przyłożone odpowiednio do płytek x i y oscylografu dadzą jedną z figur Lissajous. Przy zwiększaniu r zaobserwujemy ciągłą zmianę fazy tej figury (por. wzór 11.20). Przy pewnych położeniach r_i występują podobne figury, np. linia prosta, która w pełnym cyklu pojawia się dwukrotnie (raz z nachyleniem dodatnim, a drugi raz z ujemnym). Z teorii wynika, że różnica fazy między dwoma kolejnymi położeniami r_{i-1} oraz r_i odpowiadającymi prostej wynosi π. Stąd zgodnie ze wzorem (11.20) mamy $\pi = 2\pi\nu\frac{r_i}{c} - 2\pi\nu\frac{r_{i-1}}{c}$. Podstawiając

$$\delta r_i = r_i - r_{i-1} \tag{11.21}$$

otrzymamy

$$c = 2\nu\delta r_i. \tag{11.22}$$

Można również obserwować krzywe Lissajous nie zmieniając położenia mikrofonów, lecz częstość ν fali głosowej. Wtedy dla dwóch kolejnych prostych otrzymamy: $\pi = 2\pi \frac{r}{c} \nu_i - 2\pi \frac{r}{c} \nu_{i-1}$. Podstawiając

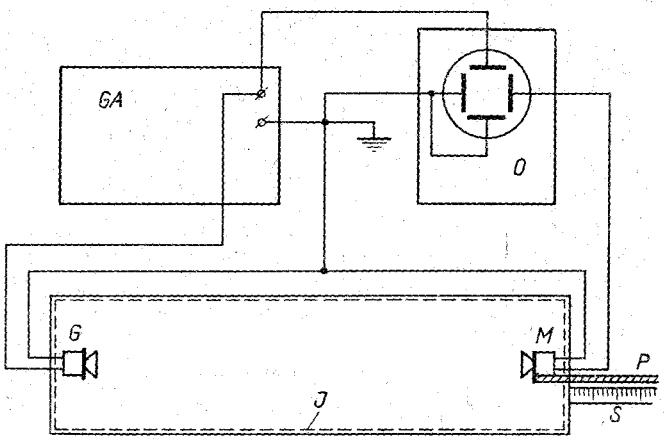
$$\delta\nu_i = \nu_i - \nu_{i-1} \tag{11.21a}$$

otrzymamy

$$c = 2\nu\delta r_i. \tag{11.22a}$$

Aparatura

Z generatora akustycznego *GA* (rys. 11.9) sygnał przykładamy do głośnika *G* i równolegle do odchylających pionowo płytek oscylografu *O*. Fala akustyczna z głośnika rozchodzi się w kierunku mikrofonu *M* generując w nim sygnał elektryczny przykładany następnie do płytek odchylających poziomo (rolę płytek oscylografu można zamienić). Głośnik spełnia równocześnie rolę źródła fali i jednego z punktów: w których falę odbieramy. Celem wyeliminowania efektów związanych z odbiciem fali oraz zabezpieczenia pomieszczenia przed hałasem, głośnik i mikrofon są umieszczone w skrzyni *I* izolowanej akustycznie watą i miękką płytą pilśniową. Mikrofon możemy przesuwać za pomocą pręta *P*, a jego położenie odczytujemy na podziałce *S*.



11.9. Aparatura do badania bieżącej fali głosowej.

Pomiary

Łączymy układ według schematu 11.9, włączamy generator i oscylograf do sieci prądu przemiennego. Dla częstości ν_1, wybranej dowolnie z przedziału 1–5 kHz, odczytujemy kilka kolejnych położeń r_i, którym odpowiada linia prosta na ekranie oscylografu. Każde położenie odczytujemy wielokrotnie. Przed każdym ustaleniem położenia r_i przesuwamy mikrofon nieco w prawo lub w lewo od wartości ustalonej w poprzednim odczycie i na nowo ustalamy położenie odpowiadające linii prostej. Notujemy częstość drgań. Podobną serię pomiarów wykonujemy dla 2–3 innych częstości drgań.

Takie same pomiary powtarzamy dla stałej wartości r zmieniając częstość drgań. Notujemy częstości, przy których otrzymujemy znowu linię prostą. Podobnie jak ustaliliśmy poprzednio położenia, obecnie ustalamy wielokrotnie częstość drgań. Wykonujemy 3–4 serie pomiarów; każdą dla innego położenia mikrofonu.

Obliczenia

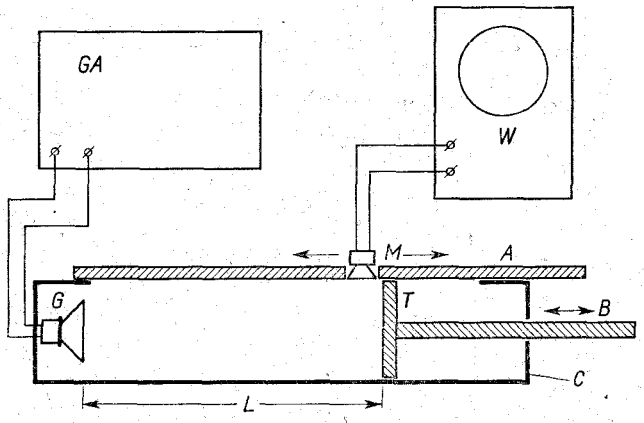
W oparciu o pomiary wykonane w pierwszej części doświadczenia dla każdej częstości ν obliczamy kolejno wartości średnie $\bar{r}_i$ oraz δr_i dla $i = 2, 3, 4$. Dla każdej częstości obliczamy średnią wartość $\overline{\delta r_i}$. Prędkość dźwięku obliczamy z wzoru (11.22). W części drugiej, w której wielkością zmienną była częstość, obliczenia wykonujemy w taki sam sposób posługując się wzorami (11.21a) oraz (11.22a). Obliczamy odchylenia standardowe średniej $S_{\bar{r}_i}$ w części pierwszej oraz $S_{\bar{\nu}_i}$ w części drugiej. W obliczeniach przyjmujemy $S_{\overline{\delta r}} = 2S_{\bar{r}_i}$. Obliczamy odchylenie standardowe $S_{\bar{c}}$, a jako wynik ostateczny przyjmujemy wartość $\bar{c}$ uśrednioną na wszystkie wykonane pomiary.

11.4. REZONANS AKUSTYCZNY

Cel: wyznaczyć prędkość dźwięku w powietrzu i w dwutlenku węgla metodą rezonansu akustycznego
Przyrządy: generator akustyczny, woltomierz lampowy (§ 4.11) lub oscylograf katodowy (§ 25.5) barometr (§ 3.8), mikrofon i głośnik (§ 4.10).
Zagadnienia: fale akustyczne (§ 11.01–04; S1, § 97 i 98, 102, 107–111; H1, § 19 i 20).

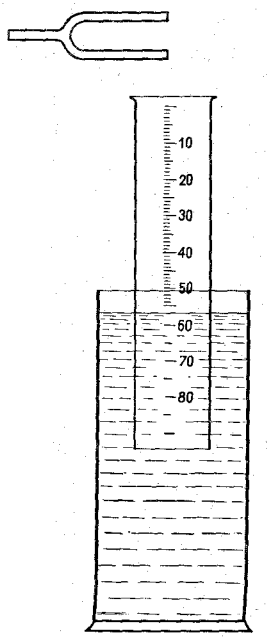
Aparatura

Pokazany na rysunku 11.10 przyrząd składa się z zamkniętej na końcach rury C. Rura ta ma rozcięcie zamykane zasuwką A. W połowie długości zasuwki znajduje się mikrofon M, który wraz z zasuwką może być przesuwany od głośnika G do przesuwalnego tłoka T ograniczającego długość rury. Zasuwka A oraz suwak B tłoka zaopatrzone są w podziałkę pozwalającą odczytać ich położenie. Przestrzeń między głośnikiem G i tłokiem T stanowi zamkniętą komorę rezonansową, w której mogą powstawać fale



11.10. Przyrząd do badania rezonansu akustycznego.

stojące, pokazane na rysunku 11.3c. Mikrofonem badać można maksima i minima tych fal. Głośnik jest zasilany z generatora akustycznego *GA*, a amplitudę drgań bada się za pomocą woltomierza lampowego lub oscylografu katodowego *W*.



11.11. Przyrząd do badania rezonansu akustycznego metodą uproszczoną.

Do badania rezonansu akustycznego stosować można przyrządy prostsze (rys. 11.11), w których długość rury rezonansowej zmienia się wypełniając ją wodą. Mechanizm służący do zmieniania poziomu wody może być wykonany w różny sposób. Przyrządy tego typu nie umożliwiają badania rozkładu amplitudy drgań wzdłuż rury.

Pomiary

Układ łączymy według rysunku 11.10 i mikrofon przysuwamy do głośnika. Częstością generatora lub położeniem tłoczka *T* dostrajamy układ do rezonansu. Rezonans objawia się największym wychyleniem woltomierza lampowego lub największą amplitudą sinusoidy na oscylografie. Mierzymy położenia węzłów i strzałek w warunkach rezonansu, przesuwając powoli suwak *A* określamy dokładnie położenia odpowiadające maksimum wychylenia, a więc strzałkom S_i oraz położenia odpowiadające minimum wychylenia, węzłom W_i. Pomiary każdego punktu powtarzamy kilkakrotnie, przesuwając po każdym odczycie suwak, z położenia ustalonego w poprzednim pomiarze, na przemian w stronę lewą lub prawą i ustalając na nowo położenie ekstremum. Podobne pomiary powtarzamy przy kilku innych częstościach. Celem uzyskania dokładnego obrazu fali stojącej dla jednej z badanych częstości odczytujemy napięcie przesuwając mikrofon w odstępach 5-ciomilimetrowych. Odczytujemy temperaturę i ciśnienie barometryczne.

Wypełniamy przyrząd dwutlenkiem węgla lub innym gazem i powtarzamy pomiary. W przypadku przyrządu z rysunku 11.11 możemy określić tylko długości rury odpowiadające warunkom rezonansu, co pozwala określić długości, na których występują poszczególne harmoniczne fali stojącej.

Obliczenia

Obliczamy długość fali w powietrzu jako

$$\lambda = 2\frac{W_n - W_0}{n} \quad \text{lub} \quad \lambda = 2\frac{S_n - S_0}{n}, \quad \text{lub} \quad \lambda = 4(S - W).$$

Obliczamy prędkość fali w powietrzu lub badanym gazie z wzoru (11.4), prędkość dźwięku w temperaturze 0°C z wzoru (11.12) oraz $\varkappa$ — z wzoru (11.11). Ciśnienie p obliczamy ze zredukowanego wskazania barometru, a gęstość gazu przyjmujemy z tablic. Wykreślamy zależność amplitudy drgań od położenia dla częstości, przy której wykonaliśmy te pomiary. Obliczamy błędy wyznaczonych wielkości.

11.5. INTERFEROMETR QUINCKEGO

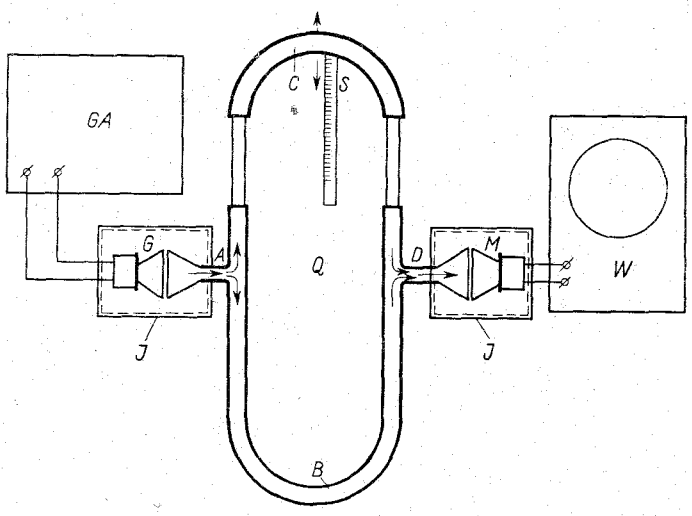
Cel: pomiar prędkości dźwięku w powietrzu za pomocą interferometru Quinckego.

Przyrządy: generator akustyczny (§ 4.11), głośnik i mikrofon (§ 4.10), woltomierz lampowy lub oscylograf katodowy (§ 25.5).

Zagadnienia: fale akustyczne (§ 11.01–04; S1, § 107–111; H1, § 19 i 20), drgania harmoniczne (§ 10.01)

Aparatura

Interferometr Quinckego (rys. 11.12) zbudowany jest z rur metalowych. Fala głosowa od wlotu A do punktu wyjścia D rozchodzi się dwoma drogami: B i C. Ramię C może zmieniać swoją długość podobnie jak w puzonie. Dzięki takiej budowie fala



11.12. Interferometr Quinckego.

w rurze D powstaje w wyniku nałożenia się (interferencji) dwóch fal cząstkowych biegnących ramionami B i C. Jeżeli długość dróg r_B i r_C, w ramionach B i C różni się o parzystą liczbę połówek fal, czyli

$$r_C - r_B = 2n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{maksimum,}$$

wtedy w ramieniu D obydwie fale wzmacniają się i występuje maksymalne natężenie dźwięku. Gdy różnica ta jest równa nieparzystej liczbie półfal, następuje wygaszenie ali w rurze D

$$r - r_B = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \qquad \text{minimum.}$$

Zmieniając długość ramienia C możemy uzyskać kolejne minima (m, n) i maksima (M, n) natężenia dźwięku w rurze D. Długość fali możemy obliczyć z różnicy dróg między dwoma kolejnymi maksimami lub minimami

$$(r_{M,n+1} - r_B) - (r_{M,n} - r_B) = 2(n+1)\frac{\lambda}{2} - 2n\frac{\lambda}{2},$$

skąd

$$r_{M,n+1} - r_{M,n} = \lambda \tag{11.23}$$

i podobnie

$$r_{m,n+1} - r_{mn} = \lambda.$$

W omawianym doświadczeniu źródłem dźwięku jest głośnik G zasilany z generatora akustycznego GA. Odbiornikiem dźwięku jest mikrofon M. Sygnał powstały w mikrofonie jest proporcjonalny do natężenia dźwięku w rurze D. Do pomiaru tego sygnału stosujemy woltomierz lampowy W lub oscylograf katodowy. Głośnik i mikrofon znajdują się w pudełku izolowanym akustycznie watą, która zmniejsza natężenie dźwięku wybiegającego poza aparaturę. Do zmieniania długości ramienia C służy mechanizm śrubowy (nie zaznaczony na rysunku), jego położenie s odczytujemy na podziałce S. Zmiany długości drogi r są dwukrotnie większe od zmian położenia ramienia C. Wprowadzając oznaczenia $r_{M,n+1} - r_{M,n} = 2\delta s^M$, $r_{m,n+1} - r_{m,n} = 2\delta s^m$, zamiast równań (11.23) możemy napisać

$$\delta s^M = \delta s^m = \frac{\lambda}{2}. \tag{11.24}$$

Pomiary

Łączymy układ według rysunku (11.12) i włączamy przyrządy elektronowe do sieci prądu przemiennego. Po pewnym czasie usłyszymy sygnał generatora, a woltomierz lampowy wskaże sygnał pochodzący z mikrofonu. Generator nastawiamy na dowolną częstość z zakresem 1,5 do 6 kHz. Przesuwając ramię C od jednego ze skrajnych położeń w kierunku drugiego, notujemy kolejne położenia maksimów s^M i minimów s^m. Pomiary te wykonujemy dla 5–10 różnych częstości ν_i i powtarzamy trzykrotnie dla każdej z nich. Doświadczenie powyższe możemy również wykorzystać do wzorcowania nieznanego generatora. W tym celu generator nieznany podłączamy w miejsce generatora znanego GA i wykonujemy pomiary takie same jak dla jednej z częstości generatora znanego. Notujemy temperaturę pokojową i ciśnienie atmosferyczne.

Obliczenia

Dla serii pomiarów odpowiadającej częstości ν_i obliczamy δs^M i δs^m jako

$$\delta s^M = \frac{\bar{s}_n^M - \bar{S}_0^M}{n} \quad \text{lub} \quad \delta s^m = \frac{\bar{s}_n^m - \bar{s}_0^m}{n},$$

następnie obliczamy średnią $\delta s = \frac{1}{2}(\delta s^M + \delta s^m)$. Korzystając z tej wartości, z wzoru (11.24) obliczamy długość fali λ oraz z wzoru (11.4) prędkość c rozchodzenia się fali w powietrzu w temperaturze pokojowej. Podobne obliczenia wykonujemy dla wszystkich częstości. Jako wynik ostateczny przyjmujemy średnią arytmetyczną $\bar{c}$ uzyskanych wyników. Korzystając z wzoru (11.12) obliczamy prędkość c_0 fali w temperaturze 0°C, a z wzoru (11.11) wartość $\varkappa$ dla powietrza. Przy obliczaniu częstości ν_x generatora nieznanego przyjmujemy jako znaną prędkość c, a z wzoru (11.4) obliczamy częstość drgań generatora.

Błąd obliczamy w dwóch etapach. Najpierw obliczamy błąd położenia minimów lub maksimów, lub też wprost błąd standardowy położenia $S_{\bar{s}}$ metodą Gaussa. W drugim etapie obliczamy błędy długości fali λ i prędkości c jednego z pomiarów. Obliczamy niezależnie błąd średni kwadratowy średniej arytmetycznej ostatecznych wyników prędkości c. Obliczamy prędkość c_0 w temperaturze 0°C oraz błąd częstości generatora wzorcowanego.

11.6. RURA KUNDTA

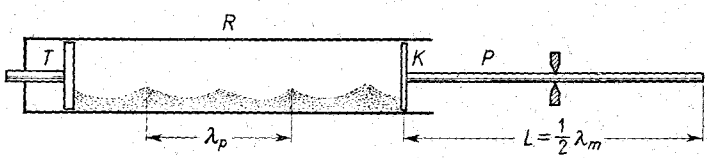
Cel: pomiar prędkości fali podłużnej w kilku prętach.
Przyrządy: fen (§ 3.10).
Zagadnienia: podstawy akustyki (§ 11.01–04; S1, § 97 i 98, 102, 107–111; H1, § 19 i 20).

Wprowadzenie

Aparatura (rys. 11.13) składa się z rury szklanej R, pręta metalowego P zamocowanego w połowie długości oraz tłoczka T zamykającego drugi koniec rury R. W czasie pomiaru musimy wytworzyć w pręcie drgania podłużne, przedstawione na rysunku 11.3b dla $n = 1$. Wtedy długość fali w pręcie wynosi

$$\lambda = 2L. \tag{11.25}$$

Koniec pręta wchodzący do rury R zaopatrzony jest w płytkę K. Drgania pręta poprzez tę płytkę zostają przekazane słupowi powietrza w rurze. Długość słupa powietrza



11.13. Rura Kundta.

w rurze można tak zmieniać za pomocą tłoczka T, by spełnione były warunki rezonansu i wtedy również w słupie powietrza wytwarza się fala stojąca, w której rozkład węzłów i strzałek przypomina n-tą harmoniczną z rysunku 11.3c. Węzły i strzałki tej fali uwidocznić można za pomocą pyłu korkowego, który zostaje wprawiony w drgania w strzałkach, a nie zmieni swego położenia w węzłach. W obydwu środowiskach w pręcie i w powietrzu rozchodzi się fala o tej samej częstości ν. Zgodnie z wzorem (11.4)

$$c_m = \nu\lambda_m \quad \text{i} \quad c_p = \nu\lambda_p,$$

skąd

$$c_m = \frac{\lambda_m}{\lambda_p} c_p.$$

W powietrzu mierzymy zazwyczaj odległość l między zerowym i N-tym węzłem lub zerową i N-tą strzałką, a długość fali w powietrzu wyrazimy przez $\lambda_p = 2l/N$. Korzystając ponadto z (11.25) otrzymamy

$$c_m = \frac{NL}{l} c_p. \tag{11.26}$$

Wzór powyższy pozwoli obliczyć prędkość c_m rozchodzenia się fali podłużnej w pręcie.

Pomiary

Doświadczenie rozpoczynamy od osuszenia rury za pomocą strumienia podgrzanego powietrza z fenu. Przygotowujemy również bardzo drobne opiłki korka i za pomocą pręta drewnianego z nabitymi na końcu gwoździkami rozprowadzamy je równomiernie wzdłuż rury. Obracamy rurę o niewielki kąt wokół osi, by opiłki znalazły się nieco na boku rury. Ustawiamy całość w sposób pokazany na rysunku 11.13, a pręt zamocowujemy dokładnie w połowie długości. Notujemy długość pręta zmierzoną z dokładnością do 1 mm. Pocieramy lekko koniec pręta szmatką zawierającą nieco proszku kalafonii (w przypadku pręta szklanego stosujemy szmatkę zwilżoną spirytusem). Musimy na tyle opanować tę sztukę, by dał się słyszeć donośny dźwięk. Dobieramy tak długość rury, przesuwając tłoczek T, by wystąpił rezonans. Wtedy w strzałkach, na skutek ruchu drobin gazu, proszek opadnie w najniższe położenie rury. Mierzymy odległość l między dwoma najdalszymi, wyraźnie widocznymi węzłami lub strzałkami i liczymy ilość N półfal, dzielących te punkty. Podobne pomiary powtarzamy dla prętów wykonanych z innych materiałów (metale, szkło, drewno itp.). Notujemy temperaturę pokojową, ciśnienie atmosferyczne i dokładność pomiarów. Ponadto mierzymy średnicę $2r$ prętów mikromierzem w 10-ciu różnych miejscach oraz ważymy je na wadze laboratoryjnej.

Obliczenia

Obliczamy prędkości fali w każdym z badanych prętów z wzoru (11.26) przyjmując prędkość w powietrzu z tablic fizycznych. Jeżeli w tablicach podano prędkość w temperaturze 0°C, obliczamy najpierw prędkość w temperaturze pomiaru według wzoru

(11.12). Korzystając z wzoru (11.17) obliczamy moduł Younga badanych materiałów biorąc na gęstość ϱ stosunek masy do objętości

$$\varrho = \frac{m}{\pi r^2 L},$$

skąd wzór (11.27) przyjmuje postać

$$E = \frac{c_m^2 m}{\pi r^2 L}.$$

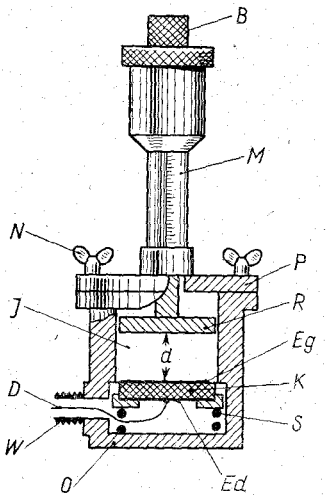
Obliczamy błędy prędkości c_m i modułu Younga E.

11.7. INTERFERENCJA ULTRADŹWIĘKÓW

Cel: wyznaczenie długości fali ultradźwiękowej w środowisku płynnym.
Przyrządy: ultratermostat (§ 3.7)
Zagadnienia: akustyka (§ 11.01–04; S1, § 97 i 98, 102, 107–111, 119; H1, § 19 i 20).

Wprowadzenie i aparatura

Fale o częstościach wyższych od 15 kHz nazywamy ultradźwiękowymi. Rozchodzą się one jak fale akustyczne, a ich prędkości dla częstości niższych od 1 MHz nieznacznie tylko zależą od częstości. Źródłem ultradźwięków są zazwyczaj elektromechaniczne przetworniki piezoelektryczne, m.in. kryształy kwarcu i soli Seignette'a, w których pole elektryczne wywołuje drgania mechaniczne np. drgania długości.



11.14. Interferometr ultradźwiękowy.

W omawianym doświadczeniu badamy falę stojącą w interferometrze ultradźwiękowym (rys. 11.14). Do kryształu kwarcu K będącego przetwornikiem elektromecha-

nicznym przylegają ściśle dwie elektrody E_g i E_d. Sygnał elektryczny z generatora przykłada się do tych elektrod za pośrednictwem wtyczki współosiowej W. Do elektrody E_d przylutowany jest przewód centralny D. Elektroda E_g jest zasilana poprzez korpus O, a stanowi ją cienka folia z brązu, która dzięki sprężynie S, szczelnie przylega do występu na obwodzie korpusu i uszczelnia właściwą komorę interferencyjną $\mathcal{J}$. W czasie pomiaru komorę interferencyjną wypełniamy cieczą badaną. Długość komory jest ograniczona reflektorem R, którego położenie można regulować za pomocą mikromierza M przytwierdzonego do pokrywy P korpusu. Celem wymieszania cieczy w komorze trzeba odkręcić śruby N i zdjąć pokrywę. Interferometr nadaje się do badania fali ultradźwiękowej w nieorganicznych, nieaktywnych chemicznie cieczach, np. benzenie, czterochlorku węgla itp. Do zasilania kwarcu stosuje się generator ultradźwiękowych drgań elektrycznych o częstości dobranej do częstości drgań własnych kryształu kwarcu i mocy wystarczającej do wzbudzenia tych drgań. Generator posiada dość dokładny miernik natężenia prądu anodowego.

W przypadku, gdy odległość d spełnia warunki rezonansowe w komorze interferencyjnej $\mathcal{J}$ powstaje fala stojąca, podobna jak na rysunku 11.3c dla drgań podłużnych. Odległość tę dla n-tych drgań harmonicznych oznaczymy przez d_n. Kwarc promieniuje energię do komory interferencyjnej. Dla d_n wypromieniowanie energii jest mniejsze, tym samym następuje spadek poboru mocy z generatora i spadek natężenia prądu anodowego w generatorze. Tak więc minimum natężenia prądu anodowego jest sygnałem, że odległość d_n spełnia warunki interferencyjne. Zmieniając odległość d o $\frac{\lambda}{2}$ otrzymamy wartość d_{n-1} i stwierdzimy znowu spełnienie warunków rezonansowych i spadek natężenia anodowego. Różnice odległości d odczytujemy wprost na mikromierzu. Odległość między kolejnymi położeniami reflektora, dla których spełnione są warunki rezonansu, jest więc równa połowie długości fali w cieczy wypełniającej komorę interferencyjną. Interferometr zbudowany jest w ten sposób, że możemy go zanurzyć w cieczy (np. wodzie) i badać zależność długości fali od temperatury, którą zmieniać możemy termostatem.

Pomiary

Interferometr wypełniamy badaną cieczą oraz łączymy przewodem koaksjalnym z generatorem. Generator ustawiamy w dowolnym położeniu, lecz niezbyt odległym od kwarcu i dostrajamy częstość generatora do częstości drgań własnych kwarcu. Dostrojenie to objawia się największym natężeniem prądu anodowego w generatorze. Po dostrojeniu generatora reflektor przesuwamy w dół, aż do zetknięcia z elektrodą górną kwarcu. (Uwaga! By nie uszkodzić interferometru, posługujemy się wtedy tylko pokrętłem B mikromierza.) Powoli odsuwamy reflektor i notujemy kolejne położenia odpowiadające minimom natężenia prądu anodowego (d_1, d_2 ...). Analizujemy wyniki pomiaru długości fali i planujemy właściwy sposób pomiaru poszczególnych wielkości prostych. Pomiary wykonujemy dla kilku cieczy lub badamy zależność prędkości ultradźwięków od temperatury, umieszczając interferometr w kąpieli połączonej z ultratermostatem.

Obliczenia

Do określenia długości fali obliczamy odległość dwóch dość odległych, lecz dokładnie odczytanych położeń rezonansowych d_k i d_n. Długość fali wynosi wtedy

$$\lambda = 2\left(\frac{d_n - d_k}{n-k}\right).$$

Znając już długość fali i częstość generatora ν, z wzoru (11.4) obliczamy prędkość c rozchodzenia się fali ultradźwiękowej w danym środowisku. Podobne obliczenia wykonujemy dla wszystkich pomiarów. Dla wszystkich pomiarów obliczamy błąd prędkości Δc. Jeżeli mierzyliśmy zależność temperaturową prędkości dźwięku, to wykreślamy uzyskaną zależność.

CIEPŁO I FIZYKA MOLEKULARNA

12. TERMOMETRIA I KALORYMETRIA

12.01. ZASADY KALORYMETRII

Dostarczając ciału ciepła zauważymy, że zwiększa ono wymiary lub objętość. Wzrost długości δl jest proporcjonalny do długości początkowej l_0 i wzrostu temperatury δT

$$\delta l = \alpha l_0 \delta T. \tag{12.1}$$

Współczynnik α nazywamy współczynnikiem rozszerzalności liniowej. Podobne prawo rządzi wzrostem objętości,

$$\delta V = \beta V_0 \delta T. \tag{12.2}$$

Z równania (12.1), gdy $\delta l = l - l_0$, otrzymamy $l = l_0(1+\alpha\delta T)$. Ponieważ dla kostki o objętości $V = l^3$ otrzymamy

$$V = V_0[1+3\alpha\delta T+3\alpha^2(\delta T)^2+\alpha^3(\delta T)^3] \simeq V_0(1+3\alpha\delta T), \text{ stąd } \beta = 3\alpha.$$

Ilość energii cieplnej potrzebna do ogrzania 1 kg dowolnego ciała o jeden kelwin jest jedną z podstawowych cech charakteryzujących ciało i nazywa się ciepłem właściwym, $c[\mathrm{J}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}]$. Wynika stąd, że:

1. Ilość energii Q potrzebnej do ogrzania ciała o masie m o δT (K) lub $\delta\tau$(°C) wyraża się wzorem

$$Q = Cm\delta T \text{ lub } Q = cm\delta\tau. \tag{12.3}$$

Ponadto z zasady zachowania energii wynika, że:

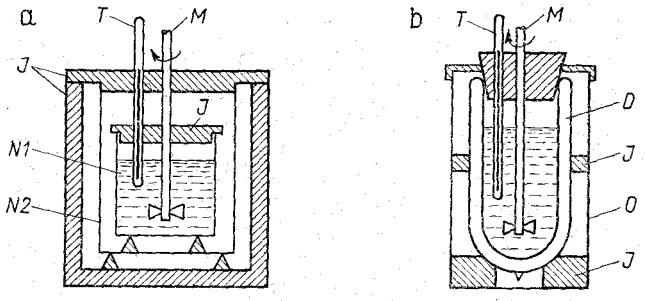
2. Ilość ciepła oddana przez ciało jest równa ilości ciepła pobranej przez ciała otaczające.

3. Ilość ciepła pobrana przez ciało przy podgrzewaniu od temperatury T_1 do T_2 jest równa ilości ciepła oddanego przy chłodzeniu w tym samym zakresie temperatur, jeżeli ciało przechodzi przez te same stany pośrednie w odwrotnym porządku.

Te trzy zasady stanowią podstawę kalorymetrii. Wprowadza się jeszcze pojęcie pojemności cieplnej $C[\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}]$ określonej jako ilość ciepła potrzebną do ogrzania całej masy ciała o jeden stopień

$$Q = C\delta T, \text{ gdzie } C = cm. \tag{12.4}$$

Przedmiotem kalorymetrii jest badanie ciepła właściwego. Przyrządem służącym do powyższego celu jest kalorymetr. Budowę różnych typów kalorymetrów pokazano na rysunku 12.1. Rysunek 12.1a przedstawia tzw. kalorymetr wodny składający się z dwóch koncentrycznie osadzonych naczyń metalowych *N1* i *N2*. Niekiedy cały kalorymetr znajduje się dodatkowo w naczyniu *I* wykonanym z materiału izolującego cieplnie. Przykrycia wykonane są również z materiału nieprzewodzącego ciepło (izolującego). Powierzchnia naczyń *N1* i *N2* jest błyszcząca (niklowana lub chromowana) celem wyeliminowania strat spowodowanych promieniowaniem cieplnym. Ciecz kalorymetryczna, zazwyczaj woda, jest mieszana za pomocą ręcznego lub mechanicznego mieszadła *M*.



12.1. Kalorymetr wodny (a) oraz kalorymetr z naczyniem Dewara (b).

Do odczytu temperatury służy dokładny termometr *T*. Na rysunku 12.1b pokazano kalorymetr z naczyniem Dewara *D* (termosem). Właściwy kalorymetr stanowi tu termos będący naczyniem szklanym o podwójnych ściankach. Z przestrzeni pomiędzy ściankami jest odpompowane powietrze, dzięki czemu unika się strat spowodowanych przewodnictwem i konwekcją. Dla wyeliminowania strat spowodowanych promieniowaniem, wewnętrzne ścianki naczynia są posrebrzane. Osłona *O* chroni przed skutkami ewentualnej implozji.

12.02. WYZNACZANIE POJEMNOŚCI CIEPLNEJ KALORYMETRU (RÓWNOWAŻNIKA WODNEGO), INTERPOLACJA TEMPERATURY

Wprowadzenie

Kalorymetr bierze również udział w wymianie cieplnej i w ostatecznym bilansie musimy uwzględnić pojemność cieplną *C* kalorymetru. Wyznaczamy ją w doświadczeniu. Kalorymetr wypełniamy do połowy podgrzaną wodą destylowaną o temperaturze $\tau_c \simeq 25°C$. (Masa tej wody m_c jest różnicą masy kalorymetru z wodą m_2 i masy pustego kalorymetru m_1, czyli $m_c = m_2 - m_1$.) Po ustaleniu się temperatury dolewamy mniej więcej taką samą ilość m_z wody ochłodzonej do około $\tau_z \simeq 5°C$ ($m_z = m_3 - m_2$, gdzie m_3 — masa kalorymetru po dolaniu wody zimnej) i określamy temperaturę τ_m ustaloną po wymieszaniu. Temperaturę odczytujemy co 0,5 minuty poczynając od około 5 minut przed wlaniem zimnej wody do ok. 5 min po wymieszaniu obydwu cieczy. Uzyskane w ten sposób wyniki wykreślamy w sposób pokazany na rysunku 12.2.

Celem obliczenia równoważnika cieplnego ułożyć musimy równanie bilansu cieplnego. Po wlaniu zimnej wody kalorymetr utracił ciepło: $C(\tau_c - \tau_m)$, a woda w kalorymetrze $cm_c(\tau_c - \tau_m)$. Zatem łączne straty wynoszą

$$(C + cm_c)(\tau_c - \tau_m).$$

Zimna woda zyskała ciepło

$$cm_z(\tau_m - \tau_z).$$

Zgodnie z zasadą bilansu cieplnego musi zachodzić związek

$$(C + cm_c)(\tau_c - \tau_m) = cm_z(\tau_m - \tau_z),$$

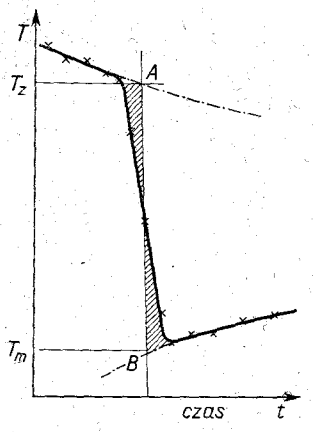
skąd

$$C = c\left[m_z \frac{(\tau_m - \tau_z)}{(\tau_c - \tau_m)} - m_c\right] \tag{12.5}$$

lub

$$C = c\left[(m_3 - m_2)\frac{\tau_m - \tau_z}{\tau_c - \tau_m} - (m_2 - m_1)\right]. \tag{12.5a}$$

Dużą trudność stanowi dokładne określenie temperatur τ_c, τ_z i τ_m. Dla uzyskania dużej dokładności odczytu temperatury τ_z, odczytu dokonujemy tuż przed wlaniem tej wody do kalorymetru. Dla uzyskania dokładnych wartości τ_c i τ_m posługujemy się metodą interpolacji. Temperatura kalorymetru z wodą ciepłą powoli opada do temperatury pokojowej mimo izolacji cieplnej (patrz linia przerywana na rys. 12.2). Zjawisko



12.2. Interpolacja temperatury w kalorymetrze.

to nazywamy często płynięciem temperatury. Po dolaniu zimnej wody po pewnym niedługim czasie Δt temperatura spada do najniższej, po czym dalej powoli wzrasta z powodu dopływu ciepła z otoczenia. Nie uwzględniając zjawiska płynięcia temperatur, popełniamy błędy, których moglibyśmy uniknąć tylko wtedy, gdyby ustalanie się temperatury τ_m następowało nieskończenie szybko. Poprawne wartości temperatur τ_m i τ_c wyznaczą punkty przecięcia ekstrapolowanych krzywych z prostą AB prostopadłą do osi czasu, a przebiegającą w ten sposób, by zakreskowane pola były sobie równe. Temperatury odpowiadające punktom A i B są temperaturami interpolowanymi.

W omawianym doświadczeniu dobrano tak temperatury τ_c i τ_z, by straty występujące w pierwszej części doświadczenia były równe zyskowi w części drugiej (gdy temperatura wody w kalorymetrze jest niższa od temperatury otoczenia). Wyprowadzając wzór na błąd maksymalny ΔC z równania (12.5a) otrzymamy przy założeniach: $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3 = \Delta m$, $\Delta \tau_m = \Delta \tau_z = \Delta \tau_c = \Delta \tau$ oraz $\Delta c = 0$,

$$\Delta C = 2c\left[\left(\frac{\tau_m - \tau_z}{\tau_c - \tau_m} + 1\right)\Delta m + \frac{m_3 - m_2}{(\tau_c - \tau_m)^2}(\tau_c - \tau_z)\Delta \tau\right].$$

12.1. ROZSZERZALNOŚĆ LINIOWA

Cel: Wyznaczenie współczynnika rozszerzalności liniowej różnych metali i stopów w zakresie temperatury od pokojowej do 500°C.

Przyrządy: 1. Autotransformator (§ 4.5), termoogniwo (§ 3.6 i 21.2), miliwoltomierz i amperomierz (§ 18.01). 2. Piec elektryczny, czujnik mikrometryczny (§ 3.1) lub optyczna metoda odczytu wydłużenia (§ 3.3).

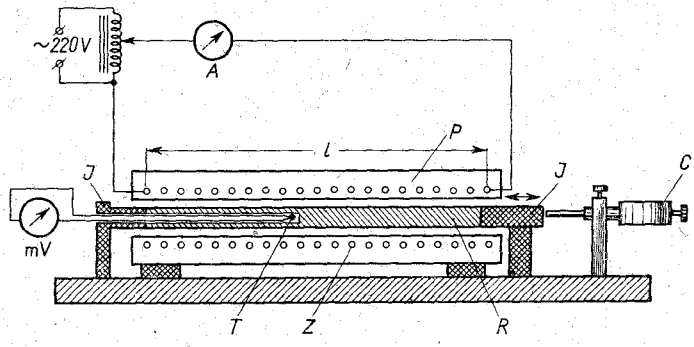
Zagadnienia: Termometria (S2, § 1–3; J § 12.1–6), prawo Joule'a–Lenza (S3, § 39; P2, § 1.19; H2, § 31.5).

Wprowadzenie i aparatura

Wzór (12.1) przedstawić możemy w postaci

$$\frac{\delta l}{l_0} = \alpha \delta \tau, \tag{12.1a}$$

z którego wynika, że współczynnik rozszerzalności liniowej jest nachyleniem linii przedstawiającej zależność wydłużenia względnego $\delta l/l_0$ od różnicy temperatur $\delta \tau$. Stosuje się wiele różnorodnych metod badania rozszerzalności liniowej. Istota tych metod



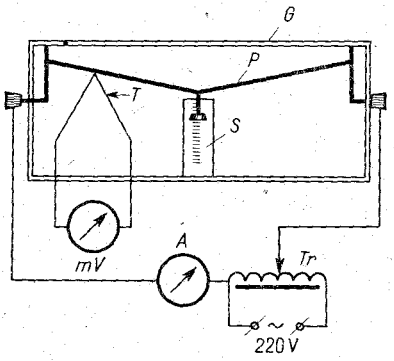
12.3. Aparatura do pomiaru rozszerzalności liniowej ciał podgrzewanych piecykiem.

sprowadza się do podgrzania próbki i pomiaru jej wydłużenia. Do podgrzewania próbki stosuje się piec P o długości wystarczającej do pomieszczenia próbki — rurki R (rys. 12.3) o długości rzędu 50 cm. W temperaturach do 100°C próbkę posiadającą postać rurki podgrzewać można strumieniem pary wodnej przepuszczanej wprost przez tę

rurkę. Inna metoda polega na przepuszczaniu przez próbkę prądu elektrycznego (rys. 12.4). Do pomiaru temperatury stosować można termoogniwo lub termometr rtęciowy. Zmianę długości mierzyć można czujnikiem mikrometrycznym za pomocą odpowiedniej przekładni mechanicznej lub mierząc opadanie ciężarka zawieszonego w połowie długości pręta z rys. 12.4. W tym przypadku, postępując podobnie jak w § 7.2 (wzór 7.9 str. 159), otrzymamy następujący związek zmiany położenia ciężarka z wydłużeniem δl

$$\delta l = \frac{2(\delta s)^2}{l_0}. \tag{12.6}$$

Temperatura pręta musi być stała na całej długości. Szczególnie duże niebezpieczeństwo wystąpienia różnicy temperatur ma miejsce w temperaturach rzędu kilkuset °C. Można



12.4. Aparatura do pomiaru rozszerzalności liniowej metali, podgrzewanych przepływającym przez nie prądem.

w tym celu stosować piece o niejednorodnym nawinięciu drutu grzejnego (rys. 12.1), a w przypadku pokazanym na rysunku 12.2 pręt zamocowany jest w oszklonej gablocie celem wyeliminowania wpływu przypadkowych ruchów powietrza; jego końce zamocowane są w porcelanowych izolatorach, a temperaturę mierzy się termoogniwem miedź-konstantan wykonanym z bardzo cienkich drutów (50–100-krotnie cieńszych od badanych prętów).

Pomiary

Łączymy obwody elektryczne i mierzymy długości l_0 poszczególnych prętów — próbek. Następnie wykonujemy pomiary wydłużenia δl co 20°C poczynając od temperatury pokojowej do 500°C lub wyższej. Wykonując pomiary aparaturą z rys. 12.3 włączamy na początku doświadczenia natężenie równe np. połowie maksymalnego wskazanego w instrukcji, a pomiary wykonujemy przy rosnącej temperaturze. W przypadku przyrządu z rys. 12.4 temperaturę żądaną osiągamy dobierając natężenie prądu metodą prób. Wpisywane do tabeli natężenie prądu nie wchodzi do wzorów, lecz może być pomocne przy sprawdzaniu wyników. Takie same pomiary wykonujemy dla innych prętów.

Obliczenia

Obliczamy wielkości $\delta l/l_0$ oraz $\delta\tau$. Dla dwóch pomiarów każdego pręta obliczamy błędy tych wielkości i wykreślamy zależności $\frac{\delta l}{l_0}$ od $\delta\tau$ oznaczając punkty należące do różnych prętów innymi symbolami. Jeżeli uzyskamy linię prostą, to określamy jej nachylenie, które zgodnie z wzorem (12.1a) jest równe współczynnikowi rozszerzalności liniowej α oraz obliczamy błąd $\Delta\alpha$. Gdy wykres nie przedstawia linii prostej, współczynnik α nie jest stały. Wtedy wyznaczamy α jako nachylenie stycznej w odstępach co 50°C i wykonujemy wykres zależności α od temperatury. Dyskutujemy zgodność wyników z wartościami podanymi w tablicach.

12.2. TERMOMETR GAZOWY

Cel: wyznaczenie współczynnika prężności termicznej powietrza, wzorcowanie termometru gazowego i pomiar temperatury pokojowej.

Przyrządy: termometr (§ 3.6), barometr (§ 3.8), zawór kurkowy (§ 3.11).

Zagadnienia: termometria i kalorymetria (§ 12.01; S2, § 1–6; J, § 12.1–6, 12.15).

Wprowadzenie i aparatura

Rozprężliwością termiczną gazów rządzi prawo Gay-Lussaca

$$p_1 = p_0(1+\beta\tau_1), \tag{12.7}$$

gdzie p_1 oznacza ciśnienie w temperaturze τ_1, p_0 — ciśnienie w warunkach normalnych, β — współczynnik prężności termicznej. Wykonując pomiar ciśnienia p_0 dowolnej zamkniętej objętości gazu w temperaturze $\tau_0 = 0$°C oraz ciśnienia p_1 tej samej ilości gazu w temperaturze τ_1 wyznaczyć możemy β

$$\beta = \frac{p_1 - p_0}{p_0\,\tau_1}. \tag{12.8}$$

Znając ciśnienie p_τ tego gazu w temperaturze τ, dla którego

$$p_\tau = p_0(1+\beta\tau)$$

obliczyć możemy temperaturę τ, przenosząc p_0 na lewą stronę.

Dzieląc stronami ostatnie równanie przez równanie (12.7) otrzymamy

$$\tau = \frac{p_\tau - p_0}{p_1 - p_0}\,\tau_1. \tag{12.9}$$

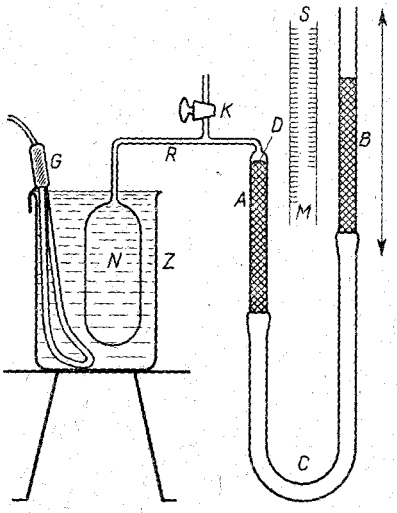
W praktyce do pomiaru stosujemy przyrząd pokazany na rysunku 12.5. Gaz zamknięty jest w zbiorniku N, który cienką kapilarą R jest połączony z manometrem rtęciowym M utworzonym przez dwie rurki A i B połączone grubościennym wężem gumowym C. Poziom rtęci w poszczególnych ramionach odczytuje się na skali S. Zbiornik N łączy się z zaworem kurkowym K. W rurce A znajduje się kolec D służący do ustalania stałego poziomu rtęci w ramieniu A manometru. Zbiornik N można umieścić

w zlewce Z zawierającej kąpiel wodną. Do podgrzewania wody służy grzałka nurkowa G. Wyprowadzone na wstępie wzory niezupełnie ściśle stosują się do omówionego tu przyrządu ponieważ:

1. szkło zbiornika N ogrzewając się również do temperatury τ_1 rozszerza się według prawa Charlesa:

$$V_1 = V_0(1+\gamma_s\tau_1).$$

2. Istnieje pewna objętość ΔV (kapilarna R i górna część rurki A), która nie zostaje podgrzana do temperatury τ_1, ani też nie zostaje ochłodzona do 0°C. Poprawki stąd



12.5. Termometr gazowy.

wynikające są jednak bardzo małe i w praktyce można je zaniedbać. Współczynnik γ_s dla szkła wynosi $\gamma_s = 0{,}000024\ \mathrm{K}^{-1}$ i nawet przy $\tau = 100°\mathrm{C}$ mamy: $V_1 = V_0(1+ +0{,}0024)$, czyli poprawka jest rzędu 2,4‰. Druga poprawka jest również niewielka, ponieważ objętość ΔV jest mała w stosunku do objętości zbiornika, a jej temperatura jest niemal stała przy wszystkich pomiarach.

Pomiary

Wyznaczanie współczynnika rozprężliwości β i wzorcowanie termometru. Przy otwartym kurku K podsuwamy zlewkę Z pod zbiornik N i wypełniamy zlewkę drobno tłuczonym lodem z wodą, by uzyskać temperaturę 0°C. (Należy stosować wodę destylowaną. Również lód musi być z wody destylowanej.) Po chwili, gdy ustali się temperatura zbiornika, przesuwamy ramię B manometru do takiego położenia, by w ramieniu A nastąpiło zetknięcie kolca D z powierzchnią rtęci.

Zamykamy kurek K. Umieszczamy zbiornik w zlewce z wodą i podgrzewamy wodę do temperatury wrzenia τ_1, podnosząc równocześnie ramię B manometru, w ten sposób, by poziom rtęci w ramieniu A nie ulegał dużym zmianom. W chwilę po osiągnięciu temperatury τ_1 wyłączamy grzejnik. Doprowadzamy ponownie do zetknięcia kolca D z powierzchnią rtęci i odczytujemy różnicę poziomów δh_1 oraz stan barometru rtęciowego b.

Pomiar temperatury. Obniżamy ramię B manometru i usuwamy zlewkę z wrzącą wodą. Pozwalamy zbiornikowi chłodzić się do temperatury pokojowej; obserwując ciągle stan rtęci w ramionach manometru, by nie dopuścić do przelania rtęci do zbiornika Z. Po ustaleniu się temperatury pokojowej zbiornika, co objawi się ustaleniem poziomów rtęci, znowu doprowadzamy do zetknięcia kolca D z powierzchnią rtęci i odczytujemy różnicę poziomów rtęci δh_t, mierząc tym samym temperaturę pokojową τ_p. Taki sam pomiar wykonujemy po zanurzeniu zbiornika w wodzie z wodociągu mierząc tym samym temperaturę tej wody τ_w. (Przed zanurzeniem zbiornika musimy obniżyć ramię B manometru.) Odczytujemy temperaturę pokojową τ'_p, mierzymy termometrem rtęciowym temperaturę wody τ_w oraz notujemy dokładności odczytów.

Współczynnik β możemy również wyznaczyć w inny sposób. Zbiornik umieszczamy w wodzie o temperaturze pokojowej i wtedy zamykamy kurek K. Następnie wykonujemy pomiary różnicy ciśnień i temperatury co 10–20°C. Dla każdego z tych pomiarów obliczamy β.

Obliczenia

Celem obliczenia β redukujemy odczyty barometru do temperatury 0°C (b_0). Ciśnienie wyrażamy w mm Hg. (Wymiar ten nie ma istotnego znaczenia, ponieważ w (12.8) i (12.9) upraszcza się.) Odczytujemy z tablic temperaturę wrzenia wody przy panującym ciśnieniu p_1 i z wzoru (12.8) obliczamy współczynnik β.

Celem obliczenia nieznanej temperatury (pokojowej τ lub wody τ_w) z wzoru (12.9) na τ_1 przyjmujemy temperaturę wrzenia wody i zauważymy, że licznik równania (12.9) jest równy δh_t, a mianownik δh_1.

Obliczamy błędy $\Delta\beta$ i $\Delta\tau$ oraz dyskutujemy zgodność wyniku β z danymi wziętymi z tablic fizycznych oraz temperatur τ i τ_w z temperaturą τ' i τ'_w odczytaną na termometrze.

12.3. KALORYMETR

Cel: wyznaczyć metodą kalorymetryczną ciepło właściwe ciała stałego lub cieczy.

Przyrządy: ultratermostat (§ 3.7), termometr (§ 3.6).

Zagadnienia: kalorymetria (§ 12.01–02; S2, § 1–6; J, § 12.14–16), pierwsza zasada termodynamiki (S2, § 7 i 8; J, § 13.1–3).

Wprowadzenie

Pomiar ciepła właściwego metodą kalorymetryczną sprowadza się do wyznaczenia wzrostu temperatury cieczy kalorymetrycznej (wody) w kalorymetrze po wprowadzeniu ciała badanego, podgrzanego uprzednio do temperatury τ_c. Początkową temperaturę wody w kalorymetrze oznaczymy przez τ_p, a końcową przez τ_k. Badane ciało traci ciepło $c_c m_c \cdot (\tau_c - \tau_k)$, a zyskuje woda $c_w m_w (\tau_k - \tau_p)$ oraz kalorymetr $C(\tau_k - \tau_p)$.

Bilans ciepła przedstawia się następująco:

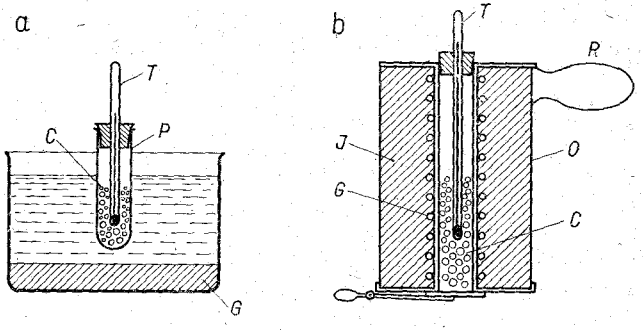
$$c_c m_c (\tau_c - \tau_k) = (c_w m_w + C)(\tau_k - \tau_p),$$

$$c_c = \frac{c_w m_w + C}{m_c} \frac{\tau_k - \tau_p}{\tau_c - \tau_k}. \tag{12.10}$$

Ze względu na postać tego wzoru możemy mierzyć temperaturę w skali Celsjusza. Omawiana metoda może służyć również do wyznaczania ciepła właściwego cieczy mieszającej się z cieczą kalorymetryczną.

Aparatura

Aparatura stosowana w omawianym doświadczeniu składa się z kalorymetru wodnego z wyposażeniem składającym się z mieszadła i termometru, piecyka do podgrzewania badanego ciała wraz z układem zasilającym oraz fenu do suszenia kalorymetru i ciała. Ponadto potrzebna jest waga, np. sklepowa do ważenia kalorymetru oraz waga



12.6. Przyrządy do podgrzewania ciała przed pomiarem kalorymetrycznym: łaźnia wodna (a) oraz piecyk (b).

dokładniejsza do zważenia badanego ciała. Rolę piecyka w najprostszym przypadku spełniać może łaźnia wodna z probówką, w której umieszczamy badane ciało (rys. 12.6a), a może to być też piecyk elektryczny (rys. 12.6b) lub zasobnik zimna ultratermostatu Höpplera.

Pomiary

Ważymy osuszony uprzednio kalorymetr (lub tylko wewnętrzną jego część), wypełniamy go wodą destylowaną o temperaturze 10–20°C do 3/4 głębokości i ponownie ważymy. Ważymy badane ciało i umieszczamy je w piecyku. Pomiary temperatury wykonujemy co 30 s od chwili włączenia piecyka, a wyniki wpisujemy w tabelkę. Po podgrzaniu ciała do temperatury τ_c (ok. 100°C) i ustaleniu się temperatury w kalorymetrze, co objawi się jej stałością lub ciągłą, powolną zmianą, piecyk ustawiamy w bezpośrednim sąsiedztwie kalorymetru lub nad nim, otwieramy kalorymetr, wprowadzamy doń badane ciało, zamykamy kalorymetr i odsuwamy piecyk. Odczytujemy w dalszym ciągu temperaturę co 30 s do chwili jej ustalenia się (przynajmniej przez 5 minut). Pomiar ciepła właściwego powtarzamy dwukrotnie. Jeżeli zachodzi potrzeba, przed pomiarem właściwym wykonujemy pomiar pojemności cieplnej kalorymetru. W przypadku, gdy posługujemy się kalorymetrem z naczyniem Dewara ciało stałe wprowadzić musimy ostrożnie, by nie rozbić przyrządu. W każdym przypadku czynności te należy wykonać szybko, by zmniejszyć do minimum straty cieplne.

Obliczenia

Wykreślamy zależność temperatury w kalorymetrze od czasu i z wykresu tego przez interpolację określamy dokładnie temperatury τ_p i τ_k oraz błędy $\Delta\tau_p$ i $\Delta\tau_k$. Następnie z wzoru (12.10) obliczamy ciepło właściwe. Wyprowadzamy wzór na błąd maksymalny i obliczamy ten błąd.

12.4. CIEPŁO WŁAŚCIWE POWIETRZA

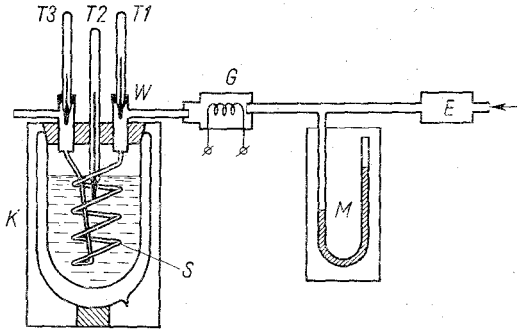
Cel: pomiar ciepła właściwego c_p powietrza metodą kalorymetryczną.

Przyrządy: kalorymetr (§ 12.01–02), dmuchawa (§ 3.10), autotransformator (§ 4.5), zawory (§ 3.11).

Zagadnienia: kalorymetria (S2, § 1–6; J, § 12.14–17), pierwsza zasada termodynamiki (§ 12.01–02; S1, § 7–9; J, § 13.1–3).

Wprowadzenie i aparatura

Dla gazów definiuje się ciepło właściwe mierzone w stałej objętości c_v oraz ciepło właściwe mierzone przy stałym ciśnieniu c_p, przy czym $c_p > c_v$. W omawianym doświadczeniu wyznacza się c_p. Zestaw przyrządów służących do wykonania doświadczenia pokazano na rys. 12.7. Powietrze z kompresora E przepływa przez grzejnik G, a następnie przez spiralę miedzianą S zanurzoną w wodzie wypełniającej kalorymetr K. Ogrzane powietrze przepływając przez spiralę oddaje część ciepła. Termometr T_1 mierzy temperaturę powietrza wpływającego do kalorymetru, termometr T_3 mierzy temperaturę powietrza wypływającego, a termometr T_2 mierzy temperaturę wody.



12.7. Aparatura do pomiaru ciepła właściwego powietrza.

Bilans ciepła przedstawia się tu następująco. Powietrze oddaje ciepło w ilości $c_p m_p(\tau_1 - \tau_3)$, tę ilość ciepła przejmuje woda $c_w m_w(\tau_{2k} - \tau_{2p})$ i kalorymetr $C(\tau_{2k} - \tau_{2p})$. Zatem

$$c_p m_p(\tau_1 - \tau_3) = (c_w m_w + C)(\tau_{2k} - \tau_{2p}), \tag{12.11}$$

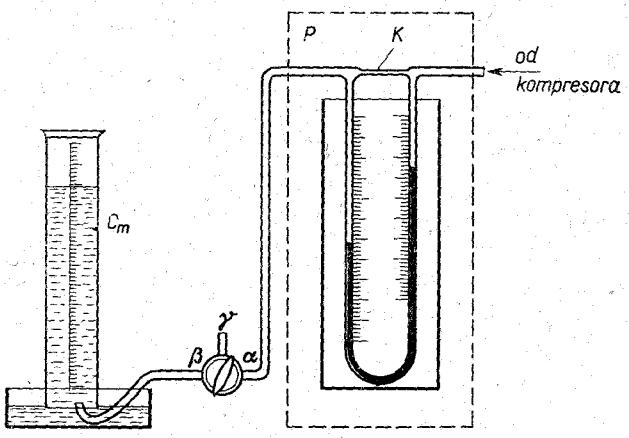
gdzie m_p oznacza masę powietrza, τ_{2k} i τ_{2p} odpowiednio początkową i końcową temperaturę wody w kalorymetrze. Masę m_p powietrza przepływającego przez kalorymetr określamy z natężenia przepływu objętości V_t zdefiniowanego jako stosunek objętości V wypływającego w sposób jednostajny gazu do czasu t:

$$V_t = V/t. \tag{12.12}$$

Jednostką tej wielkości jest $m^3\ s^{-1}$. Masę przepływającego gazu wyrazimy wzorem

$$m_p = \varrho_p V_t t. \tag{12.13}$$

Do określenia V_t służy rotametr lub przepływomierz P, którego budowę pokazano na rysunku 12.8. Gaz przepływa przez kapilarę K, do końców której podłącza się ramiona manometru. Natężenie przepływu objętości, przy przepływie laminarnym, a więc przy niedużych prędkościach jest proporcjonalne do wychyleń h manometru. Celem wzorcowania przepływomierza do jego wyjścia dołączamy zawór trójdrożny Z oraz odwrócony i wypełniony wodą cylinder miarowy C_m (rys. 12.8). Początkowo kurek ustawiamy w ten sposób, by gaz wypływał ramieniem γ, wtedy ustalamy



12.8. Wzorcowanie przepływomierza.

warunki przepływu i notujemy wskazanie δh manometru. Następnie równocześnie obracamy w ten sposób kurek, by gaz płynął ramieniem β pod cylinder miarowy C_m i włączamy sekundomierz. Gdy cylinder miarowy wypełni się do 3/4, zamykamy kurek i równocześnie wyłączamy sekundomierz. Notujemy objętość V i czas przepływu t. Podobne pomiary wykonujemy dla kilku różnych prędkości przepływu. Obliczamy natężenie przepływu objętości (12.12) i wykreślamy zależność tej wielkości od wskazania manometru: $V_t(\delta h)$, czyli krzywą wzorcowania przepływomierza. Podstawiając wyrażenie (12.13) do wzoru (12.11) otrzymamy ostatecznie:

$$c_p = \frac{c_w m_w + C}{\varrho_p V_t t} \cdot \frac{\tau_{2k} - \tau_{2p}}{\tau_1 - \tau_3}. \tag{12.14}$$

Pomiary

Łączymy kompresor oraz grzejnik z autotransformatorami i dołączamy kalorymetr do grzejnika G. Następnie włączamy obydwa autotransformatory i dobieramy napięcia według wskazań w instrukcji załączonej do przyrządu.

Po wykonaniu tych czynności wstępnych osuszamy kalorymetr, wypełniamy go wodą (masa m_w) i mierzymy temperaturę wody w kalorymetrze co 30 s do chwili jej ustalenia się lub uzyskania jednorodnej, niewielkiej zmiany w czasie. Wtedy podłączamy strumień powietrza do wężownicy kalorymetru i w odstępach 2-minutowych odczytujemy

temperaturę na wszystkich termometrach ujmując wyniki w tabelę. Pomiary wykonujemy w ciągu ok. godziny mieszając ciągle wodę w kalorymetrze. Po upływie tego czasu wyłączamy kompresor E oraz grzejnik G i w dalszym ciągu mierzymy temperaturę do chwili zrównania wskazań termometrów τ_1 i τ_2.

Obliczenia

Obliczamy wartość średnią temperatur $\bar{\tau}_1$ i τ_3, te wartości średnie przyjmujemy w ostatecznych obliczeniach. Obliczamy również średnią wartość $\overline{\delta h}$ i z wykresu odczytujemy odpowiadającą jej wartość V_t. Wykreślamy zależność τ_2 od czasu i metodą interpolacji określamy τ_{2p} i τ_{2k} oraz określamy błędy tych wielkości. Odczytujemy z tablic wartości c_w oraz ϱ_p, a z instrukcji przyrządu przyjmujemy C i z wzoru (12.14) obliczamy c_p. Obliczamy błąd maksymalny c_p.

12.5. CIEPŁO WŁAŚCIWE METALI

Cel: wyznaczenie ciepła właściwego metalu metodą Nernsta i wyznaczanie współczynnika temperaturowego oporu miedzi.

Przyrządy: pompa rotacyjna (§ 3.10), manometr skrócony (§ 3.8), galwanometr, amperomierz, woltomierz (§ 18.01–03), opornik suwakowy (§ 4.2), źródło prądu (§ 4.1).

Zagadnienia: kalorymetria i termometria (§ 12.01–02; S2; § 1–5; J, § 12.1–5, 12.14–15), zależność oporu elektrycznego od temperatury (S3, § 48, H2, § 31.2), podstawowe prawa przepływu prądu (S3, § 35 i 36, 72, H2, § 32.1–5).

Wprowadzenie

W omawianym doświadczeniu energię doprowadzamy w postaci prądu, który przepływa przez uzwojenie grzejne i zgodnie z prawem Joule'a–Lenza wydziela energię $Q = Uit$. Stąd ciepło właściwe wyraża się wzorem

$$C = \frac{UiT}{m(T_k - T_p)}.$$

Wraz ze wzrostem temperatury próbki zmienia się również temperatura samego uzwojenia i natężenie prądu zmniejsza się. Utrzymując stałą wartość napięcia U zauważymy powolne zmniejszenie natężenia od wartości I_p do wartości końcowej I_k. Podstawiając do ostatniego wzoru średnią wartość natężenia otrzymamy

$$C = \frac{Ut(I_k + I_p)}{2m(T_k - T_p)}. \tag{12.15}$$

Można również utrzymywać stałe natężenie, wtedy zmieniać się musi napięcie i ostateczny wzór przyjmuje postać

$$C = \frac{It(U_k + U_p)}{2m(T_k - T_p)}. \tag{12.15a}$$

Współczynnik temperaturowy oporu uzwojenia grzejnego wyraża się wzorem

$$R = R_p[1 + \bar{a}(T - T_p)],$$

gdzie T oznacza temperaturę odpowiadającą oporowi R, T_p — temperaturę początkową odpowiadającą oporowi R_p. Ponieważ jednak $R = \frac{U}{i}$ oraz $R_p = \frac{U}{I_p}$ (napięcie utrzymujemy stałe), otrzymamy:

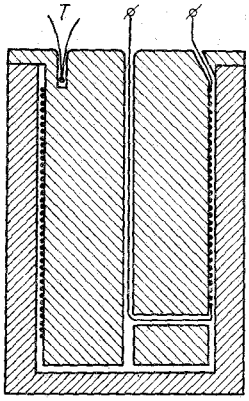
$$\frac{I_p}{I} = 1 + \bar{a}(T - T_p) \tag{12.16}$$

lub przy stałym natężeniu

$$\frac{U}{U_p} = 1 + \bar{a}(T - T_p). \tag{12.16a}$$

Aparatura

Próbka pokazana na rysunku (12.9) posiada kształt wydrążonego wewnątrz walca. Do wydrążenia wchodzi mniejszy walec, na którym nawinięte jest uzwojenie grzejne składające się z ok. 30 metrów drutu miedzianego o średnicy 0,10 mm. Temperaturę mierzymy za pomocą termoogniwa miedź-konstantan. Celem zapewnienia dobrej izolacji cieplnej całość jest zawieszona na niciach nylonowych pod kloszem aparatury próż-



12.9. Próbka do pomiaru ciepła właściwego metodą Nernsta.

niowej względnie w rurze, którą można odpompować. W szkle istnieje kilka przepustów próżniowych, przez które doprowadzono prąd i przewody termoogniwa. W nieobecności powietrza nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem przez przewodnictwo lub konwekcję, a energię traconą przez promieniowanie przy niewielkich różnicach temperatur można zaniedbać.

Pomiary

Łączymy układ według schematu pokazanego na rys. 4.18 i włączamy pompę próżniową na czas ok. 10 minut. Włączamy prąd i utrzymujemy stałą wartość napięcia U przez cały czas doświadczenia, wynoszący 50–60 min. Pomiary natężenia (które powinno być rzędu 300 mA), napięcia i temperatury wykonujemy w odstępach 5-cio-minutowych. W tym czasie temperatura próbki powinna wzrosnąć o 10–30°C. Zapisujemy masę próbki.

Obliczenia

W oparciu o uzyskane wyniki wykreślamy zależność temperatury T od czasu t. Wykres ten powinien przedstawiać linię prostą, która dla wyższych temperatur może wykazywać tendencję do zmniejszania nachylenia. Do dalszych obliczeń, jako końcowy przyjmujemy punkt, który jeszcze w granicach błędu leży na linii prostej. Wartości napięcia i natężenia odpowiadające temu punktowi przyjmujemy jako końcowe. Jako wartości początkowe T_p, $I_p(U)$ przyjmujemy jeden z pierwszych odczytów (najlepiej pierwszy). Podstawiając powyższe dane do równania (12.15) obliczamy ciepło właściwe. Następnie obliczamy wartości stosunku I_p/I lub U/U_p dla każdego z punktów i wykreślamy zależność tej wielkości od różnicy temperatur $T-T_p$. Określamy metodą najmniejszych kwadratów nachylenie powyższej prostej, które zgodnie z równaniem (12.16) jest równe współczynnikowi temperaturowemu oporu. Obliczamy błąd maksymalny ciepła właściwego oraz odchylenie standardowe współczynnika temperaturowego.

13. PIERWSZA ZASADA TERMODYNAMIKI

13.1. TERMOERGOMETR

Cel: wyznaczenie mechanicznego równoważnika ciepła za pomocą termoergometru.

Przyrządy: waga laboratoryjna (§ 3.4), termometr (§ 3.6), kalorymetr (§ 12.01–02).

Zagadnienia: I zasada termodynamiki (S2, § 7 i 8; J, § 13.1–3), termometria i kalorymetria (§ 12.01–02; S2, § 1, 2, 5; J, § 12.14–16), praca oraz energia i moment siły (S1, § 16 i 17, 19; P1, § 87, 120 i 121).

Wprowadzenie i aparatura

Mechanicznym równoważnikiem ciepła $\mathcal{J}$ nazywamy stosunek wykonanej pracy mechanicznej W do ilości ciepła Q powstającego z tej pracy

$$\mathcal{J} = WQ^{-1}. \tag{13.1}$$

Przyrządem, za pomocą którego możemy wyznaczyć mechaniczny równoważnik ciepła, jest termoergometr. Najprostszą postać termoergometru pokazano na rysunku 13.1. Metalowa rurka A jest połączona poprzez izolującą cieplnie tuleję z korbką K i może obracać się wokół osi O. Na rurce jest zaciśnięte śrubą S metalowe jarzmo B połączone z ramieniem R o długości l. Przytwierdzona do stołu za pomocą imadła Z drewniana podstawka D, mieszcząca w sobie kalorymetr C zaopatrzona jest w drugie nieruchome ramię $R1$ oraz trzy śruby służące do zamocowania pokrywy G, w której osadzona jest rurka A wraz z korbką. Przez zamykaną nakrętką plastykową P rurkę wprowadza się do kalorymetru termometr. W czasie obrotu rurki A jarzmo B jest porywane na skutek tarcia, jednak dynamometr F rozpięty między ramionami R i $R1$ uniemożliwia obrót jarzma wywierając na nie moment siły lF. Celem zapewnienia prostopadłości wektorów l i F zaczep E jest przesuwalny wzdłuż ramienia $R1$, a zaczep H na ramieniu R zaopatrzony jest w strzałkę, która pokrywa się z drugą nieruchomą (niewidoczną na rysunku 13.1) tylko wtedy, gdy l i F są prostopadłe. W czasie obrotu pomiędzy rurką A i jarzmem B działa siła tarcia T, której moment rT jest równy momentowi siły wytworzonemu przez dynamometr lF,

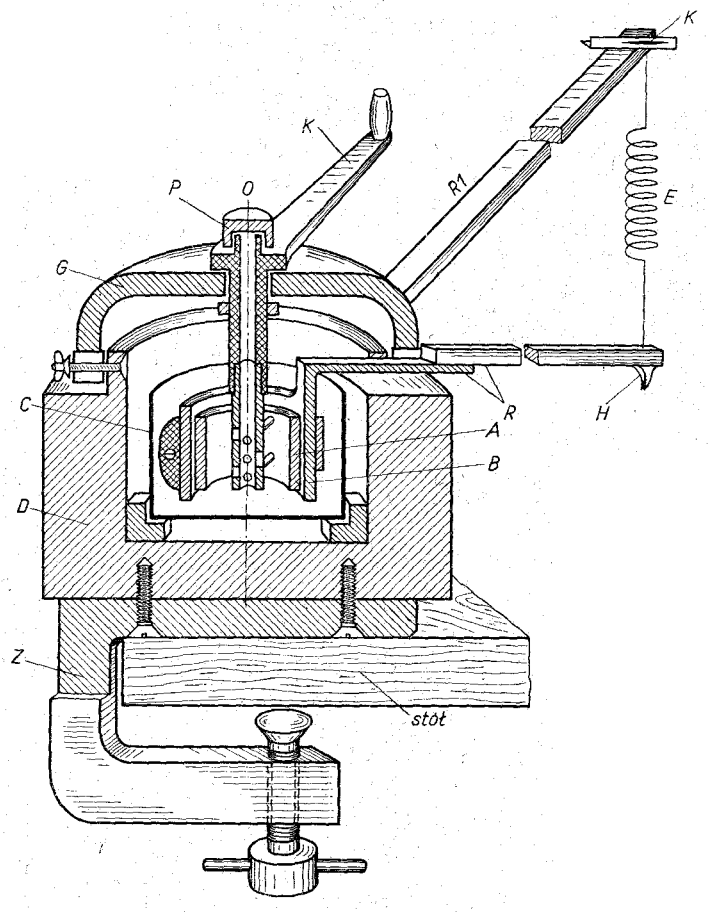
$$rT = lF.$$

Droga, na której działa siła tarcia, wynosi $2\pi rN$ (N — ilość obrotów), a praca W wyraża się wzorem:

$$W = T2\pi rN,$$

skąd

$$W = 2\pi lFN. \tag{13.2}$$



13.1. Termoergometr.

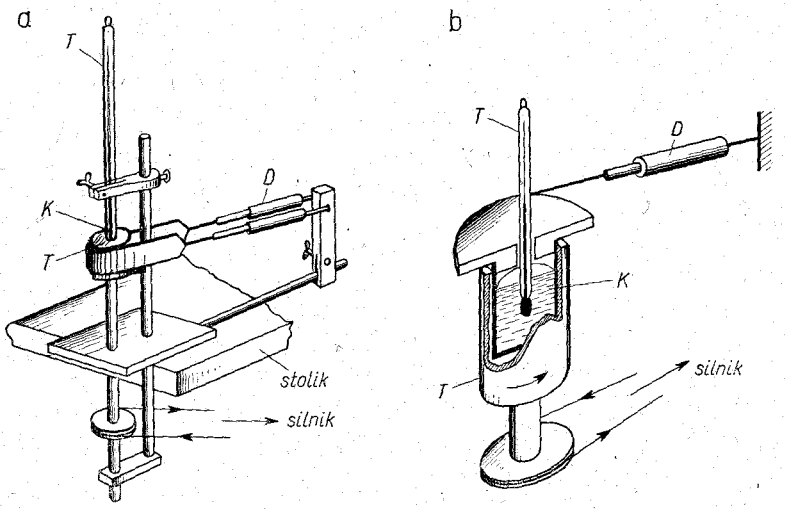
Praca ta zamienia się na ciepło Q podgrzewające części trące i kalorymetr. Oznaczając przez m_1, m_2, m_3 i m kolejno masę części A, jarzma B, kalorymetru oraz cieczy, a przez τ_p i τ_k temperatury początkową i końcową, oraz przez c_1, c_2, c_3 i c odpowiednie ciepła właściwe, wtedy ciepło Q wyrazić możemy wzorem

$$Q = (c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3 + cm)(\tau_k - \tau_p). \tag{13.3}$$

Podstawiając wyrażenia (13.2) i (13.3) do (13.1) mechaniczny równoważnik ciepła wyrazimy wzorem

$$J = \frac{2\pi lFN}{(c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3 + cm)(\tau_k - \tau_p)}. \tag{13.4}$$

Można niekiedy spotkać termoergometry z napędem elektrycznym. Tarcie może zachodzić bezpośrednio na ściankach kalorymetru zbudowanego z metalu. Szczęki, o które kalorymetr taki ociera się, są wykonane z materiału dobrze izolującego cieplnie np. korka. Na rysunku 13.2 pokazano jeden ze starego typu przyrządów termoergometr Wildermuth'a (rys. 13.2a), w którym obraca się kalorymetr. W przykładzie pokazanym na rys. 13.2b nieruchome są szczęki trące się o kalorymetr.



13.2. Termoergometry z napędem elektrycznym.

Pomiary

Doświadczenie rozpoczynamy od doboru warunków pomiaru. Ustawiamy przyrząd w sposób pokazany na rysunku 13.1. Wykonujemy kilka obrotów korbą i sprawdzamy wskazanie dynamometru. Jeżeli nie mieści się w przedziale wskazanym w instrukcji, rozluźniamy lub dokręcamy śrubę S (rys. 13.1). Stosownie do wskazań dynamometru przesuwamy zaczep K do takiego położenia, by wskazówki H pokryły się. Otwieramy termoergometr, wyjmujemy kalorymetr, oczyszczamy, suszymy, ważymy, napełniamy cieczą kalorymetryczną (naftą lub wodą itp.) do głębokości 2/3 i ważymy powtórnie (m_4). Następnie przyrząd składamy i mierzymy temperaturę początkową. Odczytujemy ją co 30 s do chwili, gdy przestanie się zmieniać. Wyjmujemy termometr, nakładamy pokrywę G i wykonujemy $N = 150$–200 obrotów korbą. Musimy starać się obracać równomiernie, by wychylenie dynamometru nie zmieniało się w czasie obrotu. Liczymy obroty i równocześnie obserwujemy wskazania dynamometru określając wartość średnią. Odczytujemy temperaturę końcową postępując w podobny sposób jak przy wyznaczaniu temperatury początkowej. Temperaturę mierzymy do czasu, gdy trzy kolejne pomiary dają taką samą wartość lub temperatura zacznie opadać. Wypisujemy z instrukcji nazwy materiałów, z których są wykonane: rurka, jarzmo i kalorymetr oraz masy tych części. Pomiary kalorymetryczne powtarzamy. Wskazane jest, by temperatura początkowa była o kilka stopni niższa od temperatury pokojowej.

Obliczenia

Temperaturę τ_p i τ_k określamy metodą interpolacji z wykresu przedstawiającego zależność temperatury od czasu (por. § 12.02). Obliczamy masę cieczy kalorymetrycznej i w tablicach odnajdujemy ciepło właściwe poszczególnych materiałów. Obliczamy mechaniczny równoważnik ciepła z wzoru (13.4) oraz błąd ΔJ. Przyjmujemy $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3 = \Delta m$ oraz $\Delta \tau_p = \Delta \tau_k$. Błędy obliczamy dla jednej serii pomiarów.

13.2. IZOBARYCZNE ROZPRĘŻANIE GAZU

Cel: wyznaczenie mechanicznego równoważnika ciepła i współczynnika rozszerzalności objętościowej.
Przyrządy: termometr (§ 3.6), barometr (§ 3.8).
Zagadnienia: I zasada termodynamiki (S2, § 7–9; J, § 13.1–3), gazy doskonałe (S2, § 3,9; J, § 12.8–10; 13.5–9).

Wprowadzenie i aparatura

Ogrzewając gaz udzielamy mu energii cieplnej δQ, która zgodnie z I zasadą termodynamiki podwyższa jego energię wewnętrzną o δU i w przemianie izobarycznej częściowo zamienia się na pracę δL,

$$\delta Q = \delta U + \delta L. \tag{13.5}$$

W czasie ogrzewania gaz pochłania ciepło

$$\delta Q = NC_p(\tau_k - \tau_p),$$

gdzie C_p oznacza molowe ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, τ_p — temperaturę początkową, τ_k — końcową, a N — ilość moli gazu. Zmiana energii wewnętrznej wyrazi się wzorem

$$\delta U = NC_v(\tau_k - \tau_p),$$

gdzie C_v — molowe ciepło właściwe w stałej objętości. Praca wykonana przez gaz przy izobarycznym rozprężaniu wynosi:

$$\delta L = p(V_k - V_p),$$

gdzie $V_k - V_p$ oznacza wzrost objętości przy wzroście temperatury, a p oznacza ciśnienie. Podstawiając ostatnie trzy wyrażenia do równania (13.5) otrzymamy

$$NC_p(\tau_k - \tau_p) = NC_v(\tau_k - \tau_p) + p(V_k - V_p). \tag{13.6}$$

Zgodnie z równaniem gazów doskonałych

$$NR(\tau_k - \tau_p) = p(V_k - V_p) \text{ lub } NC_v(\tau_k - \tau_p) = \frac{C_v}{R} p(V_k - V_p).$$

Podstawiając to wyrażenie za pierwszy wyraz prawej strony równania (13.6) otrzymamy

$$NC_p(\tau_k - \tau_p) = p(V_k - V_p)\frac{C_v + R}{R}.$$

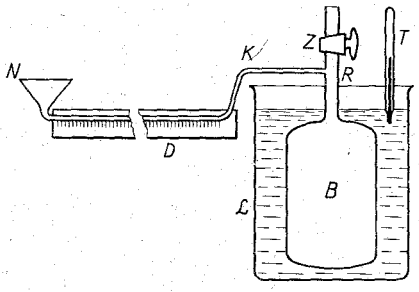
Ponieważ dla drobin dwuatomowych $C_v = \frac{5}{2}R$, a ponadto uwzględniając związek $NC_p = mc_p$, gdzie m — masa ciała, a c_p jego ciepło właściwe, ostatnie równanie przyjmuje postać

$$mc_p(\tau_k - \tau_p) = \frac{7}{2}p(V_k - V_p). \tag{13.7}$$

Jeżeli ciepło dostarczone gazowi wyrażone lewą stroną równania wyrazimy w kaloriach, a pracę wykonaną przez gaz (strona prawa) w dżulach, to mechaniczny równoważnik ciepła $\mathcal{J}$ wyrazi się wzorem

$$\mathcal{J} = \frac{7p(V_k - V_p)}{2mc_p(\tau_k - \tau_p)}. \tag{13.8}$$

Aparatura (rys. 13.3) składa się z szklanego zbiornika B o objętości V, zakończonego w górnej części rurką R, do której z boku wprowadzona jest kapilara K o długości ok. 30 cm. Kapilara zakończona jest lejkiem N. Rurka R jest zamknięta zaworem kur-



13.3. Aparatura do badania izobarycznego rozszerzania gazu.

kowym Z lub zwykłym korkiem gumowym. Powietrze w zbiorniku zamykamy kroplą rtęci. Temperatura zbiornika jest równa temperaturze łaźni wodnej, a ciśnienie — ciśnieniu barometrycznemu b. Objętość gazu V_p w temperaturze τ_p jest określona wzorem

$$V_p = V + \pi r^2(h_p - h_0),$$

gdzie h_p jest krawędzią rtęci od strony bańki przy temperaturze τ_p, h_0 — początek kapilary, a r — promień kapilary. Masę powietrza zawartego w bańce obliczymy z wzoru

$$m = \varrho_p V_p,$$

gdzie ϱ_p — gęstość, a V_p — objętość powietrza w temperaturze τ_p. Jeżeli ogrzejemy gaz do temperatury τ_k, jego objętość wzrośnie od V_p do V_k, przy czym słupek przesunie się do położenia h_k, wtedy

$$V_k = V_p + \pi r^2(h_k - h_p).$$

Podstawiając ostatnie trzy wyrażenia do równania (13.8) otrzymamy

$$\mathcal{J} = \frac{7b_0\pi r^2(h_k - h_p)}{2c_p(\tau_k - \tau_p)\varrho_p V_p}. \tag{13.9}$$

Z doświadczenia możemy dodatkowo wyznaczyć współczynnik rozszerzalności objętościowej gazu zdefiniowany wzorem

$$V_k = V_p[1+\gamma(\tau_k-\tau_p)] \text{ lub } \gamma = \frac{V_k-V_p}{(\tau_k-\tau_p)V_p},$$

gdzie przyrost objętości $V_k-V_p = \pi r^2(h_k-h_p)$, skąd ostatecznie mamy

$$\gamma = \frac{\pi r^2(h_k-h_p)}{(\tau_k-\tau_p)V_p}. \tag{13.10}$$

W wyprowadzeniach zaniedbano część objętości między kolbą a kapilarą. Trzeba by ją dodać do objętości V_p występującej w mianowniku równania (13.9). Poprawkę tę w granicach dokładności doświadczenia można zaniedbać.

Pomiary

Przy otwartym kurku K napełniamy łaźnię wodną lub zlewkę L wodą i czekamy do chwili, gdy temperatura się ustali. Mierzymy ją za pomocą termometru z dokładnością 0,1°C, w odstępach 30 s. W chwili, gdy kilka kolejnych pomiarów da taki sam wynik uważamy, że temperatura τ_p jest ustalona. Następnie tak ustawiamy przyrząd, by kropla z rtęci zamykająca zbiornik znalazła się o kilka centymetrów od wylotu kapilary do rurki R, zamykamy kurek K i odczytujemy położenie h_p lewej krawędzi słupka rtęci na podziałce D. Podgrzewamy wodę do chwili, gdy położenie słupka rtęci zmieni się o ok. 20 cm. Po czym czekamy na nowe ustalenie się temperatury zapisując ją znowu w odstępach 30 s i odczytujemy dokładne położenie lewej krawędzi rtęci h_k. Odczytujemy ciśnienie barometryczne b. Po zakończeniu każdej serii możemy przystąpić zaraz do następnej, jeżeli temperatura wody nie przekroczyła wartości o 5°C wyższej od temperatury pokojowej. W tym celu otwieramy kurek i bardzo ostrożnie przechylając przyrząd sprowadzamy rtęć w okolice pierwotnego położenia. Następnie kurek zamykamy i pomiary możemy rozpocząć na nowo. Jeżeli temperatura wody jest za wysoka, to otwieramy kurek i włączamy chłodzenie (w przypadku łaźni wodnej) lub zmieniamy wodę w zlewce. Kończąc pomiary zostawiamy otwarty kurek K. Wykonujemy pięć serii pomiarów. Promień kapilary r jest podany w instrukcji doświadczenia. Objętość V zmierzymy wypełniając bańkę B wodą, a następnie mierzymy objętość tej wody za pomocą cylindra miarowego.

Obliczenia

γ obliczamy z równania (13.8) dla każdej serii pomiarów i uśredniamy uzyskane wartości. Następnie ze wzoru (13.10) obliczamy współczynnik γ. Obliczamy błędy maksymalne $\Delta\gamma$ i $\Delta\gamma$ dla jednej serii oraz odchylenia standardowe $S_{\bar{\gamma}}$ i $S_{\bar{\gamma}}$ dla wyników końcowych metodą Studenta–Fishera. Dyskutujemy wyniki pomiarów i błędy pomiarowe.

13.3. DOŚWIADCZENIE BOYLE'A–MARIOTTE'A

Cel: sprawdzenie prawa Boyle'a–Mariotte'a dla powietrza i badanie rozkładu wyników pomiaru iloczynu pV.

Przyrządy: barometr (§ 3.8).

Zagadnienia: prawa gazów doskonałych (S2, § 7–9; J, § 13.5–9), równanie van der Waalsa (S2, § 24–27), prawo rozkładu błędów przypadkowych (H. Hänsel, Podstawy rachunku błędów, WNT, Warszawa 1968, § 2).

Wprowadzenie i aparatura

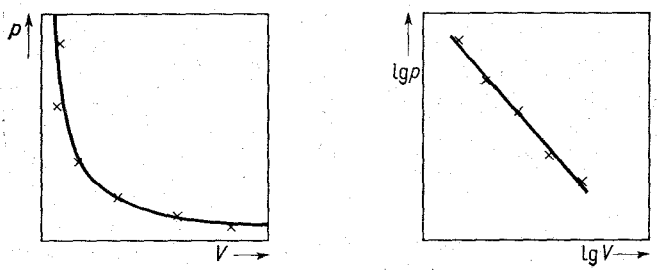
Według prawa Boyle'a–Mariotte'a iloczyn ciśnienia p i objętości V gazu przy stałej temperaturze jest wielkością stałą

$$pV = \text{const dla } T = \text{const.} \tag{13.11}$$

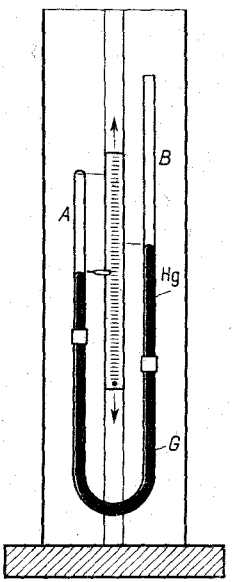
Logarytmując powyższe wyrażenie otrzymamy

$$\lg p = c' - \log V. \tag{13.12}$$

Równanie Boyle'a–Mariotte'a jest równaniem hiperboli równobocznej, natomiast to samo równanie w układzie współrzędnych $\lg p(\lg V)$ jest równaniem prostej (rys. 13.4). Przyrząd służący do sprawdzania powyższego prawa pokazano na rysunku 13.5. Składa się on z dwóch rurek A i B połączonych wężem gumowym G. Rurka A jest zatopiona.



13.4. Izoterma w układzie $p(V)$ oraz $\lg p$ ($\lg V$).



13.5. Przyrząd Boyle'a–Mariotte'a.

Rurka B jest otwarta. Obydwie rurki tworzą naczynia połączone i do pewnego poziomu wypełnione są rtęcią. Ponadto przyrząd zaopatrzony jest w skalę pozwalającą odczytywać poziom rtęci w obydwu rurkach. Wskazane jest, by skala była przesuwalna z zerem zaznaczonym w połowie długości. Wtedy zero skali przy każdym pomiarze ustawiamy dokładnie na poziomie rtęci w ramieniu A i odczytujemy wprost wysokość słupka powietrza l i różnicę poziomów rtęci h'. W rurce A nad rtęcią zamknięto pewną ilość suchego powietrza, które służy do sprawdzania prawa Boyle'a–Mariotte'a. Przesuwając w górę lub w dół ramię B zmieniamy ciśnienie i objętość gazu. Objętość jest iloczynem

przekroju poprzecznego rurki $S = \pi r^2$ i długości l słupka powietrza. Ciśnienie wyrażone w mm Hg jest sumą ciśnienia h odczytanego na barometrze i różnicy h' poziomów rtęci na przyrządzie i wynosi $p = (h+h')$.

Pomiary

Odczytujemy temperaturę pokojową, ciśnienie na barometrze rtęciowym oraz mierzymy średnicę wewnętrzną rurki B równą średnicy rurki A. Celem wykonania pomiarów zależności objętości od ciśnienia ramię A ustawiamy w połowie wysokości statywu. Ciśnienie gazu zależy wtedy od położenia ramienia B. Dla ok. 50-ciu położeń ramienia B (od $h' = 0$ do h'_{max}) odczytujemy h' i l. Podobną serię pomiarów wykonujemy dla ciśnień niższych od atmosferycznego.

Obliczenia

Obliczamy iloczyn $p_i V_i$ dla każdego z pomiarów. Ze względu na uciążliwość rachunków obliczenia wykonujemy suwakiem logarytmicznym. Obliczamy błąd maksymalny iloczynu $p_i V_i$ dla dowolnego pomiaru. Zaokrąglamy wyniki $(pV)_i$ do miejsca, na którym jest błąd. Obliczamy wartość średnią $\overline{(pV)}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(pV)_i$, odchylenia $\varepsilon_i = \overline{pV} - (pV)_i$, a następnie odchylenie standardowe $S_{\overline{pV}}$. Wykreślamy zależność względnej liczby pomiarów n_i/n dających tę samą wartość ε_i w zależności od ε_i, czyli rozkład błędów. Określamy odcięte punktów przegięcia tej krzywej, czyli odchylenie standardowe i sprawdzamy zgodność tego wyniku z wynikiem S_{pV} uzyskanym z bezpośredniego obliczenia. Spośród wszystkich 100 pomiarów wybieramy 10, pokrywających równomiernie cały zakres mierzonych wartości. Dla tych wybranych pomiarów wykonujemy wykres zależności $p(V)$, obliczamy wartości $\lg p_i$ oraz $\lg V_i$ i wykreślamy powyższą zależność w układzie $\lg p(\lg V)$. W tym przypadku dyskusję błędów ograniczamy do 2 punktów pomiarowych. Dyskutujemy zgodność uzyskanych wykresów z przewidywanymi teoretycznie zależnościami (rys. 13.4).

13.4. IZOTERMY GAZU RZECZYWISTEGO

Cel: wyznaczenie przebiegu kilku izoterm gazu rzeczywistego, którego temperatura parowania przy ciśnieniu atmosferycznym leży nieznacznie poniżej temperatury pokojowej.

Przyrządy: ultratermostat (§ 3.6 i 3.7), kompresor (§ 3.10), katetometr (§ 3.2).

Zagadnienia: równanie stanu gazów doskonałych (S2, § 7–9; J, 12.8–10, 13.5–9). Równanie van der Waalsa (S2, § 24, 27).

Wprowadzenie

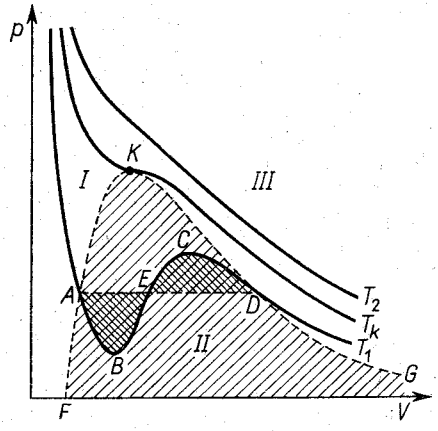
Zachowanie się gazów rzeczywistych i par przechłodzonych opisuje równanie van der Waalsa

$$\left(p + N^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - Nb) = NRT. \tag{13.13}$$

gdzie N oznacza ilość moli gazu, a i b stałe zależne od rodzaju gazu. Równanie powyższe jest równaniem trzeciego stopnia względem objętości i dla $N = 1$ można je napisać w postaci

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)V^2 + \frac{a}{p}V - \frac{ab}{p} = 0. \tag{13.14}$$

Wykresem jest krzywa trzeciego stopnia; jej przebieg dla różnych temperatur pokazano na rysunku 13.6. Równanie van der Waalsa dla temperatury T_1 i ciśnienia p posiada trzy rozwiązania A, E, D. Przy wzroście temperatury odcinek AD skraca się, a w temperaturze T_k zwanej temperaturą krytyczną redukuje się do jednego punktu K, który jest punktem przegięcia. Powyżej temperatury T_k izotermy są podobne do izoterm gazu doskonałego (izoterma T_2). Izotermy gazów rzeczywistych różnią się od izoterm Van der Waalsa, bowiem na odcinku od punktu A do D przebiegają wzdłuż prostej AD wybranej w ten sposób, by zakreskowane pola figur ABE i ECD były sobie równe.



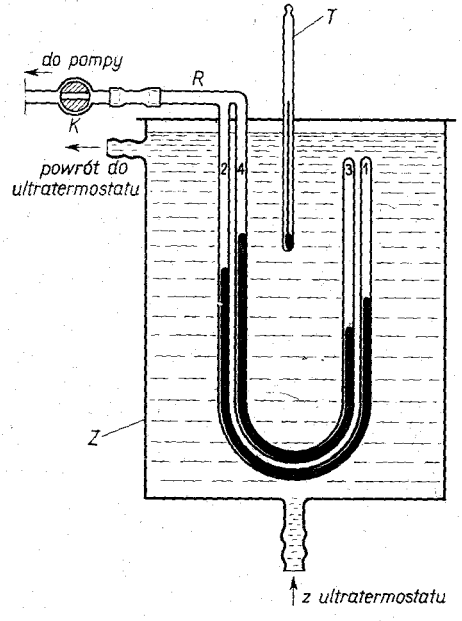
13.6. Izotermy van der Waalsa i izotermy gazów rzeczywistych.

Cały obszar wykresu pV dla gazów rzeczywistych podzielić możemy na trzy obszary. Obszar I, ograniczony izotermą krytyczną i krzywą KAF, jest obszarem cieczy, gdyż w tym obszarze mamy do czynienia z substancją ciekłą. W obszarze II, ograniczonym krzywą $FAKDG$, występuje para nasycona. Podstawową właściwością pary nasyconej jest niezależność ciśnienia od objętości, co na wykresie odpowiada prostoliniowemu, równoległemu do osi V odcinkowi izotermy AED. Obszar III od obszaru cieczy oddziela izoterma krytyczna, a od obszaru pary nasyconej krzywa KDG. W tym obszarze gaz stosuje się do prawa Boyle'a–Mariotte'a; jednak występują odstępstwa od tego prawa w pobliżu obszaru pary nasyconej. Odcinek AB krzywej van der Waalsa odpowiada zachowaniu się cieczy przegrzanej, a odcinek DC — pary przechłodzonej.

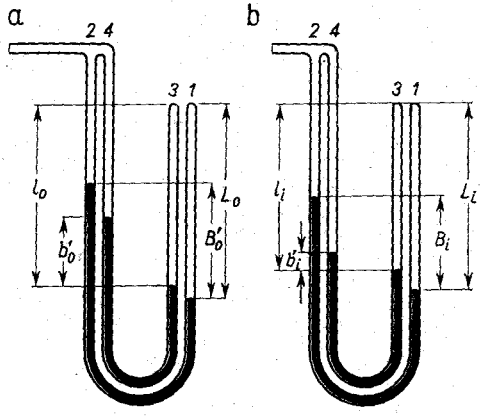
Aparatura

Aparatura (rys. 13.7) składa się z dwóch U-rurek, których prawe ramiona są zatopione, a lewe łączą się z rurką R, prowadzącą poprzez kurek K do kompresora. Układ U-rurek znajduje się w połączonej z ultratermostatem kąpieli wodnej. Pojemnik Z jest wykonany ze szkła organicznego. Dolna część U-rurek wypełniona jest rtęcią.

W prawym ramieniu *1* znajduje się gaz, którego zachowanie zbliżone jest do gazu doskonałego, natomiast w rurce *3* znajduje się gaz rzeczywisty (np. eter etylowy). Położenie poziomów rtęci w ramionach *1*, *2*, *3*, *4* *U*-rurek odczytuje się za pomocą katetometru lub na ruchomej skali znajdującej się za *U*-rurkami. Różnicę wysokości słupków rtęci oznaczymy dla gazu doskonałego dużymi, a dla gazu rzeczywistego małymi literami jak na rysunku 13.8, na którym przypadek a. przedstawia sytuację przy ciśnieniu atmosferycznym, a przypadek b. odpowiada ciśnieniu podwyższonemu. Wysokości słupków rtęci uważamy za dodatnie, gdy poziom w ramionach *2*, *4* jest wyższy niż w *1*, *3*. W doświadczeniu wszystkie odczyty wielkości b' i B' będziemy musieli redukować do temperatury 0°C. Zredukowane wysokości oznaczać będziemy odpowiednio przez b i B.



13.7. Przyrząd do badania izoterm gazu rzeczywistego.



13.8. Oznaczenia stosowane w opisie doświadczenia z izotermami.

Obliczanie ciśnienia panującego w poszczególnych ramionach. Przy otwartym zaworze kurkowym K, w ramionach *2* i *4* panuje ciśnienie atmosferyczne

$$p = \varrho g h_0, \tag{13.15}$$

gdzie ϱ — gęstość rtęci, h_0 — zredukowane ciśnienie barometryczne. Gaz doskonały powstaje wtedy pod ciśnieniem

$$P_0 = \varrho g(h_0 + B_0). \tag{13.16}$$

Natomiast ciśnienie gazu rzeczywistego wynosi

$$P_0 = \varrho g(h_0 + b_0). \tag{13.17}$$

Objętość gazu V obliczamy ze wzoru

$$V_i = Sl_i \text{ lub } V_i = \pi r^2 l_i \tag{13.18}$$

zależnie od tego czy znany jest przekrój S, czy też promień r rurki. Jeżeli w lewym ramieniu ciśnienie się zmieni, to zmieni się położenie słupków rtęci. Oznaczymy nowe wartości w sposób pokazany na rys. 13.8b. Wtedy dla gazu doskonałego zachodzi

$$P_0 L_0 = P_i L_i.$$

Podstawiając do powyższego równania na P_0 wartość z równania (13.16) otrzymamy

$$P_i = \varrho g (h_0 + B_0) \frac{L_0}{L_i}.$$

W lewym (*2*-gim) ramieniu *U*-rurki z gazem doskonałym panuje ciśnienie $P_{(Bi)}$ będące różnicą ciśnienia P_i oraz ciśnienia wywieranego przez słupek rtęci o wysokości B_i', czyli

$$P_{(Bi)} = \varrho g \left[(h_0 + B_0) \frac{L_0}{L_i} - B_i \right].$$

Ze względu na to, że lewe ramiona obydwu *U*-rurek są złączone, takie samo ciśnienie panuje w ramieniu *4*-tym *U*-rurki z gazem rzeczywistym. Stąd ciśnienie p_1 gazu rzeczywistego jest równe ciśnieniu $P_{(Bi)}$ powiększonemu o ciśnienie słupka rtęci b_i',

$$p_i = \varrho g \left[(h_0 + B_0) \frac{L_0}{L_i} + b_i - B_i \right]. \tag{13.19}$$

Pomiary

Nastawiamy na termometrze kontaktowym żądaną temperaturę T_1, włączamy ultratermostat, otwieramy zawór K (rys. 13.7), ustawiamy katetometr, odczytujemy wskazania barometru rtęciowego i temperaturę pokojową, kontrolujemy temperaturę kąpieli wodnej i po jej ustaleniu się odczytujemy wartości poziomów rtęci w poszczególnych ramionach rurek oraz poziom zatopionych zakończeń prawych ramion. Następnie podwyższamy nieco ciśnienie w lewym ramieniu otwierając na chwilę zawór K, pompujemy nieco powietrza i odczytujemy poziomy rtęci w ramionach *1*, *2*, *3* i *4* oznaczając je znaczkiem $i = 1$. Postępując dalej w ten sposób otrzymamy wartość dla $i = 2, 3 \ldots 10$. Wykonujemy więc przynajmniej 10 pomiarów w zakresie ciśnień podanych w instrukcji. Notujemy dokładności wykonanych pomiarów. Wszystkie wymienione pomiary powtarzamy dla dwóch innych temperatur kąpieli wodnej.

Obliczenia

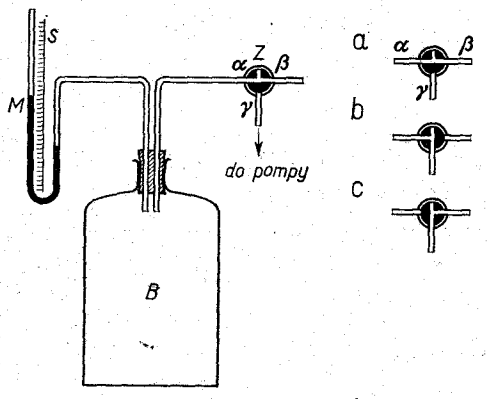
Dla każdej temperatury obliczamy wysokości słupków L_i, l_i, B_i' oraz b_i'. Dwie ostatnie wartości redukujemy do temperatury 0°C (dla temperatury kąpieli). Redukujemy również wskazanie barometru. Ze wzorów (13.18) obliczamy wartości V_i, z wzoru (13.17) wartość p_0, a z wzoru (13.19) wartości p_i dla $i = 1, 2 \ldots n$. Podobne obliczenia wykonujemy dla innych temperatur. (Ze względu na dużą ilość obliczeń posługujemy się suwakiem logarytmicznym.) Błędy mierzonych ciśnień i objętości obliczamy dla trzech punktów pomiarowych (po jednym w każdej temperaturze) i przyjmujemy, że pozostałe wielkości obarczone są takim samym błędem. Wykonujemy na jednym arkuszu wykresy wszystkich trzech izoterm i dyskutujemy krótko uzyskane wyniki.

Cel: wyznaczenie wartości stosunku $\varkappa = c_p/c_v$ dla powietrza metodą Clementa i Desormes'a.
Przyrządy: manometr (§ 3.8), pompa próżniowa (§ 3.10), zawór trójdrożny (§ 3.11).
Zagadnienia: przemiany gazów doskonałych (S2, § 7–9; J, § 8–10, 12, 13.5–9).

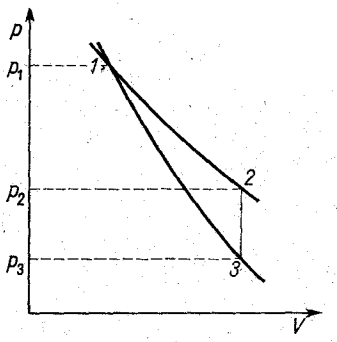
Wprowadzenie i aparatura

Zasada pomiaru stosunku $\varkappa = c_p/c_v$, a więc stosunku ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości jest następująca. W balonie szklanym B o objętości kilkudziesięciu litrów (rys. 13.9) zamknięty jest gaz (powietrze) pod ciśnieniem o p_1 wyższym od ciśnienia atmosferycznego p_3 o ok. 10 cm H_2O. Na wykresie pV (rys. 13.10) stanowi temu odpowiada punkt *1*. Zawór kurkowy Z pozwala na połączenie balonu z powietrzem atmosferycznym. Otwierając ten zawór przez odpowiedni obrót kurka na czas ok. 3 s spowodujemy adiabatyczne rozprężenie gazu. Ciśnienie w butli spada wtedy do ciśnienia atmosferycznego, a więc

$$\Delta p_{ad} = p_1. \tag{13.20}$$



13.9. Aparatura do wyznaczania c_p/c_v.



13.10. Cykl przemian przy wyznaczaniu $\varkappa$.

Na wykresie 13.10 odpowiada to przejściu od punktu 1 do 3 po adiabacie

$$pV^{\varkappa} = \text{const.} \tag{13.21}$$

Po zamknięciu zaworu gaz powoli ogrzewa się, a jego ciśnienie wzrasta do wartości p_2 odpowiadającej punktowi *2*. Punkty *2* i *3* leżą na tej samej izochorze, ponieważ przemiana odbywa się przy stałej objętości (zamknięta butla). Ze względu na stałość temperatury otoczenia punkty *1* i *2* leżeć muszą na tej samej izotermie

$$pV = \text{const.} \tag{13.22}$$

Zatem przejściu od punktu *1* do punktu *2* po izotermie odpowiada zmiana ciśnienia

$$\Delta p_{iz} = p_1 - p_2. \tag{13.23}$$

Aby znaleźć związek pomiędzy $\varkappa$ a Δp_{iz} i Δp_{ad} wykonujemy następujące działania na równaniach (13.21) i (13.22).

logarytmowanie $\ln p + \varkappa \ln V = \text{const}$ i $\ln p + \ln V = \text{const}$

różniczkowanie $\frac{dp}{p} + \varkappa \frac{dV}{V} = 0$ i $\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 0$

przejście do przyrostów skończonych $\frac{\Delta p_{ad}}{\Delta V} = -\varkappa \frac{p}{V}$ i $\frac{\Delta p_{iz}}{\Delta V} = -\frac{p}{V}$.

Dzieląc obydwa równania stronami otrzymamy

$$\varkappa = \frac{\Delta p_{ad}}{\Delta p_{iz}}.$$

Podstawiając na Δp_{ad} i Δp_{iz} wartości z równań (13.20) i (13.23) otrzymamy

$$\varkappa = \frac{p_1}{p_1 - p_2}.$$

Ponieważ ciśnienie p_i mierzymy za pomocą manometru wodnego, zachodzi związek $p_i = \varrho g h_i$, skąd otrzymamy ostatecznie

$$\varkappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \tag{13.24}$$

Pomiary

Kurek zaworu *2* ustawiamy w położeniu *b* (rys. 13.9), a następnie za pomocą pompy ręcznej wytwarzamy nadwyżkę ciśnienia w balonie (h_1) i ustawiamy kurek w położeniu *C* zamykając balon. Czekamy przez dłuższy czas (do 5 min) na ustalenie się temperatury w balonie, a tym samym ustalenie poziomu cieczy w manometrze. Różnica poziomów powinna być rzędu 10 mm. Ustawiamy kurek zaworu *Z* w położeniu *a* na przeciąg 2–3 s. Staramy się położenie *a* osiągnąć szybko i dokładnie, by uniknąć błędów niekontrolowanych. Po upływie 2–3 s ustawiamy kurek w położeniu *c* zamykając balon i czekamy ok. 1–2 minut na ponowne ustalenie różnicy poziomów (h_3) w manometrze. W oparciu o wzór (13.24) analizujemy wpływ pomiarów prostych na wynik końcowy. Planujemy właściwe pomiary i wykonujemy je wielokrotnie, by do wyników końcowych stosować metodę najmniejszych kwadratów.

Obliczenia

Dla każdej pary pomiarów obliczamy wartość $\varkappa$ z wzoru (13.21), po czym wyniki uśredniamy otrzymując $\bar{\varkappa}$. Błąd $S_{\bar{\varkappa}}$ obliczamy metodą Gaussa (błąd średni kwadratowy średniej arytmetycznej). Dla jednej pary pomiarów obliczamy błąd maksymalny. Dyskutujemy zgodność błędów obliczonych obiema metodami oraz zgodność wyniku $\varkappa$ z danymi z tablic fizycznych.

14. ZMIANY STANÓW SKUPIENIA

14.1. CIEPŁO PAROWANIA WODY

Cel: wyznaczanie ciepła parowania wody metodą kalorymetryczną.
Przyrządy: kalorymetr (§ 12.01–02), barometr (§ 3.8), fen (§ 3.10), waga laboratoryjna (§ 3.4).
Zagadnienia: zmiany stanów skupienia (S2, § 12–14; J, § 12.18–24).

Wprowadzenie

W każdej temperaturze ciecz paruje i w powietrzu znajdują się jej pary. Przestaje ona parować dopiero wtedy, gdy ciśnienie cząstkowe jej par osiągnie wartość zwaną ciśnieniem nasycenia. Ciśnienie nasycenia rośnie z temperaturą i osiąga wartość ciśnienia atmosferycznego w temperaturze wrzenia. Następuje wtedy tzw. wrzenie i ciecz paruje w całej objętości; z głębi wydobywają się pęcherzyki pary nasyconej. Pęcherzyki pary nasyconej nie mogą istnieć, jeżeli ciśnienie pary jest mniejsze od ciśnienia atmosferycznego. Ze względu na zależność ciśnienia nasycenia od temperatury, temperatura wrzenia zależeć więc musi od ciśnienia.

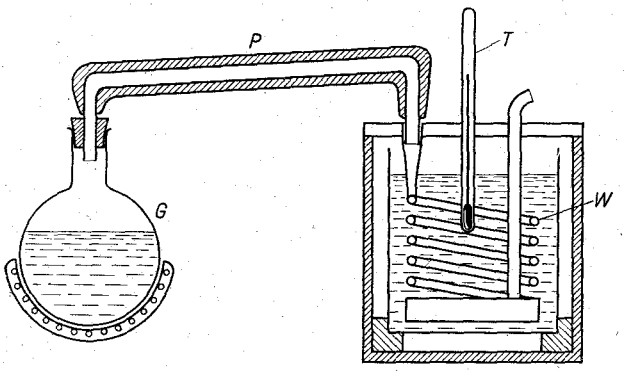
Przy zamianie cieczy na parę pochłonięte zostaje tzw. ciepło parowania. Ciepłem parowania nazywamy ilość energii cieplnej potrzebną do zamienienia w parę w temperaturze wrzenia 1 kg cieczy

$$r = \frac{Q}{m}. \tag{14.1}$$

Para skraplając się oddaje dokładnie taką samą ilość ciepła jaką pobrała ta sama ilość cieczy w czasie parowania. (Często ciepło oddawane przy skraplaniu nazywamy ciepłem skraplania.)

Aparatura

Aparatura (rys. 14.1) składa się z układu służącego do wytwarzania pary G (generator pary), kalorymetru z wężownicą W, w której skrapla się para. Przewód P łączący generator pary z kalorymetrem jest dobrze izolowany azbestem. Wężownica W jest stosunkowo długa, a w dolnej części posiada część rozszerzoną tworzącą pojemnik na skondensowaną wodę. (W przypadku braku pojemnika, ciecz zamyka wężownicę,



14.1. Aparatura do pomiaru ciepła parowania.

a ciśnienie i temperatura pary wzrastają.) W omawianym przypadku kalorymetr zyskuje ciepło $(C_k + c_w m_w)(\tau_k - \tau_p)$ kosztem pary, która skraplając się oddaje ciepło parowania rm_p i ochładza się od temperatury wrzenia τ_w do temperatury kalorymetru τ_k oddając ciepło $c_w m_p(\tau_w - \tau_k)$, czyli

$$(C_k + c_w m_w)(\tau_k - \tau_p) = rm_p + c_w m_p(\tau_w - \tau_k),$$

gdzie m_p oznacza masę skroplonej pary. Zatem

$$r = \frac{(C_k + c_w m_w)}{m_p}(\tau_k - \tau_p) - c_w(\tau_w - \tau_k). \tag{14.2}$$

Pomiary

Aparaturę ustawiamy w ten sposób, by generator pary był bardzo dobrze odizolowany cieplnie od kalorymetru. Osuszamy za pomocą fenu wężownicę i kalorymetr. Ważymy kalorymetr z możliwie dużą dokładnością (m_1), po czym wypełniamy go wodą do 3/4 wysokości i ważymy powtórnie (m_2). Podgrzewamy wodę w generatorze pary z podłączonym już przewodem P. Jednak jego koniec służący do połączenia z wężownicą ustawiamy z dala od kalorymetru. Rozpoczynamy pomiary temperatury T kalorymetru w odstępach 30 s i kontynuujemy je do końca doświadczenia. Gdy generator pary wytwarza już parę, czekamy jeszcze do chwili, gdy przewód P nagrzeje się do temperatury wrzenia (para nie skrapla się, lecz silnym strumieniem wypływa z przewodu) i dopiero wtedy przewód podłączamy do kalorymetru. W dalszym ciągu mieszamy ciecz w kalorymetrze i mierzymy temperaturę co 30 s. Gdy temperatura T wzrośnie o ok. 10°C, odłączamy parę (wyjmujemy przewód P z kalorymetru) i wyłączamy grzejnik G. Temperaturę w kalorymetrze mierzymy do chwili, gdy zacznie opadać lub przez dłuższy czas utrzymuje stałą wartość. Ważymy kalorymetr (m_3), zapisujemy wskazanie barometru rtęciowego i temperaturę pokojową oraz dokładności pomiarów.

Obliczenia

Obliczamy masę wody w kalorymetrze $m_w = m_2 - m_1$ oraz masę pary ($m_p = m_3 - m_2$). Redukujemy wskazanie barometru do temperatury 0°C i z tablic odczytujemy temperaturę wrzenia wody. Wykreślamy zależność temperatury kalorymetru od czasu i metodą interpolacji (§ 11.02) określamy temperaturę τ_p i τ_k. (Nie stosując metody interpolacji, przyjmujemy na temperaturę τ_p wartość zmierzoną w chwili włączenia pary do kalorymetru, a na τ_k maksymalną wartość osiągniętą po odłączeniu przewodu z parą.) Ciepło parowania obliczamy z wzoru (14.2). Obliczamy błąd maksymalny Δr i sprawdzamy zgodność wyniku z tablicami fizycznymi.

14.2. CIEPŁO TOPNIENIA LODU

Cel: wyznaczenie ciepła topnienia lodu metodą kalorymetryczną.

Przyrządy: kalorymetr (§ 12.01–02), waga (§ 3.4).

Zagadnienia: termometria i kalorymetria (S2, § 1–5; J, § 12.1–11; 12.16), zmiany stanów skupienia (S2, § 12, 14; J, § 12.19–24).

Wprowadzenie i aparatura

Ciepłem topnienia nazywamy ilość ciepła potrzebną do stopienia 1 kg ciała w temperaturze topnienia

$$q = \frac{Q}{m}. \tag{14.3}$$

Pomiar ciepła topnienia lodu wykonać możemy w zwykłym kalorymetrze. W tym celu kalorymetr wypełniamy wodą podgrzaną i wrzucamy kilka kostek osuszonego lodu.

W kalorymetrze lód topnieje pobierając ciepło topnienia qm_L. Woda powstała na skutek topnienia lodu ogrzewa się od temperatury τ_k pobierając ciepło $c_w m_L(\tau_k - 0°C)$. Topnienie i ogrzewanie odbywa się kosztem ciepła dostarczonego przez kalorymetr i zawartą w nim wodę $(C_k + m_w c_w)(\tau_p - \tau_k)$. Zatem bilans ciepła przyjmie postać

$$qm_L + c_w m_L \tau_k = (C_k + m_w c_w)(\tau_p - \tau_k),$$

skąd

$$q = \frac{C_k + m_w c_w}{m_L}(\tau_p - \tau_k) - c_w \tau_k. \tag{14.3a}$$

Pomiary

Wyznaczenie stałej kalorymetru wykonujemy w sposób przedstawiony w § 12.02. Celem wyznaczenia ciepła topnienia osuszamy i ważymy kalorymetr (m_1). Wypełniamy 3/4 objętości wodą podgrzaną do ok. 30°C i ponownie ważymy (m_2). Przygotowujemy kilka kawałków (ok. 10 cm^3) topniejącego lodu. Lód powinien posiadać temperaturę 0°C, a więc musimy go pobrać z naczynia, w którym znajdowała się woda z lodem. Mierzymy temperaturę wody w kalorymetrze w odstępach 30 s mieszając ją ciągle. Po ustaleniu się temperatury wrzucamy osuszone ligniną kawałki lodu, zamykamy kalorymetr, ciegle mieszamy i mierzymy temperaturę co 30 s do chwili, gdy przestanie ona opadać. Ważymy kalorymetr (m_3) i notujemy dokładności pomiarów.

Obliczenia

Pojemność cieplną kalorymetru C_k oraz błąd ΔC_k obliczamy w sposób przedstawiony w § 12.02. Obliczamy masę lodu w kalorymetrze $m_w = m_2 - m_1$ oraz masę lodu $m_L = m_3 - m_2$. Wykreślamy zależność temperatury τ wody w kalorymetrze od czasu i z wykresu, przez interpolację określamy temperaturę początkową τ_p i końcową τ_k wody w kalorymetrze, z wzoru (14.3) obliczamy ciepło topnienia oraz błąd Δq, a następnie sprawdzamy zgodność wyniku z tablicami.

14.3. TOPNIENIE CIAŁ STAŁYCH

Cel: wyznaczenie temperatury topnienia ciała jednoskładnikowego (metalu) i stopu.

Przyrządy: termoogniwo (§ 3.6), mikrowoltomierz lub rejestrator temperatury (§ 18.01–03).

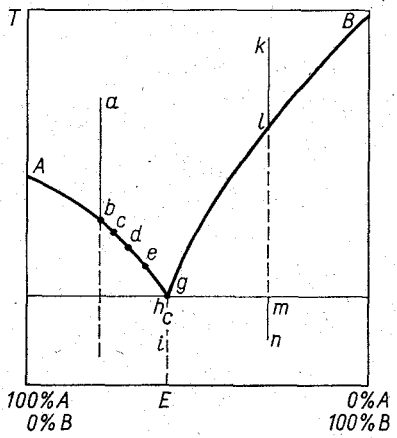
Zagadnienia: topnienie i krzepnięcie roztworu oraz własności stopów (S2, § 12–19; J, § 12.19–26), budowa ciał stałych (S2, § 55–56).

Wprowadzenie

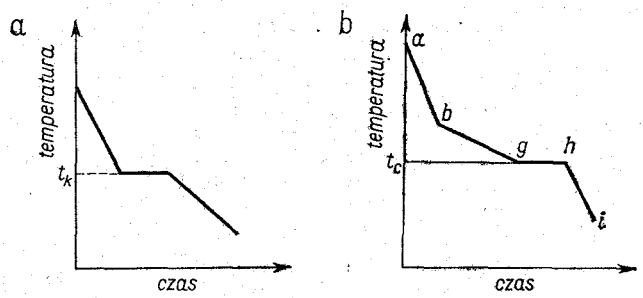
Stopy są roztworami stałymi czystych metali. Istnieją trzy rodzaje stopów. a. Niektóre metale (np. mangan z bizmutem) nie mieszają się nawet w stanie ciekłym, lecz rozwarstwiają się podobnie jak woda z oliwą. b. Inne, mieszają się wprawdzie w fazie ciekłej, a w fazie stałej nie tworzą kryształów mieszanych, lecz oddzielne kryształy każdego ze składników (np. kadmu z bizmem). c. W trzecim rodzaju stopów obydwa

składniki w stanie stałym mieszają się w każdym stosunku. Zachodzi to tylko dla metali krystalizujących w takich samych układach krystalograficznych i posiadających zbliżone średnice atomów (np. dwuskładnikowe stopy srebra, złota i miedzi).

W omawianym doświadczeniu interesuje nas wyłącznie przypadek b, dla którego zależności temperatury krzepnięcia od składu posiadają przebieg przedstawiony na rys. 14.2. Jeżeli obniżamy temperaturę roztworu ciekłego o składzie odpowiadającym linii *ab*, to w chwili, gdy osiągamy temperaturę odpowiadającą punktowi *b* zaczynają tworzyć się kryształki czystego składnika *A*. Z tego powodu powstała ciecz zostaje wzbogacona w składnik *B*. Skład tej cieczy odpowiada punktowi *c*, dla którego temperatura krzepnięcia jest niższa. Stąd musimy ciecz ponownie nieco ochłodzić, by mogła zachodzić dalsza



14.2. Zależność temperatury topnienia stopu od jego składu.



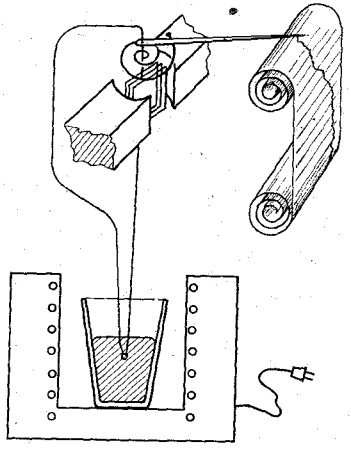
14.3. Krzywe stygnięcia metalu (a) i stopu (b).

krystalizacja. Po obniżeniu temperatury znowu wydzielają się kryształki składnika *A*, a skład powstałej cieczy będzie odpowiadał punktowi *d*. Zatem temperatura całości może znowu się obniżyć. Proces ten postępuje dalej w sposób ciągły do chwili, gdy skład cieczy będzie odpowiadał punktowi *h*, zwanemu punktem eutektycznym. W tej temperaturze krystalizują obydwa składniki równocześnie, lecz każdy z nich tworzy oddzielne kryształki. Temperatura pozostaje już stała do czasu całkowitego zakrzepnięcia roztworu. Po zestaleniu otrzymujemy mieszaninę kryształów czystych składników. Dla omawianego przykładu krzywą stygnięcia pokazano na rysunku 14.3b. Dla temperatur od punktu *a* do *b* spadek temperatury następuje ze stałą szybkością i nachylenie krzywej jest stałe.

Dla przedziału temperatur w zakresie określonym przez punkty *b* i *g* występuje częściowa krystalizacja, przy której jest wydzielane ciepło krzepnięcia. Stąd też na odcinku *bg* spadek temperatury jest wolniejszy. Po osiągnięciu temperatury eutektycznej temperatura pozostaje stała do chwili całkowitego zakrzepnięcia roztworu. Wreszcie po zestaleniu temperatura znowu szybko spada. Tak więc przebieg krzywej ostygania stopu jest inny niż w przypadku czystej substancji, w której brak odcinka *bg* o zmniejszonym nachyleniu (por. rys. 14.3). Podobny przebieg krzywej chłodzenia otrzymamy w przypadku, gdy początkowy skład roztworu ciekłego będzie odpowiadał linii *k–n*. Różnica będzie polegała tylko na tym, że w temperaturze odpowiadającej punktowi *l* wydzielają się czyste kryształy substancji *B*. Dla mieszaniny o składzie eutektycznym *E* otrzymamy przebieg krzywej chłodzenia podobny jak dla substancji czystej. Z powyższego wynika, że na wykresach 14.2 i 14.3 wydzielić możemy pewne obszary, w których występują różne fazy. W obszarze cieczy wystąpi tylko jedna faza jednorodnej mieszaniny obydwu składników. W obszarze ograniczonym krzywą *AC* i temperaturą eutektyczną wystąpi mieszanina fazy ciekłej oraz fazy stałej ciała *A*. Pomiędzy temperaturą eutektyczną i krzywą *CB* istnieją fazy: ciekła i stała składnika *B*. Wreszcie poniżej temperatury eutektycznej istnieje mieszanina kryształów faz stałych składników *A* i *B*.

Aparatura i pomiary

W doświadczeniu badamy temperaturę krzepnięcia czystego ołowiu, cyny lub bizmutu oraz stopu dowolnych dwóch spośród tych metali. Próbki metali topimy w tyglach ceramicznych, a temperaturę mierzymy termoogniwem (rys. 14.4). Do podgrzewania stosujemy palnik gazowy lub piec elektryczny. Po stopieniu próbki palnik wyłą-



14.4. Aparatura do pomiaru temperatury krzepnięcia.

czamy i mierzymy temperaturę w odstępach 1-minutowych. Jeżeli dysponujemy rejestratorem temperatury, to wykresy otrzymamy wprost z zapisu rejestratora. Rejestrator jest przyrządem, który nie tylko wskazuje, lecz zapisuje na przesuwającej się taśmie temperaturę mierzoną. Podobne pomiary wykonujemy dla drugiej próbki. Notujemy dokładność termoogniwa. Wykonujemy próbne wykresy uzyskanych zależności.

Obliczenia

Wykreślamy zależności temperatury od czasu dla obydwu badanych próbek. Prostokąty błędu nanosimy dla kilku punktów leżących w okolicy temperatury krzepnięcia. Z wykresów tych odczytujemy temperaturę krzepnięcia czystej substancji, temperaturę eutektyczną stopu oraz temperaturę, w której rozpoczęła się krystalizacja jednego ze składników. Korzystając z temperatur krzepnięcia i eutektycznej oraz tablic fizycznych identyfikujemy substancję czystą i stop. Błąd temperatur krzepnięcia określamy z wykresu.

14.4. ZALEŻNOŚĆ TEMPERATURY WRZENIA OD CIŚNIENIA

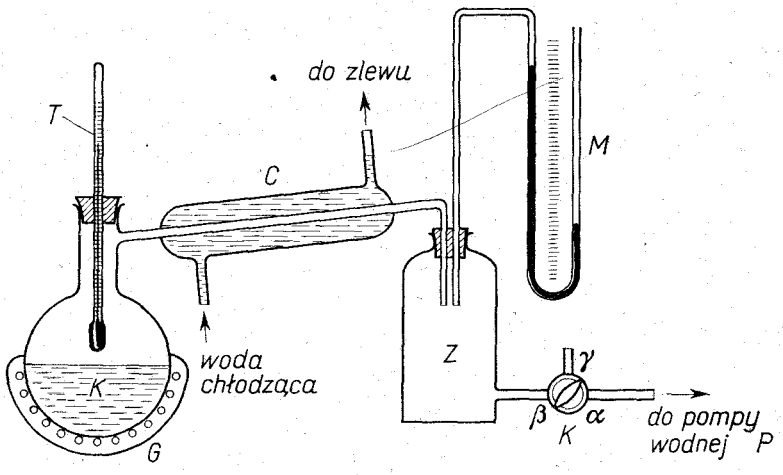
Cel: wyznaczenie zależności temperatury wrzenia od ciśnienia wody dla ciśnień niższych od ciśnienia atmosferycznego.

Przyrządy: pompka wodna (§ 3.10), manometr rtęciowy i barometr (§ 3.8)

Zagadnienia: zmiany stanów skupienia (S2, § 12, 20–27; J, § 12.18–30).

Aparatura

Aparatura pokazana na rysunku 14.5 składa się z pompki wodnej, trójdrożnego zaworu kurkowego *K*, zbiornika próżni *Z* (butla 2–3 l), manometru rtęciowego *M*, chłodnicy *C* oraz kolby *K* z termometrem *T*. Zamiast pompy wodnej stosować można inny rodzaj pomp próżniowych (ręczna, rotacyjna). Podgrzewanie elektryczne można zastąpić podgrzewaniem gazowym. Chłodnica musi być ustawiona w ten sposób, by



14.5. Aparatura do badania zależności temperatury wrzenia od ciśnienia.

skroplona ciecz wracała do kolby. W kolbie, po dłuższym czasie gotowania zostają zużyte wszystkie zarodniki, wokół których mogą tworzyć się pęcherzyki pary i następuje przegrzanie. Zapobiegają temu umieszczone na dnie kolby rurki szklane lub bardzo porowate substancje stałe znacznie zwiększające powierzchnię. Połączenia poszczególnych elementów układu muszą być szczelne; stosuje się wąż grubościenny.

Manometr M wskazuje różnicę między ciśnieniem panującym w aparaturze i ciśnieniem atmosferycznym. Ciśnienie p_i panujące w aparaturze odpowiada różnicy wskazań barometru rtęciowego (b) i manometru h_i i wyraża się wzorem

$$p_i = \varrho_{Hg} g(b - h_i). \tag{14.4}$$

Pomiary

Włączamy silny strumień wody przez pompę P, a kurek K ustawiamy w położeniu łączącym ją ze zbiornikiem Z. Po osiągnięciu podciśnienia rzędu 20–40 cm Hg (wskazanie manometru), kurkiem K zamykamy zbiornik Z (łącząc tym samym ramiona α i γ). Wyłączamy wodę płynącą przez pompę i kontrolujemy szczelność aparatury. W szczelnej aparaturze różnica poziomów rtęci powinna pozostawać stała lub może zmniejszać się bardzo nieznacznie. Po stwierdzeniu szczelności aparatury włączamy grzejnik G oraz bardzo słaby strumień wody przez chłodnicę. Ponownie odpompowujemy aparaturę celem osiągnięcia jak najniższego ciśnienia (jak największe wskazanie manometru). Gdy ciśnienie ustali się, zamykamy zbiornik, wyłączamy pompę, czekamy do chwili, gdy ciecz zacznie wrzeć i obserwujemy termometr T. Po ustaleniu się jego wskazania odczytujemy w miarę możności niemal równocześnie temperaturę τ_i wskazanie manometru h_i, notując położenia słupka rtęci w obydwu ramionach h_{1l} i h_{1p}. W przypadku, gdy skala manometru jest ruchoma, ustawiamy jej początek równo z poziomem niższym i odczytujemy wprost h_i. Następnie obracając bardzo wolno kurek K wpuszczamy nieco powietrza do aparatury zmniejszając różnicę poziomów w manometrze o około 2 cm. Podgrzewamy wodę i wykonujemy pomiar τ_i i h_i. Postępujemy dalej w ten sposób do chwili osiągnięcia ciśnienia atmosferycznego. Odczytujemy wskazanie barometru rtęciowego b i notujemy dokładności wykonanych pomiarów.

Obliczenia

Obliczamy wysokości słupków rtęci h_i oraz ciśnienie p_i z wzoru (14.4). Wykreślamy zależność τ_i od p_i i nanosimy prostokąty błędów dla 2–3 punktów. Oceniamy błąd p_i dla ciśnienia atmosferycznego i porównujemy uzyskaną wtedy temperaturę wrzenia z wartościami zaczerpniętymi z tablic fizycznych.

14.5. TEMPERATURA KRZEPNIĘCIA ROZTWORU

Cel: wyznaczenia temperatury krzepnięcia roztworów różnych substancji w tym samym rozpuszczalniku i wyznaczenie masy drobinowej ciała rozpuszczonego.

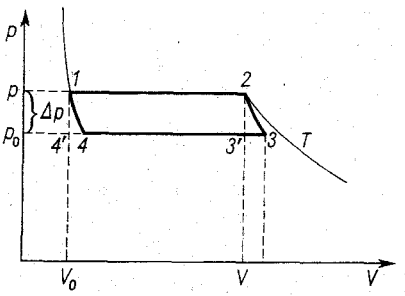
Przyrządy: termometr (§ 3.6), waga laboratoryjna (§ 3.4).

Zagadnienia: zmiany stanów skupienia (S1, § 12–14, 20–22; J, § 12.18–23), równanie van der Waalsa (S2, § 24, 27), wzór Clapeyrona–Clausiusa (S2, § 46), krzepnięcie rozcieńczonych roztworów (S2, § 15–17; J, § 12.23–26), II zasada termodynamiki (S2, § 38–40; J, § 13.13–21).

Wprowadzenie

a. Wzór Clapeyrona–Clausiusa. Załóżmy, że ciecz znajduje się w stanie odpowiadającym punktowi *1* na wykresie 14.6. Ciecz ta posiada temperaturę T, objętość V_0 i znajduje się pod ciśnieniem p, będącym ciśnieniem jej pary nasyconej. Ciecz zamienia-

my na parę w sposób izotermiczny przechodząc po prostoliniowym odcinku izotermy do punktu *2*, w którym cała ciecz zamieniona jest na parę o temperaturze T i zajmuje objętość V. Następnie po adiabacie przechodzimy do punktu *3*, skąd po izotermie do punktu *4* leżącego na jednej adiabacie z punktem *1*. Kończąc cykl przechodzimy



14.6. Ilustracja cyklu przemian do wyprowadzenia wzoru Clapeyrona–Clausiusa.

po adiabacie do punktu *1*. Różnica temperatur dzieląca izotermy wynosi ΔT. Cały cykl przemian zachodzi w sposób quasistatyczny odwracalny, a jego sprawność wynosi

$$\eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta L}{Q},$$

gdzie Q oznacza ilość ciepła pobranego w temperaturze T. Praca ΔL jest równa w przybliżeniu powierzchni prostokąta *1*, *2*, *3' 4'* wynoszącej $\Delta p(V - V_0)$, stąd

$$\eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p(V - V_0)}{Q},$$

V oznacza tu objętość jednostki masy pary w temperaturze T, a V_0 oznacza objętość cieczy w tej temperaturze. Przy $\Delta T \to 0$ i $\Delta p \to 0$ otrzymamy

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp(V - V_0)}{Q}. \tag{14.5}$$

Ponieważ objętość cieczy V_0 jest znikoma w stosunku do objętości pary V, stąd w pierwszym przybliżeniu V_0 możemy zaniedbać. Przyjmując ponadto, że para ta spełnia równanie gazu doskonałego $pV = RT$ otrzymamy

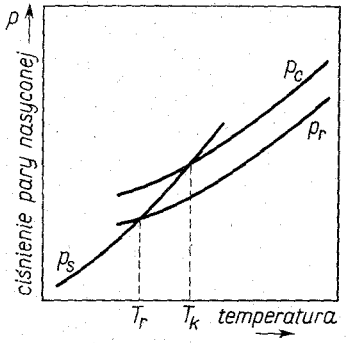
$$\frac{dT}{T^2} = \frac{dp}{p}\frac{R}{Q}. \tag{14.6}$$

Równania (14.5) i (4.6) przedstawiają różne postacie równania Clapeyrona–Clausiusa, pozwalającego określić ciepło Q dla dowolnej przemiany zachodzącej w temperaturze T.

b. Prawo Raoulta. Krzepnięcie cieczy następuje w temperaturze T_k, w której ciśnienie pary nasyconej fazy ciekłej, krzywa P_c, jest równe ciśnieniu pary nasyconej fazy stałej (krzywa P_s na rys. 14.7). Zanieczyszczenia lub ciała obce znajdujące się w cieczy obniżają prężność jej pary nasyconej (krzywa P_r), a tym samym temperaturę odpowiadającą przecięciu się nowej krzywej P_r z krzywą P_s, czyli temperaturę krzepnięcia roztworu T_r. Ciśnienie pary nasyconej nad roztworem, zgodnie z prawem Raoulta

jest proporcjonalne do ułamka określającego stosunek liczby moli n_0 rozpuszczalnika obecnego w roztworze do sumy liczby moli rozpuszczalnika i ciała rozpuszczonego n,

$$p_r = k\frac{n_0}{n_0+n}. \tag{14.7}$$



14.7. Ciśnienia pary nasyconej nad fazą stałą (p_s), ciekłą (p_c) i roztworem (p_r).

W granicznym przypadku, dla bardzo rozcieńczonego roztworu $n \to 0$, wtedy

$$p_r = k. \tag{14.8}$$

Odejmując stronami równanie (14.7) od (14.8) otrzymamy

$$p - p_r = k\frac{n}{n_0+n}.$$

Dzieląc otrzymane w ten sposób równanie stronami przez równanie (14.8) i oznaczając obniżenie ciśnienia pary nad roztworem przez $\Delta p = p - p_r$, otrzymamy

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{n}{n_0+n}.$$

Jeżeli dla małych stężeń zaniedbamy w mianowniku wielkość n wobec n_0, a ponadto zgodnie z definicją wyrazimy liczbę moli przez stosunek masy m_c wyrażonej w gramach do masy drobinowej μ_c ciała rozpuszczonego $n = m_c/\mu_c$, a dla rozpuszczalnika $n_0 = m_0/\mu_0$ i ostatnie równanie przyjmie postać

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{m_c \mu_0}{m_0 \mu_c}. \tag{14.9}$$

Podstawiając powyższą wartość do równania Clapeyrona–Clausiusa (14.6) otrzymamy

$$\Delta T = \frac{RT^2}{Q}\frac{m_c \mu_0}{m_0 \mu_c}.$$

Q oznacza ciepło topnienia jednego mola rozpuszczalnika. Zatem wielkość $q = \frac{Q}{\mu_0}$ oznacza ciepło topnienia na jednostkę masy, stąd

$$\Delta T = \frac{RT^2}{q}\frac{m_c}{m_0 \mu_c}. \tag{14.10}$$

Równanie powyższe określa obniżenie temperatury krzepnięcia roztworu względem temperatury krzepnięcia rozpuszczalnika. Ze względów rachunkowych wprowadza się pojęcie drobinowego obniżenia temperatury krzepnięcia $-\Delta T_d$; jest to obniżenie temperatury krzepnięcia wywołane rozpuszczeniem $m = \mu$ gramów substancji w $m_0 =$ $= 100$ g rozpuszczalnika

$$-\Delta T_d = \frac{R}{100}\frac{T^2}{q}. \tag{14.11}$$

Znając $-\Delta T_d$ dla danego rozpuszczalnika i obniżenie temperatury krzepnięcia $-\Delta T$ wywołane rozpuszczeniem m gramów ciała w m_0 gramach rozpuszczalnika obliczyć możemy masę drobinową. Dzieląc równanie (14.10) przez (14.11) i wykonując proste przeliczenia otrzymamy

$$\mu_c = \frac{100\, m_c \Delta T_d}{m_0 \Delta T}. \tag{14.12}$$

Na zależności powyższej opiera się krioskopowa metoda pomiaru masy drobinowej roztworów nie ulegających dysocjacji elektrolitycznej.

Aparatura i pomiary

Aparatura składa się z naczynia zawierającego kąpiel oziębiającą, probówki i termometru o dokładności 0,1°C. W przypadku, gdy rozpuszczalnikiem jest woda przygotowujemy w termosie mieszaninę oziębiającą lodu z solą. Gdy stosujemy inny rozpuszczalnik, przygotowujemy mieszaninę oziębiającą o odpowiednio dobranej temperaturze (np. wodę z lodem dla kwasu octowego). Najpierw badamy temperaturę krzepnięcia czystego rozpuszczalnika. W tym celu termometr wkładamy do probówki z rozpuszczalnikiem, zanurzamy w kąpieli oziębiającej i odczytujemy temperaturę w odstępach 15-sekundowych do chwili przejścia przez temperaturę krzepnięcia. W temperaturze krzepnięcia, przez krótki przeciąg czasu, mimo ciągłego chłodzenia, temperatura cieczy nie zmienia się i kilka kolejnych odczytów daje taką samą wartość temperatury. Wyznaczamy temperatury krzepnięcia roztworu cukru w wodzie lub wody w kwasie octowym o stężeniach 2,4% i 6% oraz dwuprocentowe roztwory dwóch innych ciał w badanym rozpuszczalniku. Oceniamy wszystkie błędy pomiarowe.

Obliczenia

Wykreślamy zależność temperatury od czasu dla wszystkich badanych stężeń rozpuszczalnika oraz roztworów i z wykresów tych określamy dokładnie temperaturę krzepnięcia odpowiadającą odcinkowi krzywej przebiegającemu równolegle do osi czasu. Korzystając z tak opracowanych danych z wzoru (14.12) obliczamy drobinowe obniżenie temperatury krzepnięcia $-\Delta T_d$ dla roztworu substancji o znanej masie drobinowej. Dla pozostałych roztworów z wzoru (14.12) obliczamy masę drobinową ciała rozpuszczonego. Oceniamy błąd odczytu temperatury krzepnięcia, a następnie obliczamy błędy wszystkich obliczonych wielkości.

Cel: wyznaczenie przebiegu krzywej prężności pary nasyconej i obliczenie ciepła parowania cieczy.
Przyrządy: termometr (§ 3.6), ultratermostat (§ 3.7), katetometr (§ 3.2), barometr rtęciowy (§ 3.8).
Zagadnienia: równania gazów doskonałych i van der Waalsa (S2, § 9, 24 i 27), równanie Clapeyrona–Clausiusa (§ 14.5; S2, § 46), II zasada termodynamiki (S2, § 38–40; J, § 13.13–21).

Wprowadzenie i aparatura

Całkując równanie Clapeyrona–Clausiusa (14.6) otrzymamy

$$\lg p = -\frac{Q}{R}\lg e\,\frac{1}{T} + C. \tag{14.13}$$

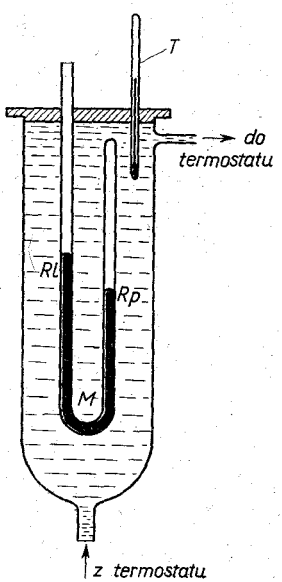
Równanie powyższe ma charakter uproszczony. W ogólnym przypadku ma ono postać

$$\ln p = -\frac{Q}{R}\frac{1}{T} - \frac{C_{p2} - C_{p3}}{R}\ln T + \text{const}, \tag{14.14}$$

gdzie C_{p2} i C_{p3} oznaczają ciepło właściwe cieczy i gazu. W równaniach powyższych $\lg e = 0{,}43429\ldots$ pochodzi z zamiany logarytmów naturalnych na dziesiętne: $\ln p = \lg p(\lg e)^{-1}$. Wyrażenia $\lg p$, $\ln p$ i $\ln T$ są logarytmami liczb mianowanych i mają sens tylko przy odpowiedniej stałej całkowania C. W równaniu (14.13) musimy interpretować, że $C = \lg p_0$ otrzymując

$$\lg \frac{p}{p_0} = -\frac{Q}{R}\lg e\,\frac{1}{T}.$$

W związku tym wielkość $\lg p/p_0$ jest wielkością niemianowaną, p_0 można określić z warunków początkowych. Zgodnie z równaniem (14.13) zależność $\lg p$ od $\frac{1}{T}$ jest liniowa.



14.8. Aparatura do badania prężności pary nasyconej.

Możemy ją wykorzystać do wyznaczenia ciepła przemiany Q (w omawianym przypadku Q oznacza ciepło parowania), bowiem nachylenie omawianej krzywej jest równe $-\frac{Q}{R}\lg e$.

Aparatura (rys. 14.8) składa się z manometru, którego prawe ramię jest zatopione, a lewe jest otwarte. W ramieniu prawym, nad rtęcią znajduje się niewielka ilość eteru. Całość znajduje się w płaszczu wodnym połączonym z ultratermostatem.

Pomiary

Termometr kontaktowy ultratermostatu nastawiamy na 20°C, włączamy termostat. Czekamy do chwili ustalenia się temperatury kąpieli, którą mierzymy termometrem T, a następnie odczytujemy położenie h_{l1} i h_{p1} zwierciadła rtęci w obydwu ramionach manometru. Notujemy temperaturę T. Podwyższamy temperaturę o 5–10°C (za pomocą termometru kontaktowego) i powtarzamy te same pomiary. Podobne pomiary wykonujemy dla przynajmniej 10-ciu różnych temperatur w zakresie 20–90°C. Odczytujemy stan barometru rtęciowego b.

Obliczenia

Obliczamy różnice poziomów h w manometrze, ciśnienie $p = b_0 + h_0$, $\lg p$, temperaturę T w skali Kelvina oraz $1/T$. Wykreślamy zależność $\lg p$ od $1/T$ i obliczamy metodą najmniejszych kwadratów nachylenie $\bar{a}$ oraz $S_{\bar{a}}$ uzyskanej linii. Zgodnie z wzorem (14.13) jest ono równe $\bar{a} = -QR^{-1}\lg e$. Obliczamy ciepło przemiany (parowania) Q oraz odchylenie standardowe $S_{\bar{Q}}$. Obliczamy współczynniki z równania (14.14). W tym celu wybieramy trzy punkty pomiarowe p_i, T_i i dla nich otrzymamy trzy równania:

$$\ln p_i = a\frac{1}{T_i} - b\ln T_i + C,$$

z których obliczamy wielkości a i b. Dyskusji błędów dla tej części doświadczenia nie wykonujemy. Znając stałe a i b obliczamy Q_0 oraz C_{p3} dla gazu, a C_{p2} dla cieczy przyjmujemy z tablic.

14.7. WILGOTNOŚĆ POWIETRZA

Cel: wyznaczanie wilgotności bezwzględnej i względnej powietrza za pomocą higrometru i psychrometru.

Przyrządy: termometr (§ 3.6), dmuchawy (§ 3.10)

Zagadnienia: przemiany gazów doskonałych (S2, § 9), wilgotność powietrza (S2, § 32; J, § 12.13–33), izotermy gazów rzeczywistych (S2, § 20–27; J, § 13.6–10).

Wprowadzenie

Ciśnienie pary nasyconej dowolnej substancji zależy od temperatury. Nie mają na nie bezpośredniego wpływu inne gazy obecne nad powierzchnią parującej cieczy, lecz mogą wpływać pośrednio utrudniając parowanie, skutkiem czego w pewnej odległości od powierzchni cieczy może istnieć para nienasycona. Sytuacja taka zazwyczaj

zachodzi w atmosferze Ziemi, gdzie występuje nienasycona para wodna. Wielkością określającą ilość pary wodnej w powietrzu jest wilgotność. Rozróżniamy wilgotność bezwzględną i względną. Wilgotnością bezwzględną W_b nazywamy stosunek masy m_w pary wodnej zawartej w objętości V do tej objętości

$$W_b = \frac{m_w}{V}. \tag{14.15}$$

Ilość pary wodnej w powietrzu nie może wzrastać nieograniczenie, lecz tylko do wartości odpowiadającej ciśnieniu pary nasyconej. Stosunek masy m_w pary nasyconej do masy m_p powietrza suchego jest stały i wynosi 0,62. Stąd tzw. wilgotność nasycającą W_s możemy wyrazić wzorem

$$W_s = 0{,}62\,\frac{m_p}{V}. \tag{14.16}$$

W warunkach normalnych ($p_0 = 760$ mm Hg, $\tau = 0°C$) suche powietrze ma gęstość równą $\varrho_0 = 1{,}293\ \mathrm{kg/m^3}$. Dowodzi się (S2, § 32), że w temperaturze T przy ciśnieniu p gęstość suchego powietrza wyraża się wzorem $\varrho = T_0\varrho_0 p(p_0 T)^{-1}$, w którym $T_0 = 273{,}16$ K oraz $p_0 = 760$ Tr. Zatem wilgotność nasycająca w temperaturze T wyrazi się wzorem

$$W_s(T, p) = 0{,}62\,\frac{T_0\varrho_0}{p_0}\cdot\frac{p}{T}. \tag{14.17}$$

Wilgotnością względną S_w nazywamy stosunek wilgotności bezwzględnej do wilgotności nasycającej powietrze w danych warunkach ciśnienia i temperatury wyrażony wzorem

$$S_w = \frac{W_b}{W_s}\,100\,\% = \frac{m_w}{m_s}\,100\,\%. \tag{14.18}$$

Korzystając z równania stanu gazu $pV = nRT$, w którym $n = m\mu^{-1}$ otrzymujemy:

$$p = \frac{RT}{\mu}\cdot\frac{m}{V}, \quad \text{stąd} \quad m_w = \frac{\mu V}{RT}\cdot p_w \quad \text{oraz} \quad m_s = \frac{\mu V}{RT}\cdot p_s.$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do równania (14.18) wilgotność względną wyrazimy wzorem

$$S_w = \frac{p_w}{p_s}\,100\,\%, \tag{14.18a}$$

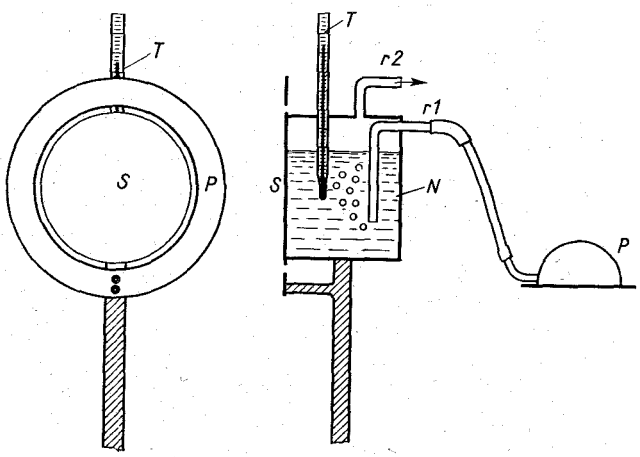
gdzie p_w — ciśnienie pary, wodnej zawartej w powietrzu w istniejących warunkach ciśnienia i temperatury, a p_s — ciśnienie pary, które nasyciłoby powietrze w tych warunkach.

Aparatura

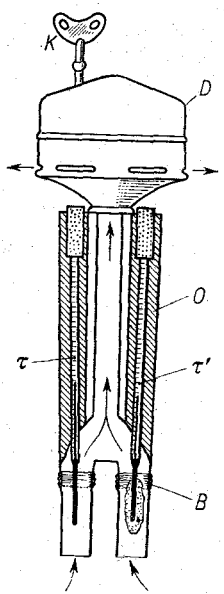
a. Higrometr Lambrechta (kondensacyjny). Ilość pary wodnej (wilgotność bezwzględna) potrzebna do nasycenia powietrza maleje wraz z temperaturą. Stąd obniżając temperaturę powietrza dojdziemy do takiej temperatury τ_r, w której istniejąca w powietrzu para wodna wystarcza do jego nasycenia. Przy temperaturach niższych od τ_r występuje przesycenie i kondensacja pary. Kondensacja następuje również na przed-

miotach o temperaturze niższej od τ_r, mimo że w bezpośrednim otoczeniu temperatura jest wyższa (np. kondensacja pary, czyli osiadanie rosy na przewodach wodociągowych). Obniżając powoli temperaturę ciała o błyszczącej, np. niklowanej powierzchni można dokładnie określić temperaturę τ_r. Kondensująca się para wodna zwana rosą powoduje łatwo dostrzegalne zmatowienie błyszczącej powierzchni. Znając τ_r możemy określić prężność p_b pary istniejącej w powietrzu, gdyż jest ona równa prężności pary nasyconej w temperaturze τ_r. Znając z tablic fizycznych (tablica III) prężność pary nasyconej w temperaturze τ_r oraz p_s w temperaturze τ, możemy obliczyć wilgotność względną z wzoru (14.18).

Budowę higrometru pokazano na rysunku 14.9. Przez wypełnione eterem naczyńko N możemy przepompowywać powietrze, którego nadmiar odpływa rurką $r2$. Rolę pompki P spełnia rozpylacz fryzjerski lub pompa do wypełniania materaców turystycznych. Przednia, płaska i poniklowana ścianka S naczyńka N jest otoczona izolowanym cieplnie pierścieniem P również poniklowanym. Przepompowując powietrze powodujemy szybkie parowanie eteru i obniżenie temperatury naczyńka. Moment powstawania rosy na powierzchni S, czyli jej zmatowienie, jest łatwo dostrzegalne, dzięki kontrastowi z otaczającym pierścieniem, którego temperatura pozostaje stała i na którym rosa nie powstaje. Temperaturę τ_r naczyńka N mierzymy dokładnym termometrem T. Obecnie buduje się higrometry kondensacyjne, w których do chłodzenia powierzchni metalu wykorzystuje się zjawisko Peltiera (obniżanie się temperatury złącza dwóch materiałów, na skutek przepływu prądu elektrycznego por. § 21.2 oraz S3, § 55).



14.9. Higrometr Lambrechta.



14.10. Budowa psychrometru Augusta.

b. Psychrometr. W tym przypadku do pomiaru wilgotności wykorzystuje się fakt obniżenia temperatury parującej wody. Woda parując pobiera ciepło parowania. Jeżeli ciepła tego nie dostarczamy z zewnątrz, zostaje ono pobrane z powstałej części cieczy, a tym samym obniża się jej temperatura. Z tego powodu zwilżony termometr wskazuje temperaturę niższą od suchego, gdyż ciepło parowania dostarcza w tym przypadku

sam termometr. Temperatura wskazywana przez wilgotny termometr ustala się w wyniku równowagi dynamicznej między ciepłem pobieranym przez parującą wodę i dopływającym z otoczenia. Szybkość parowania wody jest tym większa, im mniejsza jest wilgotność powietrza, stąd też różnica wskazań termometru suchego τ i wilgotnego τ' jest tym większa, im mniejsza jest wilgotność powietrza. Ustalono następujący wzór empiryczny pomiędzy prężnością p_b pary w powietrzu a prężnością p'_0 nasycającą powietrze w temperaturze τ':

$$p_b = p'_0 - 0{,}64(\tau - \tau').$$

Współczynnik 0,64 posiada wymiar $g \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$. Podstawiając powyższe wyrażenie do wzoru (14.18) wilgotność względną wyrazimy wzorem

$$W_w = \frac{p'_s - 0{,}64(\tau - \tau')}{p_s} 100\%. \tag{14.19}$$

Znając temperatury τ i τ' wilgotność można również odczytać z tablicy psychrometrycznej.

Warunkiem poprawnego pomiaru jest ciągły kontakt termometrów ze świeżym powietrzem, nie zawierającym wody parującej z termometru. Stąd też termometry umieszcza się w strumieniu powietrza wytworzonym przez dmuchawę D (rys. 14.10). Zbiornik rtęci termometru mokrego jest zawinięty w zwilżoną watę. Do mniej precyzyjnych pomiarów mogą służyć również higrometry włosowe, w których wykorzystuje się wpływ wilgotności na długość odtłuszczonego włosa.

Pomiary

Wykonując pomiary higrometrem napełniamy zbiornik N eterem i ustawiamy przyrząd w taki sposób względem światła, by powierzchnia S nie błyszczała. Zabezpieczamy go również przed wpływem pary zawartej w naszym oddechu ustawiając przyrząd w znacznej odległości (ok. 1 metra) lub też za dużą szybą. Przepompowujemy powietrze i obserwujemy powierzchnię S. W chwili, gdy następuje kondensacja pary, obserwujemy temperaturę τ_r. Czekamy do chwili, gdy temperatura wzrośnie i wyparuje woda skondensowana na powierzchni S. Obliczamy wilgotność i analizujemy wpływ dokładności pomiaru wielkości prostych na dokładność wyniku końcowego. Planujemy najwłaściwszy sposób pomiaru poszczególnych wielkości prostych, a następnie wykonujemy właściwe pomiary.

Wykonując pomiar psychrometrem zwilżamy gazę otaczającą zbiornik rtęci termometru prawego. Musimy w tym celu odkręcić końcowy odcinek B. Nakręcamy sprężynę mechanizmu zegarowego dmuchawy D. Po ustaleniu się temperatur τ i τ' odczytujemy wskazanie obydwu termometrów. Pomiar powtarzamy 2–3 razy. Notujemy dokładności pomiarów. Jeżeli w pokoju wykonuje się inne doświadczenia, w których wytwarza się para wodna wraz z upływem czasu zmienia się wilgotność powietrza. Wykonujemy pomiary psychrometrem co pół godziny i kontrolujemy te zmiany.

Obliczenia

Obliczamy średnią wartość temperatur τ_r, τ i τ'. W tablicach fizycznych odczytujemy ciśnienia nasycające pary wodnej w temperaturach τ, τ_r i τ'. Korzystając z wzoru (14.18) obliczamy wilgotność względną z pomiarów wykonanych za pomocą higrometru,

a ze wzoru (14.19) z pomiarów wykonanych psychrometrem. Obliczamy błędy wyniku uzyskanego za pomocą higrometru i dla pierwszego pomiaru wykonanego psychrometrem. Sprawdzamy zgodność wyników uzyskanych obydwiema metodami. Obliczamy wartość średnią tych wyników. Wykreślamy zależność wilgotności od czasu.

15. PRZENOSZENIE CIEPŁA

15.01. STYGNIĘCIE

Wymiana ciepła pomiędzy różnymi ciałami zachodzi na trzech różnych drogach: 1. przewodzenia, 2. promieniowania oraz 3. konwekcji. Energia cieplna przepływa od ciał cieplejszych do zimniejszych, na skutek czego następuje wyrównanie temperatur. Ilość energii cieplnej przepływającej w ciągu jednej sekundy przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku przepływu nazywamy *gęstością strumienia energii* q (wymiar — wat na metr kwadratowy). Całkowitą ilość energii jaką ciało traci w jednostce czasu nazywamy *strumieniem energii* Φ (wymiar — wat). Całkowita ilość energii tracona przez ciało w czasie Δt wyraża się wzorem

$$\Phi \Delta t = -\int c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} dV \Delta t, \tag{15.1}$$

gdzie c — ciepło właściwe, ϱ — gęstość, V — objętość, a T — temperatura ciała wyrównana w całej próbce. Stygnięciem ciał rządzi *prawo ostygania* podane przez Newtona: ilość energii traconej w jednostce czasu jest proporcjonalna do różnicy temperatur, ciała T i otoczenia T_0 oraz do powierzchni S tego ciała

$$\Phi \Delta t = \int a(T-T_0) dS \Delta t. \tag{15.2}$$

Współczynnik proporcjonalności a nazywamy *współczynnikiem przejmowania ciepła* lub *przewodnictwa zewnętrznego*. Porównując ostatnie dwa równania i zakładając, że c, ϱ i $\frac{\partial T}{\partial t}$ nie zależą od współrzędnych oraz a i $(T-T_0)$ od położenia na powierzchni S, otrzymamy

$$-c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} \int dV = a(T-T_0) \int dS,$$

skąd

$$-c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} V = a(T-T_0)S. \tag{15.3}$$

Podstawiając $\partial T = \partial(T-T_0)$ oraz $\varrho V = m$, otrzymamy

$$\frac{\partial(T-T_0)}{T-T_0} = -\frac{aS}{cm} \partial t,$$

skąd po scałkowaniu

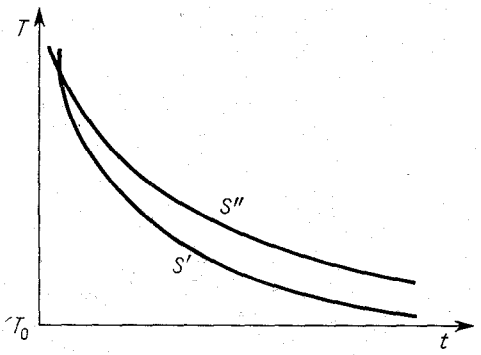
$$\ln(T-T_0) = -\frac{aS}{cm} t + C.$$

Zakładając, że w chwili $t = 0$, $T = T_m$ otrzymamy $C = \ln(T_m - T_0)$, a ostatnie równanie przyjmie postać

$$\ln(T - T_0) = -\frac{aS}{cm}t + \ln(T_m - T_0) \tag{15.4}$$

lub

$$T - T_0 = (T_m - T_0)\exp\left(-\frac{aS}{cm}t\right). \tag{15.5}$$



15.1. Krzywe stygnięcia dwóch ciał.

Z ostatniego równania wynika, że różnica temperatur między ciałem i otoczeniem *maleje z czasem w sposób wykładniczy* (rys. 15.1).

15.02. PRZEWODZENIE CIEPŁA

Rozróżniamy dwa rodzaje stanów termodynamicznych: stany ustalone, w których rozkład temperatur nie zmienia się w czasie oraz stany nieustalone, w których temperatury ulegają ciągłym zmianom. Tym drugim przypadkiem — bardzo skomplikowanym — zajmować się nie będziemy. W rzeczywistości stany ustalone nie istnieją, jednak przypadki, w których temperatury zmieniają się bardzo wolno, możemy uważać w przybliżeniu za *stany ustalone*. Strumień ciepła Φ płynący w jednym kierunku, jest proporcjonalny do gradientu temperatury $-\frac{\partial T}{\partial x}$ (pochodna przestrzenna temperatury) oraz do powierzchni S prostopadłej do kierunku strumienia

$$\Phi = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}S. \tag{15.6}$$

Współczynnik λ nazywamy *współczynnikiem przewodnictwa cieplnego* i mierzymy w $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$. Ze względu na wartość λ, wyróżniamy dobre przewodniki ciepła np. metale (λ duże) i złe przewodniki ciepła zwane materiałami izolacyjnymi np. drewno, ceramika (λ małe).

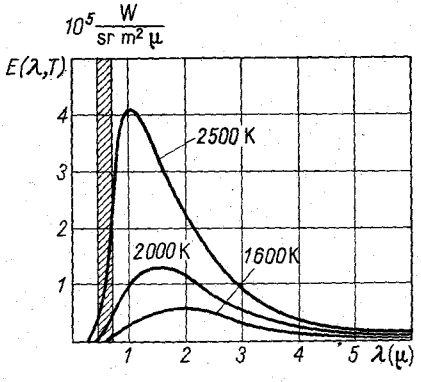
15.03. PROMIENIOWANIE

Promieniowaniem temperaturowym nazywamy takie promieniowanie, które czerpie swą energię z zasobów energii cieplnej ciała. Każde ciało o temperaturze wyższej od

0 K *promieniuje* (wysyła lub emituje) fale elektromagnetyczne o różnych długościach. Emisja zachodzi w sposób nieciągły czyli kwantowo w porcjach $h\nu$, gdzie $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s jest stałą Plancka, a ν — częstością drgań fali elektromagnetycznej. Najwięcej promieniuje tzw. *ciało doskonale czarne*, którego przybliżeniem jest sadza. Zdolność ciała do promieniowania określamy jego *widmową zdolnością emisyjną* $R_\lambda d\lambda$, która jest równocześnie strumieniem energii cieplnej. Zależność widmowej zdolności emisyjnej od λ i T przedstawia wzór Plancka

$$R_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\left[\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1\right]^{-1}, \tag{15.7}$$

gdzie c oznacza prędkość światła, k — stałą Boltzmanna. Na rysunku (15.2) przedstawiono graficzny obraz równania (15.7). Dla każdej temperatury istnieje ostra granica promieniowania od strony fal krótkich. Granica ta, jak również maksimum wraz ze wzrostem temperatury, przesuwa się w stronę fal krótkich. Stąd w miarę wzrostu temperatury coraz wyższy udział w widmie posiada promieniowanie świetlne o długościach zaznaczonych zakreskowanym polem na rysunku. Fale dłuższe od widzialnych przenoszą ciepło i nazywamy je *podczerwienią* albo *promieniowaniem cieplnym*. W temperaturach niższych od 500°C praktycznie cała energia wypromieniowana zostaje w postaci promieniowania cieplnego.



15.2. Zależność widmowej zdolności emisyjnej od długości fali (rozkład natężeń promieniowania) dla ciała doskonale czarnego.

Z prawa Plancka (15.7) obliczyć możemy całkowitą moc promieniowaną przez jednostkę powierzchni ciała, w temperaturze T, w postaci fal o wszystkich długościach. Moc tę nazywamy *emisją energetyczną promieniowania* R (wymiar $W \cdot m^{-2}$). Wykonując całkowanie w granicach od $\lambda = 0$ do $\lambda = \infty$ i dość skomplikowane obliczenia matematyczne otrzymamy *wzór Stefana–Boltzmanna*

$$R = \sigma T^4, \tag{15.8}$$

gdzie stała $\sigma = \frac{k^4}{c^2\hbar^3} = 5{,}75 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$. Zatem emisja energetyczna promieniowania jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury ciała.

Obliczając pochodną równania (15.7) względem λ i przyrównując ją do zera otrzymamy warunek na maksimum funkcji

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{5k} = 288 \cdot 10^{-5} \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}. \tag{15.9}$$

Wzór powyższy zwany *prawem przesunięć Wiena* mówi, że iloczyn długości fali odpowiadającej maksimum krzywej oraz temperatury T jest wielkością stałą.

Widmowa zdolność emisyjna promieniowania ${}^{c}R_{\lambda}$ ciał rzeczywistych jest mniejsza od odpowiedniej wartości R_{λ} dla ciała doskonale czarnego, a krzywe ${}^{c}R_{\lambda}(\lambda)$ są inne dla każdego ciała i znacznie różnią się kształtem od krzywych z rys. 15.4. Jednak dla każdego ciała spełniony jest następujący związek:

$$ {}^{c}R_{\lambda}(\lambda, T) = a_{\lambda}(\lambda, T) R_{\lambda}(\lambda, T) \tag{15.10}$$

zwany *prawem Kirchhoffa*. Związek powyższy jest matematycznym zapisem faktu istnienia proporcjonalności widmowej zdolności emisyjnej promieniowania dowolnego ciała (${}^{c}R_{\lambda}(\lambda, T)$) i ciała doskonale czarnego ($R_{\lambda}(\lambda, T)$). Współczynnik proporcjonalności $a_{\lambda}(\lambda, T)$ zależy również od λ i T, nazywamy *współczynnikiem pochłaniania ciała**. Współczynnik pochłaniania jest wielkością niemianowaną i mówi jaki ułamek energii padającej na jednostkę powierzchni danego ciała jest pochłaniany. Prawo Kirchhoffa (15.10) zapisać możemy również w postaci

$$\frac{{}^{c}R_{\lambda}(\lambda, T)}{a_{\lambda}(\lambda, T)} = R_{\lambda}(\lambda, T). \tag{15.11}$$

Wynika stąd, że dla dowolnego ciała stosunek widmowej zdolności emisyjnej do współczynnika pochłaniania jest równy widmowej zdolności emisyjnej promieniowania czarnego.

Konwekcją nazywamy zjawisko przenoszenia energii cieplnej wraz z materią. Zachodzić ono może wyłącznie w środowiskach płynnych: cieczach i gazach. Płyn przylegający do ciała cieplejszego nagrzewa się i maleje jego gęstość, na skutek zmian gęstości unosi się w górę, a jego miejsce zajmują nowe partie chłodniejszego płynu.

15.1. OSTYGANIE

Cel: wyznaczenie ciepła właściwego cieczy newtonowską metodą ostygania.

Przyrządy: termometr (§ 3.6), ultratermostat (§ 3.7).

Zagadnienia: przenoszenie ciepła (§ 15.01–03; S2, § 33–37), promieniowanie termiczne (S4, § 33–39).

Wprowadzenie

Równanie (15.4) jest w układzie współrzędnych $\ln(T - T_0)$ i t równaniem prostej (typu $y = hx + b$) o nachyleniu

$$h = -\frac{aS}{cm}. \tag{15.12}$$

* Współczynnik pochłaniania bywa zazwyczaj nazywany zdolnością absorpcyjną. Termin „zdolność absorpcyjna" jest mylący ze względu na podobieństwo do terminu „zdolność emisyjna". Obydwie wielkości mają zupełnie inne znaczenie i różnią się wymiarem.

Wykonując pomiary dla dwóch ciał o równej co do wielkości oraz identycznej pod względem własności powierzchni S otrzymamy

$$h_1 = \frac{aS}{c_1 m_1}, \qquad h_2 = \frac{aS}{c_2 m_2}$$

dzieląc drugie z powyższych równań przez pierwsze otrzymamy

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{c_1 m_1}{c_2 m_2}. \tag{15.13}$$

Dwa ciała o równych kształtach i identycznej powierzchni, w takich samych warunkach ostygają od temperatury T_m do T w różnych czasach: t_1 i t_2. Z równania (15.4) otrzymamy

$$t_1 = -\frac{c_1 m_1}{aS} \ln \frac{T - T_0}{T_m - T_0}, \qquad t_2 = \frac{c_2 m_2}{aS} \ln \frac{T - T_0}{T'_m - T_0}.$$

Dzieląc powyższe równania stronami otrzymamy

$$c_2 = c_1 \frac{t_2 m_1}{t_1 m_2}. \tag{15.14}$$

Równanie powyższe możemy stosować do metali o niklowanej powierzchni pod warunkiem, że różnica temperatur $T_m - T_0$ nie jest duża. Z dobrym przybliżeniem dadzą się one również zastosować do metalowych ampułek wypełnionych cieczą. W czasie pomiaru ciecz musimy mieszać. Równanie (15.14) możemy stosować zarówno do przypadku, w którym temperatura ciała jest wyższa od otoczenia jak i wtedy, gdy jest ona niższa i wzrasta z czasem.

Aparatura

Podstawową częścią aparatury są dwa pojemniki o niklowanej powierzchni posiadające kształt butelki. Każda z nich zaopatrzona jest w termometr (0–100°C). Celem zapewnienia stałych warunków chłodzenia w czasie pomiaru pojemniki umieszczamy na izolacyjnych podkładkach wewnątrz dwóch równych termostatowanych naczyń. Są to naczynia o podwójnych ściankach, między którymi przepuszczamy ciecz z ultratermostatu (lub przynajmniej wodę z wodociągu). Rolę pojemników mogą również spełniać zasobniki umieszczone w termostacie (zasobniki zimna). Można stosować jeden tylko pojemnik, wykonując dwa kolejne pomiary.

Pomiary

Pojemniki czyścimy, osuszamy, ważymy (m_{p1} i m_{p2}), wypełniamy jeden z nich wodą, a drugi badaną cieczą i zamykamy korkami zaopatrzonymi w identyczne termometry. Pojemniki osuszamy, ważymy (m_{k1} i m_{k2}), po czym umieszczamy je w kąpieli wodnej i podgrzewamy do temperatury wrzenia wody (ok. 100°C). Równocześnie włączamy ultratermostat regulujący temperaturę w naczyniach termostatowanych i na termometrze kontaktowym nastawiamy 15°C, względnie, jeżeli nie dysponujemy ultratermostatem włączamy przepływ wody i kontrolujemy jej temperaturę do chwili ustalenia się stałej wartości. Ustawiamy pojemniki na izolującej podkładce w termosta-

towanych naczyniach i zapisujemy temperatury τ_1 i τ_2 obydwu pojemników w odstępach 30 s do czasu, gdy opadnie ona do 30°C. Dla obydwu pojemników pomiary wykonujemy w tym samym przedziale temperatur.

Obliczenia

Na wspólnym arkuszu dla obydwu próbek wykreślamy zależności $\tau(t)$ lub $T(t)$. Na drugim arkuszu wykreślamy zależności $\log(T-T_0)$ od czasu t. W przypadku drugiego wykresu można zastosować papier o skali półlogarytmicznej (logarytmiczna skala na jednej z osi), nie potrzeba wtedy obliczać wartości logarytmów. Określamy wartości czasu: t_1 i t_2, w którym temperatura próbek spada w następujących przedziałach: od 80 do 60°C, od 60 do 40°C, od 40 do 30°C oraz od 80 do 30°C. W każdym z tych przedziałów obliczamy ciepło właściwe badanej cieczy z wzoru (15.14). Błąd Δc_2 obliczamy dla dwóch pomiarów. Wykresy zależności $\lg(T-T_0)$ od czasu t powinny przedstawiać linie proste. Obliczamy metodą najmniejszych kwadratów nachylenia $\overline{h_1}$ i $\overline{h_2}$ tych linii oraz odchylenia standardowe $S_{\overline{h_1}}$ i $S_{\overline{h_2}}$, a następnie z wzoru (15.13) obliczamy wartości: c_2 oraz odchylenia standardowego $S_{\overline{c_2}}$. Sprawdzamy zgodność wyników uzyskanych na dwóch drogach.

15.2. PRZEWODNICTWO CIEPLNE METALU

Cel: wyznaczenie współczynnika przewodnictwa cieplnego metalu z rozkładu temperatury wzdłuż pręta.

Przyrządy: termoogniwo (§ 3.6 i 21.2), autotransformator (§ 4.5), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

Zagadnienia: przewodnictwo ciepła (§ 15.01–15.03; S2, § 33–37), prawo Joule'a–Lenza (§ 17.3).

Wprowadzenie

Załóżmy, że jeden koniec pręta jest podgrzewany w piecyku elektrycznym. Z piecyka przepływa do pręta strumień cieplny Φ, który odpływa poprzez jego powierzchnie boczne do otoczenia. Przez przekrój poprzeczny S pręta, w punkcie odległym o x od piecyka, zgodnie z (15.6), przepływa strumień

$$\Phi' = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_x S.$$

Ciepło, które przepływa przez przekrój odległy o $x+dx$ wynosi:

$$\Phi'' = -\lambda\left(\frac{dT}{sx}\right)_{x+dx} S.$$

Równocześnie przez boczne ścianki odcinka pręta zawartego między punktami x oraz $x+dx$, zgodnie z (15.2), odpływa ciepło

$$d\Phi = a(T-T_0)A\,dx, \tag{15.15}$$

gdzie A — obwód pręta. Oczywiście zgodnie z zasadą zachowania energii zachodzi: $d\Phi = \Phi' - \Phi''$, skąd po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{a(T-T_0)A}{\lambda S} = \frac{1}{dx}\left[\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dt}{dx}\right)_x\right].$$

Wyrażenie po prawej stronie powyższego równania jest drugą pochodną temperatury względem x, skąd podstawiając

$$h^2 = \frac{aA}{\lambda S} \tag{15.16}$$

otrzymamy

$$\frac{d^2T}{dx^2} = h^2(T - T_0).$$

Jest to równanie różniczkowe, które przy założeniach: $x = 0$ i $T = T_1$ oraz $x = \infty$ i $T = T_0$ ma rozwiązanie

$$T - T_0 = (T_1 - T_0)\exp(-hx) \tag{15.17}$$

lub

$$\ln\frac{T_1 - T_0}{T - T_0} = hx. \tag{15.17a}$$

Podstawiając z (15.17) wartość $T - T_0$ do (15.15) otrzymamy na strumień cieplny przepływający przez boczne ścianki pręta wyrażenie

$$\frac{d\Phi}{dx} = aA(T_1 - T_0)\exp(-hx). \tag{15.18}$$

Całkując to wyrażenie w granicach od $x = 0$ do $x = \infty$ otrzymamy

$$\Phi = \frac{aA}{h}(T_1 - T_0) \tag{15.19}$$

lub podstawiając na a wyrażenie (15.16) otrzymamy wyrażenie

$$\lambda = \frac{\Phi}{hS(T_1 - T_0)}. \tag{15.20}$$

Do równania powyższego podstawić możemy na h wartość z (15.17a) otrzymując

$$\lambda = \frac{\Phi x}{hS(T_1 - T_0)\ln[(T_1 - T_0)/(T - T_0)]}. \tag{15.20a}$$

Równanie (15.20) lub (15.20a) może posłużyć do wyznaczenia współczynnika przewodnictwa λ. W tym celu należy zmierzyć przekrój poprzeczny S pręta i obwód A przekroju poprzecznego pręta temperaturę piecyka T_1 oraz otoczenia T_0. Strumień ciepła Φ wypływającego przez boczne ścianki pręta w warunkach ustalonych jest równy strumieniowi ciepła pobieranemu przez pręt z piecyka.

W praktyce nie można stosować pręta nieskończenie długiego, lecz możemy obliczyć błąd $\Delta\Phi$ popełniany, gdy długość pręta wynosi l. Błąd ten jest równy wyrażeniu otrzymanemu przez scałkowanie równania (15.18) w granicach od l do ∞:

$$\delta\Phi = \frac{aA}{h}(T - T_0)e^{-hl}.$$

Po uwzględnieniu (15.19) otrzymamy

$$\delta\Phi = \Phi e^{-hl}. \tag{15.21}$$

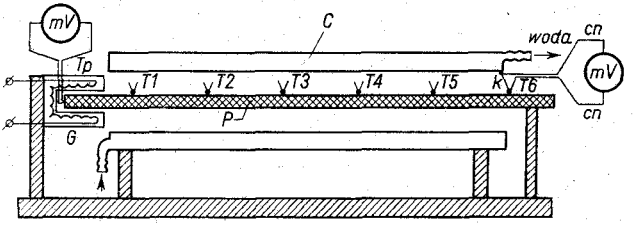
W doświadczeniu wielkość Φ możemy obliczyć korzystając z prawa Joule'a-Lenza: $P = UI$. Strumień cieplny Φ nie jest jednak dokładnie równy mocy $P_1 = U_1 I_1$ dostarczonej przez prąd, bowiem część mocy $P_0 = U_0 I_0$ nie przechodzi z piecyka do pręta, lecz zostaje oddana do otoczenia przez piecyk. Zatem otrzymamy

$$\Phi = P = P_1 - P_0 \text{ lub } \Phi = U_1 I_1 - U_0 I_0. \tag{15.22}$$

Wersja I

Aparatura

Aparaturę przedstawiono schematycznie na rys. 15.3. Piecyk G jest zasilany prądem przemiennym. Nagrzewa on koniec pręta P. W piecyku i w równych odstępach wzdłuż pręta rozmieszczone są termoogniwa T_p, $T1$, $T2$ ... Tak prosta aparatura wraz z wskaźnikiem mV do termoogniw i układem zasilającym piecyki wystarcza właściwie do wykonania doświadczenia. Ze względu na to, że we wzorach (15.17a) i (15.20) występują różnice temperatur $(T_1 - T_0)$ i $(T - T_0)$, zamiast pomiaru temperatury otoczenia T_0,



15.3. Aparatura do pomiaru przewodnictwa pręta stygnącego.

drugie spojenie termoogniw możemy pozostawić w temperaturze otoczenia. Wskazania termoogniw są wtedy równe wprost różnicom temperatur. Wykonując pomiary opisaną powyżej aparaturą popełniamy pewien błąd spowodowany różnymi warunkami stygnięcia różnych części pręta; w miejscu, w którym wyższa jest temperatura pręta również temperatura otoczenia jest nieco wyższa. Różnice te można wyeliminować umieszczając pręt w osi tzw. płaszcza wodnego, czyli rurki metalowej C o podwójnych ściankach, między którymi przepuszcza się wodę. Również zimne końce termoogniw umieszczamy w tej samej wodzie.

Pomiary

Łączymy obwód piecyka według schematu 18.6, gdy stosujemy watomierz lub rys. 4.19, gdy posługujemy się woltomierzem i amperomierzem. Mierzymy średnicę pręta i odległości wzajemne termoogniw. Włączamy obwód piecyka do sieci prądu przemiennego i ustalamy warunki pracy zgodnie z instrukcją. Włączamy przepływ wody przez płaszcz wodny i czekamy około 1 godziny na ustalenie się rozkładu temperatur. W tym czasie wskaźnik łączymy z termoogniwem *1* lub *2* i obserwujemy zmiany temperatury. W początkowym okresie nie możemy dokonywać żadnych zmian natężenia prądu w obwodzie piecyka i musimy kontrolować stałość natężenia lub mocy. Ewentualne wahania spowodowane wahaniem napięcia sieciowego korygujemy autotransforma-

torem. Gdy temperatura przestanie się zmieniać odczytujemy temperatury T_p, T_1, T_2, ... oraz wartości napięcia U_1, natężenia I_1 lub mocy P_1 prądu zasilającego piecyk. W następnym etapie wyjmujemy pręt z piecyka, obniżamy napięcie o około 30% i obserwujemy temperaturę w piecyku. Korygujemy napięcie w ten sposób, by otrzymać taką samą temperaturę jak wtedy, gdy pręt był obecny w piecyku. Notujemy I_0 i U_0 lub P_0 oraz dokładności wykonanych pomiarów.

Obliczenia

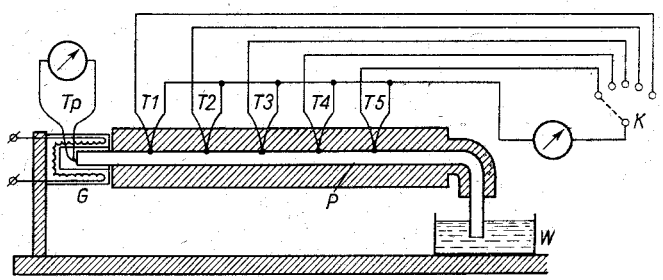
Obliczamy wartości następujących wyrażeń podstawiając na $T_1 - T_0$ wskazanie T_p termoogniwa, a na $T - T_0$ kolejno wartości T_i wskazywane przez kolejne termoogniwa $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ $\ln \frac{T_p}{T_i} = \frac{1}{\lg e} \log \frac{T_p}{T_i}$ oraz $T_p \ln \frac{T_p}{T_i}$. Wykreślamy zależności $\lg \frac{T_p}{T_i}$ od x oraz $T_p \lg \frac{T_p}{T_i}$ od x, gdzie x jest odległością kolejnych termoogniw od piecyka. Stosując metodę wyrównawczą (§ 2.6) wyznaczamy nachylenia otrzymanych prostych, które wyrazić możemy wzorami: $h = \frac{1}{x} \ln \frac{T_p}{T_i}$ (por. wzór 15.17a) oraz $k = \frac{1}{x} T_p \ln \frac{T_p}{T_i}$. Obliczamy odchylenia standardowe tych nachyleń. Obliczamy λ z wzoru, który otrzymamy podstawiając nachylenie k i wyrażenie (15.22) do wzoru (15.20a). Ponadto z wzoru (15.16) obliczamy współczynnik przejmowania ciepła a.

Obliczamy błąd $\delta\Phi$ z wzoru (15.21) oraz błąd $\Delta\Phi$ ze wzoru (15.22) i dyskutujemy słuszność zastosowanego przybliżenia polegającego na zastosowaniu wzorów wyprowadzonych przy $l = \infty$ do pręta o skończonej długości. Przybliżenie jest uzasadnione, jeżeli obydwa błędy są tego samego rzędu lub ściślej $\delta\Phi \leqslant \Delta\Phi$. Obliczamy błędy nachyleń S_h i S_k oraz błędy współczynników: przewodnictwa λ i przejmowania a.

Wersja II

Aparatura i pomiary

Przedstawiona na rysunku 15.4 aparatura jest podobna do aparatury opisanej w wersji I. Różnice są następujące: pręt może być stosunkowo krótki, a jego zimny koniec utrzymuje się w kąpieli wody z lodem, odprowadzającej praktycznie całe ciepło. Ścianki boczne pręta są bardzo dobrze izolowane cieplnie tak, że ciepło odpływające przez te ścianki możemy zaniedbać. Nie stosujemy płaszcza wodnego. Może istnieć



15.4. Aparatura do pomiaru przewodnictwa pręta z izolowanymi cieplnie ściankami bocznymi.

wersja przyrządu z izolowanym cieplnie piecykiem. Pomiary wykonujemy niemal dokładnie w taki sam sposób jak w przypadku wersji I. Różnice sprowadzają się do tego, że nie stosujemy płaszcza wodnego i zimny koniec pręta musi być zanurzony w wodzie z lodem.

Obliczenia

Wykreślamy zależność T od x. Gdy pomiary są wykonane prawidłowo, uzyskujemy linię prostą. Określamy nachylenie uzyskanej linii, które jest równe $\frac{\partial T}{\partial x}$. Współczynnik λ obliczymy wtedy z równania (15.6), Φ obliczamy z równania (15.22). Obliczamy błąd nachylenia $\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ z wykresu, a następnie obliczamy błąd $\Delta\lambda$. Porównujemy zgodność uzyskanego wyniku z tablicami fizycznymi.

15.3. PRZEWODNICTWO MATERIAŁÓW ŹLE PRZEWODZĄCYCH (METODA KALORYMETRYCZNA)

Cel: wyznaczyć współczynnik przewodnictwa cieplnego ścianek rurki szklanej, gumowej itp. metodą kalorymetryczną.

Przyrządy: kalorymetr (§ 12.01–02), autotransformator, dmuchawa (§ 3.10), termometr (§ 3.6).

Zagadnienia: przenoszenie ciepła (§ 15.01–03; S2, § 33–37), kalorymetria (§ 12.01–02; S2, § 5).

Wprowadzenie

W omawianym doświadczeniu rozkład temperatury w rurce ma symetrię walcową, stąd wielkość x występującą w równaniu (15.6) zastąpić możemy promieniem r. Powierzchnia S przekroju, przez którą płynie strumień cieplny wynosi $2\pi rl$, gdzie l jest długością rurki. Uwzględniając to w równaniu (15.6) otrzymamy następujące wyrażenie

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi rl$$

lub po uporządkowaniu

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi l\lambda} \frac{dr}{r}.$$

Całkując powyższe wyrażenie w granicach od r_w do r_z, w których temperatura zmienia się od T_w do T_z otrzymamy

$$T_z - T_w = -\frac{\Phi}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r_z}{r_w}. \tag{15.23}$$

Wielkość strumienia cieplnego Φ określamy metodą kalorymetryczną. Energia cieplna Q, którą zyskuje kalorymetr wyraża się wzorem

$$Q = (c_w m_w + C)\Delta T_k.$$

Stąd też szybkość przepływu energii cieplnej wynosi

$$\Phi = (c_w m_w + C)\frac{dT_k}{dt}.$$

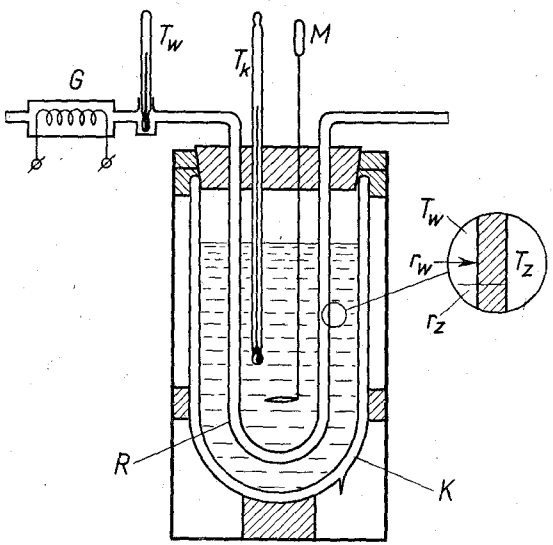
Podstawiając powyższą wartość do równania (15.23) otrzymamy

$$\lambda = -\frac{(m_w c_w + C)\frac{dT_k}{dt}\ln\frac{r_2}{r_w}}{2\pi l(T_z - T_w)}. \tag{15.24}$$

Wzór powyższy pozwala obliczyć współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału rurki (szkła lub gumy).

Aparatura

Schemat aparatury pokazano na rys. 15.5. W kalorymetrze K zanurzona jest rurka R wykonana z badanego materiału. Przez rurkę przedmuchujemy strumień powietrza podgrzanego w piecyku G. Powietrze przepompowujemy za pomocą dmuchawy (elektroluksu). Zakładamy, że wewnętrzna ścianka rurki ma temperaturę T_w przedmuchiwanego powietrza, a zewnętrzną temperaturę T_z woda w kalorymetrze, l jest równe długości tej części rurki, która znajduje się pod powierzchnią wody. Założenia te są spełnione, gdy woda jest dokładnie mieszana mieszadłem M.



15.5. Aparatura do pomiaru przewodnictwa metodą kalorymetryczną.

Pomiary

Mierzymy średnicę zewnętrzną $2r_z$ i wewnętrzną $2r_w$ rurki, ważymy (m_p) kalorymetr suchy, wypełniamy go wodą do 3/4 głębokości. Wykonujemy ponowne ważenie (m_k) i oceniamy głębokość zanurzenia rurki, skąd obliczamy wartość l dla osi symetrii rurki. Włączamy dmuchawę, grzejnik i mieszadło nie podłączając strumienia powietrza do kalorymetru i czekamy do czasu ustalenia się temperatury powietrza. W tym czasie mierzymy temperaturę wody w kalorymetrze. Powinna ona być o 5°C niższa od temperatury pokojowej. Po ustaleniu się temperatury T powietrza, podłączamy strumień

powietrza do kalorymetru i odczytujemy co 30 s temperaturę T_k wody w kalorymetrze (notujemy czas i temperaturę). Pomiary te wykonujemy do chwili, gdy temperatura w kalorymetrze wzrośnie o około 10°C.

Obliczenia

Wykreślamy zależność temperatury T_k od czasu. Z wykresu tego określamy nachylenie stycznej w punkcie odpowiadającym temperaturze pokojowej. Nachylenie to jest równe pochodnej dT_k/dt. Podstawiamy dane uzyskane w doświadczeniu do równania (15.24) i obliczamy λ. W przypadku, gdy równoważnik kalorymetru jest nieznany musimy wyznaczyć go w sposób podany w § 11.02. Za temperaturę T_z przyjmujemy temperaturę pokojową (tę, dla której wyznaczaliśmy dT_k/dt). Oceniamy błąd $\Delta(dT_k/dt)$ i obliczamy $\Delta\lambda$.

15.4. PRZEWODNICTWO PŁYTEK

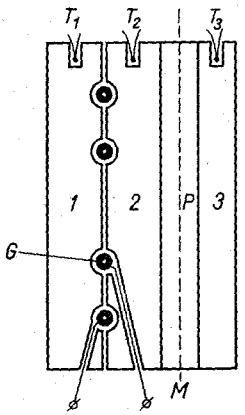
Cel: wyznaczenie współczynnika przewodnictwa cieplnego materiału izolującego ciepło.

Przyrządy: termoogniwo (§ 3.6 i 21.2), watomierz (§ 18.02), miliwoltomierz (§ 18.01), autotransformator (§ 4.5).

Zagadnienia: przenoszenie ciepła (§ 15.01–03, S2 § 33–37).

Wprowadzenie i aparatura

Współczynnik przewodnictwa materiałów źle przewodzących wyznacza się za pomocą układu pokazanego na rysunku 15.6. Grzejnik G jest tu otoczony dwoma krążkami mosiężnymi (*1* i *2*) zaopatrzonymi w wyżłobienia mieszczące grzejnik. Kształty krążków są tak dobrane, że przejmują one praktycznie całą energię cieplną wytwarzaną przez



15.6. Układ do pomiaru przewodnictwa ciał źle przewodzących.

grzejnik. Do krążka *2* przykłada się płytkę P wykonaną z badanego materiału i mającą również kształt krążka. Krążek mosiężny *3* przylega do płytki P. Ze względu na duże przewodnictwo mosiądzu można przyjąć, że temperatura T_3 krążka *3* jest równa temperaturze powierzchni płytki P.

Po upływie pewnego czasu od chwili włączenia grzejnika ustala się równowaga dynamiczna, w której całkowita moc P wytworzona przez grzejnik jest przenoszona do otoczenia przez zewnętrzne powierzchnie płyt, wynoszące odpowiednio: S_1, S_2, S_3, S_p. Przejmowanie tej energii przez otoczenie następuje zgodnie z wzorem Newtona (15.2), który po zróżniczkowaniu przyjmuje postać

$$\Phi_i = a(T_i - T_0)S_i, \text{ gdzie } i = 1, 2, 3 \text{ lub } p.$$

Zatem całkowita moc prądu P musi być równa strumieniowi ciepła $\sum_i \Phi_i$, czyli

$$P = \Phi = aS_1(T_1 - T_0) + aS_2(T_2 - T_0) + aS_p\left(\frac{T_2 + T_3}{2} - T_0\right) + aS_3(T_3 - T_0), \quad (15.25)$$

gdy T_1, T_2, T_3, T_p — temperatury odpowiednich płytek, a T_0 jest temperaturą otoczenia. Dla płytki P przyjęto temperaturę średnią krążków *2* i 3. Strumień ciepła płynący przez powierzchnię M z rysunku 15.6 jest równy sumie strumienia wypływającego przez połowę zewnętrzną powierzchni próbki $S_p/2$ oraz przez powierzchnię zewnętrzną krążka *3*

$$\Phi_p = a\frac{S_p}{2}\left(\frac{T_2 + T_3}{2} - T_0\right) + aS_3(T_3 - T_0).$$

Zgodnie z wzorem (15.6) strumień ten można wyrazić jako

$$\Phi_p = -\lambda S\frac{T_3 - T_2}{h},$$

przy czym h oznacza grubość płytki P, a S przekrój mierzony wzdłuż powierzchni M. Porównując ostatnie dwa wyrażenia otrzymujemy

$$\lambda S\frac{T_2 - T_3}{h} = a\frac{S_p}{2}\left(\frac{T_2 + T_3}{2} - T\right) + aS_3(T_3 - T_0). \quad (15.26)$$

Eliminując współczynnik a z równań (15.25) i (15.26) otrzymuje się następujący wzór na współczynnik przewodnictwa cieplnego płytki P:

$$\lambda = \frac{Ph\left[\frac{S_p}{2}\left(\frac{T_2 + T_3}{2} - T_0\right) + S_3(T_3 - T_0)\right]}{S(T_2 - T_3)\left[S_1(T_1 - T_0) + S_2(T_2 - T_0) + S_p\left(\frac{T_2 + T_3}{2} - T_0\right) + S_3(T_3 - T_0)\right]}. \quad (15.27)$$

Pomiary

Mierzymy średnicę $2r_i$ i grubość h_i poszczególnych krążków. Staramy się przy tym nie rozdzielać płytek *1* i *2*, między którymi znajduje się grzejnik. Składamy poszczególne krążki przyrządu według schematu pokazanego na rys. 15.6 i kontrolujemy kontakty termoogniw z poszczególnymi płytkami, a całość skręcamy śrubą, by uzyskać możliwie dobre kontakty cieplne. Połączenia elektryczne wykonujemy według schematu 18.6, jeżeli mierzymy watomierzem lub rys. 4.19, gdy stosujemy woltomierz i amperomierz. Do regulacji napięcia stosujemy autotransformator. Włączamy prąd elektryczny w obwód piecyka i kontrolujemy temperaturę poszczególnych krążków wykonując po-

miary co 5 min, do chwili, gdy ustali się równowaga cieplna i temperatury przestaną wzrastać (przy stałym napięciu równowaga ustala się mniej więcej po godzinie grzania). Po ustaleniu się równowagi wykonujemy ostateczny, dokładny pomiar temperatur T_1, T_2 i T_3, temperatury pokojowej T_0, mocy prądu P lub napięcia U i natężenia I. Notujemy dokładności pomiarów.

Obliczenia

W oparciu o uzyskane wyniki obliczamy wielkości powierzchni S_1, S_2, S_3 i S_p posiadających bezpośredni kontakt z otoczeniem. Współczynnik przewodnictwa cieplnego obliczamy z wzoru (15.27). Obliczamy błędy ΔS przyjmując dla uproszczenia $\Delta S_1 = \Delta S_3$ i $\Delta S_2 = \Delta S_p$. Błąd $\Delta\lambda$ obliczamy przy założeniu $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = \Delta T$.

15.5. PROMIENIOWANIE CIEPLNE

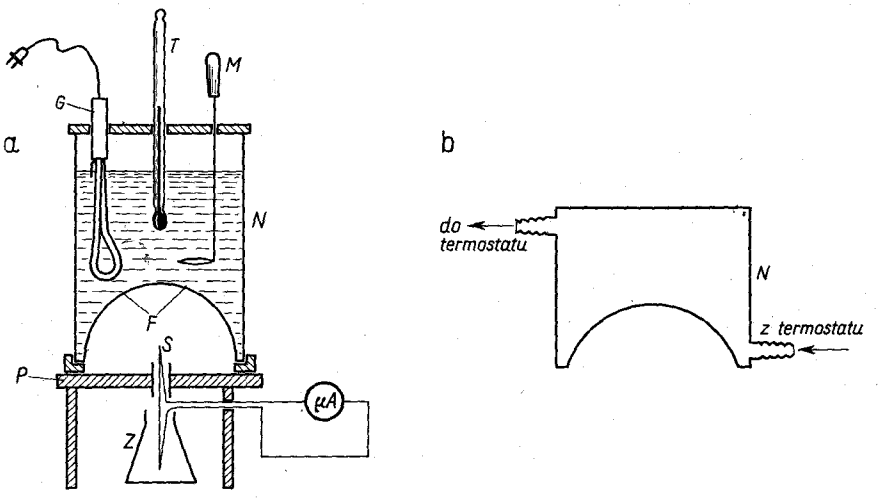
Cel: wyznaczenie współczynnika pochłaniania powierzchni metalu.

Przyrządy: termoogniwo (§ 3.6 i 21.2), miliwatomierz (§ 18,01), mieszadło mechaniczne lub ultratermostat (3.7).

Zagadnienia: przenoszenie ciepła (§ 15.01–03; S2, § 33–36), promieniowanie temperaturowe (S4, § 33–39).

Wprowadzenie i aparatura

Do pomiaru współczynnika pochłaniania stosuje się przyrząd przedstawiony na rysunku 15.7. Powierzchnię emitującą energię stanowi wklęsłe dno naczynia N. Jego powierzchnia F jest powierzchnią półkuli. Temperatura powierzchni F jest równa temperaturze wody wypełniającej naczynie. Naczynie jest zaopatrzone w grzejnik G, termometr T i mieszadło M. Energia E wypromieniowana przez dno pada na poczernione



15.7. Układ do pomiaru współczynnika pochłaniania powierzchni metalu (a). Naczynie N wykonane w wersji przeznaczonej do pracy z ultratermostatem (b).

spojenia termostosu S i wytwarza prąd o natężeniu I (dla prostoty na rysunku zaznaczono tylko jedno termoogniwo). Termometr wykonany jest z kilku połączonych szeregowo termoogniw miedź-konstantan. Natężenie prądu mierzymy mikroamperomierzem μA. Termostos jest bardzo czuły i reaguje nawet na bardzo małe zmiany temperatury spowodowane przypadkowymi ruchami powietrza. Stąd dolne spojenia termostosu osłania się naczyniem szklanym Z i umieszcza się je w znacznej odległości od naczynia N.

Można udowodnić, że prawo Kirchhoffa ${}^cR = aR$ stosuje się nie tylko do widmowej zdolności emisyjnej promieniowania ${}^cR$, lecz również do emisji energetycznej. Emisja energetyczna dla ciała C musi być równa mocy ${}^cP$ wypromieniowanej przez jednostkę powierzchni ${}^cR = {}^cP/S$, podobnie $R = P/S$. Uwzględniając równanie Stefana–Boltzmanna (15.8) otrzymamy

$$ {}^cP = {}^caS\sigma T^4. \tag{15.28}$$

Jeżeli temperatura otoczenia T_0 jest niższa od temperatury ciała T, to ciało wypromieniowuje moc

$$ {}^cP = {}^caS\sigma(T^4 - T_0^4). \tag{15.29}$$

W omawianym doświadczeniu porównuje się moc wypromieniowaną przez badane ciało z mocą P wypromieniowaną w takich samych warunkach przez sadzę ($a = 1$), wtedy

$$ P = S\sigma(T^4 - T_0^4). \tag{15.29a}$$

Wypromieniowana moc P padając między innymi na termostos wytwarza w nim prąd elektryczny o mocy P_I proporcjonalnej do $P (P \sim P_I)$. Ponieważ P_I równa się RI^2, musi zachodzić proporcjonalność $P = \frac{1}{k} I^2$ ($1/k$ — współczynnik proporcjonalności) i zgodnie z równaniami (15.28) i (15.29a) w tej samej temperaturze T musi zachodzić

$$ {}^cI^2 = k\,{}^caS\sigma(T^4 - T_0^4) \text{ dla ciała } c $$

oraz

$$ I^2 = kS\sigma(T^4 - T_0^4) \text{ dla ciała czarnego.} $$

Dzieląc stronami powyższe dwa równania otrzymamy związek

$$ {}^ca = \frac{{}^cI^2}{I^2}, \tag{15.30}$$

który pozwoli obliczyć współczynnik pochłaniania a materiału, z którego wykonane jest dno naczynia, ze stosunku natężeń prądów płynących przez termostos w tej samej temperaturze T, dla tej samej powierzchni S ciała badanego (${}^cI$) oraz pokrytego sadzą (I). W praktyce stosujemy dwa identyczne naczynia; powierzchnia jednego z nich pokryta jest sadzą.

Pomiary

Wypełniamy naczynie wodą i łączymy obwód termostosu. Podgrzewamy wodę do temperatury 60°C, utrzymujemy tę temperaturę do chwili, gdy ustali się wskazanie mikroamperomierza. Odczytujemy natężenie prądu ${}^cI_{60}$. Takie same pomiary wykonu-

jemy w temperaturach 80 i 95°C oraz dla naczynia, którego powierzchnia F pokryta jest sadzą. Dysponując dwoma kompletami aparatury, obydwie serie pomiarów wykonujemy jednocześnie.

Obliczenia

Uzyskane wyniki, dla każdej z temperatur, podstawiamy kolejno do wzoru (15.30) i obliczamy współczynnik pochłaniania powierzchni metalu ${}^{c}a_T$. Jako wynik ostateczny przyjmujemy średnią arytmetyczną $\bar{a}$. Błąd obliczamy dla jednego z pomiarów (np. 80°C).

15.6. PRZEWODNICTWO POWIETRZA

Cel: wyznaczanie współczynnika przewodnictwa cieplnego powietrza.

Przyrządy: pompa wodna (§ 3.10), manometr (§ 3.8), mostek Wheatstone'a (§ 17.1), zawory (§ 3.11).

Zagadnienia: przewodnictwo ciepła (§ 15.01–15.03; S2, § 33–37); mostek Wheatstone'a (§ 17.1), lub mostek Thomsona (§ 17.2), wprowadzenie do doświadczenia (§ 15.3).

Wprowadzenie

Do cylindrycznej warstwy powietrza otaczającej nagrzany do temperatury τ_w przewód stosuje się wzór (15.23), który napiszemy w postaci

$$\lambda = \frac{-\Phi}{2\pi l(\tau_z - \tau_w)} \ln \frac{r_w}{r_z}. \tag{15.31}$$

Temperaturę τ_w można określić ze zmian oporu R przewodu, zachodzących według prawa

$$R = R_0(1 + \alpha\tau),$$

gdzie α — współczynnik temperaturowy oporu, R_0 — opór w temperaturze 0°C. Mierząc opór przewodu w temperaturze otoczenia τ_z oraz w temperaturze τ_w otrzymamy dwie następujące zależności $R_z = R_0(1 + \alpha\tau_z)$ i $R_w = R_0(1 + \alpha\tau_w)$, skąd

$$\tau_w = \frac{R_w(1 + \alpha\tau_z) - R_z}{\alpha R_z}.$$

W równowadze termodynamicznej strumień ciepła Φ przepływającego przez warstwę powietrza jest równy mocy P prądu elektrycznego płynącego przez przewód, więc

$$\Phi = P = R_w I^2.$$

Podstawiając ostatnie dwa związki do (15.31) otrzymamy

$$\lambda = \frac{-\ln(r_w/r_z)}{2\pi l} \frac{I^2 R_z R_w \alpha}{(R_w - R_z)(1 + \alpha\tau_z)}. \tag{15.32}$$

Wzór powyższy nie jest zupełnie ścisły, ponieważ nieścisłe jest założenie $\Phi = P$. W praktyce $\Phi < P$, ponieważ część ciepła przechodzi drogą promieniowania oraz konwekcji, a część energii prądu elektrycznego jest tracona na podgrzewanie przewodów doprowadzających prąd do przewodu pełniącego rolę źródła energii cieplnej. Wpływ

ucieczki ciepła przez doprowadzenia można badać wykonując pomiary na przyrządach zbudowanych tak samo, lecz mających różną długość. W omawianym doświadczeniu badań takich nie wykonujemy.

Energia przenoszona przez promieniowanie wyraża się (por. wzór 15.29) wzorem

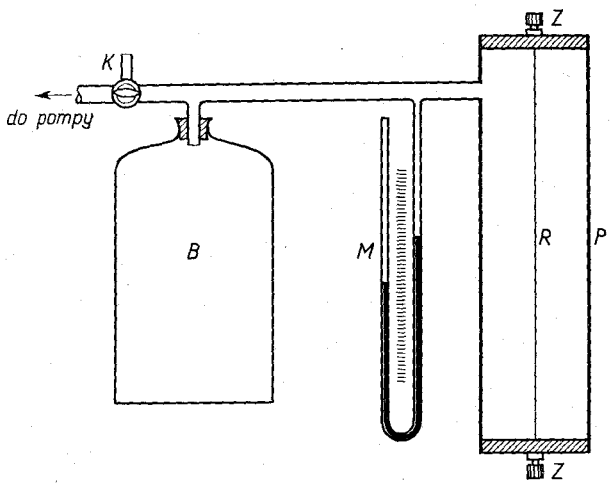
$$^{c}P = aS\sigma(T_w^4 - T_z^4), \tag{15.33}$$

gdzie S oznacza powierzchnię przekroju promieniującego.

Na drodze doświadczalnej ustalono, że rola konwekcji w małych, zamkniętych objętościach nie jest duża, a wymiana ciepła zachodzi głównie drogą przewodzenia i promieniowania. Błąd pochodzący od konwekcji można badać doświadczalnie zmieniając ciśnienie w przyrządzie. Ilość energii przenoszona drogą konwekcji maleje wraz ze spadkiem gęstości gazu, a więc i ciśnienia. Dlatego, gdy w doświadczeniu stwierdzimy zależność λ od ciśnienia możemy sądzić, że występuje poważny wpływ konwekcji na przenoszenie ciepła. Jeżeli zależności takiej nie stwierdzimy, konwekcja odgrywa małą rolę.

Aparatura

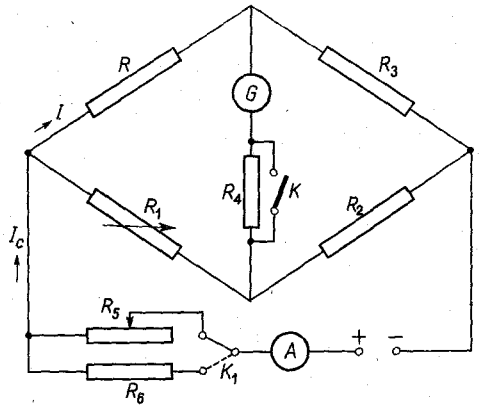
Aparatura (rys. 15.8) składa się z rury miedzianej P, w osi której rozciągnięty jest przewód R. Zaciski Z, Z znajdują się w końcówkach izolowanych elektrycznie. Całość jest uszczelniona i pozwala na utrzymanie próżni wewnątrz aparatury. Manometr M służy do pomiaru ciśnienia. Zawór kurkowy K odcina pompę od pozostałej części aparatury. Do pompowania stosować można pompę wodną Bunsena.



15.8. Aparatura do pomiaru przewodnictwa powietrza.

Opór elektryczny mierzy się w układzie mostka Wheatstone'a (rys. 15.9). Przewód R jest równocześnie opornikiem R w mostku. Oporniki R_1, R_2 i R_3 dobrano w ten sposób, by prąd mierzący mógł równocześnie nagrzewać przewód R. Najwygodniej dla opornika R_3 przyjąć wartość 1 Ω, R_2 — wartość 100 Ω, a na R_1 opornik dekadowy o zakresie 1000–0,1 Ω. Opornikiem tym dobiera się równowagę mostka. Oporniki R_5 i R_6 służą

do zmiany wartości prądu w oporniku R. Opornik R_5 jest opornikiem suwakowym o oporze dobranym w ten sposób, by przy zastosowanym źródle prądu uzyskać natężenie słabo żarzące przewód R. Opornik R_6 ma opór 10-krotnie większy od R_5. Gdy prąd przepływa przez opornik R_6, wtedy jest tak słaby, że temperatura przewodu R praktycznie nie zmienia się.



15.9. Układ do pomiaru oporu przewodu R (rys. 15.8).

Prąd I obliczamy następująco. Przy zrównoważonym mostku prąd płynący przez opornik R ma takie samo natężenie jak przez opornik R_3. Podobnie przez oporniki R_1 i R_2 płynie prąd o jednakowej wartości. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa mamy

$$IR = (I_c - I)R_1,$$

skąd

$$I = \frac{I_c R_1}{R + R_1}.$$

Ponieważ ponadto $R/R_1 = R_3/R_2 = 1/100$, otrzymamy

$$I = I_c \frac{1}{R/R_1 + 1}, \qquad I = \frac{100}{101} I_c. \tag{15.34}$$

Zatem z dokładnością do 1% możemy założyć $I = I_c$. Zgodnie z wzorem (17.8) przy stosowanych oznaczeniach (rys. 15.9) opór R (a tym samym opór R_w w temperaturze τ_w i opór R_z w temperaturze pokojowej) wyraża się wzorem

$$R = R_3 \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1}{100}. \tag{15.35}$$

Opór R opornika mierzyć możemy również za pomocą fabrycznego mostka Thomsona MWT 77a (§ 17.2).

Pomiary

Mierzymy poszczególne elementy przyrządu: r_z, r_w i l oraz temperaturę otoczenia τ_z. Łączymy układ według schematu przedstawionego na rys. 15.9 i mierzymy opór R_z przewodu zimnego włączając prąd przez opornik R_6. Przy kompensacji wstępnej gal-

wanometr jest zabezpieczony opornikiem R_4 rzędu 1000 Ω. Przy dokładnej kompensacji opornik R_4 zwieramy. Włączamy maksymalną wartość prądu $I_{c,\max}$, czekamy na ustalenie prądu i dokonujemy pomiarów. Przyjmujemy, że rozkład temperatur jest ustalony z chwilą, gdy I_c osiąga stałą wartość. Podobne pomiary wykonujemy dla około 0,8 i 0,6 $I_{c,\max}$. Po zakończeniu tej serii włączamy aparaturę próżniową i odpompowujemy przyrząd do ciśnienia ok. 500 mm Hg. Powtarzamy pomiary przy $I_{c,\max}$. Podobne pomiary powtarzamy dla dwóch innych ciśnień.

Obliczenia

Obliczamy wartości oporów R_z i R_w z wzoru (15.35) dla wszystkich pomiarów oraz λ z wzoru (15.32). Obliczamy błędy pomiarów zakładając, że wartość $\Delta R_z = \Delta R_w = \Delta R$ oraz błąd przewodnictwa $\Delta\lambda$. Obliczamy średnią wartość $\bar{\lambda}$ przy ciśnieniu atmosferycznym i dyskutujemy jej zgodność z danymi z tablic fizycznych. Wykreślamy zależność współczynnika przewodnictwa cieplnego od ciśnienia. Korzystając z wyników pomiarów wykonanych przy różnych wartościach I_c dyskutujemy wpływ promieniowania (w oparciu o wzór 15.33) oraz wpływ innych strat ciepła.

16. FIZYKA DROBINOWA

16.1. WYZNACZANIE NAPIĘCIA POWIERZCHNIOWEGO Z POMOCĄ WAGI TORSYJNEJ

Cel: wyznaczenie współczynnika napięcia powierzchniowego kilku różnych cieczy metodą rozrywania warstwy powierzchniowej.

Przyrządy: waga torsyjna (§ 3.4)

Zagadnienia: napięcie powierzchniowe (S2, § 69 i 70, 74; J, § 14.8–11), budowa drobinowa ciał (S2, § 55 i 56).

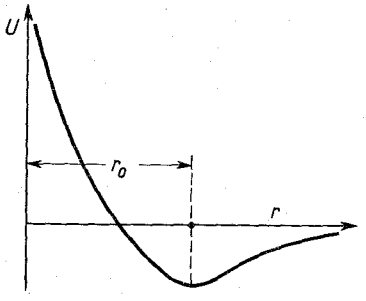
Wprowadzenie

Pomiędzy drobinami cieczy działają siły van der Waalsa zwane również siłami spójności. Ich wielkość zależy od odległości r pomiędzy drobinami

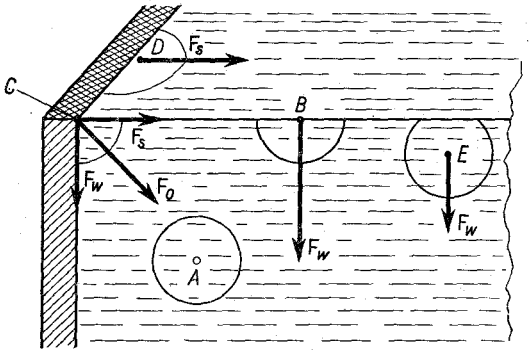
$$F = -\frac{C_1}{r^n} + \frac{C_2}{r^m},$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi, a wykładniki potęgowe n i m spełniają nierówność $n < m$, co w praktyce oznacza, że siły odpychające (drugi składnik ostatniego równania) maleją wraz z odległością szybciej od sił przyciągających (składnik pierwszy). Dla bardzo małych odległości przeważają siły odpychające, a dla nieco większych — przyciągające. Obydwa rodzaje sił bardzo szybko maleją ze wzrostem odległości r. Siłom van der Waalsa odpowiada energia potencjalna $U = Fr$, której przebieg w zależności od odległości r pokazano na rysunku 16.1. W warunkach równowagi drobiny znajdują się we wzajemnej odległości $r_0 \simeq 10^{-10}$ m odpowiadającej minimum krzywej $U(r_0)$. Odległość wynoszącą 10^{-9} m, poniżej której siły spójności wywierają dostrzegalne działanie, nazywamy promieniem sfery działania, a kulę o tym promieniu zakreśloną wokół dowolnej drobiny — jej sferą działania. Na każdą drobinę działają wszystkie

inne drobiny znajdujące się wewnątrz jej sfery działania. Jeżeli interesująca nas drobina znajduje się wewnątrz cieczy, to ze względu na równomierny rozkład drobin wypadkowa działających na nią sił jest równa zeru (drobina A na rysunku 16.2). W przypadku drobiny znajdującej się na powierzchni, tylko dolna część sfery działania wypełniona jest cieczą, jej górna część wypełniona jest gazem (powietrzem i parą nasyconą). Z powodu małej gęstości gazu siły wywierane przez drobiny z górnej części sfery działania są kilkaset razy mniejsze od sił wywieranych przez drobiny części dolnej i w dalszych rozważaniach możemy je pominąć. Zatem na drobinę znajdującą się na powierzchni działa pewna siła F_w będąca wypadkową sił van der Waalsa z dolnej części sfery działania (drobina B z rys. 16.2); jest ona skierowana w głąb cieczy i nazywa się siłą powierzchniową. Siły powierzchniowe działają na wszystkie drobiny znajdujące się na powierzchni w warstwie o grubości równej promieniowi sfery działania. Sumę sił działających na drobiny jednostki powierzchni cieczy nazywamy ciśnieniem powierzchniowym lub wewnętrznym cieczy (porównaj prawo Pascala).



16.1. Zależność energii potencjalnej od odległości wzajemnej atomów.



16.2. Strefy działania drobin z powierzchni i wnętrza cieczy.

Aby przesunąć drobinę z wnętrza cieczy na powierzchnię, musimy wykonać pracę przeciwko siłom powierzchniowym. Praca ta zmienia się na energię potencjalną drobiny. Dodatkową energię potencjalną mają wszystkie drobiny tworzące warstwę powierzchniową. Ponieważ w warunkach równowagi trwałej ciecz ma minimum energii potencjalnej, stąd jej powierzchnia jest możliwie najmniejsza. Wielkość równą pracy W, którą musimy wykonać, aby powierzchnię cieczy zwiększyć o S, nazywamy współczynnikiem napięcia powierzchniowego

$$\sigma = \frac{W}{S}. \tag{16.1}$$

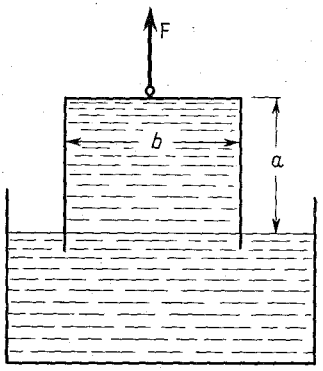
Załóżmy, że wytworzyliśmy cienką błonę, wyciągając w górę z roztworu mydła ramkę pokazaną na rysunku 16.3. Musieliśmy w tym celu wykonać pracę $W = Fa$. Powierzchnia błony wynosi $S = 2ab$ (błona ma dwie powierzchnie). Zatem w omawianym przypadku równanie (16.1) przyjmie postać

$$\sigma = \frac{F}{2b}. \tag{16.2}$$

Uogólniając powyższy wzór możemy napisać, że współczynnik napięcia powierzchniowego jest równy stosunkowi działającej stycznie do powierzchni siły F i długości l jej obrzeżenia:

$$\sigma = \frac{F}{l}. \tag{16.3}$$

Często wzór powyższy traktuje się jako wzór definicyjny, wtedy jednostką współczynnika napięcia powierzchniowego jest $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ $(= \mathrm{J \cdot m^{-2}})$.



16.3. Błonka cieczy (roztworu mydła) rozpięta na ramce.

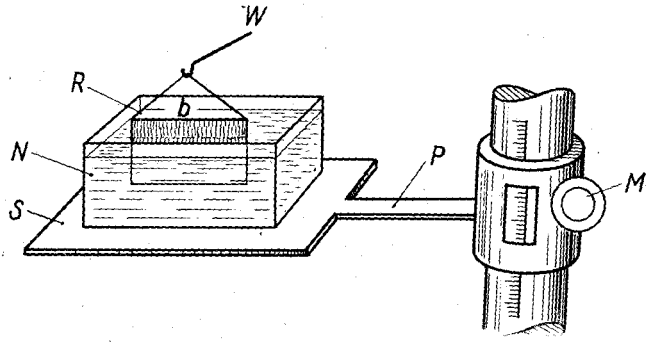
Wyjaśnimy jeszcze przyczynę występowania siły stycznej do powierzchni cieczy, działającej na obrzeżenie. Załóżmy w tym celu, że ciecz zwilża naczynie oraz, że naczynie jest całkowicie wypełnione cieczą i nie występuje zakrzywienie powierzchni cieczy przy jego brzegach. Na drobinę C z rysunku 16.2 przylegającą do obrzeżenia działa wypadkowa siła F_0. Siłę F_0 można rozłożyć na dwie składowe: F_w działającą prostopadle do powierzchni oraz F_s — działającą stycznie. Siły F_s działają na wszystkie drobiny zawarte w przylegającej bezpośrednio do obrzeżenia części warstwy powierzchniowej o szerokości równej promieniowi sfery działania. Z powodu dużej wartości sił przylegania działanie sił F_s przenosi się na obrzeżenie i jest skompensowane jego sprężystością. W przypadku błonki mydlanej z rysunku 16.3 działanie sił F_s na bok b jest skompensowane zewnętrzną siłą F, natomiast siły działające na boki a są skompensowane sprężystością ramki.

Warstwa powierzchniowa cieczy zachowuje się podobnie jak napięta błona; przyjmując możliwie najmniejszą powierzchnię, kurczy się działając siłą F na obrzeżenie. Różnica polega na tym, że w przypadku warstwy powierzchniowej wartość siły działającej na jednostkę długości obrzeżenia F/l, nie zależy od powierzchni warstwy, natomiast w przypadku napiętej błony jest ona proporcjonalna do powierzchni.

Aparatura

Podstawową część aparatury (rys. 16.4) stanowi waga torsyjna, której szalkę zastąpiono ramką R (W — belka wagi). Ramka jest wykonana z sztywnego, dość grubego drutu, a jej bok b, służący do właściwych pomiarów stanowi drut nieco cieńszy ($2r <$

< 1 mm), a jego długość jest określona bardzo dokładnie. Statyw ma ramię P zakończone płaskim stolikiem S, na którym stawiamy naczynie N z badaną cieczą. Statyw zaopatrzony jest w przesuw mechaniczny M pozwalający na płynne przesuwanie ramienia w kierunku pionowym oraz w podziałkę pozwalającą na odczytanie położenia ramienia P.



16.4. Aparatura do pomiaru napięcia powierzchniowego metodą rozrywania warstwy powierzchniowej.

Pomiary

Pomiary rozpoczynamy od badania roztworu mydła o dowolnym stężeniu. Zawieszamy ramkę i równoważymy wagę odczytując jej wskazanie m_1 (które nie musi być zerem). Na stoliku S ustawiamy naczynie z roztworem i stolik podsuwamy pod ramkę. Następnie przesuwamy w górę stolik do położenia, w którym bok b ramki zanurzy się w roztworze. Opuszczamy powoli statyw do położenia, przy którym pomiędzy bokiem b ramki i powierzchnią roztworu wytworzy się błonka wysokości 1–3 mm. Ponownie równoważymy wagę i odczytujemy wskazanie m_2. Analizujemy uzyskany wynik i planujemy optymalny sposób pomiaru poszczególnych wielkości prostych.

1. Wykonujemy serię pomiarów zależności siły F od wysokości błony h. W tym celu wychodząc z pierwszego pomiaru, przesuwamy ramię P statywu w górę lub w dół, równoważymy wagę i zapisujemy wskazanie x (z podziałki statywu) oraz m_2. Podobne pomiary wykonujemy dla kilku położeń ramienia P.

2. Badamy wpływ długości boku b na wartość siły F. W tym celu wykonujemy serię pomiarów dla przynajmniej 5-ciu ramek różniących się długością boku b.

3. Następnie wykonujemy pomiary cieczy wskazanych w instrukcji. Oczyszczamy ramkę w alkoholu lub eterze. Wyznaczamy wskazanie początkowe m_1 w podobny sposób jak w przypadku roztworu mydła. Współczynnik napięcia powierzchniowego badanych cieczy jest mały i nie da się wytworzyć błony jak w przypadku roztworu mydła. Stąd pomiar przebiega nieco inaczej. Zanurzamy ramkę tak głęboko, by bok b znalazł się poniżej poziomu cieczy i ponownie równoważymy wagę nie wykonując odczytu. Powoli obniżamy położenie platformy do chwili wyjścia boku b na powierzchnię cieczy, co objawi się gwałtownym zachwianiem równowagi wagi. Pozostawiamy statyw na tej wysokości i powoli pokręcamy pokrętłem wagi w kierunku wyższych wskazań, obserwując ciągle jej wskazania do chwili, w której następuje oderwanie boku b od powierzchni cieczy (następuje gwałtowny skok wskazania wagi). Odczytujemy wskazanie m_2, przy którym oderwanie boku b miało miejsce.

Obliczenia

Napięcie powierzchniowe obliczamy z wzoru (16.2), który w omawianym przypadku, po podstawieniu $F = (m_2 - m_1)g$ przyjmuje postać

$$\sigma = \frac{(m_2 - m_1)g}{2b}.$$

Obliczenia wykonujemy oddzielnie dla każdego z pomiarów, a dla każdego rodzaju cieczy obliczamy wartość średnią $\bar{\sigma}$. Obliczamy błędy w sposób uzależniony od rodzaju pomiarów. Dyskutujemy wpływ wysokości błony mydlanej h (wskazania x) oraz długości boku b na wynik pomiaru napięcia powierzchniowego.

16.2. KAPILARY

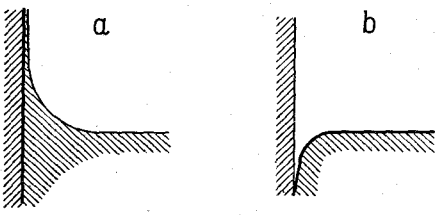
Cel: wyznaczenie względnego współczynnika napięcia powierzchniowego kilku różnych cieczy.

Przyrządy: suwmiarka (§ 3.1), katetometr (§ 3.2).

Zagadnienia: napięcie powierzchniowe (wprowadzenie do doświadczenia 16.1; S2, § 69 i 70, 74; J, § 14.8–11), budowa drobinowa ciał (S2, § 55 i 56).

Wprowadzenie i aparatura

Działające między cieczą i ciałem stałym siły przylegania zależą od rodzaju ciał. Dla wody i szkła przewyższają one znacznie siły spójności. Z tego powodu woda pokrywa cienką warstwą powierzchnię ciała. Powierzchnia wody przy brzegu naczynia nie jest płaska. Siły powierzchniowe działają w kierunku jej zmniejszenia, a przylegania — zwiększenia, w konsekwencji przy ściankach ciecz wznosi się w sposób pokazany na rys.



16.5. Zakrzywienie powierzchni przy ściankach naczynia dla zwilżającej (a) i niezwilżającej (b).

16.5. Jeżeli w cieczy zanurzymy cienką rurkę szklaną zwaną kapilarą lub rurką włoskowatą, to w przypadku cieczy zwilżającej siły powierzchniowe spowodują wzniesienie jej menisku ponad poziom otaczającej cieczy, lub obniżenie — w przypadku cieczy niezwilżającej (rtęć). Siły powierzchniowe powodujące wzniesienie słupka działają na obwodzie kapilary($2\pi r$) i wynoszą

$$F = 2\pi r\sigma. \tag{16.4}$$

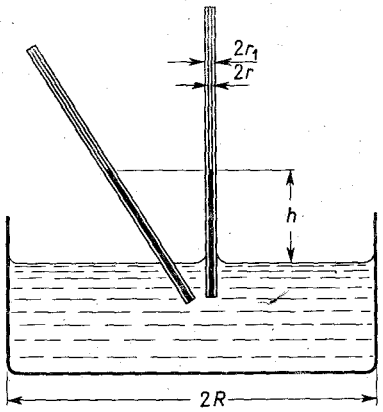
Są one zrównoważone ciężarem słupka wody o wysokości h_1

$$F_g = \pi r^2 h_1 \varrho g. \tag{16.5}$$

Ponieważ obydwie siły muszą się równoważyć otrzymujemy ostatecznie

$$\sigma = \frac{1}{2} r h_1 \varrho g. \tag{16.6}$$

Wzór powyższy słuszny jest pod warunkiem, że naczynie, w którym wykonujemy pomiar posiada rozmiary bardzo duże w porównaniu z kapilarą. W przypadku, gdy warunek powyższy nie jest spełniony uwzględnić musimy poprawki. Dla prostoty założymy, że naczynie jest okrągłe, jego wewnętrzny promień wynosi R, a zewnętrzny promień



16.6. Wzniesienie cieczy zwilżającej w kapilarze.

kapilary r_1 (rys. 16.6). Analogicznie jak w przypadku równania (16.4) siły powierzchniowe działające ku górze będą równe iloczynowi długości $2\pi R$ brzegu naczynia i długości $2\pi r_1$ obwodu zewnętrznego kapilary przez σ

$$F' = 2\pi(R+r_1)\sigma.$$

Ciężar słupka wody o wysokości h_1' równoważącego te siły, podobnie jak w przypadku (16.5), będzie równy

$$F_\varrho' = \pi h_1' g \varrho (R^2 - r_1^2).$$

Przyrównując $F' = F_\varrho'$ oraz obliczając h_1' otrzymamy

$$h_1' = \frac{2\sigma}{\varrho g (R - r_1)}. \tag{16.7}$$

Rzeczywiste wzniesienie h słupka cieczy w kapilarze ponad powierzchnię cieczy w naczyniu wyniesie $h = h_1 - h_1'$. Obliczając h z wzorów (16.6) i (16.7) otrzymamy

$$\sigma_\bigcirc = \frac{r h \varrho g}{2\left(1 - \frac{r}{R - r_1}\right)}. \tag{16.8}$$

W przypadku naczynia prostokątnego o bokach a i b dokładny wzór na σ przyjmuje postać

$$\sigma_\square = \frac{r h \varrho g}{2\left[1 - \frac{r(a+b+\pi r_1)}{ab - \pi r_1^2}\right]}. \tag{16.9}$$

Pomiary

Przed przystąpieniem do pomiarów dokładnie myjemy kapilary, ponieważ drobne nawet zanieczyszczenia mogą zniekształcić pomiar. W tym celu przemywamy je mieszaniną chromową (najlepiej zanurzyć w mieszaninie całe kapilary), a następnie dokładnie płuczemy wodą destylowaną. Wnętrze kapilary najdokładniej oczyścimy łącząc kapilarę z pompką wodną, a drugi koniec zanurzając w wodzie. Wtedy przez kapilarę zostaje przepompowana duża ilość wody destylowanej.

Pomiar promienia kapilary, czyli kalibrowanie kapilary*

Wprowadzamy do kapilary kroplę rtęci wciągając ją za pomocą rozpylacza fryzjerskiego, wypełni ona kapilarę na długość l. Sprawdzamy czy przekrój kapilary jest stały wzdłuż całej długości. W tym celu przesuwamy kroplę w różne położenia i mierzymy jej długość l_i. Jeżeli wyniki nie różnią się, kapilara nadaje się do dalszych pomiarów. Ważymy na wadze analitycznej szkiełko zegarkowe (m_1), a następnie na szkiełku tym ważymy rtęć, którą kalibrowaliśmy kapilarę (m_2). Znamy teraz masę rtęci: $m = m_2 - m_1$ i średnią długość l słupka w kapilarze, wiemy że jej objętość wynosi $\pi r^2 l$, a masa $m = \pi r^2 l \varrho_{\mathrm{Hg}}$. Stąd promień kapilary wyrazi się wzorem

$$r = \sqrt{\frac{m}{\pi l \varrho_{\mathrm{Hg}}}}. \tag{16.10}$$

Gdy nie możemy wykonać kalibracji z rtęcią, wykonujemy ją za pomocą cieczy o znanym współczynniku napięcia powierzchniowego. Poziom cieczy w kapilarze oraz w naczyniu odczytać można dokładnie za pomocą katetometru. W przypadku braku katetometru posługujemy się szklaną miarką milimetrową. Czystą kapilarę zanurzamy w naczyniu z badaną cieczą i pochylamy, by słupek cieczy wzniósł się ponad normalny poziom, a ciecz zwilżyła ścianki kapilary. Gdy kapilarę ustawiamy pionowo, poziom cieczy w czystej kapilarze powinien opaść. Kapilarę przytrzymujemy uchwytem i odczytujemy poziom menisku (por. rys. 16.6). Następnie kapilarę na chwilę pochylamy i powtarzamy pomiar. Analizujemy wyniki serii próbnej i planujemy właściwe pomiary. Wykonujemy je dla innych cieczy i innych kapilar. Mierzymy średnice zewnętrzne $2r_1$ kapilar oraz wewnętrzną średnicę R naczynia, lub długości a i b jego boków.

Obliczenia

W zależności od metody pomiaru obliczamy promień wewnętrzny jednej kapilary z wzoru (16.10) i (16.8) lub (16.9). Dla jednej z badanych cieczy, korzystając z tych samych pomiarów, obliczamy napięcie powierzchniowe σ z wzoru (16.6) oraz $\sigma_{\bigcirc}$ z wzoru (16.8). Obliczamy błędy pomiarów obliczanych każdą z tych metod i sprawdzamy zgodność wyników σ i $\sigma_{\bigcirc}$. Jeżeli wartość bezwzględna różnicy $|\sigma - \sigma_{\bigcirc}|$ jest znacznie mniejsza od sumy błędów tych wielkości, wtedy stosowanie poprawek wynikających ze skończonych rozmiarów naczynia nie jest uzasadnione i pozostałe obliczenia opieramy wyłącznie na wzorze (16.6). W przeciwnym przypadku musimy korzystać z wzoru (16.8) lub (16.9). Obliczamy promienie wszystkich stosowanych kapilar oraz współczynniki napięcia powierzchniowego dla wszystkich mierzonych przypadków. Błędy obliczamy dla kilku wybranych przypadków.

* Najdokładniej kalibrację wykonuje się za pomocą rtęci, jednak ze względu na szkodliwość par rtęci kalibrację taką wykonać można tylko w specjalnie przygotowanym pomieszczeniu do prac z rtęcią.

16.3. STALAGMOMETR

Cel: wyznaczenie zależności współczynnika napięcia powierzchniowego roztworu alkoholu w wodzie od stężenia za pomocą stalagmometru.

Przyrządy: waga torsyjna lub analityczna (§ 3.4).

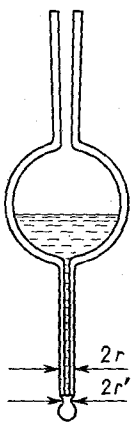
Zagadnienia: napięcie powierzchniowe (§ 16.1; S2, § 69 i 70, 74; J, § 14.8–11), drobinowa budowa materii (S2, § 55 i 56).

Wprowadzenie

Kropla wypływająca z rurki kapilarnej (rys. 16.7) oderwie się wtedy, gdy jej ciężar $G = mg$ przewyższy nieco siłę F z jaką działa napięcie powierzchniowe $F = \sigma 2\pi r'$. Zakładając $G = F$ otrzymamy

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r'}. \tag{16.11}$$

Celem określenia współczynnika napięcia powierzchniowego znać musimy masę kropli m oraz promień r' największego przewężenia w chwili odrywania kropli. Wartość r' zależy od promienia r kapilary jak również w pewnym stopniu od wartości napięcia



16.7. Stalagmometr i wypływająca kropla cieczy.

powierzchniowego. Stąd też metoda stalagmometryczna daje poprawne wyniki pomiarów względnych, cieczy nieznacznie różniących się współczynnikiem napięcia powierzchniowego tzn. wtedy, gdy możemy przyjąć, że promień r' jest taki sam. Dla pomiarów względnych z wzoru (16.11) otrzymamy

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{m_1}{m} = \frac{V_1 \varrho_1}{V \varrho}.$$

W praktyce ograniczyć się możemy do zliczenia ilości kropel tej samej objętości V obydwu cieczy $V_c = N_1 V_1 = NV$, stąd $V_1 = \frac{NV}{N_1}$. Podstawiając to wyrażenie do ostatniego wzoru otrzymamy

$$\sigma_1 = \sigma \frac{N \varrho_1}{N_1 \varrho}. \tag{16.12}$$

Wykonując pomiary dla cieczy znacznie różniących się wartością σ, w równaniu (16.11) przyjmujemy na r' promień kapilary r, a błąd eliminujemy wprowadzając poprawkę w postaci współczynnika $2\pi/\Phi$, wtedy

$$\sigma = \frac{mg}{r\Phi}. \tag{16.13}$$

Wartości współczynnika zależą od wyrażenia $r\sqrt{\frac{\varrho g}{2\sigma}}$ i są stabelaryzowane (tab. 16.3). Wyrażenie $r\sqrt{\frac{\varrho g}{2\sigma}}$ zależy również pośrednio od Φ, gdyż podstawiając na g/σ wartość obliczoną z (16.13) otrzymamy

$$r\sqrt{\frac{\varrho g}{2\sigma}} = r\sqrt{\frac{\varrho r\Phi}{2m}}. \tag{16.14}$$

Tabela 16.3

Poprawki do pomiarów stalagmometrycznych

$r\sqrt{\frac{\varrho g}{2\sigma}}$	9	13	16	19	22	25	28	31	35	38	41
Φ	4,45	4,24	4,12	4,03	3,97	3,90	3,84	3,80	3,78	3,80	3,83

Znając masę m pojedynczej kropli obliczamy σ metodą kolejnych przybliżeń. Na Φ przyjmujemy dowolną wartość Φ', np. 4 i obliczamy wartość wyrażenia $r\sqrt{\frac{\varrho r\Phi}{2m}} = r\sqrt{\frac{\varrho g}{2\sigma}}$. Znając $r\sqrt{\frac{\varrho g}{2\sigma}}$ z tabeli 16.3 odczytujemy Φ'', gdy Φ' i Φ'' znacznie się różnią, powtarzamy te same obliczenia wychodząc z wartości Φ'', otrzymamy $\Phi''' = \Phi$. Podstawiając tę wartość do (16.13) obliczamy dokładną wartość σ.

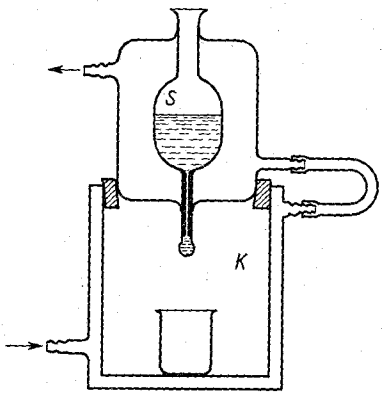
Aparatura

a. W przypadku gdy w doświadczeniu wykonuje się pomiary względne z ilości kropel cieczy o różnych stężeniach cała aparatura składa się ze stalagmometru pokazanego na rysunku 16.7.

b. Gdy σ wyznaczać chcemy z wzoru (16.13) musimy zważyć pojedynczą kroplę cieczy. Pomiar ten jest trudny do wykonania z uwagi na wymaganą dużą dokładność i szybkie parowanie cieczy. Celem uzyskania dużej dokładności stosujemy automatyczną wagę analityczną lub torsyjną. Celem zmniejszenia wpływu parowania ważymy niewielką liczbę kropel lub nawet pojedynczą kroplę, a sam stalagmometr zamykamy pod kloszem, pod którym powinna znajdować się para nasycona badanej cieczy. Sytuacja komplikuje się jeszcze, gdy pomiary wykonujemy w podwyższonych temperaturach. Stąd też stalagmometr może posiadać bardzo skomplikowaną budowę (rys. 16.8). Koniec kapilary w każdym stalagmometrze jest płasko oszlifowany.

Pomiary

a. W doświadczeniu mierzymy za pomocą prostego stalagmometru (rys. 16.7) ilość N kropel wody wypływającej z pełnej objętości V pojemnika stalagmometru. Następnie mierzymy liczbę N_1 kropel roztworu alkoholu metylowego w wodzie. Analizujemy wpływ poszczególnych wielkości na wynik końcowy i planujemy właściwe pomiary. Pomiary wykonujemy dla 5–10 stężeń w zakresie od 0 do 10%.



16.8. Stalagmometr do pomiarów w podwyższonych temperaturach.

b. Gdy dysponujemy stalagmometrem typu pokazanego na rysunku 16.8. pod kloszem K umieszczamy zważone uprzednio wraz z pokrywką (m_1) naczyńko wagowe. Składamy przyrząd, wypełniamy cieczą termostatującą, a następnie stalagmometr S wypełniamy cieczą badaną. Czekamy do chwili, gdy do naczyńka wagowego wpadnie ok. 10-ciu kropel cieczy, rozbieramy przyrząd, naczyńko wagowe nakrywamy przykrywką i ponownie ważymy (m_2). Podobne pomiary wykonujemy dla 2–3 różnych cieczy. Mierzymy średnicę $2r$ kapilary stalagmometru.

Obliczenia

Odczytujemy z tablic fizycznych gęstości badanych roztworów. W przypadku pomiarów a. obliczamy z wzoru (16.12) wartości σ_1 badanych roztworów. Wartość σ dla rozpuszczalnika przyjmujemy również z tablic. Błąd obliczamy dla jednego ze stężeń i wykreślamy zależności napięcia powierzchniowego od stężenia.

W przypadku pomiarów b. obliczamy wartość wyrażenia (16.14) i współczynnika Φ metodą kolejnych przybliżeń opisaną we wprowadzeniu. Następnie z wzoru (16.13) obliczamy wartości σ. Podobne obliczenia wykonujemy dla wszystkich badanych cieczy. Dla jednej cieczy obliczamy błąd $\Delta\sigma$. Błąd $\Delta\Phi$ przyjmujemy jako połowę różnicy sąsiadujących wartości Φ (z tablicy 16.3).

16.4. RUCHY BROWNA

Cel: wyznaczenie promienia drobiny zawiesiny z średniego kwadratu jej przesunięcia.

Przyrządy: mikroskop (§ 30.1), termoogniwo (§ 21.2).

Zagadnienia: kinematyczna teoria gazów (S2, § 55–58, H1, § 23–3; J1, 14.1–4), maxwellowski rozkład prędkości (S2, § 60–62; H1, § 24.1–24.4), zderzenia sprężyste (P1, § 52; S1, § 27; J, § 5.7; H1, § 10–3 i 10–4).

Wprowadzenie

Drobiny cieczy lub gazu są w nieustannym ruchu. Każda z nich ma prędkość zmieniającą wartość i kierunek od zderzenia do zderzenia, lecz średnia wartość energii kinetycznej jest stała, zależy wyłącznie od temperatury. Drogę, którą przebywa drobina między kolejnymi zderzeniami, nazywamy drogą swobodną. Wartość średnia zwana średnią drogą swobodną zależy tylko od temperatury i ciśnienia (jest proporcjonalna do temperatury i odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia). Załóżmy, że w cieczy znajdują się drobiny większe, np. zawiesina ciała stałego. Na skutek ruchu drobin cieczy zawiesina jest ciągle uderzana. Gdy jej wymiary nie są bardzo duże w porównaniu z wymiarami drobin cieczy, to uderzenia zachodzą nierównomiernie ze wszystkich stron i drobina ustawicznie zmienia prędkość i kierunek ruchu poruszając się po skomplikowanym torze. Teorię tych ruchów zwanych od nazwiska odkrywcy — ruchami Browna opracowali niezależnie Smoluchowski i Einstein. Według ich teorii średni kwadrat składowej przesunięcia $\overline{\Delta x^2}$ cząstki kulistej o promieniu r w kierunku osi x w czasie t wyraża się wzorem

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{kTt}{3\pi\eta r}, \tag{16.15}$$

gdzie η oznacza współczynnik lepkości środowiska, t — czas między kolejnymi obserwacjami, k — stała Boltzmanna. Ruchy Browna można obserwować w zawiesinie żółtej farby akwarelowej w wodzie lub w zawiesinach tuszu chińskiego, drobno utartego rutylu, mastyksu itp.

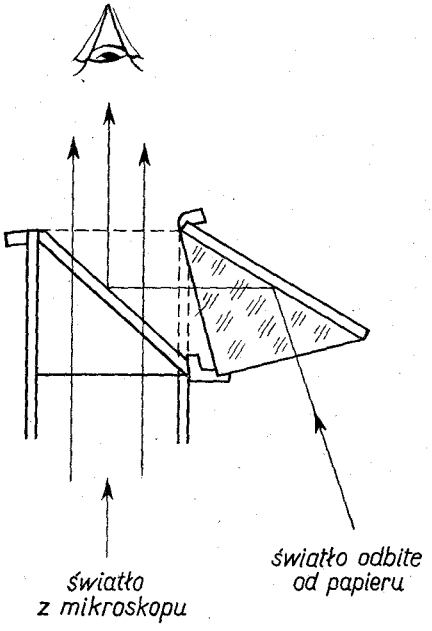
Aparatura

W doświadczeniu stosuje się mikroskop powiększający 100–150-krotnie, zaopatrzony w obiektyw imersyjny tzn. taki, w którym ciecz przylega do obiektywu. Do naniesienia położenia drobiny na papier stosujemy okular rysowniczy lub specjalny przyrząd rysunkowy, którego zasadę działania pokazano na rysunku 16.9. Stosując takie urządzenie możemy równocześnie obserwować zachowanie drobiny i zaznaczać jej położenie na papierze przyczepionym do stołu. Celem uchwycenia stałych odstępów czasu możemy zastosować zegarek z dużym sekundnikiem lub sekundomierz, który również umieszczamy w takim miejscu, by widzieć go poprzez obiektyw rysowniczy. Można również stosować elektryczny znacznik czasu połączony ze słuchawkami, który w określonych odstępach czasu daje sygnały akustyczne. Schemat bardzo prostego urządzenia tego typu działającego na zasadzie drgań relaksacyjnych (§ 25.3) przedstawiono na rysunku 16.10. Temperaturę mierzymy termoogniwem Cu-konstantan, wykonanym z bardzo cienkich przewodów. Musi ono być przyklejone do szkiełka podstawowego.

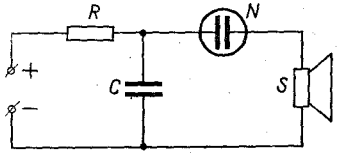
Pomiary

Wytwarzamy zawiesinę substancji i dużą kroplę umieszczamy na szkiełku podstawowym w miejscu, w którym znajduje się spojenie termoogniwa. Włączamy lampkę mikroskopową, dobieramy w taki sposób warunki pracy, by widzieć wyraźnie cząstki zawiesiny. Na stole umieszczamy kartkę papieru, na której będziemy zaznaczać położenia drobiny, rzutowanej przez okular rysowniczy, włączamy lampę stołową i tak dobie-

ramy oświetlenie kartki (przez zmianę położenia lampy), by widzieć równocześnie obiektyw i papier. Umieszczamy sekundomierz w takim miejscu, by widzieć go przez przyrząd rysowniczy, lecz by nie przeszkadzał w zaznaczaniu położenia drobiny lub włączamy znacznik czasu i nakładamy słuchawki. Wybieramy do obserwacji drobinę możliwie małą, lecz wyraźnie widoczną, znajdującą się w środku pola widzenia i na sygnał znacznika zaznaczymy jej położenie na papierze. Następnie na kolejne sygnały



16.9. Przyrząd rysunkowy Norberta.



16.10. Schemat znacznika czasu — generatora drgań relaksacyjnych.

lub w odstępach czasu rzędu 15 lub 30 s, zaznaczamy jeszcze przynajmniej 10 kolejnych położeń cząstki numerując je. Odczytujemy temperaturę oraz czas t. Gdy cząstka wcześniej wyjdzie z pola widzenia lub gdy ją zgubimy, pomiar musimy rozpocząć na nowo. Notujemy powiększenie mikroskopu wraz z okularem rysowniczym (ilu milimetrom na papierze odpowiada jedna jednostka pod mikroskopem). Określenie powiększenia może być również przedmiotem doświadczenia. Umieszczamy wtedy pod mikroskopem podziałkę okularową i zaznaczamy jej jednostki na arkuszu.

Obliczenia

Odcinki łączące kolejne punkty na arkuszu rzutujemy na jedną z osi (x lub y), odczytujemy długości tych rzutów i dzieląc przez powiększenie obliczamy rzeczywiste przesunięcia drobiny. Obliczamy średni kwadrat uzyskanych w ten sposób wyników, a następnie z wzoru (16.15) obliczamy r. Współczynnik lepkości wody przy temperaturze T przyjmujemy z tablic. Obliczamy odchylenie standardowe średniej arytmetycznej $S_{\overline{x^2}}$ oraz błąd promienia drobiny zawiesiny.

PRĄD STAŁY I ELEKTROSTATYKA

17. DOŚWIADCZENIA Z PRĄDEM STAŁYM

17.01. PRAWA RZĄDZĄCE PRZEPŁYWEM PRĄDU STAŁEGO

Przepływem prądu rządzą prawa: Ohma i Kirchhoffa. Zgodnie z *prawem Ohma* napięcie panujące na zaciskach przewodnika jest proporcjonalne do natężenia prądu, czyli

$$U = RI. \tag{17.1}$$

Współczynnik proporcjonalności R nazywamy oporem przewodnika. Opór przewodnika jest proporcjonalny do jego długości l i odwrotnie proporcjonalny do przekroju S, co wyraża się wzorem

$$R = \varrho \frac{l}{S}. \tag{17.2}$$

Współczynnik proporcjonalności ϱ (wymiar Ωm) nazywa się *oporem właściwym.*

I prawo Kirchhoffa dotyczy węzłów obwodu elektrycznego, tzn. punktów, w których zbiega się kilka przewodów. *Suma algebraiczna natężeń prądów wpływających do węzła jest równa zeru*

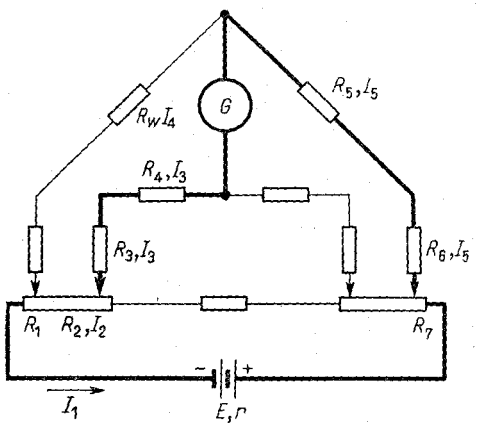
$$\sum_{k=1}^{N} I_k = 0. \tag{17.3}$$

Stosując powyższy wzór należy pamiętać, że prądy wpływające oznaczamy znakiem „+", a wypływające znakiem „−".

II prawo Kirchhoffa dotyczy obwodów zamkniętych lub tzw. oczek (rys. 17.1). W każdej gałęzi oczka (odcinek między dwoma węzłami) mogą znajdować się oporniki lub źródła prądu. Na każdym źródle prądu występuje wzrost napięcia równy jego sile elektromotorycznej E, a na każdym oporniku występuje spadek napięcia, którego wartość jest określona równaniem (17.1). Spadki napięcia występują również na oporach wewnętrznych źródeł prądu. Treść II prawa Kirchhoffa można wyrazić następującym wzorem:

$$\sum_{k=1}^{N} E_k = \sum_{j=1}^{M} R_j \cdot I_j. \tag{17.4}$$

Słownie treść powyższego równania wyrazić można następująco:
w obwodzie zamkniętym suma sił elektromotorycznych jest równa sumie omowych spadków napięć, lub w obwodzie zamkniętym suma algebraiczna wzrostów i spadków napięć jest równa zeru. Dla złożonych obwodów II prawo Kirchhoffa stosuje się dla każdego zamkniętego obwodu. I tak np. na rys. 17.3a sprawdza się niezależnie w obwodach: *ADCA, ADBCA, ADBZA, ACBZA, ACDBZA, CDBC, DBZACD.*



17.1. Schemat „sieci" połączeń elektrycznych z zaznaczonym obwodem zamkniętym (oczkiem).

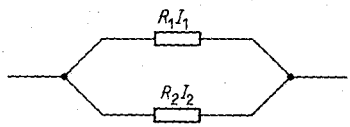
Z ogólnej postaci II prawa Kirchhoffa wynika szereg bardzo ważnych wniosków szczegółowych, z których niektóre podamy bez dowodu. Natężenia prądów płynących przez połączone równolegle oporniki (rys. 17.2) są odwrotnie proporcjonalne do ich oporów

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{17.5}$$

Do obwodu składającego się ze źródła prądu o sile elektromotorycznej E i oporze wewnętrznym r oraz opornika o oporze R stosuje się wzór

$$E = (R+r)I, \tag{17.6}$$

zwany prawem Ohma dla całego obwodu.



17.2. Dwa oporniki połączone równolegle.

W oparciu o I prawo Kirchhoffa i prawo Ohma wyprowadzić można wzór na całkowity opór R oporników połączonych równolegle

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}. \tag{17.7}$$

17.1. MOSTEK WHEATSTONE'A

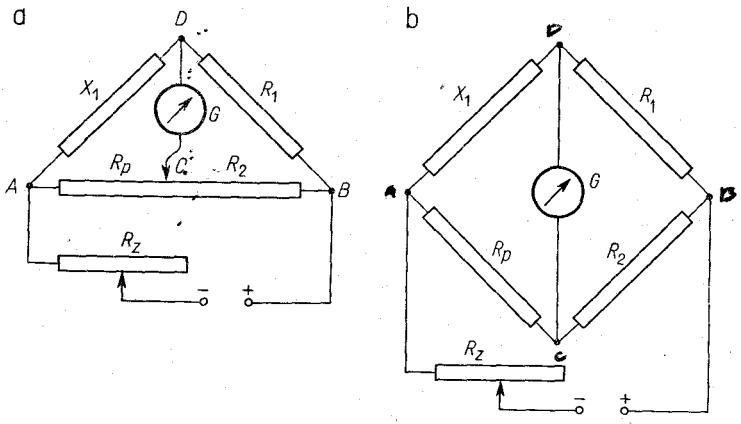
Cel: pomiar nieznanego oporu kilku oporników za pomocą mostka Wheatstone'a.

Przyrządy: mostek MW4 (§ 4.8), galwanometr (§ 18.01–03).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu (S3, § 36–39; P2, § 1.17, 1.33, 1.34, 1.39; J, § 18.3–8), prąd stały (P2, § 1.1–3; J § 18.1 i 18.2).

Wprowadzenie

Mostkiem Wheatstone'a nazywamy pokazany na rysunku 17.3 układ elementów elektrycznych służących do pomiaru oporu elektrycznego. Obwód mostka składa się z dwóch równolegle połączonych gałęzi ACB i ADB. Punkty A i B połączone są z źródłem prądu stałego (przez opornik R_z), a punkty C i D z galwanometrem lub czułym mikroamperomierzem. Oporniki R_p i R_2 mogą być dwiema częściami potencjometru dekadowego (rys. 4.6), wtedy punkt C odpowiada suwakowi potencjometru. Suma oporów R_p i R_2 jest wielkością stałą. Pomiar polega na takim dobraniu położenia punktu C,



17.3. Dwa sposoby przedstawienia schematu mostka Wheatstone'a.

by przez galwanometr nie płynął prąd, wtedy mówimy — mostek jest zrównoważony. Przy zrównoważonym mostku, pomiędzy punktami C i D nie ma różnicy potencjałów ($U_{CD} = 0$), a przez oporniki X_1 i R_1 płynie prąd o takim samym natężeniu I_1. Również przez oporniki R_p i R_2 płynie prąd o takim samym natężeniu I_2. Wtedy zgodnie z II prawem Kirchhoffa (17.5) napisać możemy następujące związki:

$$X_1 I_1 = R_p I_2, \qquad R_1 I_1 = R_2 I_2.$$

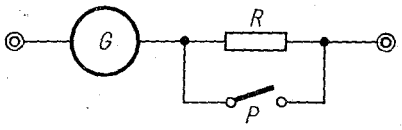
Dzieląc pierwsze równanie przez drugie otrzymamy

$$X_1 = R_p \frac{R_1}{R_2}. \tag{17.8}$$

Aparatura

W doświadczeniu stosować można bardzo różnorodną aparaturę i opis ograniczymy do zasadniczych typów stosowanych układów, pozostawiając szczegóły instrukcjom poszczególnych pracowni. Jednym z typów jest mostek MW4, którego opis podano

w § 4.3. Gdy stosowane w mostku oporniki posiadają znaczny opór, a stosowane napięcia nie przekraczają 4,5 V nie musimy stosować opornika zabezpieczającego R_z. Galwanometr G musi posiadać urządzenie zabezpieczające, składające się z włączonego w szereg opornika radiowego o dużym oporze zbocznikowanego przyciskiem dzwonkowym P (rys. 17.4). Po naciśnięciu przycisku uzyskujemy pełną czułość miernika.



17.4. Zabezpieczenie galwanometru.

a. Oporniki R_p i R_2 mogą być jednorodnym drutem oporowym rozciągniętym na tle skali o długości $l = 1$ m. Przekrój drutu wynosi S. Zgodnie z równaniem (17.2) zachodzą następujące związki:

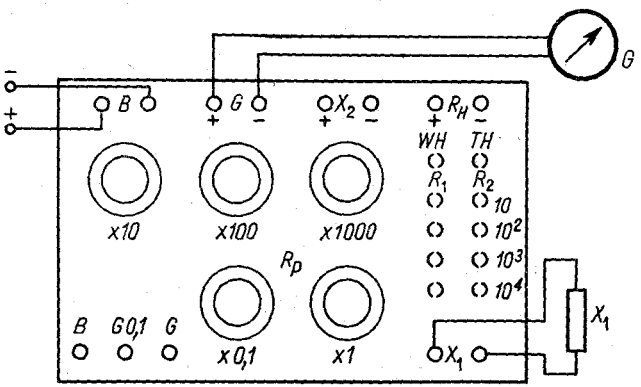
$$R_p = \varrho \frac{a}{S}, \qquad R_2 = \varrho \frac{b}{S},$$

gdzie a i b oznaczają długości drutu odpowiadające oporom R_p i R_2. Zachodzi $a+b = l$. Podstawiając te wyrażenia do równania (17.8) otrzymamy

$$X_1 = R_1 \frac{a}{b} \text{ lub } X_1 = R_1 \frac{a}{l-a}. \tag{17.9}$$

Opornik R_1 może być opornikiem wzorcowym, dekadowym lub zatyczkowym.

b. Opornik R_p i R_2 możemy również zastąpić dekadowym dzielnikiem napięcia. Wtedy zazwyczaj opornik R_1 jest opornikiem dekadowym lub wzorcowym. W tym przypadku opornik R_z nie jest konieczny.



17.5. Rozmieszczenie elementów w mostku MWT 77a.

c. Można zastosować precyzyjne mostki fabryczne, w których większość elementów (R_p, R_1 i R_2) jest wbudowana w jednej skrzynce posiadającej zaciski do połączenia opornika X_1, baterii B oraz galwanometru G (zaciski te są zazwyczaj takimi symbolami oznaczone). Skrzynka może mieć jeszcze inne zaciski, bowiem często ma zastosowanie uniwersalne i może pracować w różnych połączeniach mostkowych, ponadto ma włączni-

ki: B źródła prądu — baterii, G — galwanometru oraz 0,1 G. Ten ostatni służy do włączania galwanometru przez opór zabezpieczający. Do mostków fabrycznych należy produkowany w Polsce mostek MWT 77a pokazany na rysunku 17.5. Zawiera on podwójny 5-dekadowy opornik R_p oraz oporniki zatyczkowe R_1 i R_2. Elementy te są połączone w taki sposób, że mostek można wykorzystywać zarówno jako mostek Wheatstone'a, jak i podwójny Thomsona. Zatyczkę rodzaju pracy włączamy w otwór oznaczony symbolem *WH* dla mostka Wheatstone'a lub *TH* dla mostka Thomsona.

Pomiary

Sposób wykonania pomiarów zależy od typu stosowanych przyrządów. Układ łączymy według schematu pokazanego na rysunku 17.3 lub w przypadku mostka MWT 77a według rys. 17.5. Dla ułatwienia pomiaru wskazana jest znajomość przybliżonej wartości oporu opornika mierzonego. W tym celu mierzymy opór za pomocą omomierza (§ 4.3).

W przypadku stosowania aparatury wymienionej w punktach a. lub b. przy pomiarach postępujemy następująco. Wartość oporu R_1 dobieramy w ten sposób, by była ona tego samego rzędu co opór X_1. Ruchomy styk C lub pokrętło opornika dekadowego ustawiamy w pobliżu połowy drutu lub połowy maksymalnego oporu. Włączamy prąd i dobieramy tak położenie ruchomego styku, by wychylenie galwanometru zredukować do zera. W przypadku dekadowego dzielnika napięć dobieranie położenia punktu C rozpoczynamy od największej dekady, a następnie przechodzimy do niższych. Po uzyskaniu zerowego wychylenia przyciskamy przycisk P na mierniku i powtarzamy czynności związane z doborem położenia ruchomego styku. Przy zwiększonej czułości nie wolno zmieniać położenia największej dekady potencjometru.

W przypadku stosowania mostka MWT 77a dobieramy stosunek oporów R_1/R_2 w ten sposób, by był on równy ułamkowi 0,001–0,01 oporu X_2 wyrażonego w omach. Korzystamy przy tym z wyniku pomiaru wykonanego omomierzem. Następnie włączamy przycisk 0,1 G oraz B. Jeżeli galwanometr wychyli się, dobieramy tak wartości oporów dekadowych R_p, by wychylenie skompensować. Dobór oporów rozpoczynamy od dekad największych, przechodząc kolejno do mniejszych. Po osiągnięciu wychylenia zerowego naciskamy przyciski B i G i powtarzamy czynności związane z osiągnięciem wychylenia zerowego, nie zmieniając największej dekady.

Po uzyskaniu zerowego wychylenia galwanometru odczytujemy wskazanie tzn. położenie suwaka, wskazanie potencjometru lub wartość oporu R_p. Wyłączamy źródło prądu oraz kontrolujemy wskazanie zerowe galwanometru. Włączamy układ ponownie, powtórnie kompensujemy układ otrzymując nowy odczyt R_p. Liczbę pomiarów uzależniamy od metody obliczania błędów. W opisany powyże sposób wykonujemy wszystkie wskazane w instrukcji pomiary. Wybieramy dwa spośród mierzonych oporników oznaczając je symbolami R_k i R_l i mierzymy ich wypadkowy opór R_s w połączeniu szeregowym oraz R_r przy równoległym ich połączeniu. Dodatkowo dla jednego z oporników nieznanych wykonujemy pomiar przy nieprawidłowo dobranym stosunku oporów R_p/R_2. W tym celu w przypadku stosowania przyrządów a. i b. dla R_1 przyjmujemy opór o dwa rzędy wielkości różny od oporu przybliżonego X_1, natomiast w przypadku metody c. dobieramy stosunek R_1/R_2 rzędu 1–100 oporu R_2 i określamy błąd ΔR_p.

Obliczenia

Wartości oporów X_1 obliczamy z wzorów (17.8) lub (17.9). Błędy X_1 obliczamy dla każdego z wykonanych pomiarów oraz dla nieprawidłowo dobranego stosunku oporów R_1/R_2. Porównujemy wyniki uzyskane w dwóch ostatnich przypadkach i dyskutujemy wpływ różnych czynników na dokładność wykonanych pomiarów. Korzystając z wartości oporów R_k i R_l obliczamy ich opór w połączeniu szeregowym R'_s i równoległym R'_r i sprawdzamy zgodność tych wyników z wynikami bezpośrednich pomiarów.

17.2. MOSTEK PODWÓJNY THOMSONA

Cel: pomiar nieznanego oporu za opomocą mostka podwójnego.

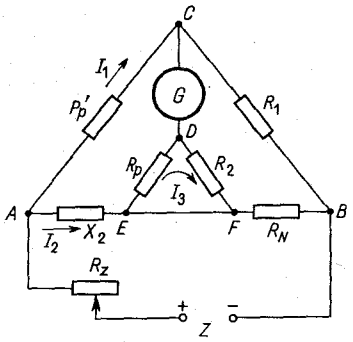
Przyrządy: źródło prądu (§ 4.1), oporniki (§ 4.3), mierniki prądu (§ 18.01–18.03), mostek Wheatstone'a (§ 4.4, 17.1).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu i prąd stały, omawiane w § 17.1.

Wprowadzenie

Mostek podwójny (Thomsona) przedstawiony na rysunku 17.6 stosujemy w przypadku, gdy mierzymy oporniki o oporze małym, porównywalnym z oporem doprowadzeń. W zrównoważonym mostku, podobnie jak w mostku Wheatstone'a, przez galwanometr G nie płynie prąd i zgodnie z II prawem Kirchhoffa (17.4) dla obwodów $ACDEA$ oraz $BCDFB$ muszą zachodzić związki

$$I_1 R'_p = I_2 X_2 + I_3 R_p,$$
$$I_1 R_1 = I_2 R_N + I_3 R_2,$$



17.6. Schemat mostka podwójnego Thomsona.

skąd po przekształceniach otrzymamy

$$\frac{X_2}{R_N} = \frac{R_p\left(I_1 - \frac{R_p}{R_p} I_3\right)}{R_1\left(I_1 - \frac{R_2}{R_1} I_3\right)}.$$

Równanie to uprości się znacznie jeżeli założymy, że zachodzi proporcja

$$\frac{R_p}{R_p} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{17.10}$$

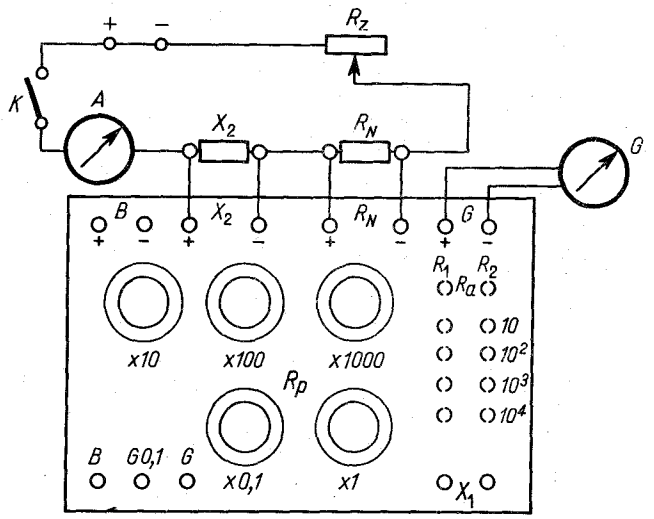
Uwzględniając powyższą proporcję otrzymamy

$$X_2 = \frac{R'_p}{R_1} R_N, \tag{17.11}$$

gdzie R_N jest opornikiem wzorcowym, opory R_1, R_2, R'_p i R_p powinny być bardzo duże w porównaniu z oporem doprowadzeń. Prądy I_1 oraz I_3 płynące przez oporniki R_1, ..., R_p są małe, stąd spadki napięcia na przewodach łączących te oporniki możemy zaniedbać. Poważny wpływ mogą mieć opory przewodów łączących opornik X_2 z punktami A i E oraz opornik R_N z punktami B i F. Zaciski odpowiadające punktom A, E, F, B są w fabrycznych mostkach wyprowadzone na zewnątrz i oporniki należy z nimi łączyć krótkimi i grubymi przewodnikami. W obwodzie $AEFBZ$ płynie zazwyczaj silny prąd, dzięki czemu na opornikach X_2 i R_N występują duże spadki napięcia mimo małej wartości ich oporu (mniejszej od 1 Ω). Prąd I_2 nie może być zbyt duży, aby oporniki nie nagrzewały się. Za pomocą produkowanych obecnie mostków podwójnych mierzyć można opory od 10^{-5} do 10 Ω.

Aparatura i pomiary

W doświadczeniu stosuje się mostek podwójny w wykonaniu fabrycznym MWT 77a, w którym dekady R'_p są podwójne, tzn. jednym pokrętłem zmienia się równocześnie opór dwóch równolegle połączonych oporników. Spełniają one rolę oporników R'_p i R_p (rys. 17.7). Oporniki R_1 i R_2 są opornikami zatyczkowymi. Zgodnie z równaniem (17.10) musimy również zawsze nastawiać zatyczki na ten sam opór ($R_1 = R_2$). Włącznik galwanometru jest oznaczony G 0,1 i G. Opór R'_p jest równy sumie wskazań wszystkich dekad. Opornikami R_N są tzw. oporniki wzorcowe, czyli normalne o wartościach 0,1; 0,01 lub 0,001 Ω. Przyrządy łączymy według schematu 17.7. Oporniki R_N dobieramy zgodnie z instrukcją doświadczenia. Oporniki X_2 oraz R_N łączymy z mostkiem za pomocą krótkich i grubych przewodów (nie pomylić biegunów!). Natężenie prądu płynącego



17.7. Połączenie mostka MWT 77a jako mostka podwójnego.

przez oporniki X_2 i R_N musimy dobrać w ten sposób, by wystąpił na nich spadek napięcia rzędu $U = 0{,}1$ V, przy czym natężenie I nie może przekroczyć wartości maksymalnej dopuszczalnej dla R_N. Po włączeniu prądu sprawdzamy zerowe wskazanie galwanometru. Obydwie zatyczki oporników R_1 i R_2 nastawiamy na tę samą wartość. Włączamy galwanometr przyciskiem G 0,1. Gdy galwanometr wychyli się w lewo, zmniejszamy wartości oporników dekadowych R'_p, natomiast przy wychyleniu w prawo zwiększamy wartości tych oporów. Dobieranie oporów rozpoczynamy zawsze od dekady $\times 1000$, a następnie $\times 100$, $\times 10$, ... Po osiągnięciu zerowego wychylenia włączamy galwanometr na pełną czułość przyciskiem G i ponownie kompensujemy nie zmieniając pokrętła $\times 1000$. W czasie wykonywania pomiarów musimy wyeliminować ewentualny wpływ sił termoelektrycznych. W tym celu przed włączeniem prądu włączamy przycisk G. Jeżeli galwanometr wychyla się, w obwodzie występują siły termoelektryczne. Notujemy początkowe wychylenie galwanometru i w czasie pomiarów kompensując mostek sprowadzamy galwanometr do tego właśnie początkowego położenia. Celem określenia błędu, po wykonaniu pomiaru prąd wyłączamy i nieznacznie zmieniamy opór R'_p. Następnie włączamy ponownie prąd o nieco zmienionym natężeniu, kompensujemy układ otrzymując nową wartość R'_p. Analizujemy uzyskane wyniki i liczbę pomiarów uzależniamy od obranej metody obliczania błędów. W podobny sposób wykonujemy pomiary kilku oporników, między innymi oporników oznaczonych: X_k i X_l oraz tych samych oporników połączonych równolegle X_r i szeregowo X_s. Przy pomiarze oporów rzędu 10^{-5}–10^{-6} Ω stosujemy odwrotne połączenie: opornik R_N łączymy z zaciskami X_2, a opornik X_2 z zaciskami R_N. Wszystkie pomiary wykonujemy w taki sam sposób, a opór R_x obliczamy z wzoru

$$R_x = R_N R_1 / R_p.$$

Obliczenia

Z wzoru (17.11) obliczamy wartości mierzonych oporów, a następnie ich błędy. Obliczamy opór oporników X_k i X_l połączonych szeregowo X'_s oraz równolegle X'_r i porównujemy zgodność tych wyników z wynikami bezpośrednich pomiarów X_s i X_r.

17.3. METODA KOMPENSACYJNA POMIARU SIŁY ELEKTROMOTORYCZNEJ

Cel: wyznaczenie siły elektromotorycznej kilku źródeł prądu.

Przyrządy: potencjometr dekadowy (§ 4.2), źródła prądu (§ 4.1), galwanometr (§ 18.01–03).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu i prąd stały omówione w literaturze podanej poprzednio do § 17.1.

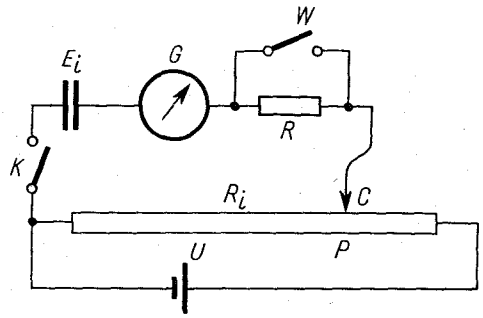
Wprowadzenie

Wzór (17.6) zapisać możemy w postaci

$$E = RI + rI \text{ lub } E = U_R + U_r,$$

z którego wynika, że siła elektromotoryczna E rozkłada się na dwa spadki napięcia: $U_R = RI$ na oporze zewnętrznym oraz $U_r = rI$ na oporze wewnętrznym źródła. Chcąc w wyniku pomiaru uzyskać wartość E, musimy wykonać go w taki sposób, by

nie wystąpił spadek napięcia na oporze wewnętrznym ($U_r = 0$). Może to nastąpić tylko w przypadku gdy $I = 0$, wtedy z źródła nie czerpiemy prądu. Ponieważ woltomierze zawsze czerpią prąd, stąd wynik pomiaru wykonanego za pomocą woltomierza jest zawsze błędny. Siłę elektromotoryczną zmierzyć możemy bezpośrednio jedynie za pomocą woltomierza elektrostatycznego lub metodą kompensacyjną, w której kompensuje się siłę elektromotoryczną badanego źródła nie czerpiąc zeń prądu.



17.8. Schemat układu do pomiaru siły elektromotorycznej metodą kompensacji.

Schemat układu kompensacyjnego pokazano na rysunku 17.8. Potencjometr P jest zasilany źródłem pomocniczym o napięciu U. Na potencjometrze wytwarza się spadek potencjału. Możemy tak dobrać położnie punktu C, by przez galwanometr G nie płynął prąd. Zachodzi wtedy związek

$$E_i = R_i I.$$

Oczywiście E_i może być siłą elektromotoryczną dowolnego źródła spełniającego warunek $E_i \leqslant U$. Wykonując pomiar R_N dla znanego źródła

$$E_N = R_N I$$

i dzieląc stronami dwa ostatnie równania otrzymamy wzór

$$E_i = E_N \frac{R_i}{R_N}, \tag{17.12}$$

który może posłużyć do wyznaczania siły elektromotorycznej nieznanego ogniwa.

Aparatura i pomiary

W doświadczeniu stosujemy potencjometr dekadowy. W najprostszym przypadku rolę potencjometru może spełniać zwykły drut oporowy rozpięty na tle podziałki milimetrowej. Zgodnie z wzorem (17.2), dla takiego przypadku mamy $R_i = \varrho l_i/S$ oraz $R_N = \varrho l_N/S$. Podstawiając te związki do (17.12) otrzymamy

$$E_i = E_N \frac{l_i}{l_N}. \tag{17.13}$$

Układ łączymy według schematu 17.8 starając się tak rozmieścić elementy układu, by wyłączniki K i W znalazły się w zasięgu palców jednej ręki. Rolę wyłączników W i K spełniają przyciski dzwonkowe. Opornik R i przycisk W mogą być zamocowane na

wspólnej podstawce. Mogą one również znajdować się w podstawie miernika. Wykonując pomiar włączamy obwód źródła badanego E_i przyciskając K i natychmiast staramy się skompensować wychylenie galwanometru za pomocą dekady regulującej największe opory, a następnie przechodzimy kolejno do oporów niższych. Po wstępnym skompensowaniu przyciskamy również W i przy największej czułości galwanometru wykonujemy dokładną kompensację posługując się już tylko najczulszymi dekadami potencjometru. Odczytujemy wartość oporu R_i (lub położenie suwaka l_i). Wyłączamy prąd i zmieniamy nieco opór R, po czym pomiar powtarzamy. Analizujemy wyniki i planujemy liczbę pomiarów zależnie od planowanego sposobu obliczania błędów. Takie same pomiary wykonujemy dla wszystkich badanych źródeł prądu oraz dla ogniwa normalnego ($E_i = E_N$). Spośród mierzonych źródeł prądu wybieramy dwa (E_k i E_l) o zbliżonej sile elektromotorycznej i wykonujemy pomiary przy szeregowym (E_s) i równoległym (E_r) połączeniu tych źródeł.

Obliczenia

Korzystając z wzoru (17.12) lub (17.13) obliczamy siły elektromotoryczne badanych ogniw i błędy tych wielkości. Obliczamy siłę elektromotoryczną E'_s ogniw k i l połączonych szeregowo. Sprawdzamy zgodność wyniku pomiaru bezpośredniego E_s i obliczenia E'_s. Dyskutujemy wynik uzyskany dla połączenia równoległego.

17.4. CIEPŁO JOULE'A-LENZA

Cel: wyznaczenie napięcia przez pomiar ciepła Joule'a–Lenza.

Przyrządy: kalorymetr (§ 12.01–02), amperomierz (§ 18.01–03), opornik suwakowy (§ 4.2), źródło prądu (§ 4.1).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu (S3, § 36–39; P2, § 1.17, 1.33 i 1.34, 1.39; J, § 18.3–8), prąd stały (P2, § 1.1–3; J, § 18.1 i 18.2) oraz kalorymetria (§ 12.01–02).

Wprowadzenie i aparatura

Prąd o natężeniu I przepływając przez przewodnik, zgodnie z prawem Joule'a–Lenza, wydziela energię cieplną

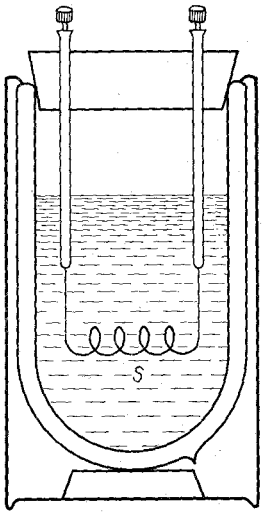
$$Q = UIt, \tag{17.14}$$

gdzie U — napięcie, t — czas. Jest to definicyjny wzór napięcia, na którym opieramy metodę pomiaru. W tym celu przez przewodnik w czasie t przepuszczamy prąd I oraz wyznaczamy ilość wydzielonego ciepła Q. Ciepło mierzymy metodą kalorymetryczną. Wydziela się ono w spirali S (rys. 17.9) zanurzonej w cieczy kalorymetrycznej (w wodzie).

Pomiary

Łączymy obwód według schematu 4.15, a następnie ważymy kalorymetr pusty i kalorymetr z wodą (nie używamy zbyt dużej ilości wody, gdyż wtedy występuje mały wzrost temperatury). Temperaturę początkową mierzymy wielokrotnie w odstępach

1/2-minutowych do chwili, gdy w trzech kolejnych pomiarach uzyskamy taką samą jej wartość. Włączamy prąd o natężeniu około 1 A i przepuszczamy go w czasie 1/2 godziny. W tym czasie systematycznie kontrolujemy natężenie prądu i ewentualne wahania kompensujemy opornikiem. Po wyłączeniu prądu mierzymy temperaturę w odstępach 1/2-minutowych (mieszając ciągle wodę), do chwili, gdy zauważymy mierzalny jej spadek. Wykonujemy drugą serię pomiarów przy innym natężeniu prądu. Przed tym pomiarem wypełniamy kalorymetr świeżą, chłodniejszą wodą. Notujemy dokładności przyrządów.



17.9. Kalorymetr do pomiaru ciepła Joule'a.

Obliczenia

Obliczenia rozpoczynamy od określenia wzrostu temperatury metodą interpolacji. Ilość ciepła obliczamy z wzoru wynikającego z bilansu cieplnego: $Q = (cm+C)\delta\tau$, gdzie c — ciepło właściwe wody, m — jej masa, C — równoważnik cieplny kalorymetru. Z wzoru (17.14) obliczamy napięcie panujące na zaciskach spirali w czasie przepływu prądu. Błąd ΔU obliczamy dla jednego z pomiarów. Przyjmujemy, że drugi pomiar obarczony jest takim samym błędem procentowym. Piszemy oddzielne zestawienie wyników dla każdego pomiaru.

17.5. KOMPENSATOR PRĄDU STAŁEGO

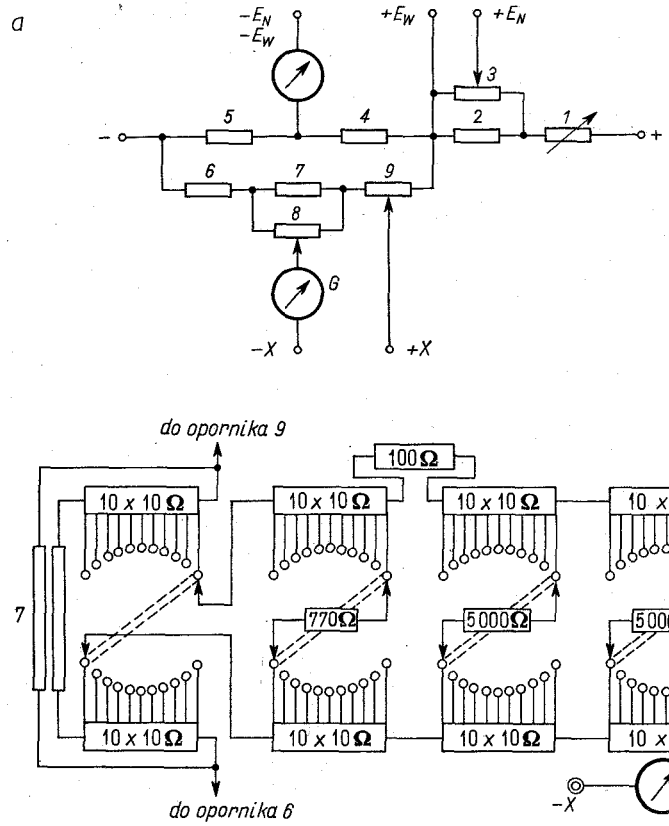
Cel: pomiar zależności napięcia od obciążenia źródła prądu.

Przyrządy: źródło prądu (§ 4.1), galwanometr (§ 18.01), dzielnik napięcia (§ 4.2).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu (S3, § 36–39; P2, § 1.17, 1.33 i 1.34, 1.39; J, 18.3–8), prąd stały (P2, § 1.1–3; J, § 18.1 i 18.2) oraz kompensacyjna metoda pomiaru siły elektromotorycznej (§ 17.3; S3, § 38; P2, § 1.28).

Aparatura

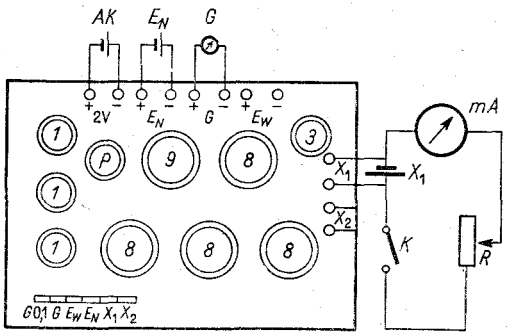
Do bardzo dokładnych pomiarów siły elektromotorycznej i napięć metodą kompensacyjną (§ 17.3) stosuje się kompensatory. Opisana uprzednio metoda kompensacyjna ma następujące wady: potencjometr P jest mało precyzyjny, ogniwo normalne jest narażone na uszkodzenia, ponieważ przy dobieraniu warunków kompensacji czerpiemy zeń prąd, nie uwzględnia się zmian siły elektromotorycznej, stosowane połączenia nie są stabilne. Wszystkie powyższe wady są wyeliminowane w precyzyjnym kompensatorze fabrycznym, którego schemat pokazano na rys. 17.10. Większość elementów jest



17.10. Schemat kompensatora prądu stałego KM 76A (rys. a) i schemat potencjometru *8* (rys. b).

wbudowana w jedną skrzynkę, a połączenia są stałe. Ogniwo normalne jest wzorcem nie stosowanym przy bezpośredniej kompensacji. W skrzynkę wbudowany jest pomocniczy kompensator (1) służący do nastawiania określonego dla danego kompensatora natężenia prądu zasilającego. Kompensator pomocniczy składa się z kilku dekad oporowych i opornika regulowanego w sposób ciągły. Z jego pomocą ustawia się takie natężenie prądu, by na opornikach (*2*, *3*, *4*, *5*) powstał spadek napięcia równy dokładnie sile elektromotorycznej E_N ogniwa normalnego przykładanego do zacisków $-E_N$, $+E_N$, gdzie E_N wynosi w przybliżeniu 1 V. W obwodzie kompensatora pomocniczego znajduje się opornik *3* pozwalający kompensować temperaturowe zmiany siły elektromo-

torycznej ogniwa normalnego (w granicach od 1,01800 do 1,01900 V). Mierzone źródło przyłącza się do zacisków $-x, +x$ i warunki kompensacji dobiera się za pomocą opornika *9*, będącego zazwyczaj dekadą, i opornika *8* tworzącego kilka dekad łączonych w sposób pokazany na rysunku 17.10b. Budowa dekad opornika *8* jest skomplikowana, ponieważ musi ona gwarantować: 1. stałość oporu włączonego między bieguny + i − baterii, 2. bardzo dużą precyzję kompensacji (rzędu ułamków ‰) i 3. wskazania dekad wyrażające wprost wartość mierzonej siły elektromotorycznej w V. W kompensatorach nie stosuje się paru galwanometrów jak to pokazano na rys. 17.10a, lecz układ przełączników, które pozwalają włączyć galwanometr w pożądany obwód, zmieniać jego czułość, przełączać na różne rodzaje pracy itp. Układ pokazany na rys. 17.10 służy do pomiaru sił elektromotorycznych mniejszych od siły elektromotorycznej ogniwa normalnego. Mierząc większe napięcia stosujemy dzielnik napięć, który w tym przypadku musi również precyzją dorównywać kompensatorowi. Kompensator może także służyć do pomiaru natężenia prądu. Natężenie prądu sprowadza się w tym przypadku do pomiaru spadku napięcia na t.zw. oporniku wzorcowym o ściśle określonym oporze połączonym w szereg w obwodzie, w którym mierzymy prąd. Natężenie obliczamy z prawa Ohma.



17.11. Rozmieszczenie elementów na płycie czołowej kompensatora KM 76A.

W Polsce produkowane są dwa typy kompensatorów: kompensator precyzyjny niskooporowy KM 76A oraz kompensator techniczny KT 35. Ten ostatni ma ogniwo normalne, ogniwo zasilające i galwanometr wbudowany w jedną skrzynkę. Jest on wygodniejszy w obsłudze, lecz mniej precyzyjny. Na rysunku 17.11 pokazano rozmieszczenie elementów na płycie czołowej kompensatora KM 76A. Pomiar za pomocą kompensatora wykonuje się następująco: Na potencjometrze *3* służącym do wniesienia poprawek związanych z temperaturą nastawiamy temperaturę otoczenia. Przystępujemy do regulacji natężenia prądu pomocniczego, włączając w tym celu układ kompensatora pomocniczego (przycisk E_N) i układ galwanometru o zmniejszonej czułości (G 0,1). Za pomocą kolejnych dekad *1* poczynając od największej, sprowadzamy wychylenie galwanometru do zera. Przy zwiększonej czułości (przycisk *G*) najczulszą dekadą korygujemy równowagę sprowadzając wskazówkę galwanometru dokładnie na zero. Po wykonaniu tych czynności kompensator jest przygotowany do pomiaru. Włączamy zakres pomiarowy (*X*) i wykonujemy czynności związane z kompensacją układu za pomocą dekad 8, 9 postępując w taki sam sposób jak przy kompensacji prądu pomocniczego. Po uzyskaniu kompensacji badanego źródła ponownie włączamy układ prądu

pomocniczego i kontrolujemy czy układ ten jest nadal skompensowany. Jeżeli przypadek ten zachodzi, wykonany pomiar jest poprawny. Gdy stwierdzimy wychylenie galwanometru po włączeniu obwodu kompensatora pomocniczego powtarzamy wszystkie czynności związane z pomiarem. W przypadku, gdy pomiar kilkakrotnie daje złe wyniki oznacza to, że akumulator zasilający jest rozładowany.

Pomiary

Łączymy układ według schematu 17.11. Siła elektromotoryczna badanego źródła przewyższa zakres pomiarowy kompensatora i nie mierzymy jej wprost, lecz przez dzielnik napięcia. Może to być dzielnik o stałej przekładni lub dekadowy. Mierzone napięcie U jest równe wskazaniu kompensatora U' pomnożonemu przez mnożnik podany na dzielniku. W doświadczeniu badamy dwa źródła: ogniwo i akumulator. Mierzymy siłę elektromotoryczną E źródła przy otwartym wyłączniku K. Włączamy układ i zmieniamy nieco wskazania kompensatora, po czym wykonujemy na nowo wszystkie kompensacje. W zależności od uzyskanych wyników, planujemy liczbę każdorazowo wykonywanych pomiarów. Nastawiamy wartość oporu na oporniku R na maksimum, włączamy prąd i mierzymy kompensatorem napięcie U panujące na zaciskach źródła. Pomiary takie wykonujemy przy różnych natężeniach czerpanego prądu zawartych w zakresie wskazanym w instrukcji. Podobne pomiary wykonujemy dla drugiego źródła. W braku kompensatora omawiane pomiary wykonać można również za pomocą prostego układu kompensacyjnego omawianego w § 17.3.

Obliczenia

Wykreślamy zależność mierzonego napięcia U od natężenia I czerpanego prądu dla obydwu ogniw. Metodą wyrównawczą (§ 2.6) obliczamy nachylenia r uzyskanych prostych oraz ich punkty przecięcia z osią rzędnych. Podstawiając w równaniu (17.6) $U = RI$ otrzymamy

$$U = -rI + E.$$

Ze wzoru powyższego wynika, że nachylenie uzyskanych prostych jest równe oporowi wewnętrznemu, a punkt przecięcia z osią U odpowiada sile elektromotorycznej. Obliczamy odchylenia standardowe S_r oraz $S_{\bar{E}}$. Sprawdzamy zgodność wyniku E z wynikiem bezpośredniego pomiaru. Obliczamy dla wszystkich punktów pomiarowych moc czerpaną ze źródła $P = UI$ oraz moc P' wydzielaną na oporze wewnętrznym źródła, $P' = (E-U)I$. Wykreślamy na wspólnym arkuszu zależności P i P' od I i omawiamy wyniki oraz wnioski dotyczące sposobu prawidłowego wykorzystania badanych źródeł.

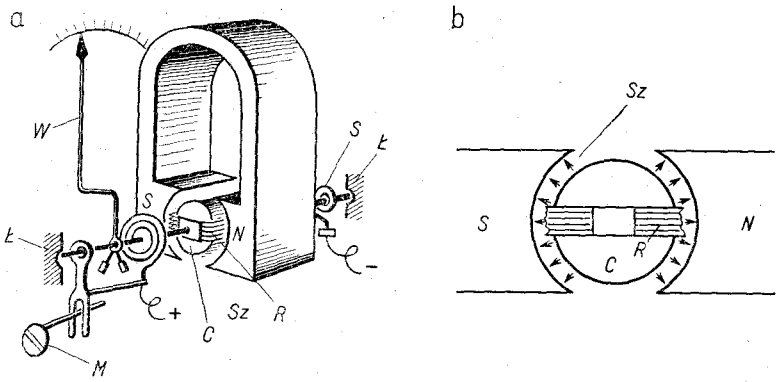
18. MIERNIKI ELEKTRYCZNE

18.01. BUDOWA MIERNIKÓW

Mierniki magnetoelektryczne. Podstawową częścią miernika (rys. 18.1) jest ramka R złożona z N zwojów cienkiego drutu miedzianego oraz magnes stały NS. Ramka jest osadzona na osi w łożyskach $ŁŁ$ (na rys. 18.1 drugie łożysko jest przesłonięte ma-

gnesem) i może obracać się w szczelinie *Sz*. Dla zwiększenia indukcji magnetycznej, wnętrze ramki wypełniono nieruchomym rdzeniem *C*. Rdzeń ponadto skupia linie sił pola, dzięki czemu w szczelinie otrzymujemy niemal radialny rozkład indukcji (rys. 18.1b). Prąd mierzony płynie do ramki poprzez sprężynki *S*, w których na skutek skręcenia ramki o kąt φ wytwarza się moment siły (por. § 10.01),

$$M_1 = -k\varphi. \tag{18.1}$$



18.1. Budowa miernika magnetoelektrycznego.

Ramka, przez którą płynie prąd *I* jest dipolem o momencie elektromagnetycznym (por. wz. 1.27),

$$m = INS$$

i w polu o indukcji magnetycznej *B* działa na nią moment skręcający (S3, § 30),

$$M = mB = INSB. \tag{18.2}$$

Momenty (18.1) i (18.2) działają przeciwnie i w ostatecznym wyniku ustali się takie wychylenie φ ramki, przy którym $M_1 = M$, czyli $-k\varphi = INSB$, skąd ostatecznie możemy napisać proporcję

$$I \sim \varphi \text{ lub } I = A\varphi. \tag{18.3}$$

Do odczytu kąta φ służy wskazówka *W*. Zgodnie z proporcjonalnością (18.3) miernik posiada liniową podziałkę. Mechanizm mimośrodowy *M* pozwala korygować wskazanie zerowe (przy $I = 0$), jest on taki sam we wszystkich typach mierników.

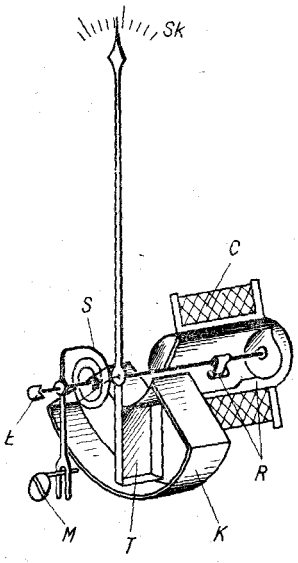
Mierniki elektromagnetyczne. Prąd mierzony przepływa tu przez cewkę *C* (rys. 18.2) wytwarzając w niej pole magnetyczne *H* proporcjonalne do natężenia prądu $H \sim I$. W polu tym magnesują się rdzenie *RR* zyskując magnetyczne momenty dipolowe *j* proporcjonalne do *H*. Obydwa dipole ustawione są zgodnie i odpychają się z siłą proporcjonalną do iloczynu j_1 i j_2, czyli ostatecznie mamy $F = kI^2$. Jeden z rdzeni jest zamocowany na stałe, a drugi jest osadzony na ramieniu o długości *r* złączonym sztywno z osią obrotu. Zatem siła *F* działa na oś obrotu momentem $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ proporcjonalnym do I^2 tzn.

$$M = k'I^2. \tag{18.4}$$

Moment (18.4) jest kompensowany momentem (18.1) i ustala się wychylenie φ proporcjonalne do I^2, tzn.

$$I^2 \sim \varphi \text{ lub } I = B\sqrt{\varphi}. \tag{18.5}$$

Tak więc podziałka miernika jest kwadratowa. Zaletą mierników elektromagnetycznych jest ich uniwersalność. Mierzą one zarówno prąd stały jak i przemienny, ponieważ wychylenie jest proporcjonalne do kwadratu natężenia. Do wad zaliczamy nieliniowość podziałki, małą czułość oraz wrażliwość na rozproszone pola magnetyczne. Mierniki elektromagnetyczne zaopatrzone są w urządzenie tłumiące składające się z komory K, w której porusza się połączona z wskazówką blaszka aluminiowa T.



18.2. Budowa miernika elektromagnetycznego.

Mierniki elektrodynamiczne. Mierniki elektrodynamiczne różnią się od magnetoelektrycznych tym, że magnes stały jest zastąpiony elektromagnesem. Elektromagnes wytwarza pole magnetyczne o indukcji B proporcjonalnej do prądu I_1 w jego uzwojeniach

$$B = k_1 I_1. \tag{18.6}$$

Moment siły działający na ramkę wyraża się i tu wzorem (18.2), który po uwzględnieniu związku (18.6) przyjmuje postać

$$M = k_1' I_1 I_2.$$

Porównując powyższe wyrażenie z (18.1) otrzymamy

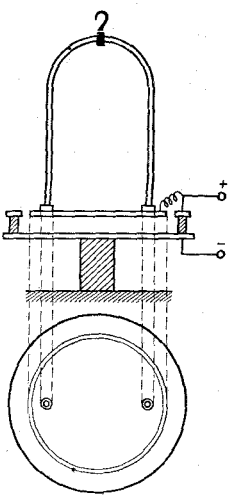
$$\varphi = K' I_1 I_2. \tag{18.7}$$

Gdy przez obydwie cewki płynie ten sam prąd I, wtedy moment siły jest proporcjonalny do I^2, a wychylenie wyrazi się również wzorem (18.5).

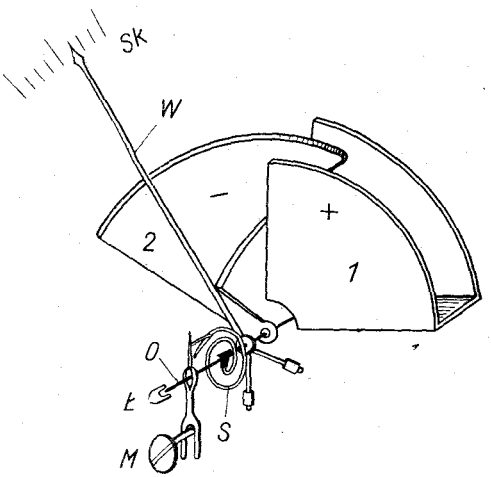
Mierniki cieplne i termoelektryczne. Zgodnie z prawem Joule'a–Lenza moc wydzielona w przewodniku jest proporcjonalna do kwadratu natężenia prądu $P = RI^2$.

Moc ta podgrzewa przewodnik, który wydłuża się proporcjonalnie do wydzielonej mocy, więc $\delta l \sim P$, czyli $\delta l \sim I^2$. Tak więc pomiar natężenia prądu sprowadza się do pomiaru wydłużenia przewodu. Wskazania mierników cieplnych silnie zależą od warunków zewnętrznych (temperatury i wilgotności), stąd obecnie nie są one stosowane. Stosuje się natomiast mierniki termoelektryczne, w których nie mierzy się wydłużenia przewodnika, lecz jego temperaturę za pomocą termoogniwa połączonego z miernikiem magnetoelektrycznym.

Mierniki elektrostatyczne. Zasada działania tych mierników jest oparta na zjawisku przyciągania przedmiotów naładowanych elektrycznie. Pierwowzorem jest elektrometr bezwzględny (rys. 18.3), w którym mierzy się wprost siły przyciągania za pomocą wagi. Współczesny miernik elektrostatyczny (rys. 18.4) składa się z nieruchomych płytek *1*, między które wciągana jest płytka *2* osadzona na osi *0*. Mierniki tego typu mierzą również prąd przemienny, są one doskonałymi woltomierzami, gdyż nie pobierają prądu z mierzonego źródła.



18.3. Elektrometr bezwzględny.



18.4. Budowa miernika elektrostatycznego.

18.02. PODZIAŁ MIERNIKÓW ZE WZGLĘDU NA PRZEZNACZENIE

Ze względu na przeznaczenie mierniki elektryczne dzielimy na mierniki prądu, mierniki napięcia oraz mierniki mocy.

Amperomierz. Miernikiem natężenia prądu może być każdy z wymienionych mierników z wyjątkiem miernika elektrostatycznego. Ze względu na zakres mierniki prądu dzielimy na amperomierze, miliamperomierze, mikroamperomierze i galwanometry. Galwanometry są miernikami najczulszymi i mierzą prądy rzędu od 10^{-6} do 10^{-11} A. Inne mierniki mierzą prądy odpowiadające ich nazwie np. miliamperomierze — prądy rzędu miliamperów. Wskazane jest, by opór własny mierników prądu, tzw. opór wewnętrzny był jak najmniejszy, by nie ograniczał prądu w obwodzie.

Woltomierz. Jako mierniki napięcia stosować możemy mierniki elektrostatyczne oraz wszystkie czułe mierniki prądu poczynając od miliwoltomierzy aż do galwanometrów. Mierniki prądu mogą służyć jako woltomierze, jeżeli w szereg z nimi włączony jest opornik o dużym oporze. W przeciwieństwie do mierników prądu, mierniki napięcia są tym lepsze, im większy jest ich opór wewnętrzny. Ze względu na zakres mierzonych napięć, wśród woltomierzy wyróżniamy kilowoltomierze, miliwoltomierze i mikrowoltomierze.

Zmiany zakresów. Zakres każdego miernika prądu możemy rozszerzyć przez zastosowanie opornika połączonego równolegle, czyli tzw. bocznika. Stosując oznaczenia z rysunku 18.5a, zgodnie z II prawem Kirchhoffa (17.5) możemy napisać

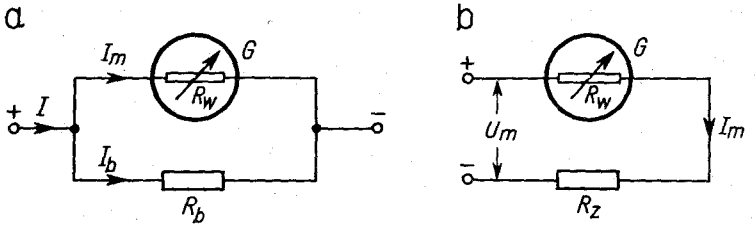
$$\frac{R_b}{R_w} = \frac{I_m}{I-I_m}, \quad \text{skąd} \quad R_b = R_w \frac{I_m}{I-I_m} \tag{18.8}$$

zamieniając miernik prądu o zakresie I_m na woltomierz o zakresie U_m, włączamy w szereg z nim opornik R_z (rys. 18.5b). Wtedy zgodnie z prawem Ohma mamy

$$U_m = I_m(R_w + R_z).$$

Stąd opór bocznika wynosi

$$R_z = \frac{U_m}{I_m} - R_w. \tag{18.9}$$



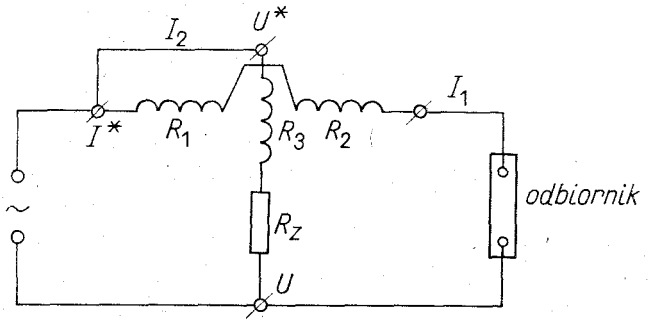
18.5. Sposób zwiększania zakresu miernika prądu (a) oraz przebudowy miernika prądu na miernik napięcia (b).

Watomierz. Do bezpośredniego pomiaru mocy stosuje się mierniki elektrodynamiczne łącząc cewki miernika w sposób pokazany na rys. 18.6a. Cewka nieruchoma R_1 i R_2 jest wykonana z grubego drutu, ma mały opór R i jest wypełniona rdzeniem z miękkiego żelaza. W obwód włącza się ją szeregowo jak amperomierz i nazywa się ją cewką prądową. Ramka R_3 zbudowana jest podobnie jak w mierniku magnetoelektrycznym, a w szereg z nią włącza się opornik R_z o dużym oporze. Zgodnie z prawem Ohma

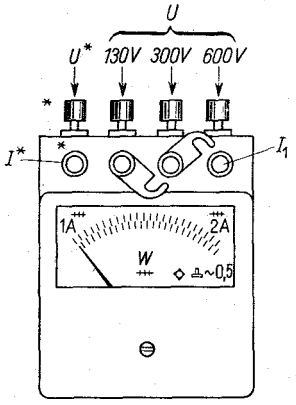
$$U = (R_z + R_3)I_2, \text{ stąd } I_2 = \frac{U}{R_z + R_3}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (18.7) otrzymamy

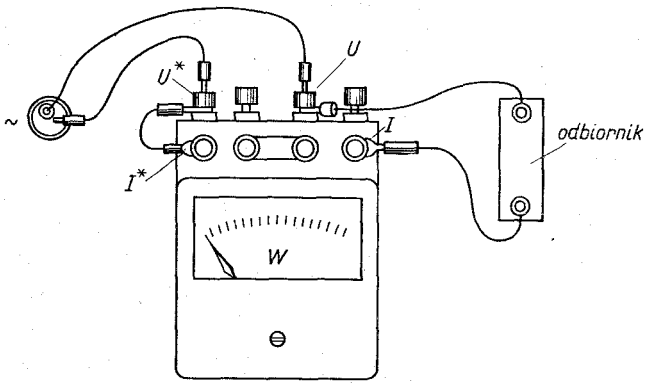
$$\varphi = \frac{K'}{R_z + R_3} I_1 U, \text{ lub } \varphi = KP, \tag{18.10}$$



a



b



c

18.6. Sposób łączenia uzwojeń watomierza; schemat (a), rozmieszczenie zacisków watomierza (b), sposób łączenia (c).

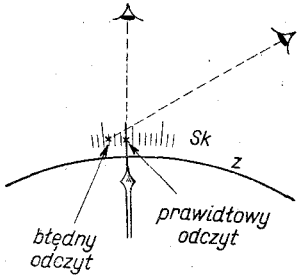
gdzie $P = I_1 U$ oraz $K = K'(R_z + R_3)^{-1}$. Watomierz mierzy moc prądu stałego lub przemiennego i posiada liniową podziałkę. W obwodach prądu łączy go się w sposób pokazany na rys. 18.6.

Rodzaj prądu. Wszystkie mierniki można stosować do pomiaru natężenia prądu stałego. Prąd przemienny mierzyć można tylko miernikami, w których wychylenie jest proporcjonalne do kwadratu natężenia prądu, czyli wszystkimi miernikami z wyjątkiem magnetoelektrycznych. Te ostatnie możemy stosować również do prądu przemiennego włączając w szereg prostownik półprzewodnikowy. Wtedy ze względu na nieliniowy przebieg charakterystyki prostownika podziałka miernika jest również nieliniowa.

Mierniki wielozakresowe. Produkowane obecnie mierniki laboratoryjne są miernikami wielozakresowymi. Wewnątrz miernika znajduje się układ oporników szeregowych i boczników wyprowadzonych do różnych zacisków. W innych typach mierników stosowane są przełączniki zakresów. Tzw. mierniki uniwersalne posiadają wbudowany wewnątrz komplet oporników oraz prostownik i można za ich pomocą mierzyć napięcia, natężenia i opory w bardzo szerokim zakresie: od miliamperów do 6-ciu amperów, od kilku do 300 V i od kilku do tysięcy omów.

18.03. DOKŁADNOŚĆ MIERNIKÓW, OZNACZENIA

Ze względu na dokładność pomiaru, mierniki dzielimy na następujące klasy: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Klasa miernika oznacza stosunek maksymalnego błędu systematycznego, do zakresu miernika. W praktyce stosujemy zazwyczaj mierniki klas: 0,5 do 2,5. Mierniki klas 0,1 i 0,2 są miernikami wzorcowymi i bardzo precyzyjnymi. Mierniki klas 0,1–0,5 poza podziałką posiadają zwierciadło, które pozwala wyeliminować błąd paralaksy. Błąd ten popełniamy, gdy odczytując wskazanie miernika patrzymy skośnie (rys. 18.7). Przy prawidłowym odczycie wskazówka musi się pokryć z własnym odbiciem w zwierciadle.



18.7. Błąd paralaksy wynika z skośnego ustawienia oka względem płaszczyzny skali.

Zazwyczaj poniżej podziałki mierniki posiadają oznaczenia określające rodzaj mierzonego prądu, zasadę działania, klasę, prawidłowe ustawienie oraz tzw. napięcie probiercze, tzn. maksymalne napięcie jakie można przyłożyć do miernika, czyli wytrzymałość izolacji na przebicie. Podaje się również znak wytwórni oraz rok produkcji. Stosowane oznaczenia zebrano w tabeli 18.1.

Tabela 18.1

Oznaczenia mierników elektrycznych

Symbol	Znaczenie symbolu
	Rodzaj prądu
—	miernik prądu stałego
~	miernik prądu przemiennego
≂	miernik uniwersalny (na prąd stały i przemienny)
	Sposób ustawienia miernika
⊓	ustawienie poziome
⊥	ustawienie pionowe
∠60°	ustawienie skośne (cyfra oznacza kąt z poziomem)
	Zasada działania
	miernik magnetoelektryczny
	miernik magnetoelektryczny z prostownikiem
	miernik termoelektryczny
	miernik elektromagnetyczny
	miernik elektrodynamiczny
	miernik cieplny
	miernik elektrostatyczny
	Dopuszczalne napięcia
☆	do 500 V (gwiazdka bez cyfry)
	do 2 kV (cyfra oznacza napięcie przebicia izolacji w kV)

Tabela 18.1 cd.

Symbol	Znaczenie symbolu
	Klasa i zakres
0,5	klasa miernika oznaczona jest liczbą bez żadnego dodatkowego znaku (0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,5; 4)
μA	jednostki, w których wyrażone są wskazania miernika (A, mA, μA, kV, V, mV, μV, W, kW, T, mT, itp.)
A3	znak firmowy wytwórni
1970	rok produkcji (na niektórych tylko miernikach)

Uwaga: Ponadto na tarczy niektórych mierników podaje się: opór wewnętrzny, tabele wyjaśniające sposób odczytywania wskazań sposoby łączenia różnych zakresów itp.

18.1. WZORCOWANIE WOLTOMIERZA

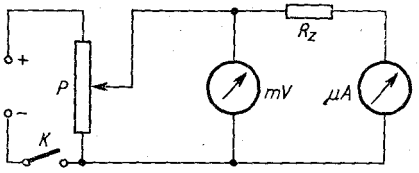
Cel: przebudowa mikroamperomierza na woltomierz o kilku zakresach pomiarowych.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki (§ 4.2), źródło prądu stałego (§ 4.1).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu (§ 17.01; S3, § 36–39; P2, § 1.1–11; 18.1–8), podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2, 22.03).

Aparatura i pomiary

W układzie 18.8 stosujemy dekadowy dzielnik napięć P lub opornik suwakowy oraz opornik dekadowy R_z. Miliwoltomierz wzorcowy jest miernikiem o kilku zakresach. Dla jednego zakresu obliczamy opór $'R_z^{(1)}$ z wzoru (18.9), przy założeniu $R_w = 0$.



18.8. Układ do wzorcowania woltomierza.

Wartość $'R_z^{(1)}$ nastawiamy na oporniku dekadowym, włączamy prąd i potencjometrem P dobieramy napięcie wychylające miernik wzorcowy (mV) na całą skalę. Mikroamperomierz nie wychyla się wtedy na całą skalę i chcąc uzyskać pełne jego wychylenie musimy zmniejszyć opór opornika włączonego w szereg z mikroamperomierzem do wartości $R_z^{(1)}$. Różnica $'R_z^{(1)}$ i $R_z^{(1)}$ jest równa oporowi wewnętrznemu mikroamperomierza

$$R_w = {}'R_z^{(1)} - R_z^{(1)}. \tag{18.11}$$

Obliczamy opór wewnętrzny R_w, a następnie wzorcujemy mikroamperomierz przy oporze $R_z^{(1)}$ zaznaczając jego wskazania dla 10–15 różnych napięć pokrywających równomiernie cały zakres miernika wzorcowego. Wzorujące napięcia zmieniamy potencjometrem P. Przyjmując wartość R_w z poprzedniej części doświadczenia obliczamy z wzo-

ru (18.9) opory $'R_z^{(2)}$ i $'R_z^{(3)}$ dla pozostałych zakresów miliwoltomierza, a następnie wykonujemy wzorcowania mikroamperomierza przy oporach $'R_z^{(2)}$ i $'R_z^{(3)}$. Przed każdym wzorcowaniem poprawiamy wartości $R_z^{(2)}$ i $R_z^{(3)}$ dobierając opór $R_z^{(2)}$ lub $R_z^{(3)}$, w ten sposób, by obydwa mierniki jak najdokładniej równocześnie wskazywały maksimum. Notujemy błędy przyjmując na ΔR najmniejszą wartość wskazania opornika dekadowego.

Obliczenia

Wykreślamy wyniki wzorcowania dla wszystkich trzech przypadków na wspólnym arkuszu. Wskazania miernika wzorcowego odkładamy na osi rzędnych dobierając inną podziałkę dla każdego zakresu. Błędy nanosimy dla kilku punktów pomiarowych. Obliczamy błędy $\Delta' R_z^{(1)}$, ΔR_w oraz $\Delta' R_z^{(2)}$ i $\Delta' R_z^{(3)}$. Sprawdzamy zgodność wyników $'R_z^{(2)}$ i $'R_z^{(2)}$ oraz $'R_z^{(3)}$ i $R_z^{(3)}$.

Odpowiadamy na pytanie: jaki najmniejszy zakres pomiarowy może posiadać woltomierz wykonany z badanego mikroamperomierza, oraz dlaczego wyniki $'R_z^{(3)}$ i $R_z^{(3)}$ są zgodne albo nie są zgodne.

18.2. WZORCOWANIE AMPEROMIERZA

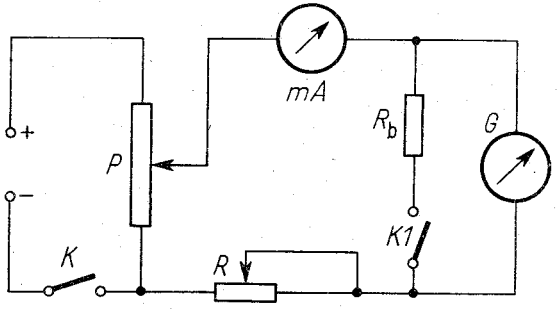
Cel: wycechowanie wskazań miernika prądu o nieznanym zakresie, wyznaczenie jego oporu wewnętrznego oraz przebudowa na amperomierz o podanym w instrukcji zakresie.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki suwakowe, dekadowe i potencjometr (§ 4.2), źródła prądu stałego (§ 4.1).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu (§ 17.01; S3, § 36–39; P2, § 1.1–11, 1.39; J, § 18.1–8), podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2, 22.03).

Aparatura i pomiary

W stosowanym układzie (rys. 18.9) rolę potencjometru P i opornika R spełniają oporniki suwakowe, a rolę opornika R_b spełnia opornik dekadowy o najmniejszej dekadzie 0,1 Ω. Stosowany miliamperomierz ma kilka zakresów. Przed włączeniem prądu miliamperomierz włączamy na najczulszy zakres, opornik R na maksymalny opór, potencjometr na minimalne napięcie (suwak w skrajnym położeniu), a opornik R_b na opór maksymalny. Włączamy prąd nie zamykając włącznika K i dobieramy wartość napięcia w ten sposób, by nieznany miernik wychylał się na całą skalę. Notujemy na-



18.9. Układ do wzorcowania amperomierza.

tężenie prądu I_m określające zakres nieznanego miernika. Włączamy opornik R_b i wartość oporu bocznikującego dobieramy tak, by obydwa mierniki przy tym samym napięciu osiągnęły maksymalne wychylenie. Odczytujemy wartość oporu $R_b^{(1)}$ oraz zakres miernika wzorcowego $I^{(1)}$. Wzorcujemy zbocznikowany opornikiem $R_b^{(1)}$ miernik nieznany, tzn. odczytujemy jego wskazania przy 10 do 15-tu różnych wartościach prądu, pokrywających równomiernie cały zakres miernika. Celem wyeliminowania ewentualnych pomyłek pomiary powtarzamy.

Z wzoru (18.8) obliczamy opór wewnętrzny R_w nieznanego miernika. Znając I_m oraz R_w miernika nieznanego z wzoru (18.8) obliczamy wartości oporów $'R_b^{(2)}$ i $'R_b^{(3)}$, które rozszerzą zakres tego miernika do natężeń $I = I^{(2)}$ oraz $I = I^{(3)}$ równych pozostałym zakresom miernika wzorcowego.

Nastawiamy kolejno wartości $'R_b^{(2)}$ i $'R_b^{(3)}$ i sprawdzamy zgodność wychyleń maksymalnych obydwu mierników. Wprowadzamy ewentualne poprawki otrzymując $R_b^{(2)}$, $R_b^{(3)}$ i wzorcujemy miernik przy tych bocznikach postępując podobnie jak przy pierwszym wzorcowaniu. Notujemy klasę mierników oraz wartość ΔR najmniejszej dekady opornika bocznikującego.

Obliczenia

Wykreślamy wyniki wzorcowania dla wszystkich trzech przypadków na wspólnym arkuszu. Wskazanie miernika wzorcowego odkładamy na osi rzędnych dobierając inną podziałkę dla każdego zakresu. Obliczamy błędy ΔR_w, $\Delta' R_b^{(2)}$ oraz $\Delta' R_b^{(3)}$. Sprawdzamy zgodność wyników $'R_b^{(2)}$ i $R_b^{(2)}$ jak również $'R_b^{(3)}$ oraz $R_b^{(3)}$.

Odpowiadamy na pytanie: jaki najmniejszy zakres pomiarowy może posiadać woltomierz wykonany z badanego miernika.

18.3. CZUŁOŚĆ GALWANOMETRU

Cel: wyznaczenie czułości i oporu wewnętrznego galwanometru z plamką świetlną.

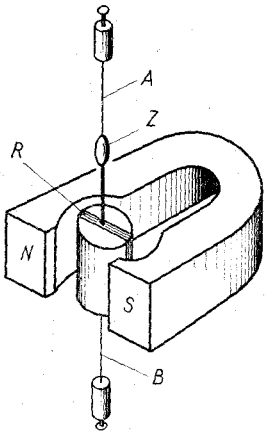
Przyrządy: źródło prądu (§ 4.1), oporniki i potencjometry (§ 4.2), mierniki elektryczne (§ 18.01–03), pomiar kątów metodą optyczną (§ 3.3).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu (§ 17.01; S3, § 36–39; P2, § 1.1–11, 1.39; J, § 18.1–8), podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2, 22.03)

Wprowadzenie

Galwanometr różni się od zwykłego miernika magnetoelektrycznego sposobem zawieszenia ramki. Jest ona zawieszona na sprężystej taśmie (A i B na rys. 18.10) spełniającej równocześnie rolę doprowadzeń prądu. Z ramką jest sztywno połączone zwierciadło Z pozwalające mierzyć jej kąt skręcenia metodą optyczną (§ 3.3). Części ruchome galwanometru są bardzo lekkie. W budowanych obecnie galwanometrach zwanych galwanometrami z plamką świetlną układ optyczny wraz z źródłem światła jest wbudowany w przyrząd galwanometru, a podziałka znajduje się na matowej szybie. Mimo że galwanometry posiadają nieduże rozmiary, droga promienia świetlnego, dzięki wielokrotnym odbiciom od zwierciadeł, jest rzędu 1/2 metra. Galwanometry z oddziel-

nym urządzeniem odczytowym zwane galwanometrami zwierciadłowymi stosuje się w przypadkach wyjątkowych, gdy wymagana jest bardzo duża precyzja pomiaru. W galwanometrach wbudowane jest również urządzenie do unieruchomienia (aretowania) ramki.



18.10. Budowa galwanometru zwierciadłowego.

Najważniejszym parametrem galwanometru jest jego czułość prądowa C_I zdefiniowana dla galwanometru zwierciadłowego jako stosunek kąta wychylenia zwierciadła do natężenia I_g prądu płynącego przez ramkę

$$C_I = \frac{\alpha}{I_g}. \tag{18.12}$$

Wyrażając kąt α jako stosunek łuku a do odległości h między zwierciadłem i skalą ostatni wzór napiszemy w postaci

$$C_I' = \frac{a}{I_g h}. \tag{18.12a}$$

Dla galwanometru z plamką świetlną czułość definiuje się jako stosunek wychylenia a plamki do natężenia prądu I_g przy stałej długości drogi promienia świetlnego (h = = 500 mm)

$$C_I = \frac{a}{I_g}. \tag{18.13}$$

Czułość definiowana wzorem (18.12) wyraża się w rad A^{-1}, natomiast C_I — wzorem (18.13) w mm A^{-1}.

Odwrotność czułości nazywać będziemy stałą A galwanometru*

$$A = C_I^{-1} = \frac{I_g}{a}. \tag{18.14}$$

* Stała galwanometru w literaturze bywa również nazywana czułością.

Definiuje się również czułość napięciową, którą analogicznie do (18.13) dla galwanometru z plamką świetlną definiujemy jako stosunek wychylenia a do przyłożonego napięcia U, czyli

$$C_U = \frac{a}{U}.$$

Zgodnie z prawem Ohma zachodzi związek:

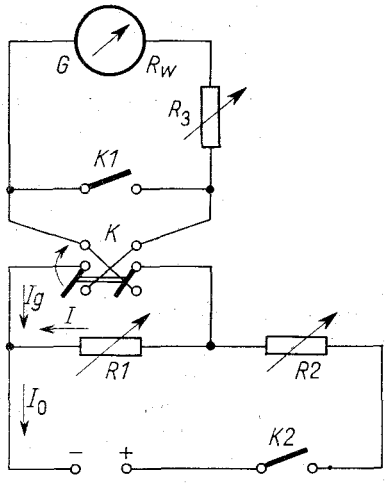
$$C_U = C_I/R_w, \tag{18.15}$$

gdzie R_w — opór uzwojeń ramki.

Aparatura

W stosowanym układzie pomiarowym (rys. 18.11) stosuje się trzy oporniki dekadowe. Opornik R_3 może być opornikiem stałym o kilku odczepach i oporze dobranym do czułości badanego galwanometru. Zgodnie z prawem Kirchhoffa w obwodzie galwanometru

$$I_0 = I + I_g \text{ oraz } \frac{R_w+R_3}{R_1} = \frac{I}{I_g}, \text{ skąd } I_g = \frac{R_1}{R_w+R_3+R_1} I_0.$$



18.11. Schemat układu do badania czułości i oporu wewnętrznego galwanometru.

Korzystając ponadto z prawa Ohma mamy $I_0 = \frac{U}{R_2+R}$ (gdzie R jest oporem równolegle połączonych oporników R_1 oraz R_w+R_3) i możemy napisać

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_w+R_3}, \text{ skąd } R = \frac{R_1(R_w+R_3)}{R_w+R_3+R_1}.$$

Korzystając z powyższych związków prąd płynący przez galwanometr wyrazimy wzorem:

$$I_g = U \cdot R_1[(R_w+R_3)(R_1+R_2)+R_1R_2]^{-1}. \tag{18.16}$$

Dla przypadku, gdy $R_1 \ll R_2$, otrzymamy

$$I_g = UR_1[R_2(R_w+R_3+R_1)]^{-1}. \tag{18.16a}$$

Występujące w równaniu powyższym dwie niewiadome I_g oraz R_w można wyznaczyć wykonując pomiary dla dwóch kombinacji oporów R_1, R_2, R_3 oraz R'_1, R'_2, R'_3. Przed przystąpieniem do doświadczenia nie wiemy czy czułość nie jest zależna od wychylenia, stąd pomiary wykonać musimy dla tak dobranych oporów R'_1, R_2 i R_3 oraz R'_1, R'_2 i R'_3, by wychylenia galwanometru były równe w obydwu przypadkach. Zgodnie z równaniem (18.12) zachodzi wtedy $\alpha_1 = \alpha_2$, skąd wynika $I'_g = I_g$. Stosując tę równość do (18.16) lub (18.16a), otrzymamy

$$\frac{(R_w+R_3)(R_1+R_2)+R_1R_2}{(R_w+R'_3)(R'_1+R'_2)+R'_1R'_2} = \frac{R_1}{R'_1} \tag{18.17}$$

lub

$$\frac{(R_w+R_3+R_2)R_2}{(R_w+R'_3+R'_2)R'_2} = \frac{R_1}{R'_1}. \tag{18.17a}$$

Pomiary

a. Czynności wstępne. W przypadku galwanometru z oddzielnym urządzeniem odczytowym doświadczenie rozpoczynamy od ustawienia przyrządu: Korzystając z wskazań poziomnicy umieszczonej w podstawce, poziomujemy galwanometr, korygując jego ustawienie dwoma przystosowanymi do tego nóżkami. Ustawiamy skalę i urządzenie odczytowe dokładnie w odległości 1 m, w taki sposób, by uzyskać wskazanie zerowe. Wskazanie zerowe w niewielkim zakresie regulować możemy głowicą zawieszenia ramki obracając ją o niewielki kąt w pożądanym kierunku. Prawidłowo ustawiony galwanometr wykonuje oscylacje symetryczne względem zera. Wychylenia są asymetryczne, gdy skala nie jest prostopadła do linii galwanometr–skala. Oscylacje możemy stłumić, zwierając krótkim przewodem zaciski galwanometru.

b. Wyznaczanie oporu wewnętrznego. Układ elektryczny łączymy według schematu 18.11. Rozmieszczając oporniki zwracamy uwagę, by zawsze $R_1 \ll R_2$. Rozpoczynając pomiary, opory R_1 i R_2 dobieramy tak, by $R_1 \simeq 10^{-4} R_2$, zamykamy obwód i obserwujemy wychylenie galwanometru. Jeżeli jest ono niemierzalnie małe, zwiększamy 10-krotnie opór R_1 lub zmniejszamy R_2 albo R_3. Opory dobieramy w ten sposób, by uzyskać wychylenie na 2/3 skali. Odczytując wychylenie musimy zazwyczaj długo czekać na jego ustalenie się. Po wykonaniu pomiaru zmieniamy kierunek prądu komutatorem K i powtarzamy odczyt wychylenia; jest ono przeciwnego znaku względem poprzedniego. Zmieniamy jeszcze 5-krotnie kierunek prądu wykonując każdorazowo pomiar wychylenia. Opór R_1 zwiększamy 2-krotnie, a opory R_2 i R_3 dobieramy w taki sposób, by uzyskać takie samo wychylenie jak w pierwszej serii pomiarów. Wychylenie to mierzymy również po kilkakrotnych zmianach kierunku prądu. Wszystkie pomiary powtarzamy przy wychyleniu galwanometru rządu 3/4 skali.

c. Badanie zależności czułości od wychylenia. Dobieramy opory R_1 i R_2 w ten sposób, by przy maksymalnym oporze R_3 uzyskać wychylenie rzędu 2 do 5-ciu działek. Mierzymy to wychylenie 6-krotnie zmieniając po każdym pomiarze kierunek prądu. Podobne pomiary wykonujemy dla 6 do 10-ciu kolejno malejących wartości oporu R_3 dobieranych

w ten sposób, by wychylenie w kolejnych pomiarach nieco wzrastało, pokrywając równomiernie cały zakres podziałki przyrządu (zamiast R_3 zmieniać możemy R_1 lub R_2). Mierzymy również napięcie U lub natężenie I_0 prądu czerpanego ze źródła.

Obliczenia

Korzystając z pomiarów wykonanych w punkcie b. dla jednej pary pomiarów obliczamy R_w z wzoru (18.17a) jak również R'_w wychodząc z wzoru (18.17). Sprawdzamy zgodność wyników R_w i R'_w, czyli nierówność $|R_w - R'_w| \leqslant 2|\Delta R_w|$. Jeżeli nierówność jest spełniona, to wyniki są zgodne, i wzór (18.17a) stanowi dobre przybliżenie. Jeżeli nierówność nie jest spełniona, opór obliczać musimy z wzoru (18.17). W zależności od wyniku poprzedniej części obliczeń dla drugiej pary wyników obliczamy R_w z wzoru (18.17) lub (18.17a). Jako wynik końcowy przyjmujemy średnią arytmetyczną $\bar{R}_w$ oraz ΔR_w obliczone już poprzednio.

Korzystając z wyników części c. oraz wzorów (18.16) i (18.13) lub (18.12) obliczamy czułość C_I dla każdego pomiaru oddzielnie. Gdy kolejne wartości C_I różnią się nieznacznie, jako wynik końcowy przyjmujemy $\bar{C}_I$. Gdy różnice między C_I są znaczne, wykreślamy zależność czułości od wychylenia. W pierwszym przypadku błąd obliczamy metodą Gaussa. W przypadku drugim obliczamy błąd maksymalny jednego z pomiarów i wykonujemy analizę błędów na wykresie.

Odpowiadamy na pytanie: dlaczego czułość galwanometru zależy, względnie nie zależy od wychylenia.

18.4. BADANIE RUCHU RAMKI GALWANOMETRU

Cel: wyznaczenie oporu wewnętrznego czułości i współczynników w równaniu ruchu ramki galwanometru.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), galwanometr (§ 18.3), źródło prądu (§ 4.1), urządzenie odczytowe (§ 3.3), opornik dekadowy (§ 4.2), sekundomierz (§ 3.5).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu (§ 17.01; S3, § 36–39; P2, § 1.1–11, 1.39; J, § 18.1–8) podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2, 22.03) oraz ruch harmoniczny prosty i tłumiony (§ 10.01–02).

Wprowadzenie

Wychylona z położenia równowagi ramka galwanometru z otwartym obwodem zewnętrznym wykonuje bardzo słabo tłumione drgania harmoniczne, które można opisać równaniem (10.10). Do tego przypadku stosują się wszystkie rozważania § 10.02. Gdy przez galwanometr płynie prąd I_g, zgodnie z równaniem (18.2) na ramkę działa dodatkowy moment $M' = I_g NSB$. Oznaczając $\Phi_0 = NSB$ otrzymamy

$$M' = \Phi_0 I_g. \tag{18.18}$$

Wtedy wzrasta również tłumienie, bowiem do tłumienia spowodowanego tarciem mechanicznym dodaje się tłumienie wywołane prądem indukowanym w ramce oraz prądami wirowymi. Dodatkowe tłumienie obliczymy z prawa indukcji elektromagnetycznej Faradaya. W ramce indukuje się siła elektromotoryczna

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Wartość maksymalną siły elektromotorycznej możemy wyrazić przez

$$E_{\max} = -\Phi_0 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Na skutek działania siły elektromotorycznej $E_{\max}$ w obwodzie galwanometru o oporze $R = R_w + R_3'$ płynie prąd

$$I_g = \frac{U + E_{\max}}{R} = \frac{U}{R} - \frac{\Phi_0}{R}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (18.18) i przyjmując $I_0 = \frac{U}{R}$ dodatkowy moment napiszemy w postaci

$$M = \Phi_0 I_0 - \frac{\Phi_0^2}{R}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Dodając ten moment do równania ruchu (10.10) otrzymamy

$$\mathcal{J}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(H + \frac{\Phi_0^2}{R}\right)\frac{d\varphi}{dt} - D\varphi + \Phi_0 I_0. \tag{18.19}$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe podstawiamy $\Psi = \varphi - \frac{\Phi_0 I_0}{D}$ i $\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$ oraz $\frac{d^2\Psi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ otrzymując

$$\mathcal{J}\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \left(H + \frac{\Phi_0^2}{R}\right)\frac{d\Psi}{dt} + D\Psi = 0.$$

Podstawiając ponadto

$$\omega_0^2 = \frac{D}{\mathcal{J}} \quad \text{oraz} \quad 2\beta = \frac{H + \Phi_0^2/R}{\mathcal{J}} \tag{18.20}$$

otrzymamy

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\Psi}{dt} + \omega_0^2\Psi = 0. \tag{18.21}$$

Równanie powyższe jest formalnie takie jak (10.12), stąd do galwanometru zastosować możemy rozważania § 10.02 zastępując podstawienia (10.11) podstawieniami (18.20). Na uwagę zasługuje fakt, że tłumienie β zależy od oporu R obwodu galwanometru. Ponieważ $R = R_w + R_3'$, gdzie R_3' — opór zewnętrzny w obwodzie galwanometru i wartość oporu $R_3' = R_k$ możemy tak dobrać, by $\omega_0 = \beta$. Opór R_k zwany oporem krytycznym jest jedną ze stałych galwanometru. Opór krytyczny określa najkorzystniejsze warunki pracy, przy których wychylenie galwanometru ustala się w najkrótszym czasie. Znając logarytmiczny dekrement tłumienia i okres drgań tłumionych galwanometru o otwartym obwodzie, z równania (10.23) obliczyć możemy współczynnik tłumienia, który dla otwartego galwanometru wynosi

$$\beta_0 = \frac{H}{2\mathcal{J}} \tag{18.22}$$

(porównaj wzór 10.11) i mamy

$$\omega_0^2 = \frac{D}{\mathcal{J}}, \tag{18.23}$$

(porównaj wzory 10.8 i 10.3).

Z wyników uzyskanych dla obwodu zamkniętego wyciągnąć możemy następujące wnioski: dodając (18.18) do równania ruchu (10.10) otrzymamy

$$\mathcal{J}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + H\frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = \Phi_0 I_g,$$

dla galwanometru w równowadze (wychylonego, lecz nie wykonującego drgań) wychylenie $\varphi = \alpha$ jest stałe, stąd $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$, a ostatnie równanie różniczkowe redukuje się do

$$D\alpha = \Phi_0 I_g,$$

skąd czułość

$$C_I = \frac{\alpha}{I_g} = \frac{\Phi_0}{D},$$

a ponieważ

$$\frac{\Phi_0}{\mathcal{J}} = \frac{\Phi_0}{D} \cdot \frac{D}{\mathcal{J}}.$$

to podstawiając $C_I = \Phi_0/D$ oraz $\omega_0^2 = D/\mathcal{J}$ otrzymamy

$$\frac{\Phi_0}{\mathcal{J}} = C_I \omega_0^2. \tag{18.24}$$

W przypadku pomiarów wykonanych przy oporze krytycznym zachodzi $\beta = \omega_0$ i z równania (18.20) otrzymamy

$$\omega_0 = \frac{H}{2\mathcal{J}} + \frac{\Phi_0}{\mathcal{J}} \frac{\Phi_0}{2R_k},$$

skąd uwzględniając (18.22) oraz (18.24), otrzymamy

$$\omega_0 = \beta_0 + C_I \omega_0^2 \frac{\Phi_0}{2R_k}. \tag{18.25}$$

Znając z doświadczenia wartości ω_0, β_0, C_I oraz R_k obliczyć możemy kolejno Φ_0 (z wzoru 18.25), $\mathcal{J}$ z (18.24), D z (18.23) oraz H z (18.22).

Aparatura i pomiary

Wykonujemy wszystkie czynności związane z ustawieniem galwanometru i wyznaczeniem oporu wewnętrznego w taki sam sposób jak w punktach *a.* i *b.* doświadczenia 18.3. W tym ostatnim przypadku pomiary wykonujemy tylko dla jednego wychylenia.

c. Badanie ruchu swobodnego. Wyznaczamy okres T_0 i logarytmiczny dekrement tłumienia λ galwanometru swobodnego (niezwartego). Wychylenie początkowe ustalamy na ok. 3/4 skali przepuszczając przez galwanometr prąd w obwodzie 18.11. Drgania swobodne otrzymujemy przerywając prąd w obwodzie galwanometru za pomocą ko-

mutatora, lub wyłączając jedną z wtyczek. Mierzymy czas od 0 do N-tego przejścia plamki w lewo (lub w prawo) przez zerową podziałkę skali. Przyjmujemy N równe 10–20. Odczytujemy początkowe (φ_0) i N-te (φ_N) wychylenie plamki w jednym kierunku. N dobieramy w ten sposób, by $\varphi_N \simeq \frac{1}{2}\varphi_0$.

d. Wyznaczanie oporu krytycznego. W obwód włączamy dodatkowy przycisk *K1*. Opory R_1, R_2 i R_3 dobieramy w ten sposób, by galwanometr wychylał się na ok. 2/3 skali. Zwieramy galwanometr przyciskiem *K1*. Ramka wykonuje wtedy drgania tłumione. Badamy jakościowo zależność tych drgań od wartości oporu R_3. Doświadczenie rozpoczynamy przy największej wartości R_3, a w kolejnych obserwacjach opór ten zmniejszamy (posługujemy się największą dekadą R_0) i ustalamy wartość oporu krytycznego, przy którym po zwarciu przyciskiem *K1*, ramka przestaje się wahać, tzn. plamka nie przechodzi przez zero, lecz w czasie możliwie najkrótszym osiąga wychylenie zerowe. Wartość R_k ustalamy na dwa sposoby: zmniejszając w kolejnych obserwacjach R_3 ustalamy wartość maksymalną $R_{3\max}$, przy której wydaje się nam, że plamka nie przechodzi więcej przez zero. W drugiej obserwacji wychodzimy od małych oporów R_3 i ustalamy wartość minimalną $R_{3\min}$, przy której plamka zaczyna przechodzić przez zero.

Mierzymy odległość h skali od galwanometru i notujemy dokładności wykonanych pomiarów.

Obliczenia

Opór wewnętrzny galwanometru obliczamy z wzoru (18.17). Przyjmujemy $100\Delta R_w/R_w = 3\%$. Z wzoru (18.16) obliczamy prąd I_g, a z wzoru (18.12) czułość galwanometru. Kąt α obliczamy jako stosunek wychylenia do odległości h. Obliczamy błędy ΔI_g oraz ΔC_I.

Obliczamy logarytmiczny dekrement tłumienia z wzoru (10.22a) oraz okres T drgań swobodnych, a następnie obliczamy kolejno: $\beta = \beta_0$ z wzoru (10.23), $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ (z wzoru 10.8), $\Phi_0/\mathcal{J}$ z wzoru (18.24) oraz $\Phi_0/2R_k$ z wzoru (18.25). Przyjmujemy na opór krytyczny wartość $R_k = \frac{1}{2}(R_{3\max}+R_{3\min})$ oraz $|\Delta R_k| = \frac{1}{2}|R_{3\max}-R_{3\min}|$. Następnie znając R_k i wartość stosunku $\Phi_0/2R_k$, obliczamy kolejno Φ_0 z wzoru (18.25), znając wartość Φ_0 i wartość stosunku $\Phi_0/\mathcal{J}$, obliczamy moment bezwładności $\mathcal{J}$ części ruchomych (ramki z zwierciadłem). Znając $\mathcal{J}$ i Φ_0, obliczamy z wzoru (10.3) moment kierujący D zawieszenia galwanometru, a z wzoru (10.24) wartość współczynnika tłumienia H. Obliczamy błędy wyznaczanych wielkości.

18.5. OPÓR WEWNĘTRZNY MIERNIKÓW PRĄDU

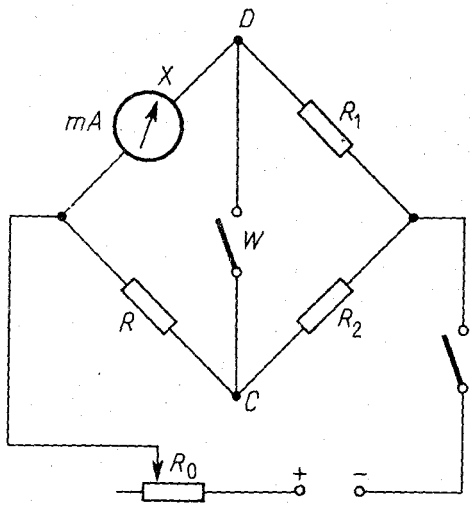
Cel: wyznaczanie oporu wewnętrznego miernika trójzakresowego za pomocą mostka Wheatstone'a.

Przyrządy: źródło prądu stałego (§ 4.1), oporniki i potencjometry (§ 4.2), mierniki elektryczne (§ 18.01–03) mostek Wheatstone'a (§ 17.1).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu (§ 17.01; S3, § 36–39; P2, § 1.1–11, 1.39; J, § 18.1–8), podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2, 22.03).

Aparatura

Opór wewnętrzny mierników mierzyć można w zmodyfikowanym układzie mostka Wheatstone'a pokazanym na rys. 18.12. Wzorcowany miernik X stanowi tu równocześnie wskaźnik oraz mierzony opornik. Dekadowy dzielnik napięć spełnia rolę oporników R i R_2. Przy zrównoważonym mostku nie istnieje różnica potencjałów między punktami C i D. Stąd też zamknięcie lub otwarcie wyłącznika W nie spowoduje zmiany wychylenia miernika X. Opór wewnętrzny $X = R_w$ wyraża się podobnie jak w doświadczeniu 17.1, równaniem (17.8). Opornikiem R_0 można regulować natężenie prądu, a tym samym wychylenia miernika X.



18.12. Układ mostka Wheatstone'a do pomiaru wewnętrznego mierników prądu.

Pomiary

Łączymy układ według schematu 18.12. Przyrząd włączamy przy maksymalnej wartości oporu R_0, a na oporniku R_1 nastawiamy wartość 1000 Ω. Włączamy prąd i dobieramy opór R_0 w ten sposób, by miernik wychylił się na 2/3 skali. Potencjometrem dekadowym dobieramy równowagę mostka, przy której wychylenie miernika nie zmienia się na skutek otwarcia lub zamknięcia wyłącznika W. Odczytujemy wartości poszczególnych oporów. Opór R jest równy wskazaniu dekadowego dzielnika napięć, a opór R_2 maksymalnej wartości oporu dzielnika mniej R, czyli $R_2 = R_{max} - R$. Czynności związane z dobieraniem wartości oporów powtarzamy przy kilku innych (większych) wychyleniach miernika i w oparciu o tę serię pomiarów planujemy właściwe pomiary. Takie same pomiary wykonujemy dla innych zakresów badanego miernika.

Obliczenia

Opory R_w obliczamy dla wszystkich wykonanych pomiarów z wzoru (17.8). Obliczamy opory średnie $\overline{R_w}$ dla poszczególnych zakresów oraz odchylenia standardowe metodą Studenta–Fishera.

Odpowiadamy na pytanie, czy wzorcowany miernik można zastosować jako woltomierz o zakresie 3 V.

18.6. STRUMIENIOMIERZ

Cel: wyznaczenie topografii pola magnetycznego w szczelinie między biegunami elektromagnesu za pomocą strumieniomierza.

Przyrządy: amperomierz (§ 18.01-03), elektromagnes (§ 4.9), opornik (§ 4.2), źródło prądu (§ 4.1).

Zagadnienia: definicje jednostek i wielkości magnetycznych (§ 1.2 i 1.5), teoria galwanometru (§ 18.3, 18.4).

Wprowadzenie

Strumieniomierz służy do pomiaru natężenia pola magnetycznego lub indukcji magnetycznej. Jest on zbudowany podobnie jak galwanometr. W przeciwieństwie do galwanometru ramka wraz z wskazówką lub zwierciadłem posiada duży moment bezwładności, a zawieszenie wywiera bardzo mały moment kierujący na wychyloną z położenia zerowego ramkę ($D \simeq 0$). Dzięki takiej budowie strumieniomierz nadaje się wyłącznie do pomiarów bardzo krótkich impulsów prądowych. Włączenie strumieniomierza do obwodu zawierającego źródło prądu powoduje zniszczenie przyrządu. Podstawiając $k = (H + \Phi_0^2/R)$, równanie ruchu ramki (18.19) przyjmuje postać

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k\frac{d\varphi}{dt} + \Phi_0 I.$$

Całkując to wyrażenie na czas trwania impulsu prądowego otrzymamy

$$\int_0^t \frac{d^2\varphi}{dt^2}dt + k\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi - \Phi_0 \int_0^t I\,dt = 0.$$

Ze względu na to, że szybkość kątowa obrotu ramki w chwili rozpoczęcia obrotu i w chwili jego zakończenia wynosi zero, pierwsza całka jest równa zeru. Ponadto całka $\int_0^t I\,dt = Q$ oznacza całkowity ładunek, który przepłynął przez strumieniomierz. Zatem równanie ruchu przyjmuje postać

$$k\Delta\varphi = \Phi_0 Q,$$

gdzie $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ oznacza całkowite wychylenie ramki strumieniomierza. Oznaczając $C = \Phi_0/k$ (jest to wielkość stała dla danego strumieniomierza) otrzymamy

$$\Delta\varphi = CQ. \tag{18.26}$$

Tak więc całkowite wychylenie strumieniomierza jest proporcjonalne do ładunku, który przepłynął przez jego ramkę.

Sposób pomiaru pola magnetycznego za pomocą strumieniomierza jest następujący. Strumieniomierz łączymy z cewką pomiarową — wzorcową o znanym przekroju czynnym (łącznej sumie powierzchni zwojów). Cewkę tę wprowadzamy do punktu, w którym chcemy zmierzyć natężenie H_1 pola i odczytujemy wskazanie strumieniomierza φ_1 (na ogół różne od zera). Następnie gwałtownie usuwamy cewkę z obszaru pola do miejsca, w którym pole H_2 jest w przybliżeniu równe zeru i odczytujemy maksymalne wskazanie φ_2. Do całego obwodu strumieniomierza, składającego się z cewki pomiarowej i ramki strumieniomierza, stosuje się drugie prawo Kirchhoffa (17.4). Źródłem siły elektromotorycznej w obwodzie jest zmiana strumienia indukcji Φ w cewce pomiarowej. Po przesunięciu cewki z obszaru, w którym indukcja magnetyczna wynosi B_1, do obszaru,

w którym wynosi ona B_2, strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez każdy zwój cewki doznaje zmiany o $\Delta\Phi$, wskutek czego, zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej, w cewce indukuje się siła elektromotoryczna

$$E_1 = -N_z\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

gdzie N_z oznacza ilość zwojów cewki wzorcowej. Na skutek przepływu prądu ramka zaczyna obracać się w polu magnetycznym magnesu NS strumieniomierza (rys. 18.10) i w ramce indukuje się siła przeciwelektromotoryczna E_2 proporcjonalna do prędkości kątowej obrotu ramki:

$$E_2 = -h\frac{d\varphi}{dt},$$

gdzie wielkość h jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym od geometrii układu. W obwodzie istnieje również spadek napięcia spowodowany oporem omowym $U = RI$. Zatem drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu strumieniomierza przyjmuje postać

$$-N_z\frac{d\Phi}{dt} - h\frac{d\varphi}{dt} = RI.$$

Wyrażenie to mnożymy przez dt i całkujemy na czas przypływu prądu

$$-N_z\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi - h\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = R\int_0^t I\,dt.$$

Po wykonaniu rachunków otrzymamy

$$-N_z(\Phi_2-\Phi_1) = RQ + h\Delta\varphi.$$

Podstawiając na Q wartość z równania (18.26), otrzymamy

$$-N_z(\Phi_2-\Phi_1) = (h+R/C)\Delta\varphi. \tag{18.27}$$

Współczynnik proporcjonalności, łączący zmianę strumienia z kątem wychylenia $\Delta\varphi$, wynoszący $K = h+R/C$, zależy wyłącznie od budowy strumieniomierza oraz oporu R i nazywa się stałą strumieniomierza. Strumieniomierze są zazwyczaj zbudowane w ten sposób, że ich opór wewnętrzny jest stały, a stała strumieniomierza jest wyznaczona dla z góry zadanego oporu obwodu zewnętrznego (w szczególnym przypadku oporu cewki pomiarowej).

Uwzględniając definicję strumienia indukcji magnetycznej (1.22), można wzór (18.27) przedstawić w postaci

$$-N_zS(B_2-B_1) = K\Delta\varphi,$$

gdzie przez S oznaczono średni przekrój zwoju cewki pomiarowej. Wielkość $N_zS = S_N$ nazywamy przekrojem czynnym cewki pomiarowej. Zatem ostatnie równanie przyjmie postać

$$-(B_2-B_1) = \frac{K\Delta\varphi}{S_N}. \tag{18.28}$$

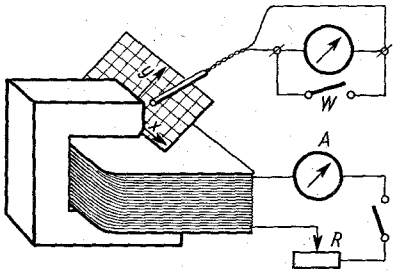
Stała strumieniomierza K jest zazwyczaj podana na skali strumieniomierza; jej wymiarem jest liczba weberozwojów (lub makswelozwojów) przypadająca na działkę skali przy-

rządu. Znając przekrój czynny cewki pomiarowej S_N i stałą K, możemy za pomocą strumieniomierza wyznaczyć indukcję magnetyczną B lub natężenie pola magnetycznego H (por. wzór 1.23 dla $\mu_r = 1$)

$$-(H_2 - H_1) = \frac{K\Delta\varphi}{\mu_0 S_N}. \tag{18.29}$$

Pomiary

Łączymy układ według schematu 18.13. Włączoną w obwód strumieniomierza cewkę pomiarową wprowadzamy między bieguny elektromagnesu przy zwartym strumieniomierzu (zamknięty wyłącznik W). W niektórych przypadkach wyłącznik jest wbudowany w strumieniomierz. Następnie otwieramy obwód wyłącznikiem W i odczytujemy wskazania początkowe φ_1. Cewkę pomiarową gwałtownym ruchem przesuwamy do punktu dostatecznie oddalonego od elektromagnesu i natychmiast odczytujemy



18.13. Układ do badania topografii pola magnetycznego.

maksymalne wychylenie φ_2. Dla ułatwienia pomiarów pomiędzy biegunami elektromagnesu umieszczono płytkę z układem współrzędnych (x, y). Pomiary wykonać musimy dla całej powierzchni płytki w odstępach centymetrowych. Odczytujemy stałą strumieniomierza oraz przekrój czynny cewki pomiarowej. W doświadczeniu powyższym pamiętać należy, że strumieniomierz można łączyć wyłącznie z cewką pomiarową. Włączenie strumieniomierza w obwód prądu grozi natychmiastowym zniszczeniem przyrządu.

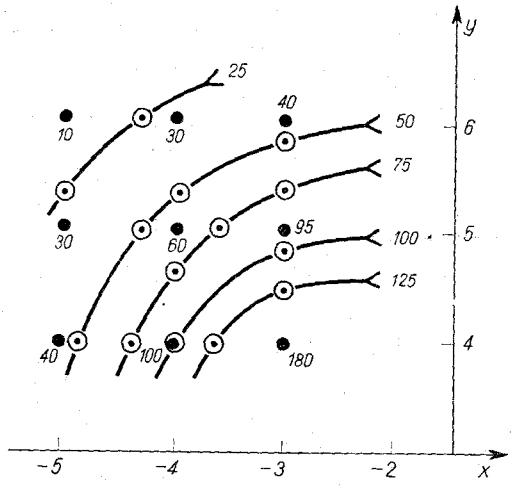
Obliczenia

W oparciu o wykonane pomiary obliczamy B lub H z wzoru (18.28) lub (18.29) przyjmując $H_1 = 0$ lub $B_1 = 0$. Wykreślamy topografię pola, tzn. linie równego natężenia pola magnetycznego dla natężeń pola będących całkowitą wielokrotnością 25 kA/m. Wartości pola uzyskane dla poszczególnych punktów pomiarowych są z reguły różne od $n \cdot 25$ kA/m i położenie punktów, w których natężenie wynosi $n \cdot 25$ kA/m musimy określić metodą interpolacji. Zakładamy, że między sąsiednimi punktami natężenie pola zmienia się liniowo. Przykład interpolacji pokazano na rys. 18.14. Cyfry obok punktów zaznaczonych czarnymi kółkami oznaczają otrzymane z pomiaru natężenie pola. Wyznaczamy przykładowo jeden punkt krzywej odpowiadającej natężeniu 75 kA/m, który leży między punktami o współrzędnych $(-5,4)$ i $(-4,4)$. Ponieważ różnica pól w tych

punktach wynosi $100-40 = 60$ kA/m, a ich długość — 10 mm, interesujący nas punkt odpowiadający natężeniu 75 kA/m będzie odległy od punktu $(-4,4)$ o wartość

$$x = \frac{25}{60} \cdot 10 = 4{,}2 \text{ mm}.$$

Punkt ten zaznaczono znakiem ⊙. W podobny sposób metodą interpolacji określamy położenie innych punktów linii równego natężenia pola.



18.14. Przebieg linii równego natężenia pola magnetycznego.

Wykreślamy ponadto zależność natężenia pola od położenia dla punktów leżących na osi x. W tym celu na osi wykresu y odkładamy natężenie pola stosując dwie podziałki: kA/m i Oe. Nanosimy najpierw podziałkę w jednostkach SI, a następnie na skali tej odkładamy punkty odpowiadające całkowitym wartościom natężenia pola wyrażonego w Oe. Korzystamy przy tym z relacji zamiany kA/m = 12,57 Oe. Podziałka natężenia pola w Oe jest równocześnie skalą indukcji w Gs. Po prawej stronie rysunku nanosimy podziałkę indukcji w teslach (T). W ten sposób na jednym wykresie przedstawiamy indukcję i pole magnetyczne w układach SI i CGSEM. W omawianym doświadczeniu dyskusję błędów ograniczamy do dwóch punktów ostatniego wykresu.

19. ELEKTROSTATYKA

19.01. NATĘŻENIE POLA ELEKTRYCZNEGO (P3, rozdz. 1 i 2)

Wokół ciała, na którym zgromadzony jest ładunek elektryczny Q, istnieje *pole elektryczne o natężeniu* $\mathbf{E}$ równym sile działającej na ładunek jednostkowy

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_p. \tag{19.1}$$

Podstawiając na $\mathbf{F}$ wartość z prawa Coulomba

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{QQ_p}{r^3}\mathbf{r}, \tag{19.2}$$

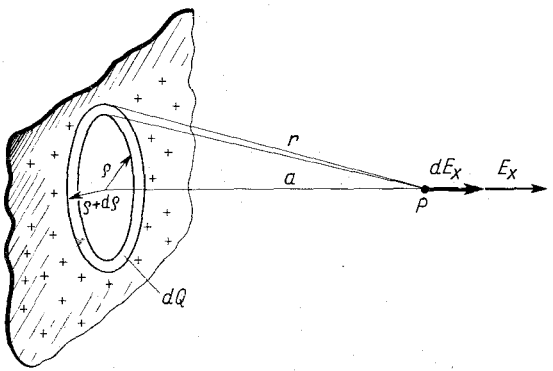
otrzymamy

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\mathbf{r}. \tag{19.3}$$

Wektor natężenia $\mathbf{E}$ tego pola jest skierowany od ładunku „+" w kierunku ładunku „−".

Obliczamy natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez nieograniczenie dużą, płaską powierzchnię, naładowaną ładunkiem o gęstości powierzchniowej $\sigma = Q/S$. Oznaczymy przez dE_x przyczynek pola w punkcie P, pochodzący od pierścienia o promieniach ϱ i $\varrho + d\varrho$. Środek pierścienia znajduje się w odległości a od punktu P. Zgodnie z (19.3) mamy

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^3}a.$$



19.1. Przyczynek pola elektrycznego pochodzącego od pierścienia.

Ładunek pierścienia wynosi $dQ = 2\pi\sigma\varrho\, d\varrho$. Różniczkując wynikające z twierdzenia Pitagorasa wyrażenie $r^2 = a^2 + \varrho^2$ ($a = \text{const}$) otrzymamy $\varrho\, d\varrho = r\, dr$, skąd $dQ = 2\pi\sigma r\, dr$. Zatem ostatnie równanie przyjmie postać

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi\sigma a \frac{dr}{r^2}.$$

Natężenie pola E_x otrzymamy całkując powyższe wyrażenie na całą powierzchnię, r zmienia się wtedy w granicach od a (gdy $\varrho = 0$), do ∞ w wyrażeniu

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} a \int_a^\infty \frac{dr}{r^2}.$$

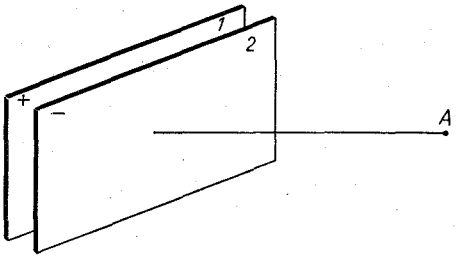
Wykonując całkowanie otrzymamy

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{19.4}$$

Kondensatorem płaskim nazywamy układ dwóch równoległych, płaskich przewodników odległych o d. Ładując kondensator wprowadzamy na jego okładki ładunki o gęstości $+\sigma$, $-\sigma$. Ponieważ pole E_x (19.4) nie zależy od odległości a, zatem na zewnątrz układu w punkcie A (rys. 19.2) pole jest sumą pól poszczególnych płytek: $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

i $E_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ i jest równe zeru. Pomiędzy płytkami obydwa przyczynki posiadają ten sam zwrot i pole wypadkowe wynosi

$$E = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{19.5}$$



19.2. Kondensator płaski.

Potencjałem względnym nazywamy stosunek pracy W, którą wykonujemy przesuwając ładunek jednostkowy z punktu odniesienia do danego punktu pola, czyli

$$U_w = W/Q_p. \tag{19.6}$$

Potencjał względny mierzony względem ziemi nazywamy krótko potencjałem, natomiast mierzony względem drugiego bieguna źródła nazywamy napięciem. Praca W jest sumą (całką) iloczynu siły F (19.2) i drogi dx:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{QQ_p}{r^3} r\,dx,$$

lub podstawiając wyrażenie (19.3)

$$W = \int_1^2 Q_p E\,dx.$$

Całkując powyższy wzór w przestrzeni między płytkami, w której pole elektryczne wyraża się wzorem (19.5) w granicach od 0 (potencjał mierzony jest względem powierzchni płytki ujemnej) do d (odległość płytki dodatniej) otrzymamy

$$W = Q_p E d, \tag{19.7}$$

a potencjał względny (19.6) wyrazimy wzorem

$$E = U_w/d. \tag{19.8}$$

19.1. POTENCJAŁ ELEKTRYCZNY

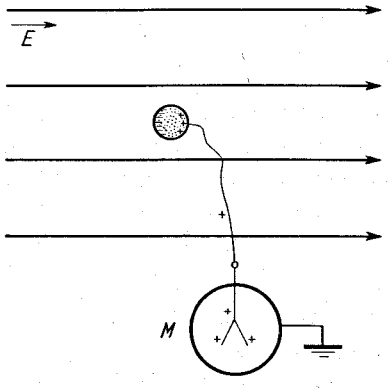
Cel: wyznaczenie przebiegu potencjału elektrycznego między okładkami kondensatora płaskiego za pomocą sondy płomykowej.

Przyrządy: zasilacz wysokonapięciowy, mierniki elektryczne (§ 18.01–18.03).

Zagadnienia: napięcie i potencjał (§ 19.01; S3, § 4; P2, § 1.12–25; J, § 17.10–13), elektrostatyka (S3, § 1–5; P2, § 2.1–4, 2.11, 2.30–35; J, § 17.1–7, P3, rozdz. 1).

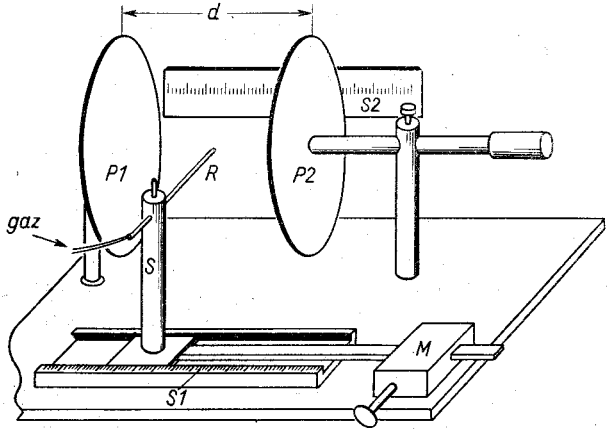
Wprowadzenie

W ciele próbnym, twz. przewodniku umieszczonym w polu elektrycznym, czyli tzw. sondzie, indukują się ładunki (rys. 19.3) i jego potencjał jest różny od zera. Pomiar tego potencjału jest trudny, bowiem każdy miernik nawet elektrostatyczny wychyli się dopiero po wprowadzeniu ładunków elektrycznych. Stąd po podłączeniu miernika część ładunków odpływa z ciała próbnego, a tym samym zmienia się jego potencjał. Celem uzyskania niesfałszowanego wyniku, należy odpływające ładunki uzupełnić. Istnieje kilka sposobów doprowadzania do równowagi stanu zakłóconego pomiarem: dostarczenie ładunku za pomocą płomienia sondy płomykowej, odrzucenie zbędnych ładunków za pomocą odrywających się od sondy kropel przy badaniu sondą kroplową, stosowanie zaostrzonych sond. Ten ostatni rodzaj stosować można w bardzo silnych polach.



19.3. Sonda ładuje się w polu elektrycznym.

W omawianym doświadczeniu stosuje się sondę płomykową. Płomień jest źródłem dużej ilości jonów obydwu znaków i dostarcza ładunków, które odpłynęły do przyrządu pomiarowego. Pamiętać jednak musimy, że również płomień zakłóca pole; powinien on być bardzo mały, by zakłócenia były nieznaczne.



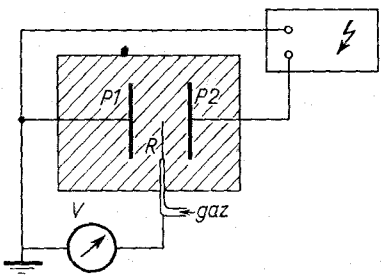
19.4. Aparatura do badania rozkładu potencjału między płytkami kondensatora płaskiego.

Aparatura

Między okładkami kondensatora płaskiego *P1*, *P2* (rys. 19.4) umieszczono sondę *R*, która jest bardzo cienką rurką, przez którą przepływa gaz świetlny. Koniec sondy znajduje się na osi symetrii płytek. Gaz pali się, tworząc na końcu rurki maleńki płomyk. Sonda zamocowana jest na izolowanym statywie *S*, który można przesuwać wzdłuż osi kondensatora za pomocą mechanizmu *M*. Odległość *d* płytek kondensatora można zmieniać; odczytuje się ją na skali *S2* wyrytej na zwierciadle dzięki czemu unika się błędu paralaksy (§ 18.03) i można kontrolować równoległość ustawienia płytek. Położenie sondy odczytuje się na skali *S1* lub na *S2*. Całość osłonięta jest oszkloną gablotą zaopatrzoną w automatyczny wyłącznik, który wyłącza prąd zasilający w chwili, gdy gablotę się otwiera, zabezpieczając przed porażeniem. Źródłem wysokiego napięcia jest elektroniczny zasilacz. Potencjał mierzymy woltomierzem elektrostatycznym.

Pomiary

Płytki kondensatora ustawiamy w sposób zapewniający wzajemną równoległość przy zadanej z góry odległości, następnie łączymy obwód elektryczny według schematu 19.5, włączamy gaz i zapalamy sondę, zamykamy szafkę, zwalniamy wskazówkę woltomierza i kontrolujemy jego ustawienie (jeżeli woltomierz nie jest ustawiony poziomo, jego wskazówka nie wskazuje zera). Włączamy zasilacz wysokiego napięcia nastawiając najwyższe napięcie i mierzymy potencjał przynajmniej dla 10-ciu punktów rozłożonych równomiernie wzdłuż przestrzeni między okładkami. W skrajnych położeniach sonda powinna dotykać okładki. Podobne pomiary wykonujemy dla dwóch innych napięć, a następnie wszystkie wymienione dotąd pomiary powtarzamy przy dwóch innych odległościach płytek ($4\ \text{cm} < d < 10\ \text{cm}$).



19.5. Schemat połączeń układu do badania rozkładu potencjału.

Obliczenia

Dla każdego pomiaru obliczamy odległość *l* sondy od ujemnej płytki kondensatora oraz wartości średnie potencjału. Wykreślamy zależności *U(l)* dla wszystkich badanych napięć i odległości między płytkami. Obliczamy nachylenia prostoliniowych odcinków uzyskanych krzywych, które zgodnie z definicją (19.8) są równe natężeniu pola elektrycznego. Odpowiadamy na pytanie: dlaczego potencjał między okładkami kondensatora przy dużym odstępie płytek nie zmienia się liniowo.

19.2. PRZENIKALNOŚĆ DIELEKTRYCZNA PRÓŻNI

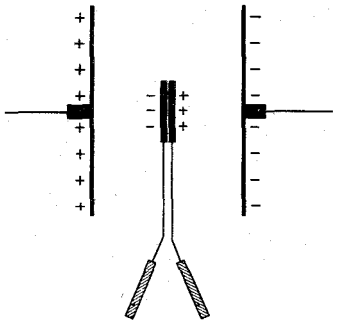
Cel: wyznaczenie przenikalności dielektrycznej próżni (ε_0) przez pomiar natężenia pola elektrycznego i przesunięcia dielektrycznego w przestrzeni między okładkami kondensatora.

Przyrządy: zasilacz wysokiego napięcia i woltomierz elektrostatyczny (§ 18.01).

Zagadnienia: napięcie i potencjał (§ 19.01; S3, § 4; P2, § 1.12–25; J § 17.10–13), elektrostatyka (S3, § 1–5; P2, § 2.1–4, 2.11, 2.30–35; J, § 17.1–7; P3, rozdz. 1).

Wprowadzenie

Obojętny elektrycznie przewodnik umieszczony w polu elektrycznym doznaje przesunięcia ładunków elektrycznych w sposób pokazany na rys. 19.6. Natychmiast po zniknięciu pola znikają również ładunki i przewodnik jest znowu elektrycznie obojętny. Zjawisko powyższe nazywamy zjawiskiem indukcji elektrycznej. Ciało naładowane

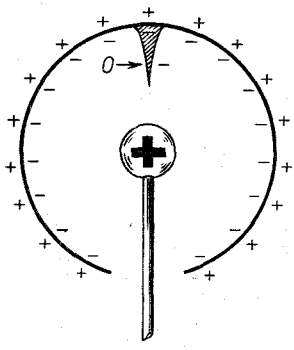


19.6. Płytki próbne w polu kondensatora.

w sposób pokazany na rys. 19.6, gdy na jednym końcu gromadzą się ładunki ujemne, a na drugim dodatnie, nazywamy dipolem elektrycznym. Wielkością charakteryzującą dipol jest jego dipolowy moment elektryczny definiowany jako iloczyn ładunku zgromadzonego na jednym z biegunów i odległości między biegunami

$$p = Ql. \tag{19.9}$$

Odległość l mierzymy od ładunku ujemnego do dodatniego. Zgodnie z wzorem (1.15) przesunięcie elektryczne D jest stosunkiem ładunku Q_i zaindukowanego na jednym



19.7. Zasada działania wiaderka Faradaya.

z końców przewodnika do powierzchni S tego przewodnika mierzonej prostopadle do wektora natężenia pola

$$D = Q_i/S. \tag{19.10}$$

Szczególny przykład zjawiska indukcji elektrycznej pokazano na rys. 19.7. Wprowadzając ładunek do wnętrza kuli powodujemy, że na zewnętrznej jej powierzchni indukuje się dokładnie taki sam ładunek $+Q$ jaki wprowadziliśmy do wnętrza. Po dotknięciu kulką, na której wprowadziliśmy ładunek, ostrza O następuje neutralizacja ładunku kulki z ujemnym ładunkiem indukowanym na wewnętrznej powierzchni kuli. W efekcie końcowym całkowity ładunek $+Q$ zostaje przeniesiony na powierzchnię kuli. Opisany powyżej sposób przekazywania ładunku zaproponował Faraday. Naczynie, któremu ładunek przekazujemy nazywamy wiaderkiem Faradaya (nie musi ono być kulą).

Aparatura

Celem wyznaczenia przenikalności elektrycznej próżni w dowolnym punkcie pola, zgodnie z wzorem (1.16), musimy zmierzyć natężenie pola elektrycznego E i przesunięcie elektryczne D. Natężenie pola elektrycznego pomiędzy okładkami kondensatora płaskiego wyraża się wzorem (19.8), natomiast przesunięcie elektryczne, wzorem (19.10). Sonda metalowa umieszczona w polu staje się wprawdzie dipolem elektrycznym, lecz jej ładunki neutralizują się poza obszarem pola. Zachodzi konieczność trwałego rozdzielenia ich jeszcze w polu. Z tego powodu sonda składa się z dwóch, osadzonych na izolowanych uchwytach, płytek o powierzchni przekroju S (rys. 19.6). Płytki wprowadzamy w obszar pola w taki sposób, by linie sił pola elektrycznego były prostopadłe do ich powierzchni. Wtedy obydwie płytki złączone ze sobą całą powierzchnią S spełniają rolę jednej sondy. Celem rozdzielenia zaindukowanych ładunków wystarczy rozdzielić płytki. Do pomiaru ładunku jednej z płytek stosujemy zaopatrzony w wiaderko Faradaya elektrometr o znanej, możliwie małej pojemności C. Wtedy zgodnie z (1.11)

$$Q = CU, \tag{19.11}$$

gdzie U oznacza wskazanie elektrometru. Pomiary wykonujemy w przestrzeni między płytkami kondensatora płaskiego, w której panuje pole jednorodne. Napięcie czerpiemy z zasilacza lampowego (15 kV). Odległość między okładkami kondensatora mierzymy miarką milimetrową.

Pomiary

Kondensator łączymy z zasilaczem w sposób pokazany na rys. 19.5, mierzymy odległość d pomiędzy okładkami, średnicę płytek — $2r$, oraz dobieramy położenie elektrometru w taki sposób, by najkrótszą drogą przenosić ładunek. Elektrometr i kondensator powinny znajdować się na płycie z wosku zapewniającej dobrą izolację elektryczną. Po włączeniu zasilacza złączone płytki wprowadzamy między okładki kondensatora. Po ich rozłączeniu wysuwamy je z obszaru pola i jedną przenosimy do elektrometru. Czynimy to ostrożnie, by płytek nie zetknąć, nie dotknąć nimi kondensatora lub brzegów wiaderka Faradaya. Po przekazaniu ładunku obydwie płytki uziemiamy dotykając nimi metalowych części obudowy zasilacza i równocześnie obserwujemy wychylenie

elektrometru. Jeżeli jest ono małe, to czynności powtarzamy N-krotnie, aż do uzyskania mierzalnego wychylenia. Po odczytaniu wychylenia rozbrajamy elektrometr za pomocą „rozbrajacza", a wszystkie wymienione czynności powtarzamy. Analizujemy uzyskane wyniki, planujemy minimalne ilości pomiarów, a następnie je wykonujemy. Wszystkie pomiary powtarzamy przy innej odległości d pomiędzy płytkami kondensatora. Mierzymy i zapisujemy napięcie zasilające oraz pojemność elektrometru.

Obliczenia

Dla każdego pomiaru obliczamy napięcie $U = U_N/N$, a następnie wartość $\overline{U}$ uśrednioną dla wszystkich pomiarów wykonanych przy tej samej odległości d. Ostateczny wzór na ε_0 otrzymamy, podstawiając do (1.16) wyrażenie (19.10) i (19.11) otrzymując $D = C\overline{U}/S$, gdzie $S = \pi(2r)^2/4$ ($2r$ — średnica płytek próbnych), a na E wyrażenie (19.8). Stąd otrzymujemy

$$\varepsilon_0 = \frac{4C\overline{U}d}{\pi(2r)^2 U_w}.$$

Niezależnie obliczamy natężenie pola elektrycznego $E = U_w/d$ i przesunięcie elektryczne $D = 4C\overline{U}/\pi(2r)^2$. Jako wynik końcowy przyjmujemy wartość ε_0 uśrednioną na obydwie serie pomiarów. Błąd $S_{\overline{U}}$ oraz $S_{\overline{\varepsilon_0}}$ obliczamy dla jednej serii pomiarów i przyjmujemy, taki sam błąd dla wyniku końcowego.

19.3. ŁADUNEK KONDENSATORA

Cel: wyznaczenie ładunku kondensatora z krzywej rozładowania, obliczenie pojemności kondensatora oraz oporu obwodu.

Przyrządy: źródło prądu (§ 4.1), mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki (§ 4.2), sekundomierz (§ 3.5).

Zagadnienia: prawa przepływu prądu (S3, § 36–38; P2, § 1.33–1.42; J, 18.1–3), elektrostatyka (§ 19.01; S3, § 1–14; P2, § 2.1–5; J, § 17.1–17).

Wprowadzenie

Pojemnością nazywamy stosunek ładunku zgromadzonego na okładkach do napięcia panującego na zaciskach, co możemy zapisać w dogodniejszej postaci

$$Q = CU. \tag{19.12}$$

Wprowadzając dodatkowy ładunek dQ spowodujemy wzrost napięcia o dU i równanie (19.12) przyjmie postać

$$Q + dQ = C(U + dU).$$

Odejmując stronami równanie (19.12) od ostatniego równania otrzymamy

$$CdU = dQ, \qquad C = \frac{dQ}{dU}. \tag{19.13}$$

Załóżmy, że kondensator, na którego okładkach panuje napięcie U_0 rozładowujemy przez opór R. Wtedy ubytek ładunku zgodnie z wzorem definicyjnym ($dQ = I\,dt$) wynosi

$$-dQ = I\,dt,$$

a ponadto zgodnie z prawem Ohma ($U = RI$) mamy

$$dU = RdI.$$

Podstawiając ostatnie dwa związki do równania (19.13), otrzymamy

$$RCdI = -Idt.$$

Porządkując powyższe wyrażenie i całkując w granicach od 0 do t, otrzymamy

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}\int_{0}^{t} dt.$$

Po scałkowaniu równość przyjmuje postać

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{1}{RC}t \text{ lub } I = I_0\exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \tag{19.14}$$

W przypadku ładowania kondensatora wzór powyższy przyjmuje postać

$$I = I_0\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]. \tag{19.15}$$

Podstawiając $I = U/R$ oraz $I_0 = U_0/R$ do równania (19.14) lub (19.15) otrzymamy wzory, którymi wyraża się spadek napięcia przy rozładowaniu

$$U = U_0\exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \tag{19.14a}$$

lub przy ładowaniu kondensatora

$$U = U_0\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]. \tag{19.15a}$$

Z równania (19.14) obliczyć możemy również całkowity ładunek, jaki zgromadził się na okładkach kondensatora w chwili $t = 0$. Zgodnie z definicją ładunku ($Q = It$) otrzymamy

$$dQ = Idt = I_0\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)dt.$$

Całkując powyższe wyrażenie w granicach od $t = 0$ do $t = \infty$ otrzymamy całkowity ubytek ładunku będący równocześnie powierzchnią zawartą pod krzywą $I(t)$

$$\int_{Q}^{0} dQ = I_0\int_{0}^{\infty}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)dt$$

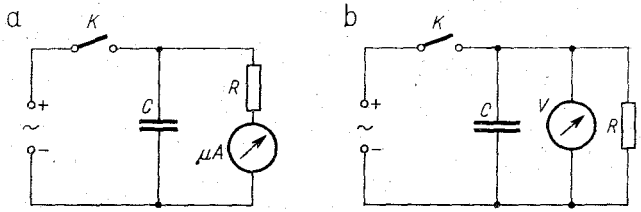
skąd

$$-Q = -RCI_0. \tag{19.16}$$

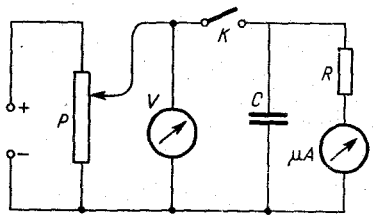
Aparatura i pomiary

Schemat układu służącego do badania krzywej rozładowania kondensatora pokazano na rysunku 19.8. Doświadczenie wykonać można mierząc prąd rozładowania (rys. 19.8a) lub spadek napięcia (rys. 19.8b). W tym ostatnim przypadku musimy stosować wolto-

mierz elektrostatyczny, który sam nie pobiera prądu. Celem usunięcia wpływu wahań napięcia w sieci prądu stałego można stosować układ stabilizacji elektronicznej lub układ z potencjometryczną regulacją napięcia (rys. 19.9).



19.8. Schemat układu do badania krzywej rozładowania kondensatora.



19.9. Układ do wyznaczania krzywej rozładowania kondensatora z potencjometryczną regulacją napięcia.

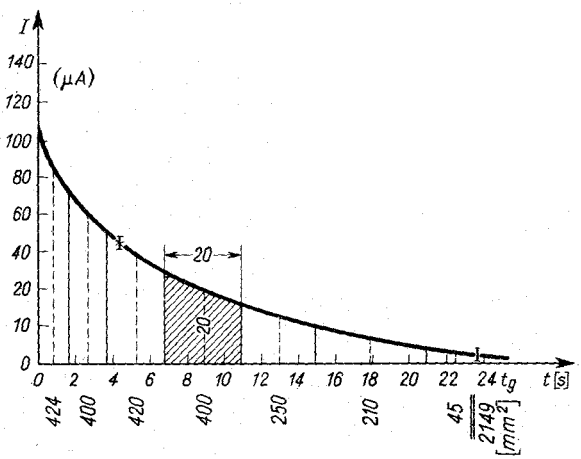
Przed przystąpieniem do pomiarów obliczamy wartość oporu opornika R_1, który musimy włączyć w szereg z mikroamperomierzem, by płynący prąd nie przekroczył zakresu I_m miernika. Zakładając, że opór wewnętrzny miernika $R_w = 0$, otrzymamy $R_1 = U/I_m$, gdzie U oznacza napięcie źródła prądu. Po dobraniu opornika R włączamy prąd i odczytujemy natężenie I_0 oraz napięcie zasilające U. Jeżeli prąd nie przekracza 2/3 skali mikroamperomierza zmniejszamy opór R_1 lub zwiększamy napięcie, by uzyskać wychylenie mikroamperomierza przekraczające 2/3 skali. Następnie dobieramy $k = 10$ do 15-tu wartości natężenia I_k, dla których mierzyć będziemy czas rozładowania t_k. Punkty te powinny pokrywać równomiernie zakres od $I = I_0$ do $I = 0$.

Włączamy prąd i za pomocą potencjometru P regulujemy wartość I_0. Celem wykonania pomiaru dla k-tego punktu pomiarowego równocześnie wyłączamy prąd i włączamy sekundomierz. Mierzymy czas t_k, po którym wskazówka mikroamperomierza przejdzie przez działkę odpowiadającą natężeniu I_k. Dla każdego k pomiar powtarzamy trzykrotnie kontrolując każdorazowo wartość I_0.

Obliczenia

Obliczamy wartości średnie t_k, stosunek I_k/I_0 oraz $\ln(I_k/I_0)$ i wykreślamy zależność $\ln(I/I_0)$ od t. Prostoliniowy przebieg tej zależności dowodzi słuszności równania (19.15), czyli wykładniczego spadku natężenia. Wykreślamy zależność $I(t)$ i obliczamy powierzchnię zawartą pod krzywą, czyli ładunek kondensatora. Powierzchnię tę dzielimy w sposób pokazany na rys. 19.10, dobierając przedziały czasu tak, by każdy wycinek posiadał kształt zbliżony do trapezu. Odcinki czasu Δt nie muszą być równe wzdłuż

całej osi, sumowanie kończymy na współrzędnej t_g odpowiadającej punktowi, w którym odległość krzywej od osi czasu jest równa ΔI. Pole powierzchni poszczególnych pasków wyrażone w cm^2 zapisujemy poniżej osi czasu w ten sposób, by liczby utworzyły kolumnę nadającą się do bezpośredniego sumowania. Następnie sumujemy uzyskane liczby otrzymując pole powierzchni zawarte pod krzywą. Obliczamy ilu $\mu A \cdot s$ odpowiada pole 1 cm^2 wykresu; zapisujemy tę cyfrę na wykresie i wymnażając przez nią pole powierzchni otrzymamy ładunek wyrażony w μC. Znając ładunek, z wzoru (19.16) obliczamy iloczyn RC oraz odwrotność $1/RC$. Zauważymy, że zgodnie z wyrażeniem (19.14) wielkość $1/RC$ jest nachyleniem prostej z wykresu $\ln(I/I_0)$ od t. Określamy tę wielkość z wykresu oznaczając ją $[1/RC]_w$. Obliczamy błąd ΔQ. Błąd powierzchni obliczamy następująco: przyjmujemy, że natężenie prądu I wzdłuż całej krzywej obarczone jest takim samym błędem ΔI. Wobec tego możemy założyć, że błąd jest równy połowie szerokości pasa błędu otaczającego krzywą, a ten z kolei jest w przybliżeniu równy $\Delta I t_g$. Znając błąd pola obliczamy błąd ΔQ, $\Delta(RC)$ oraz $\Delta(1/RC)$. Niezależnie obliczamy błąd $\Delta[1/RC]_w$ nachylenia prostej $\ln(I/I_0)$ w funkcji t. Sprawdzamy zgodność wyników $1/RC$ uzyskanych na obydwu drogach.



19.10. Przykładowe opracowanie krzywej rozładowania kondensatora.

W doświadczeniu możemy ponadto obliczyć pojemność C z wzoru (19.12), przyjmując na U wartość przykładanego napięcia oraz $R = RC/C$. Opór R składa się z oporu opornika oraz oporu wewnętrznego R_w mikroamperomierza. Stąd znając opór opornika, możemy dodatkowo obliczyć opór wewnętrzny mikroamperomierza.

19.4. POMIAR POJEMNOŚCI KONDENSATORA

Cel: wyznaczenie pojemności kondensatora powietrznego i względnej przenikalności dielektrycznej różnych materiałów.

Zagadnienia: elektrostatyka (§ 19.01; S3, § 1–14; P2, § 2.1–39; J, § 17.1–17), własności dielektryczne materii (§ 19.3; S3, § 16–20; P2, § 2.53–55; J, § 17.25; P3, rozdz. 1).

Wprowadzenie

Zgodnie z definicją (1.11) pojemnością C nazywamy stosunek ładunku Q zgromadzonego na okładkach kondensatora, do napięcia U_w panującego między jego okładkami

$$C = Q/U_w.$$

Podstawiając na U_w wyrażenie (19.8), a na $Q = \sigma S$, gdzie σ — gęstość powierzchniowa ładunku, a S — powierzchnia płytek, otrzymamy

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \tag{19.17}$$

Gdy między okładkami umieścimy środowisko o względnej przenikalności dielektrycznej ε_r wzór (19.17) przyjmie postać

$$C_r = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}. \tag{19.18}$$

Tak więc pojemność kondensatora jest wprost proporcjonalna do powierzchni jego płytek, a odwrotnie proporcjonalna do ich odległości. Zależy ona również od środowiska wypełniającego przestrzeń między okładkami. Własność tę wykorzystujemy do wyznaczenia względnej stałej dielektrycznej ε_r.

Aparatura

Istnieje kilka sposobów pomiaru pojemności, spośród których najważniejszą rolę spełniają różne pomiary mostkowe i pomiar w obwodzie rezonansowym. W tym ostatnim przypadku mierzony kondensator jest elementem obwodu rezonansowego LC generatora (§ 26.02). Ponieważ zgodnie z wzorem Thomsona (26.8) częstość generatora wynosi $\omega = 2\pi\sqrt{LC}$, pojemność kondensatora decyduje o częstości. Znając częstość i indukcję własną obliczyć można pojemność. W miernikach produkowanych na tej zasadzie istnieje tzw. detektor częstości i układ, który pozwala wprost na mierniku odczytać pojemność. Mierniki takie posiadają kilka zakresów pomiarowych. W doświadczeniu stosować można wychyłowy miernik pojemności WMP2, który ma cztery zakresy pomiaru pojemności: 0–3 pF, 0–10 pF, 10 pF + Ca, gdzie Ca można dobierać w granicach od 0 do 82 pF oraz 0–5000 pF. Pierwsze trzy zakresy mają skalę liniową, a ostatni — logarytmiczną z wartością 200 pF w połowie skali. Dokładność miernika wynosi ok. 3 % na pierwszych trzech zakresach i 20 % na czwartym zakresie. Po włączeniu miernika do sieci musimy poczekać około 15 minut do czasu nagrzania się lamp i ustalenia jego warunków pracy. Nastawiamy zakres pomiaru dla jednego z pierwszych trzech zakresów za pomocą pokrętła „zero", którym sprowadzamy wskazanie do zera i wtedy możemy przystąpić do pomiaru. Na zakresie czwartym poza ustaleniem zera zwieramy na krótko zaciski pomiarowe i pokrętłem „∞" ustalamy wskazanie dokładnie na nieskończoność. Położenie zera należy skorygować po każdej zmianie zakresu. Zakres pomiarowy trzeci mierzy różnicę między pojemnością badaną Cx a dodatkową pojemnością Ca, którą nastawiamy na mierniku. Warunkiem poprawnego pomiaru jest, by $Cx - Ca$ było mniejsze od 10 pF. Przy podłączeniu badanego kondensatora należy

zwrócić uwagę na to, by zewnętrzna okładka kondensatora podłączona była do uziemionego zacisku. Miernik ma dodatkowy zakres S służący do sprawdzania samego miernika i przy pomiarach nie jest stosowany.

Pomiary

Włączamy miernik do sieci prądu przemiennego i po odczekaniu 5–10 minut rozpoczynamy próbne pomiary. Dobieranie zakresu pomiarowego rozpoczynamy od zakresu czwartego. Nastawiamy „zero", a następnie zwieramy zaciski Cx i nastawiamy wskazanie ∞. Podłączamy mierzony kondensator do zacisków Cx i odczytujemy pojemność. Gdy nie przekracza ona 90 pF w dalszych pomiarach stosujemy zakres trzeci, lub dla małych pojemności zakresy pierwszy lub drugi. Wykonujemy następujące pomiary. Badamy wpływ odległości d płytek na pojemność kondensatora płytkowego, płaskiego. Mierzymy pojemność C_d kondensatora płytkowego dla 10 do 15-tu różnych odległości d. Odległości mierzymy linijką. Pomiary powtarzamy dwu- lub trzykrotnie. Badamy wpływ różnych ciał wkładanych między okładki kondensatora. W tym celu pomiędzy okładki wkładamy płytkę badanego materiału, zmniejszamy d do minimum i wykonujemy pomiar pojemności C_r. Po wykonaniu tego pomiaru wysuwamy badane ciało nie zmieniając odległości płytek i powtarzamy pomiar otrzymując C. Pomiary powtarzamy dwukrotnie dla każdej płytki. Analizujemy uzyskany wynik i planujemy właściwą liczbę pomiarów. Ostateczne pomiary C i C_r wykonujemy dla pięciu różnych ciał.

Obliczenia

Wykreślamy zależność $C_d(d)$ i krótko omawiamy przebieg uzyskanej krzywej. Na tym samym wykresie nanosimy krzywą teoretyczną uzyskaną z obliczeń wykonanych według równania (19.18). Wyjaśniamy przyczyny odstępstw przebiegu doświadczalnego od krzywej teoretycznej. Względną przenikalność dielektryczną obliczamy z równania

$$\varepsilon_r = C_r/C,$$

które otrzymamy dzieląc stronami równania (19.18) i (19.17). Obliczamy błędy wyznaczonych przenikalności względnych.

20. PRĄD ELEKTRYCZNY W GAZACH I CIECZACH

20.1. ŁUK ELEKTRYCZNY

Cel: wyznaczenie przebiegu charakterystyki łuku elektrycznego.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki (§ 4.2), źródła prądu stałego (§ 4.1).

Zagadnienia: emisja elektronów (§ 25.01), wyładowania w gazach (S3, § 63–67), prąd stały (§ 17.01; S3, § 36–38; P2, § 1.1–1.33 i 1.34, 1.39; J, § 18.1–8).

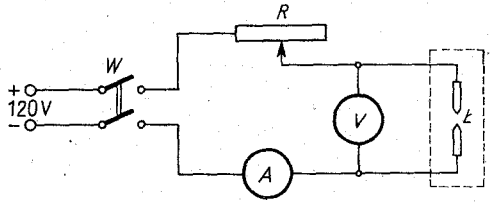
Wprowadzenie

Niezjonizowane powietrze jest dobrym izolatorem i nie przewodzi prądu. Celem uzyskania przewodnictwa trzeba powietrze w sposób ciągły jonizować. Źródłem jonów może być płomień, ciało promieniotwórcze itp. Prądy płynące w obecności czynnika

jonizującego nazywamy prądami niesamoistnymi. W gazie płynąć mogą również prądy samoistne; należy do nich wyładowanie iskrowe zachodzące przy bardzo wysokim napięciu oraz wyładowanie łukowe. Wyładowanie łukowe zachodzi pod normalnym jak i po zwiększonym ciśnieniem po uprzednim zetknięciu, a następnie rozsunięciu na niewielką odległość elektrod, czyli dwóch kawałków metalu lub węgla połączonych z biegunami baterii. Przepływowi prądu towarzyszy silne świecenie gazu oraz elektrod. Temperatura elektrod osiąga 3000°C. Silniej nagrzewa się elektroda dodatnia. Powstaje w niej wygłębienie zwane kraterem. Na katodzie jest szczególnie silnie nagrzany jeden punkt zwany plamką katodową. Istnienie plamki katodowej jest koniecznym warunkiem palenia się łuku; jest to miejsce, z którego na skutek zjawiska Richardsona (§ 25.02) zostają emitowane wolne elektrony. Plamka katodowa powstaje w czasie zetknięcia elektrod. W miejscu zetknięcia istnieje duży opór kontaktowy i wydziela się dużo ciepła (ciepło Joule'a–Lenza). Elektrody nagrzewają się do temperatury, w której może już nastąpić termoemisja. Emitowane elektrony są przyspieszane w polu elektrycznym panującym między elektrodami i wywołują lawinową jonizację powietrza. W obszarze między elektrodami istnieje bardzo silnie zjonizowane powietrze zwane plazmą. Do podtrzymania łuku wystarcza napięcie 30–40 V. Wyładowanie łukowe wykazuje malejącą charakterystykę prądowo-napięciową, oznacza to, że ze wzrostem natężenia prądu maleje napięcie. Zatem łuk zachowuje się przeciwnie niż wynikałoby to z prawa Ohma. Z tego powodu obwód elektryczny łuku musi zawierać opór zabezpieczający; w przeciwnym przypadku natężenie prądu rosłoby nieograniczenie powodując uszkodzenie źródła prądu, lub przewodów doprowadzających prąd.

Aparatura i pomiary

Elektrody łuku zamocowuje się w mechanizmie zaopatrzonym w przesuw pozwalający je zbliżać i oddalać za pomocą pokrętła oddalonego od samych elektrod. Całość umieszcza się w blaszanej osłonie zabezpieczającej przed silnym, szkodliwym dla oka światłem łuku. W doświadczeniu układ elektryczny łączymy według schematu 20.1, w którym W oznacza silnoprądowy wyłącznik dwubiegunowy przeznaczony do pracy z prądami o natężeniu rzędu 10 A.



20.1. Układ do badania łuku elektrycznego.

Przed przystąpieniem do pomiarów musimy zaostrzyć końce elektrod za pomocą pilnika i zamocować je w uchwycie lampy. Włączamy maksymalny opór R, lampę wsuwamy do osłony i włączamy prąd; wtedy wychyli się woltomierz. Zapalamy łuk przez zetknięcie elektrod (płynie prąd) i rozsunięcie ich na niewielką odległość. Po zapaleniu łuku możemy przystąpić do pomiarów, które musimy wykonać bardzo szybko,

gdyż z czasem elektrody upalają się i łuk ulega przerwaniu. Pomiary polegają na odczytaniu i zapisaniu wartości natężenia i napięcia dla 4 do 6 położeń suwaka opornika R, przy natężeniu prądu $I \leqslant 10$ A. Po wykonaniu pomiarów wyłączamy prąd wyłącznikiem W, wyjmujemy lampę z osłony i po ostygnięciu mierzymy linijką odległość l między końcami elektrod. Pomiarów nie da się wykonać z dużą dokładnością. Jest ona mniejsza od dokładności mierników, ponieważ występują duże wahania prądu i napięcia, a pomiary wykonać musimy bardzo szybko.

Pomiary wykonujemy dwu- lub trzykrotnie dla dwóch par elektrod (np. węglowych i mosiężnych). Każda seria pomiarów musi składać się z 4 do 6 punktów pomiarowych.

W drugim etapie doświadczenia lampę Ł zastępujemy opornikiem stałym i wyznaczamy przebieg charakterystyki tego opornika (10 punktów). Oceniamy błędy wykonanych pomiarów. Wyniki ujmujemy w tabele.

Obliczenia

Wykonujemy trzy wykresy. Na dwóch umieszczamy charakterystyki łuku (zależność U od I dla każdego z rodzajów elektrod). Na trzecim zamieszczamy charakterystykę opornika oraz po jednej najlepszej charakterystyce wybranej spośród charakterystyk przedstawionych na pierwszych dwóch wykresach. Z wykresu trzeciego wyznaczamy nachylenie charakterystyki opornika, zgodnie z prawem Ohma jest ono równe oporowi omowemu. Dla pozostałych krzywych obliczamy również nachylenie stycznych do charakterystyki w jej środkowym punkcie. Dyskutujemy zgodność lub odstępstwa wyznaczonych charakterystyk od prawa Ohma.

20.2. ELEKTROLIZA

Cel: wyznaczanie równoważnika elektrochemicznego miedzi i stałej Faradaya.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), opornik suwakowy (§ 4.2), waga analityczna (§ 3.4), źródła prądu (§ 4.1), suszarka (§ 3.10), sekundomierz (§ 3.5).

Zagadnienia: prądy konwekcyjne (S3, § 41–44; J, § 18.12–15).

Wprowadzenie

Wodne roztwory kwasów, zasad i soli ulegają dysocjacji elektrolitycznej polegającej na rozpadzie drobin na jony: dodatnie zwane kationami oraz ujemne aniony. Dodatnimi jonami są metale i wodór, a ujemnymi reszta kwasowa lub grupa wodorotlenowa. Dysocjacja nie jest całkowita; stąd wprowadzamy pojęcie stopnia dysocjacji a będącego stosunkiem liczby drobin zdysocjowanych N_d do ogólnej liczby drobin zawartych w roztworze N,

$$a = \frac{N_d}{N}. \tag{20.1}$$

Stopień dysocjacji zależy od wielu czynników (temperatury, stężenia itp.), z których najważniejszą rolę odgrywa względna przenikalność dielektryczna ε_r rozpuszczalnika. Części drobin substancji dysocjujących są jonami i związane są siłami coulombowskimi:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q_1Q_2}{r^2},$$

a więc proporcjonalnymi do odwrotności względnej stałej dielektrycznej ε_r rozpuszczalnika. Im większe ε_r, tym wyższy stopień dysocjacji. W roztworze następuje również rekombinacja drobin a stopień dysocjacji jest wynikiem równowagi dynamicznej między dysocjacją i rekombinacją.

Jony pochodzące z zdysocjowanych drobin mogą przewodzić prąd elektryczny. Prąd taki różni się od prądu przewodzonego w metalach, ponieważ nie jest to przepływ elektronów, lecz przepływ dużych jonów, czyli prąd konwekcyjny. Stąd też opór elektrolitu jest duży. Poza tym elektrolity zachowują się jak przewodniki tzn. stosują się do prawa Ohma i ich opór zależy od temperatury w taki sam sposób jak dla metali. Całość zjawisk zachodzących przy przepływie prądu elektrycznego przez elektrolity nazywamy elektrolizą. Ponieważ w elektrolitach występują prądy konwekcyjne, towarzyszy im transport masy. Jony oddają swój ładunek elektrodzie, ulegają zobojętnieniu i wydzielają się na elektrodzie lub reagują natychmiast z elektrodą bądź z roztworem. Ilość wydzielonej masy jest proporcjonalna do ładunku Q, który przepłynął przez elektrolit

$$m = kQ \text{ lub } m = kIt. \tag{20.2}$$

Współczynnik proporcjonalności k nazywamy równoważnikiem elektrochemicznym. Równanie (20.2) nazywamy I prawem Faradaya. Oznaczając masę pojedynczego jonu przez m', jego ładunek przez e', a ilość wydzielonych jonów przez N' otrzymamy

$$m = N'm' \text{ oraz } N' = \frac{Q}{e'},$$

skąd

$$m = \frac{m'}{e'} Q. \tag{20.3}$$

i porównując powyższy wzór z (20.2) otrzymamy prostą interpretację równoważnika elektrochemicznego $k = \frac{m'}{e'}$

Ładunek jonu $e' = We$ jest równy iloczynowi wartościowości i ładunku elementarnego, a masa m' jonu jest równa stosunkowi masy atomowej do liczby Avogadra N_A, czyli $m' = \frac{M}{N_A}$. Podstawiając te wielkości do (20.3) otrzymamy

$$m = \frac{1}{N_A e} \frac{M}{W} Q,$$

gdzie wielkość $\frac{M}{W} = R$ nazywamy równoważnikiem chemicznym, a iloczyn $F = N_A e$ stałą Faradaya. Tak więc ostatni wzór przyjmie postać

$$m = R \frac{Q}{F}. \tag{20.4}$$

Wynika stąd, że ładunek $Q = F$ równy stałej Faradaya wydziela masę równą jednemu równoważnikowi chemicznemu $m = R$ dowolnej substancji. Stwierdzenie to jest treścią II prawa Faradaya. Stała Faradaya $F = 96519{,}3$ C · równoważnik^{-1}. Podstawiając (20.2) do równania (20.4) otrzymamy

$$R = kF. \tag{20.5}$$

Aparatura i pomiary

Elektrolizę badamy w naczyniu zwanym woltametrem zawierającym elektrolit, może to być wodny roztwór siarczanu miedzi $CuSO_4$ i miedziane elektrody. Elektrody posiadają kształt płaskich blach o powierzchni ok. 10 cm^2. W woltometrze umieszczamy je w odległości rzędu kilku centymetrów. Układ łączymy według schematu pokazanego na rys. (4.15) włączając woltametr w miejsce odbiornika. Przed przystąpieniem do pomiarów czyścimy elektrody papierem ściernym, obmywamy wodą destylowaną i suszymy za pomocą fenu w strumieniu ciepłego powietrza. Elektrodę, która będzie katodą, ważymy na wadze analitycznej (m_1). Po oczyszczeniu, elektrod nie wolno dotykać palcami, gdyż grozi to zatłuszczeniem. Przed rozpoczęciem właściwego pomiaru włączamy katodę zapasową (nie oczyszczoną). Włączamy prąd i dobieramy warunki pracy. Stosunek natężenia prądu do powierzchni elektrod nie może przekroczyć 1 A/dm^2. Natężenie dobieramy w zależności od powierzchni czynnej elektrod (powierzchni zanurzonej w roztworze). Następnie wyłączamy prąd i zakładamy właściwą elektrodę. Włączamy równocześnie sekundomierz i prąd, który musi płynąć przez 30 minut. W tym czasie ciągle obserwujemy wskazanie amperomierza i wahania prądu natychmiast kompensujemy. Po upływie 30 minut wyłączamy prąd, suszymy elektrodę i ważymy (m_2). Analizujemy uzyskane wyniki i pomiary powtarzamy w warunkach zapewniających optymalny wynik.

Obliczenia

Obliczamy masę m wydzieloną w pierwszym i drugim pomiarze oraz równoważnik elektrochemiczny k z równania (20.2). Jako wynik ostateczny przyjmujemy wartość średnią k. Z równania (20.5) obliczamy stałą Faradaya. Równoważnik chemiczny obliczamy z definicji jako stosunek masy drobinowej do wartościowości. Błąd obliczamy dla jednego z pomiarów.

20.3. RÓWNOWAŻNIK CHEMICZNY

Cel: wyznaczenie równoważnika chemicznego metalu np. miedzi, cynku itp.

Przyrządy: woltametr cieczowy i gazowy, opornik suwakowy (§ 4.2), waga analityczna (§ 3.4), źródło prądu (§ 4.1).

Zagadnienia: dysocjacja elektrolityczna (§ 20.2; S3, § 41–44; J, § 18.12–15), własności dielektryczne ciał (§ 1.3, 19.3).

Wprowadzenie i aparatura

Stosując wzór (20.4) do dwóch substancji otrzymamy

$$m_1 = R_1 \frac{Q_1}{F} \quad \text{oraz} \quad m_2 = R_2 \frac{Q_2}{F}.$$

Jeżeli przez obydwa woltametry przepuścimy taki sam ładunek $Q = Q_1 = Q_2$, to dzieląc obydwa równania stronami otrzymamy

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{20.6}$$

W doświadczeniu przepuszczamy prąd przez szeregowo połączone woltametry, z których jeden jest przystosowany do elektrolizy substancji nie wydzielającej gazów np. $CuSO_4$, $ZnSO_4$, a drugi do elektrolitu wydzielającego gazy np. KOH, NaCl itp. Dysocjacja tych substancji przebiega według schematu

$$CuSO_4 \rightarrow Cu^{++} + SO_4^{--},$$

$$ZnSO_4 \rightarrow Zn^{++} + SO_4^{--},$$

$$NaCl \rightarrow Na^{+} + Cl^{-},$$

$$KOH \rightarrow K^{+} + OH^{-}.$$

Na katodzie zachodzą wtórne reakcje chemiczne w ostatnich dwóch przypadkach:

$$K + H_2O \rightarrow 2KOH + H_2,$$

$$2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2.$$

Na anodzie w każdym przypadku zachodzą reakcje wtórne z materiałem elektrody

$$SO_4 + Cu \rightarrow CuSO_4, \text{ lub z wodą } 4Cl + 2H_2O \rightarrow 4HCl + O_2,$$

$$SO_4 + Zn \rightarrow ZnSO_4, \; 4OH + 2H_2O \rightarrow 4H_2O + O_2.$$

Tak więc na elektrodach wydziela się wodór i tlen.

Masę wydzielonego gazu obliczyć możemy z wzoru

$$m_2 = \varrho_0 V_0, \tag{20.7}$$

gdzie V_0 — objętość w temperaturze $\tau = 0°C$ i przy p_0 — ciśnieniu normalnym. Objętość V_0 obliczamy z równania stanu gazu doskonałego (Clapeyrona):

$$pV = V_0 p_0(1+\alpha\tau) \text{ lub } V_0 = \frac{Vp}{p_0(1+\alpha\tau)}, \tag{20.8}$$

gdzie V jest objętością w temperaturze τ, a p ciśnieniem w tej temperaturze. Do elektrolizy substancji wydzielającej gazy stosujemy woltametr, którego budowę pokazano na rys. 20.2. W rurkach A i B gromadzić się mogą gazy wydzielające się na elektrodach. Zmiany objętości elektrolitu kompensuje jego zapas w zbiorniku Z. Elektrody $+i$ — wykonane są z drutu platynowego lub żelaznego. W woltametrze znajduje się mieszanina gazu (wodoru lub tlenu) oraz pary wodnej. Ciśnienie całkowite jest wtedy zgodnie z prawem Daltona równe sumie ciśnień cząstkowych obydwu gazów pary wodnej p_{H_2O} oraz wodoru lub tlenu p. Suma ciśnień $p_{H_2O}+p$ jest zrównoważona ciśnieniem barometrycznym b oraz ciśnieniem h słupka wody (rys. 20.2)

$$p_{H_2O} + p = b_0 - \frac{h}{13{,}6},$$

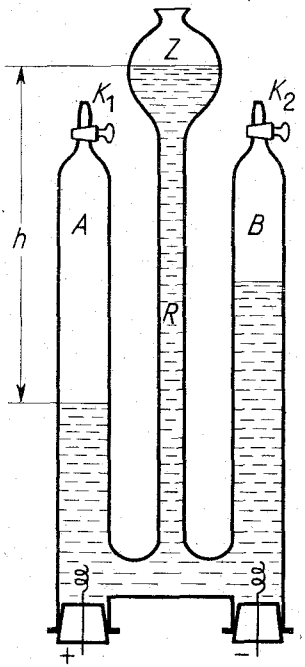
gdzie b_0 — zredukowana wartość ciśnienia, a współczynnik $\frac{h}{13{,}6}$ pochodzi z zamiany ciśnienia słupka wody o wysokości h na ciśnienie słupka rtęci o gęstości 13,6. Stąd ostatecznie

$$p = b_0 - \frac{h}{13{,}6} - P_{H_2O}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (20.8), a następnie do (20.7), otrzymamy

$$m_2 = \varrho_0 \frac{V\left(b_0 - \frac{h}{13{,}6} - p_{H_2O}\right)}{p_0(1+\alpha\tau)}, \tag{20.9}$$

a masę m_1 wyznaczamy przez ważenie katody.



20.2. Woltametr gazowy zwany aparatem Hofmanna.

Pomiary

Łączymy układ według schematu (4.15) łącząc w miejsce odbiornika dwa szeregowo połączone woltametry. Katodę woltametru miedziowego (lub z innego metalu) dokładnie czyścimy papierem ściernym, płuczemy, suszymy strumieniem podgrzanego powietrza z fenu i ważymy na wadze analitycznej. Do woltametru miedziowego włączamy zapasową elektrodę w miejsce katody, a woltametr gazowy wypełniamy elektrolitem. Włączamy prąd i ustalamy jego wartość w ten sposób, by pęcherzyki gazów powstałe w woltametrze gazowym wydzielały się szybko, lecz nie gwałtownie. Wyłączamy prąd, zakładamy właściwą katodę i otwierając kolejno zawory kurkowe K_1 i K_2 (rys. 20.2), usuwamy z woltametru gazowego gaz powstały w czasie próby. Włączamy prąd i przepuszczamy go do chwili, gdy gaz wydzielający się na katodzie wypełni 2/3 do 3/4 części rurki. Wtedy prąd wyłączamy i mierzymy różnice poziomów h słupków wody nad katodą i elektrolitu w rurce R. Mierzymy temperaturę τ elektrolitu równą temperaturze gazu, ważymy katodę woltametru cieczowego i odczytujemy stan barometru rtęciowego b. Oceniamy prawidłowość wykonania pomiarów, a następnie powtarzamy je w warunkach optymalnych.

Obliczenia

Redukujemy wskazanie barometru, a z tablic fizycznych odczytujemy ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze pomiaru τ. Z wzoru (20.9) obliczamy masę m_2 dla obydwu pomiarów. Równoważnik chemiczny R_1 metalu wydzielonego na katodzie obliczamy z wzoru (20.6). Dla wodoru przyjmujemy $R_2 = 1{,}008$ g. Obliczamy błąd masy m_2 i równoważnika chemicznego R_1. Celem sprawdzenia prawidłowości wyniku, równoważnik chemiczny badanego metalu odczytujemy w tablicach. Jeżeli tablice nie zawierają powyższych danych, odczytujemy masę drobinową M i wartościowość W, po czym R obliczamy z wzoru $R = M/W$.

21. PRZEWODNICTWO CIAŁ STAŁYCH

21.01. TEORIA PASMOWA PÓŁPRZEWODNIKÓW

Pasma energetyczne

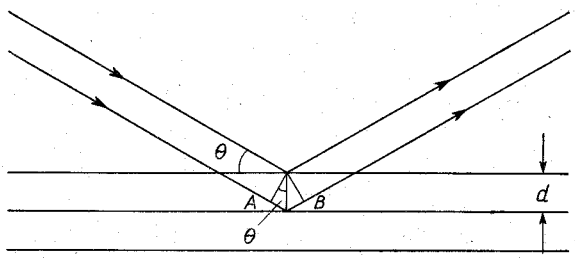
Jako podstawę do dalszych rozważań przyjmujemy następujące wiadomości z dziedziny budowy materii:

I. Cząstki elementarne w pewnych przypadkach zachowują się jak *fale* o długości

$$\lambda = h/p, \tag{21.1}$$

gdzie h — stała Plancka, a $p = mv$ — pęd cząsteczki.

II. Kryształ ma regularną budowę; jego atomy rozmieszczone są w równych odstępach wzdłuż trzech kierunków przestrzennych. Z regularnym rozmieszczeniem atomów związane jest istnienie tzw. *płaszczyzn krystalograficznych*, w których atomy rozmieszczone są również regularnie. Istnieje wiele równoległych płaszczyzn krystalograficznych o określonym rozkładzie atomów; wzajemna odległość d między nimi jest stała.



21.1. Odbicie elektronu od płaszczyzn krystalograficznych.

III. Cząstka padając na kryształ częściowo przechodzi przez płaszczyzny krystalograficzne, a częściowo odbija się od nich. Odbicie zachodzi zgodnie z prawami odbicia. Różnica dróg promieni odbitych wynosi $2d\sin\theta$ (rys. 21.1). Jeżeli różnica dróg jest całkowitą wielokrotnością długości fali

$$2d\sin\theta = n\lambda \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{21.2}$$

otrzymuje się wzmocnienie, czyli maksimum promieni odbitych (*warunek Bragga*).

IV. Każdy elektron zajmuje w atomie ściśle określone wartości energii zwane *stanami* lub poziomami *energetycznymi*. Każdy stan określony jest czterema liczbami

kwantowymi. W atomie nie mogą istnieć dwa elektrony o takiej samej energii, a więc określone takimi samymi czterema liczbami kwantowymi.

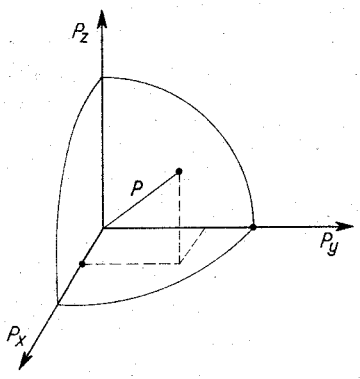
V. W temperaturze 0 K elektrony zajmują wszystkie najniższe stany energetyczne.

VI. W kryształach zewnętrzne elektrony atomów nie należą wyłącznie do atomu rodzimego, lecz i do średnich. Mogą one przechodzić od jednego atomu do drugiego; jest to równoważne przepływowi prądu elektrycznego.

Zgodnie z punktem VI. elektrony z zewnętrznych otoczek zachowują się jak drobiny gazu. Ich zachowanie najwygodniej opisywać w tzw. przestrzeni pędów, w której na osiach współrzędnych odkładamy składowe pędu (rys. 21.2). Każdy elektron w przestrzeni tej zajmuje pewien stan energetyczny, czyli komórkę o objętości h/l, gdzie l jest długością krawędzi kryształu. W temperaturze 0 K elektrony zajmują wszystkie stany (komórki) o najniższych energiach, czyli wypełniają kulę o promieniu $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$. Największą wartość energii

$$E_F = p^2/2m, \tag{21.3}$$

którą mają elektrony z powierzchni kuli nazywamy *energią Fermiego*. Załóżmy, że do kryształu w temperaturze 0 K dostarczamy pewną *porcję, czyli kwant energii*. Energii tej nie może przyjąć dowolny elektron, lecz tylko taki, w którego sąsiedztwie znajdują się niezajęte wyższe stany energetyczne. Stąd też w miarę wzrostu temperatury nie zmieniają swej energii elektrony z wnętrza kuli, na rys. 21.2, lecz tylko elektrony z powierzchni.



21.2. Przestrzeń pędów.

Powierzchnia ta nieco się rozmywa. Zgodnie z rys. 21.2 liczba $N(p) \cdot dp$ elektronów, które mogą posiadać taki sam pęd p, rośnie wraz z kwadratem promienia, czyli $N(p)dp \sim p^2 dp$. Ponieważ wygodniej jest wyrażać liczbę $N(E)dE$ elektronów przez energię ($E = p^2/2m$, $dE = p\,dp/m$), otrzymujemy

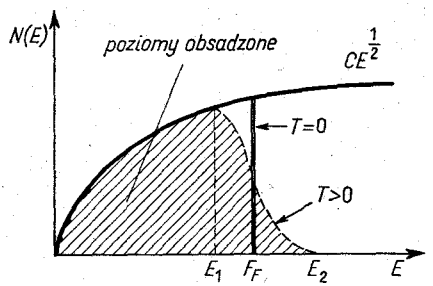
$$N(E)dE \sim p \cdot p\,dp = \sqrt{2m^3}\,\sqrt{E}\,dE, \text{ czyli}$$

$$N(E) = C\sqrt{E}. \tag{21.4}$$

Otrzymane równanie (21.4) przedstawia graficznie rys. 21.3, na którym zaznaczono również wpływ temperatury. W temperaturze pokojowej odstępstwa stanu obsadzenia od stanu dla $T = 0$ K są jeszcze nieznaczne.

Elektron o długości fali λ (21.1), poruszający się w dowolnym kierunku kryształu, przechodzi przez płaszczyzny krysta lograficzne. Zostaje on odbity od tych płaszczyzn

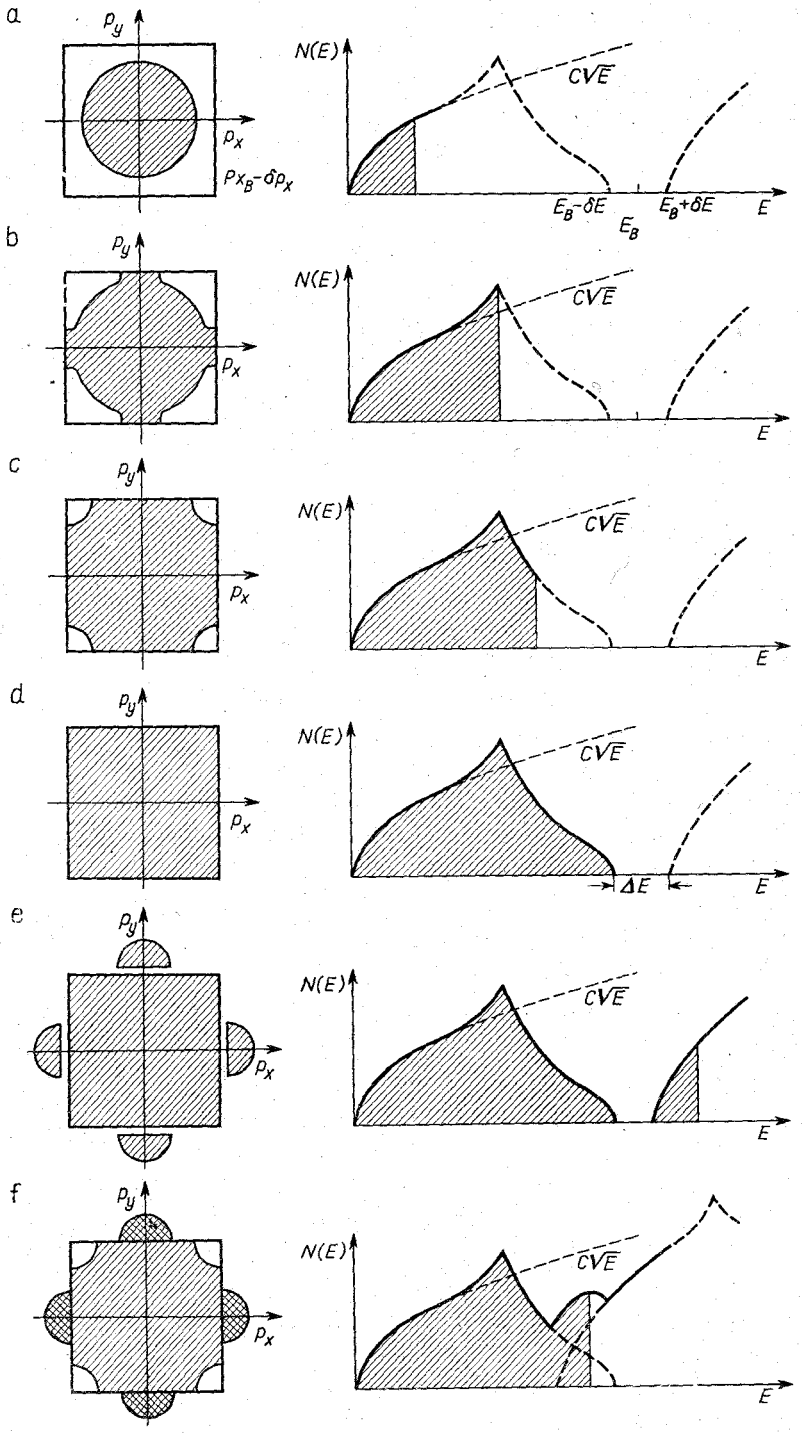
jeżeli spełniony jest warunek Bragga (21.2). Wynikające stąd wnioski rozważymy na przykładzie hipotetycznego kryształu dwuwymiarowego, w którym płaszczyzny krystalograficzne są równoległe do osi p_x i p_y. Załóżmy, że w chwili początkowej nie ma elektronów, a ładunek jonów znajdujących się w sieci jest w jakiś sposób zobojętniony. Kryształ stanowi dla elektronów coś w rodzaju pudełka, w którym mogą się one swobodnie poruszać podobnie jak gaz w zamkniętym naczyniu. Do takiego pudełka wprowadzać



21.3. Krzywa rozkładu elektronów według teorii elektronu swobodnego.

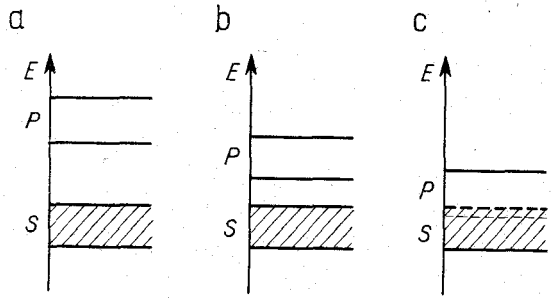
będziemy kolejne elektrony. W miarę wzrostu liczby elektronów stany energetyczne wypełniane są w sposób przedstawiony kolejno na rysunkach 21.4. Lewa strona rysunku 21.4a przedstawia w przestrzeni pędów linię ekwienergetyczną oddzielającą stany zajęte od niezajętych w przypadku, gdy wypełnione są stany o energii znacznie niższej od wartości E_B spełniającej warunek Bragga (21.2). (Warunek Bragga spełniony jest dla pewnego przedziału energii $E_B \pm \delta E$.) Prawa część rysunku 21.4 przedstawia wypełnienie stanów na wykresie $N(E)$. W przypadku rysunku b dla pewnych kierunków osiągnięta zostaje energia spełniająca warunek (21.2). Wtedy linia ekwienergetyczna przestaje być kołem; powierzchnia objęta tą linią jest większa od powierzchni koła, a liczba stanów energetycznych przekracza wartość teoretyczną określoną równaniem (21.4). Przy dalszym wypełnianiu elektronami obszaru ograniczonego prostymi $\pm p_x$ i $\pm p_y$, liczba stanów energetycznych szybko spada poniżej wartości teoretycznej (krzywa $C\sqrt{E}$) i maleje do zera. Obszar w przestrzeni pędów ograniczony liniami, dla których jest spełniony warunek Bragga nazywany *pierwszą strefą Brillouina*. Na wykresie $N(E)$, strefie Brillouina odpowiada wypełnienie pewnego ograniczonego obszaru energii zwanego *pasmem energetycznym*. Dalsze stany energetyczne oddzielone są tzw. pasmem energii wzbronionych ΔE. Na rys. e przedstawiono sytuację, w której rozpoczyna się wypełnienie nowego pasma energii, czyli drugiej strefy Brillouina. Nie zawsze przedział energii ΔE (szerokość pasma wzbronionego) jest równej szerokości. Rysunek 21.4f przedstawia przypadek $\Delta E = 0$. Wtenczas wypełnianie strefy drugiej rozpoczyna się jeszcze wtedy, gdy nie została zapełniona strefa pierwsza, a pasma energetyczne zachodzą na siebie.

W kryształach rzeczywistych kształt stref Brillouina jest bardziej złożony, lecz istnieje układ dozwolonych i niedozwolonych przedziałów energii zwanych pasmami energetycznymi. Rozkład pasm energetycznych przedstawiamy zazwyczaj w sposób pokazany na rys. 21.5. Nie interesujemy się wtedy liczbą elektronów w pasmie, lecz tylko ich

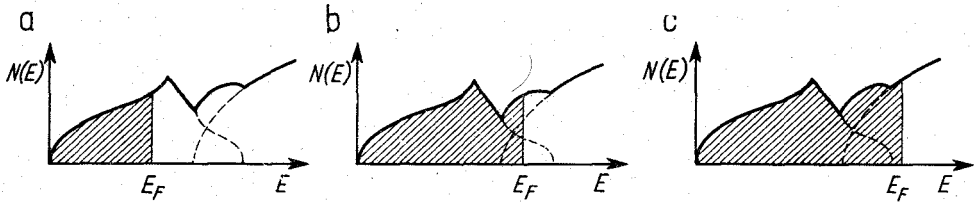


21.4. Sposób wypełniania pierwszej strefy Brillouina w przypadkach istnienia pasma wzbronionego (a–e) oraz nakładania się pasm (f).

energią. Rozkład pasm energetycznych zależy od rodzaju ciała (rys. 21.5). W izolatorach szerokość pasma wzbronionego ΔE jest bardzo duża i praktycznie żaden elektron nie może przejść z wypełnionego całkowicie pasma tzw. *walencyjnego lub podstawowego* (*s*), do pustego pasma przewodnictwa (*p*). W półprzewodnikach szerokość ΔE jest znacznie mniejsza (rys. 21.5b). W przewodnikach wystąpić mogą sytuacje, pokazane na rys. 21.5c i 21.6. Pierwsze strefy Brillouina przekrywają się, a wypełnienie powstałego w ten sposób bardzo szerokiego pasma energetycznego zależy od wartościowości metalu. Na kolejnych rysunkach pokazano to dla metalu jedno-, dwu- i trójwartościowego.



21.5. Tradycyjne przedstawienie pasm energetycznych w izolatorze (a), półprzewodniku właściwym (b) oraz metalu (c).



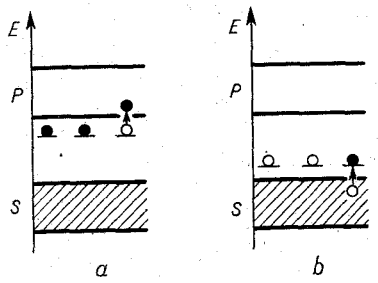
21.6. Wypełnienie stanów energetycznych w metalach jedno- (a), dwu- (b) i trójwartościowych (c).

Przewodnictwo elektronowe i dziurowe

Półprzewodniki właściwe w temperaturze 0 K nie przewodzą prądu, gdyż pasmo podstawowe jest całkowicie zapełnione, a pasmo przewodnictwa jest puste. Jeżeli uda się wprowadzić elektron do pasma przewodnictwa, to może on przewodzić prąd. Przewodnictwo zachodzić może również w przypadku, gdy uda się nam usunąć elektron z pasma podstawowego. Powstałe po nim wolne miejsce zwane *dziurą* może zostać zajęte przez elektron sąsiedni, co jest równoważne przesunięciu dziury. Dziura jest równoważna ładunkowi $+e$, który może poruszać się podobnie jak elektron. Przewodnictwo spowodowane ruchem dziur nazywamy *przewodnictwem dziurowym*, lub *typu p*. Przewodnictwo zachodzące na skutek ruchu elektronów nazywamy *przewodnictwem elektronowym* lub *typu n*. W półprzewodnikach samoistnych obydwa typy przewodnictwa występują w równym stopniu.

Poza półprzewodnikami samoistnymi istnieją półprzewodniki domieszkowe, w których istotną rolę odgrywają atomy bardzo niewielkich domieszek pierwiastków o innej wartościowości. Własności takie wykazują w pierwszym rzędzie pierwiastki grupy

czwartej (czterowartościowe), w których pasmo energii wzbronionych jest stosunkowo duże. Stany domieszkowe wytwarzają dodatkowe lokalne poziomy energetyczne w pasmie wzbronionym. Poziomy atomów pięciowartościowych znajdują się w niewielkiej odległości od pasma przewodnictwa (rys. 21.7a) i elektrony z tych poziomów stosunkowo łatwo przechodzą do pasma przewodnictwa, wtedy występuje przewodnictwo elektro-



21.7. Pasmowy model półprzewodników dziurowych typu *n* (rys. a), oraz typu *p* (rys. b).

nowe. Półprzewodniki takie nazywamy elektronowymi lub typu *n*. Poziomy domieszkowych atomów trójwartościowych leżą nieco powyżej pasma podstawowego i nie są obsadzone. Niewielka energia wystarcza do przeniesienia elektronu z pasma podstawowego do dodatkowego poziomu, w którym zostaje on uwięziony. W pasmie podstawowym wytwarza się dziura, która może przewodzić prąd elektryczny. Półprzewodnik tego typu nazywamy półprzewodnikiem dziurowym lub typu *p*.

21.1. PRZEWODNICTWO CIAŁ STAŁYCH

Cel: zbadanie temperaturowej zależności przewodnictwa metalu, półprzewodnika i stopu oporowego, wyznaczenie szerokości pasma wzbronionego w półprzewodniku.

Przyrządy: mostek Wheatstone'a (§ 17.1), ultratermostat (§ 3.7).

Zagadnienia: krystaliczna budowa ciał (S2, § 76–78; J, § 33.3), teoria pasmowa ciała stałego (§ 21.01; S3, § 48–51, 56; J, § 33. 4; P3, rozdz. 4).

Wprowadzenie

W półprzewodnikach ilość nośników (elektronów i dziur) zależy od temperatury. Zależność powyższa wyraża się wzorem

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\delta E}{kT}\right) \quad \text{dla elektronów},$$

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\delta E}{kT}\right) \quad \text{dla dziur}, \tag{21.5}$$

gdzie n_0 — ilość poziomów w pasmie przewodnictwa, p_0 — ilość poziomów w pasmie podstawowym, δE — szerokość pasma wzbronionego, k — stała Boltzmanna, T — temperatura. Przewodnictwo właściwe jest proporcjonalne do ilości nośników

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p), \tag{21.6}$$

gdzie μ_n i μ_p oznaczają odpowiednio ruchliwość nośników (elektronów lub dziur) zdefiniowaną jako średnia prędkość nośników dzielona przez natężenie pola elektrycznego.

Dla półprzewodników samoistnych $n_0 = p_0$, a ruchliwości μ_n i μ_p zależą od temperatury, lecz te zależności można zaniedbać wobec bardzo dużego wpływu temperatury na koncentrację nośników. Podstawiając (21.5) do (21.6) otrzymamy

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\delta E}{kT}\right), \tag{21.7}$$

gdzie

$$\sigma_0 = en_0(\mu_n + \mu_p).$$

W półprzewodnikach domieszkowych przewodnictwo wyraża się również wzorem (21.7), lecz wtedy δE interpretować należy jako odległość poziomów domieszkowych od pasma przewodnictwa (typ n) lub podstawowego (typ p). Ponieważ zgodnie z definicją przewodnictwo właściwe jest odwrotnością oporu właściwego $\sigma = 1/\varrho$, równanie (21.7) możemy przekształcić, otrzymując

$$\varrho = \varrho_0 \exp\left(\frac{\delta E}{kT}\right).$$

Zależność tego samego charakteru spełniać musi opór półprzewodnika

$$R = R_0 \exp\left(\frac{\delta E}{kT}\right), \tag{21.8}$$

zatem ze wzrostem temperatury maleć musi opór półprzewodnika R. W zastosowaniach praktycznych wzór (21.8) nie jest wygodny ze względu na występującą w nim zależność wykładniczą. Logarytmując to wyrażenie otrzymamy

$$\ln R - \ln R_0 = \frac{\delta E}{kT}, \tag{21.9a}$$

czyli liniową zależność $\ln R$ od $1/T$. Zamieniając logarytmy naturalne na dziesiętne, otrzymamy

$$\log R - \log R_0 = \frac{\delta E}{k \log e} \frac{1}{T}. \tag{21.9}$$

Inną zależność temperaturową wykazują zwykłe metale. W tym przypadku o zależności temperaturowej decyduje zmniejszenie ruchliwości nośników prądu, czyli elektronów. Zależność oporu od temperatury w przybliżeniu opisać można równaniem

$$R = R_0(1 + \beta\tau), \tag{21.10}$$

gdzie R_0 jest oporem w temperaturze τ_0. Jest to wzór przybliżony, stosujący się do niewielkich wartości τ. Współczynnik β nazywamy średnim współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego. Skład stopów oporowych dobiera się w ten sposób, by ich opór praktycznie nie zależał od temperatury.

Aparatura

W doświadczeniu badamy trzy próbki: przewodnik z drutu miedzianego, półprzewodnik, którym jest termistor oraz opornik drutowy. Wszystkie trzy próbki zamocowane są we wspólnej obudowie w ultratermostacie. Opór elektryczny tych ciał mierzymy za

pomocą mostka fabrycznego np. MWT 77a. Opór ten można również wyznaczyć przez pomiar napięcia i natężenia prądu w układzie pokazanym na schematach 4.17–4.19, w którym odbiornikiem jest badany opornik.

Pomiary

a. Pomiar za pomocą ultratermostatu i mostka Wheatstone'a. Łączymy obwód mostka Wheatstone'a według rysunku 17.5, na termometrze kontaktowym nastawiamy temperaturę 20°C i sprowadzamy układ do tej temperatury włączając w zależności od potrzeby chłodzenie lub podgrzewanie. Włączamy mostek i mierzymy opory wszystkich próbek w temperaturze 20°C w sposób pokazany w § 17.1. Podobne pomiary wykonujemy w temperaturach 30, 40, ... 90, 95°C. Gdy nie dysponujemy ultratermostatem, oporniki umieścić możemy w kąpieli wodnej i podgrzewać elektrycznie lub gazem.

b. Pomiar za pomocą woltomierza i amperomierza oraz *ultratermostatu.* Łączymy układ według schematu 4.17 i 4.18 lub 4.19. Pomiary wykonujemy w takich samych temperaturach jak w przypadku a. W każdej temperaturze notujemy wartości U oraz I dla wszystkich badanych próbek. W tym przypadku mierzymy również opór próbek w powietrzu (nie zanurzonych w kąpieli). Badamy jakościowo zależność napięcia U od natężenia I prądu termistora. Zwracamy szczególną uwagę na wskazania amperomierza. Po każdorazowym zwiększeniu napięcia czekamy ok. 1 min na ustalenie wartości natężenia prądu*.

Obliczenia

Opory obliczamy w sposób uzależniony od metody pomiaru ze wzoru dla mostka Wheatstone'a albo z prawa Ohma. Dla termistora obliczamy wartości $\log R$ oraz $1/T$. Wykreślamy na jednym arkuszu zależności $R(\tau)$ dla wszystkich badanych materiałów. Dla półprzewodnika wykreślamy zależność $\log R$ od $1/T$. Obliczamy błędy wielkości R, $\log R$ oraz $1/T$ i nanosimy je na wykresy. Wyznaczamy nachylenie krzywej dla metalu, które zgodnie z równaniem (21.10) jest równe współczynnikowi $R_0\beta$. Obliczamy metodą wyrównawczą nachylenie a prostej z wykresu $\log R$ od $1/T$ i z równania (21.9) obliczamy szerokość pasma wzbronionego δE z wzoru

$$a = \delta E(k\log e)^{-1}.$$

Wykreślamy zależność $U(I)$ z pomiarów wykonanych dla termistora w powietrzu i omawiamy krótko wnioski wynikające z jej przebiegu.

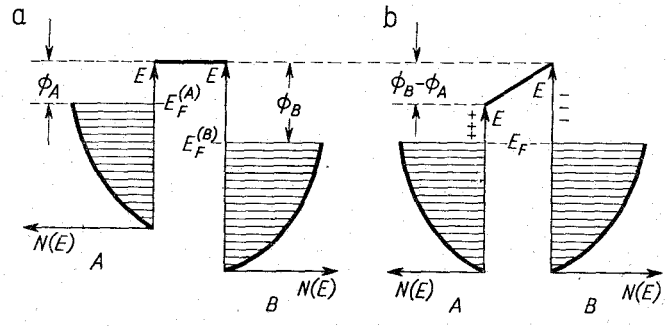
21.2. TERMOOGNIWO

Cel: wzorcowanie termoogniwa w zakresie 0–100°C lub 0–500°C.
Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 20.01–03), kompensator (§ 17.5).
Zagadnienia: przewodnictwo elektryczne (§ 21.01; § S3, 48–55).

* Natężenie prądu powinno być w tym przypadku bliskie maksymalnej wartości dopuszczalnej dla danego termistora.

Wprowadzenie

Każdy metal posiada inny rozkład pasm energetycznych i inny rozkład elektronów w pasmach. Elektron posiadający energię Fermiego może opuścić metal, jeżeli dostarczymy mu tzw. pracy wyjścia Φ, która jest różnicą energii elektronu w próżni i w metalu. Załóżymy, że dwa metale A i B mają różne prace wyjścia: Φ_A i Φ_B ($\Phi_A < \Phi_B$, rys. 21.8a), i różne energie Fermiego: $E_F^{(A)}$ i $E_F^{(B)}$. Jeżeli metale takie zetkniemy, to z uwagi na różnice energii, elektrony metalu A dyfundują do metalu B. W wyniku dyfuzji powierzchnia metalu A ładuje się dodatnio, a ujemnie ładuje się powierzchnia metalu B.



21.8. Obsadzenie poziomów i praca wyjścia dwóch metali niestykających się (a) i po zetknięciu (b).

Stosunkowo niewiele elektronów przejdzie z metalu A do B, ponieważ nie pozwalają na to siły kulombowskie. W wyniku działania dyfuzji i przyciągania elektrostatycznego ustali się równowaga dynamiczna, w której energia Fermiego w obydwu metalach ma taką samą wartość (rys. 21.8b). Wyrównanie energii Fermiego następuje na skutek obniżenia potencjału metalu A względem metalu B o wartość

$$eV_k = \Phi_B - \Phi_A. \tag{21.11}$$

Tzw. potencjał kontaktowy V_k zależy tylko od różnicy prac wyjścia elektronów (e — ładunek elektronu).

W układzie pokazanym na rys. 21.9a istnieje rozkład potencjałów kontaktowych pokazany na rys. 21.9b. Po przyłożeniu napięcia zewnętrznego przez układ płynie prąd o natężeniu I określonym prawem Ohma $I = U/R$, a rozkład potencjału w przewodnikach otrzymamy przez nałożenie potencjału kontaktowego (rys. 21.9b) oraz przyłożonego (rys. 21.9c). W złączach istnieje skok potencjału (21.11). W złączu I istnieje spadek potencjału i musi wydzielać się ciepło w ilości:

$$Q_w = V_P It. \tag{21.12}$$

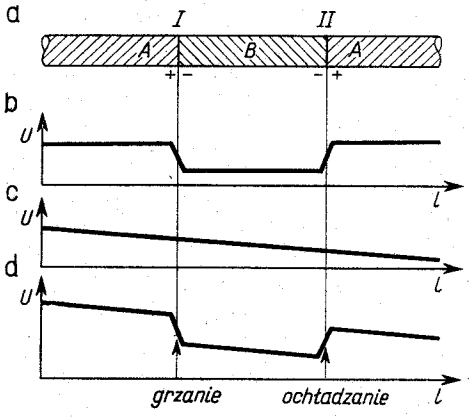
W złączu II istnieje wzrost potencjału. Elektrony mogą pokonać ten skok potencjału pobierając z metali energię cieplną

$$Q_P = -V_P It.$$

Zatem obserwujemy spadek temperatury złącza II. Zjawisko grzania lub chłodzenia złącza nazywamy zjawiskiem Peltiera, a współczynnik V_P — współczynnikiem Peltiera. Mierzymy go w woltach. V_P zależy od potencjału kontaktowego i od temperatury.

Różnice potencjałów powstają również w obwodzie zbudowanym z jednego tylko metalu, jeżeli istnieją w nim różnice temperatur. Źródłem różnic potencjału jest zależność energii Fermiego od temperatury

$$E_F = E_{F_0}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{F_0}}\right)^2\right],$$



21.9. Skoki potencjałów na stykach różnych metali.

gdzie E_{F_0} — energia Fermiego w temperaturze 0 K, k — stała Boltzmanna. Między dwoma częściami przewodu o różnych temperaturach działa mechanizm podobny jak w złączu (rys. 21.8) prowadzący do wyrównania poziomów Fermiego i powstania różnic potencjałów drogą przesunięcia ładunków. Prąd w obwodzie powoduje, zależne od kierunku spadku temperatury ΔT i kierunku prądu I, wydzielanie lub pochłanianie dodatkowej ilości ciepła

$$Q = \sigma I t \Delta T.$$

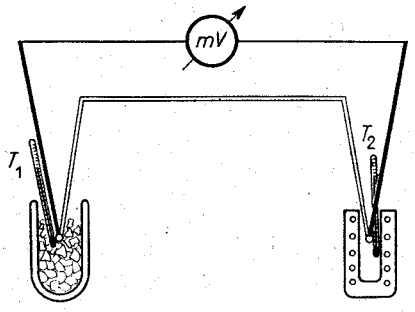
Ciepło to jest wydzielane niezależnie od ciepła Joule'a. Zjawisko nosi nazwę zjawiska Thomsona, a współczynnik σ (V/stopień) nazywamy współczynnikiem Thomsona. Zjawisko uważamy za dodatnie, jeżeli wydzielanie ciepła następuje w przewodniku, w którym kierunek prądu jest zgodny z kierunkiem spadku temperatury. Gdy w takim przypadku następuje pochłanianie ciepła, zjawisko nazywamy ujemnym.

W obwodzie zamkniętym utworzonym przez jeden przewodnik, w którym w różnych częściach panują różne temperatury, suma sił elektromotorycznych powstałych na skutek zjawiska Thomsona jest równa zeru. Podobnie w obwodzie utworzonym z dwóch metali złączonych w dwóch punktach, w przypadku, gdy obydwa złącza pozostają w tej samej temperaturze wzrost siły elektromotorycznej w zjawisku Peltiera na złączu *II* jest równy jej spadkowi na złączu *I*. Tak więc w obydwu przypadkach samo zjawisko nie powoduje przepływu prądu. Potencjały kontaktowe stają się źródłem prądu w obwodzie 21.10 składającym się z dwóch metali w przypadku, gdy złącza utrzymujemy w różnych temperaturach. Ze względu na zależność napięcia kontaktowego od temperatury wzrost potencjału $V_P(T_2)$ w punkcie *II* nie jest równy spadkowi $V_P(T_1)$ w punkcie *I*. Otrzymujemy wypadkową siłę elektromotoryczną

$$E_k = |V_P(T_2) - V_P(T_1)|.$$

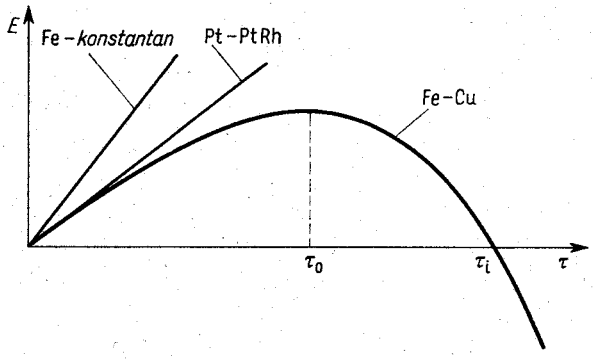
W takim obwodzie siła elektromotoryczna wywołana zjawiskiem Thomsona jest różna od zera. Jeżeli oznaczymy odpowiednio przez σ_A i σ_B współczynniki Thomsona metali A i B, wtedy siła elektromotoryczna V_T równa się $(\sigma_B - \sigma_A)\Delta T$. Ostatecznie w obwodzie będzie istniała siła termoelektryczna E będąca sumą obydwu składowych:

$$E = V_P(T_2) - V_P(T_1) + (\sigma_B - \sigma_A)\Delta T. \tag{21.13}$$



21.10. Obwód termoogniwa.

Wielkość E nazywamy siłą termoelektryczną, a układ z rysunku 21.10 termoogniwem, termoelementem lub termoparą. Samo zjawisko nazywamy zjawiskiem Seebecka. Jak mówiliśmy, na siłę termoelektryczną składają się dwa składniki, z których każdy w inny sposób zależy od temperatury. Stąd też siła termoelektryczna zmienia się z temperaturą złącz. W niektórych przypadkach (np. Fe-Cu, Fe-Ag itp.) zależność $E(\tau)$ przyjmuje postać przedstawioną na rys. 21.11, tzn. że ze wzrostem temperatury E



21.11. Przebieg siły termoelektrycznej w różnych termoogniwach.

wzrasta, dla pewnej temperatury τ_0 zwanej temperaturą obojętną osiąga wartość maksymalną, a następnie maleje zmieniając znak w tzw. temperaturze inwersji τ_i. Ze względów praktycznych doniosłą rolę odgrywa fakt, że wypadkowa siła termoelektryczna nie zmienia się, gdy w obwód włączymy dodatkowy przewodnik, pod warunkiem, że miejsca jego połączeń posiadają tę samą temperaturę. Dzięki tej własności w obwód termoogniwa możemy włączyć miernik elektryczny, który nie wpływa na przebieg zjawiska. W zjawisku termoelektrycznym metal A nazywamy elektrododatnim względem metalu B ($E_{AB} > 0$), jeżeli prąd termoelektryczny w metalu A płynie od spojenia cieplejszego do chłodniejszego.

Aparatura

Istnieje kilka możliwych sposobów badania termoogniw. Różnią się one sposobem pomiaru siły termoelektrycznej oraz sposobem wyboru wzorcowych temperatur. Pomiary siły termoelektrycznej możemy wykonać bardzo dokładnie jedynie za pomocą kompensatora prądu stałego. W mniej dokładnych pomiarach stosujemy miliwoltomierze magnetoelektryczne. Wzorcem temperatury są temperatury przemian (krzepnięcia) bardzo czystych substancji, np. wody, różnych metali, soli kuchennej itp. Wyznaczanie tych temperatur wykonuje się dokładnie tak samo jak w doświadczeniu 14.3. Stosowanie tego rodzaju wzorców jest bardzo czasochłonne i kłopotliwe. W pracowni fizycznej wykonuje się często pomiary względne przyjmując jako wzorzec termoogniwo Pt-PtRh (platyna, platyna+10% rodu). Z uwagi na stosowany tu metal szlachetny termoogniwo jest bardzo trwałe i wykazuje bardzo dużą stałość siły termoelektrycznej.

Aparatura stosowana do wzorcowania względnego składa się z termoogniwa wzorcowego (Pt-PtRh), termoogniwa badanego, piecyka, w którym uzyskujemy podwyższoną temperaturę, kąpieli o stałej temperaturze (woda z lodem) oraz miliwoltomierza lub kompensatora. Przewody termoogniw są izolowane elektrycznie. Końce gorące znajdują się w cienkich rurkach ceramicznych, a same spojenia gorące obydwu termoogniw znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie, dzięki czemu możemy przyjąć, że w piecu elektrycznym posiadają one taką samą temperaturę. Złącza zimne są również izolowane elektrycznie. Obydwa termoogniwa muszą być od siebie odizolowane, mogą posiadać kontakt elektryczny tylko w jednym punkcie. Z tego powodu zimne złącza nie powinny znajdować się w tej samej kąpieli. W praktyce końcówki są odizolowane od kąpieli rurką ceramiczną lub szklaną, zatopioną na końcu.

Pomiary

W doświadczeniu odczytujemy napięcie termoelektryczne albo wprost na miliwoltomierzu, albo za pomocą kompensatora postępując podobnie jak w doświadczeniu 17.5.

W przypadku pomiarów względnych obydwa termoogniwa podłączamy do dwóch wyjść kompensatora. Ich złącza umieszczamy odpowiednio w kąpieli chłodzącej (woda z lodem) oraz w piecyku elektrycznym. Przygotowujemy do pracy kompensator lub miliwoltomierz, włączamy piecyk i w możliwie krótkim odstępie czasu mierzymy siłę termoelektryczną obydwu ogniw. Siłę elektromotoryczną jednego z ogniw w stałej temperaturze mierzymy wielokrotnie celem ustalenia błędów i zaplanowania optymalnego sposobu pomiaru. Po wykonaniu tych prób sprawdzamy kompensację pomocniczą, podwyższamy nieco temperaturę i powtarzamy pomiary dla obydwu termoogniw. W taki sposób postępując mierzymy siły termoelektryczne obydwu termoogniw co 10–20°C w zakresie od 20 do 500°C.

W przypadku, gdy jako wzorce stosujemy temperatury krzepnięcia ciał, ciała te topimy najpierw w piecu, a gdy są już płynne, wyjmujemy z pieca, umieszczamy w nich termoogniwo i notujemy co 30 s wskazania miliwoltomierza lub kompensatora. Gdy wskazanie nie ulega zmianie w kilku kolejnych pomiarach i zachodzi krzepnięcie, a temperatura jest równa temperaturze krzepnięcia, wtedy zapisujemy wskazanie miernika i nazwę substancji krzepnącej.

Obliczenia

W przypadku pomiarów względnych, z tablic fizycznych odczytujemy temperatury odpowiadające uzyskanym w pomiarach siłom termoelektrycznym termoogniwa Pt-PtRh. W przypadku stosowania metali, z tablic odczytujemy ich temperatury topnienia. Znając już temperatury, wykreślamy zależność siły termoelektrycznej badanych termoogniw od różnicy temperatur. Jeżeli któreś z badanych termoogniw wykazuje zjawisko inwersji, określamy temperaturę punktu obojętnego oraz temperaturę inwersji.

21.3. DIODA PÓŁPRZEWODNIKOWA

Cel: wyznaczenie przebiegu charakterystyki różnych diod.

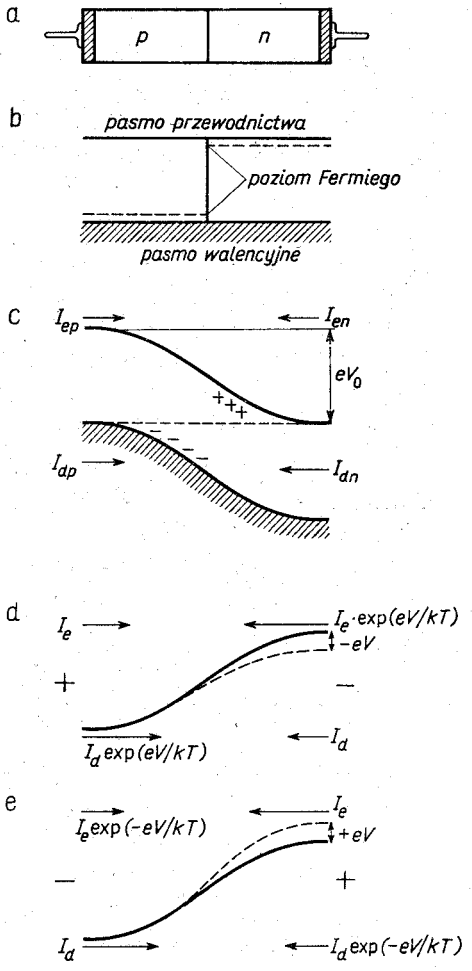
Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–0.3), oporniki (§ 4.2), źródło prądu (§ 4.1).

Zagadnienia: przewodnictwo elektryczne (S3, § 48–52), teoria pasmowa półprzewodników (§ 21.01; J, § 33.4), prostowniki półprzewodnikowe (S3, § 56–58; J, § 33.5–7).

Wprowadzenie

Złączem *p-n* nazywamy układ, w którym półprzewodnik typu *p* ściśle przylega do półprzewodnika typu *n*. Dobre złącze *p-n* nie może być wykonane z dwóch części, gdyż materiał nie byłby wtedy jednorodny. Złącza wytwarza się w jednym kawałku półprzewodnika typu *n* zmieniając typ przewodnictwa w jednej z jego części przez podgrzanie lub napromieniowanie (bombardowanie jądrowe). Granica obydwu części rozciąga się na znacznej szerokości, lecz rozważając własności złącza założymy, że jest ona bardzo ostra (rys. 21.12a). Na rys. 21.12b przedstawiono schemat pasm energetycznych oraz położenie poziomu Fermiego w obydwu częściach złącza. Załóżmy na chwilę, że obydwie części półprzewodnika nie stykają się. W temperaturze $T > 0\,\mathrm{K}$ znaczna część dodatkowych poziomów akceptorowych w części *p* i donorowych w części *n* jest zjonizowana. W pasmie podstawowym części *p* istnieją więc dziury, a w pasmie przewodnictwa części *n* — elektrony. Dziury w części *p* i elektrony w części *n* nazywamy nośnikami większościowymi. Poza nośnikami większościowymi w każdej części znajdują się nośniki mniejszościowe, a więc elektrony w pasmie przewodnictwa części *p* oraz dziury w pasmie podstawowym części *n*. Ilość nośników mniejszościowych zależy jedynie od temperatury i od szerokości pasma wzbronionego. Powstają one na skutek przeskoku elektronu z pasma podstawowego do pasma przewodnictwa. Powstaje wtedy para nośników: dziura i elektron. Występuje również proces odwrotny zwany rekombinacją, polegający na zejściu elektronu z pasma przewodnictwa do pasma walencyjnego, znika wtedy jedna para nośników. W wyniku ustalenia się równowagi dynamicznej między procesami tworzenia oraz rekombinacji nośników, w każdej części złącza istnieje pewna liczba n_{e0} lub n_{d0} nośników mniejszościowych; liczba ta zależy tylko od temperatury. Równowaga obydwu kawałków półprzewodnika zostaje ponownie zachwiana, jeżeli założymy, że obydwie części w pewnym momencie zetkną się. Wtedy zacznie się wyrównywać stężenie nośników większościowych w każdym z pasm: w pasmie przewodnictwa elektrony będą płynąć z *n* do *p*, a w pasmie podstawowym z części *p* będą płynąć dziury do *n*. Jednak przejście każdego elektronu czy dziury ładuje półprzewodnik *p* ujemnie, a półprzewodnik *n* dodatnio, obniżając potencjał części *n* w sposób pokazany na rysunku

21.12c, aż do wyrównania poziomu Fermiego w złączu. Dalszy przepływ ładunków nie jest możliwy, gdyż powstają ładunki przestrzenne przyciągające nośniki i nie pozwalające na ich przepływ. Ładunek przestrzenny jest wynikiem zjonizowania wszystkich poziomów domieszkowych w pobliżu złącza. Równowaga w złączu jest, podobnie jak omawiana przed chwilą równowaga w półprzewodniku, równowagą dynamiczną. W równowadze tej zawsze pewien prąd I_{en} płynie w pasmie przewodnictwa od półprzewodnika n w stronę p, jest to prąd większościowy, lecz równy co do wartości prądowi I_{ep} płynącemu od półprzewodnika p do n ($I_{en} = I_{ep} = I_d$), jest to prąd mniejszościowy.



21.12. Działanie złącza: półprzewodnik p i półprzewodnik n.

Podobnie i w pasmie podstawowym płynie prąd większościowy dziur I_{dp} od półprzewodnika p w stronę n i równy co do wartości, lecz przeciwny prąd I_{dn} płynie od półprzewodnika n do p ($I_{dp} = I_{dn} = I_d$, patrz rys. 21.12c). Prądy mniejszościowe I_{ep} oraz I_{dn} zależą wyłącznie od temperatury i w określonej temperaturze wzrosnąć nie mogą. Prądy większościowe I_{en} oraz I_{dp} mogą wzrastać znacznie, jeżeli nie będzie im przeszkadzał ładunek przestrzenny.

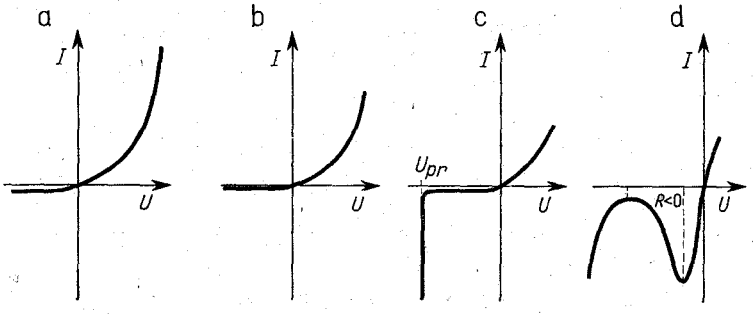
Załóżmy, że do złącza przyłożyliśmy napięcie V łącząc biegun ujemny źródła z półprzewodnikiem n (dodatni z p). Napięcie to obniża potencjał półprzewodnika n w sposób pokazany na rys. 21.12d neutralizując ładunki przestrzenne. Wtedy prądy mniejszościowe nie zmieniają się i nadal wynoszą I_e oraz I_d. Prądy większościowe nie są już hamowane ładunkiem przestrzennym i wzrastają do wartości $I_e\exp(eV/kT)$ oraz $I_d\exp(eV/kT)$. Wypadkowy prąd w pasmie przewodnictwa wynosi więc $[I_e\exp(eV/kT)]-I_e$, a w pasmie podstawowym $[(I_p\exp(eV/kT)]-I_p$. Całkowity prąd $I(V)$ przewodzony przez złącze jest sumą prądów z obydwu pasm i wynosi

$$I_p(V) = (I_e+I_p)[\exp(eV/kT)-1]. \tag{21.14}$$

Wzrasta on wykładniczo wraz z przyłożonym napięciem. W przypadku, gdy złącze podłączymy przeciwnie, a więc ujemny biegun źródła z półprzewodnikiem p, a dodatni z częścią n, wtedy ładunki przestrzenne zwiększają się i potencjał części n wzrasta (rys. 21.12e). Prądy mniejszościowe również i wtedy nie zmieniają się, a prądy większościowe napotykając większy ładunek przestrzenny (i potencjał) maleją do wartości $I_e\exp(-eV/kT)$ oraz $I_d\exp(-eV/kT)$. Wypadkowy prąd $I_z(V)$ płynący przez złącze wynosi wtedy

$$I_z(V) = (I_e+I_p)[1-\exp(-eV/kT)]. \tag{21.15}$$

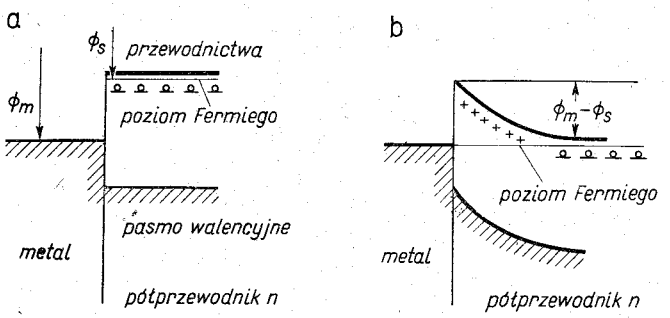
Wzrasta on bardzo wolno z napięciem V i jest mały. Kierunek prądu od półprzewodnika p do n nazywamy kierunkiem przewodzenia (dodatni biegun źródła połączony z półprzewodnikiem p), a kierunek przeciwny nazywamy kierunkiem zaporowym. Prądy $I_p(V)$ oraz $I_z(V)$ nazywamy odpowiednio prądami: przewodzenia i zaporowym. Zależność prądu od przyłożonego napięcia nazywaną charakterystyką złącza przedstawiono na rys. 21.13a. Jak widać z rysunku, złącze posiada właściwości prostujące, przewodząc prąd praktycznie tylko w kierunku przewodzenia.



21.13. Charakterystyki różnych diod półprzewodnikowych typu p-n.

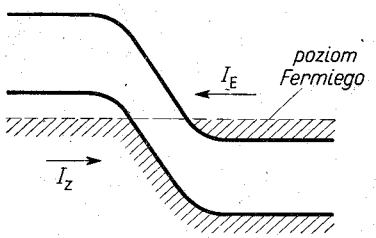
Własności prostownicze wykazuje również złącze metal półprzewodnik (dowolnego typu). Na rys. 21.14 przedstawiono złącze metal-półprzewodnik typu n. Podobnie jak w złączu p-n i tu w wyniku przepływu elektronów z pasma przewodnictwa do metalu ustala się różnica potencjałów i ładunek przestrzenny (rys. 21.14b) w taki sposób, by poziom Fermiego był równy po obydwu stronach złącza. Prąd jest przewodzony, jeżeli biegun dodatni przyłożymy do metalu, a biegun ujemny do półprzewodnika n (kierunek przewodzenia). W praktyce najczęściej stosujemy diody ostrzowe, w których kontakt

metalu z półprzewodnikiem ogranicza się do bardzo małej powierzchni styku ostrza metalu. Diody ostrzowe posiadają bardzo mały prąd w kierunku zaporowym (rys. 21.13b), lecz nadają się tylko do prostowania bardzo małych prądów.



21.14. Rozkład pasm energetycznych w złączu metal-półprzewodnik.

Inną grupę diod stanowią tzw. diody: Zenera i tunelowe lub Esakiego, w których wykorzystuje się prąd w kierunku zaporowym. W diodach tych stosuje się półprzewodniki z bardzo dużą ilością domieszek. Przy dużej ilości domieszek nie jest wypełniona górna część pasma podstawowego półprzewodnika *p*, a w półprzewodniku *n* jest wypełniona dolna część pasma przewodnictwa. W złączu poziom Fermiego przebiega wtedy wewnątrz pasm energetycznych (rys. 21.15), a szerokość bariery potencjału jest bardzo



21.15. Rozkład pasm energetycznych w diodzie Zenera.

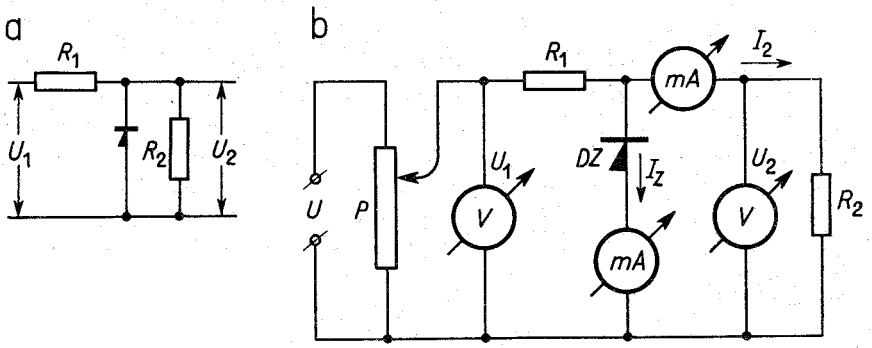
mała. Obydwa te czynniki umożliwiają bezpośrednie przejście elektronów przez barierę wprost z pasma podstawowego półprzewodnika *p* do pasma przewodnictwa w półprzewodniku *n**. Prąd I_Z z pasma podstawowego półprzewodnika *p* do pasma przewodnictwa półprzewodnika *n* nazywamy prądem Zenera. Prąd I_E płynący w kierunku przeciwnym nazywamy prądem Esakiego. W przypadku diody Zenera (rys. 21.13c), w kierunku zaporowym znaczny prąd zaczyna płynąć po przekroczeniu tzw. napięcia progowego U_{pr}, a następnie wzrasta bardzo szybko ze wzrostem napięcia. Diody Zenera wykorzystuje się do stabilizacji napięcia. Stosuje się wtedy układ 21.16a. Każdy wzrost napięcia U_1 powoduje wzrost prądu diody, a tym samym większy spadek na-

* W efekcie tunelowym cząstka elementarna przechodzi przez barierę energetyczną mimo, że jej energia jest niższa od energii bariery. Analogiczny efekt w mechanice polegałby na tym, że piłka pingpongowa posiadająca energię kinetyczną E_k przetoczyłaby się przez wał o wysokości *h* tak dużej, że energia potencjalna piłki na szczycie wału $E_p = mgh$ byłaby większa od $E_k (E_p > E_k)$.

pięcia na oporniku R_1. Napięcie przyłożone do opornika R_2 pozostaje wtedy niemal stałe. W diodzie tunelowej prąd w kierunku zaporowym początkowo wzrasta wraz z napięciem, po czym maleje do pewnej minimalnej wartości, po czym ponownie wzrasta (rys. 21.13d). Na odcinku opadającej części charakterystyki dioda tunelowa posiada ujemny opór rzeczywisty. Diody tunelowe stosuje się do budowy wzmacniaczy, generatorów itp.

Pomiary i obliczenia

Badany prostownik łączymy w miejsce odbiornika w obwodzie pokazanym na rysunku (4.18). Po włączeniu prądu wykonujemy pomiary natężenia prądu dla 10-ciu różnych wartości napięcia przyłożonego w kierunku przewodzenia, a wyniki ujmujemy w tabelę. Dobieramy żądane napięcie za pomocą potencjometru i odczytujemy odpowiadające mu natężenie prądu I. Do wyników pomiarów musimy włączyć punkt $U = 0$ i $I = 0$. Po wykonaniu pomiarów dla kierunku przewodzenia czyli napięć dodatnich, gdy biegun (+) połączony jest z częścią p, wtedy wyłączamy jeden przewód (+) ze źródła, zmieniamy kierunek podłączania zacisków diody i włączamy prąd. Napięcie przyłożone do diody ma wtedy przeciwny znak, czyli $U < 0$. Podobnie jak w przypadku poprzednim pomiary wykonujemy dla 10-ciu różnych wartości U i notujemy natężenie nawet w tym przypadku, gdy jest ono równe zeru. Wykonując pomiary dla jednej z diod musimy stosować tylko jeden zakres miliamperomierza. Opór wewnętrzny miliamperomierza jest porównywalny z oporem diody i na skutek zmiany zakresu miernika zmienia się opór obwodu i nawet przy tym samym napięciu wskazania będą różne.



21.16. Układ do badania diody Zenera; a) zasada stabilizacji, b) układ pomiarowy.

Diodę Zenera łączymy według schematu 21.16b. W układzie powyższym opór R_1 i napięcie U, dobrać musimy w ten sposób, by zabezpieczyć diodę przed zniszczeniem wskutek przegrzania. W oznakowaniu każdej diody zawarta jest wartość stabilizowanego napięcia U_z w woltach oraz dopuszczalna moc prądu M_z. Skoro dysponujemy źródłem prądu o napięciu U wtedy opornik R_1 powinien mieć opór $R_1 = \frac{U}{I_z} = \frac{UU_z}{M_z}$. Celem uzyskania maksymalnej efektywności opornik R_2 powinien pobierać prąd tego samego rzędu co dioda, czyli $R_2 = U_z/I_z = U_z^2/M_z$. Po dobraniu wartości oporników R_1 i R_2 badamy charakterystykę diody, to znaczy zależność $I_Z(U_2)$ oraz U_2 od napięcia

zasilającego U_1, którego wartość dobieramy potencjometrem P. Pomiary wykonujemy przynajmniej dla 10-ciu różnych wartości U_1. W omawianym doświadczeniu wykonujemy wykresy charakterystyk wszystkich badanych diod prostowniczych. Dla diody Zenera wykreślamy jej charakterystykę tzn. zależność $I_Z(U_2)$ przyjmując, że U_2 jest równe napięciu na diodzie. Założenie to nie jest poprawne, ponieważ miliamperomierz posiada własny opór wewnętrzny, który może być porównywalny z oporem wewnętrznym diody i na oporze miernika występuje spadek napięcia. Dla diody Zenera wykreślamy również na jednym arkuszu zależności I_Z, U_2 oraz I_2 od napięcia U_1, z przebiegu tego wykresu wyciągamy wnioski o stabilizującym działaniu diody. Wnioski powyższe opracować musimy pisemnie. Dyskusje błędów ograniczamy do zaznaczenia błędów na wykresach.

21.4. TRANZYSTOR

Cel: wyznaczanie charakterystyki tranzystora w układzie z uziemioną bazą oraz wyznaczanie współczynnika wzmocnienia.

Przyrządy: źródło prądu (§ 4.1), potencjometry (§ 4.2), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

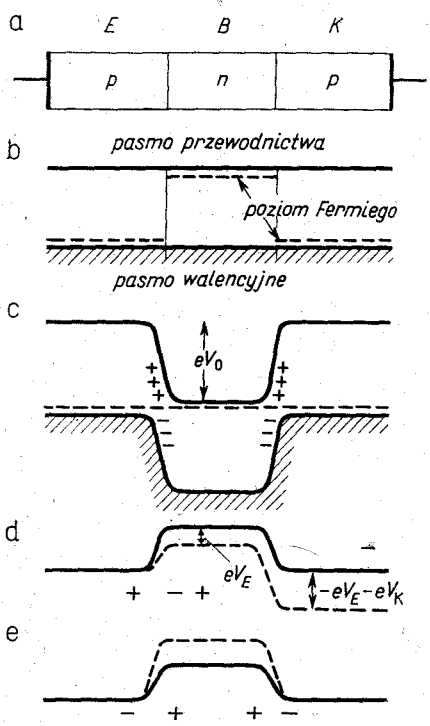
Zagadnienia: przewodnictwo elektryczne (S3, § 48–52), teoria pasmowa półprzewodników (§ 21.01; J, § 33.4), prostowniki półprzewodnikowe (§ 21.01; S3, § 56–58; J, § 33.5–7) oraz wprowadzenie do § 21.3.

Wprowadzenie

Tranzystorem nazywamy układ złożony z trzech warstw półprzewodnika ułożonych w kolejności *p-n-p* (rys. 21.17). Mogą również istnieć tranzystory *n-p-n*. Tak więc tranzystor zawiera dwa złącza *p-n*. Poszczególne warstwy tranzystora nazywamy emiterem E, bazą B (jest nią zawsze warstwa środkowa) i kolektorem K. Baza jest warstwą cienką w porównaniu z drogą, którą przechodzą nośniki nim nastąpi ich rekombinacja. Rozkład poziomów energetycznych w poszczególnych warstwach tranzystora pokazano na rys. 21.17b. Układ z rys. 21.17b nie jest stabilny i na skutek dyfuzji ustala się równowaga dynamiczna, w której na złączach tworzą się podwójne warstwy nośników, a poziom Fermiego jest zrównany dla wszystkich trzech warstw tranzystora (rys. c). Obydwa złącza posiadają właściwości prostownicze i przewodzą prąd tylko w kierunku $p \to n$. W przypadku tranzystora interesujący jest przypadek, gdy złącze emiter-baza polaryzujemy w kierunku przewodzenia, a złącze baza-kolektor polaryzujemy w kierunku zaporowym. Rozkład potencjału w tak spolaryzowanym tranzystorze pokazano na rysunku (21.17d). W taki sposób spolaryzowany tranzystor przewodzi prąd również w obwodzie kolektor-baza, mimo polaryzacji tego złącza w kierunku zaporowym. Interpretacja tego faktu jest następująca. W złączu emiter-baza spolaryzowanym w kierunku przewodzenia płyną prądy dziurowy i elektronowy o wartościach podanych w § 21.3. Prąd elektronowy płynie w obwodzie baza-emiter-źródło prądu, natomiast dziury płynące z emitera do bazy, na skutek małych rozmiarów bazy trafiają do kolektora zwiększając prąd w obwodzie baza-kolektor-źródło prądu $\mathcal{J}_K$. Na skutek tego mechanizmu w obwodzie emitera płynie prąd mniejszy niż w normalnym prostowniku, gdyż określony on jest wyłącznie przez prąd elektronów, natomiast w obwodzie kolektor-baza spolaryzowanym w kierunku zaporowym płynie prąd o natężeniu I_K, równym

w przybliżeniu prądowi I_E w obwodzie emitera $I_K \simeq I_E$. Moc M_E w obwodzie emitera jest bardzo mała, ponieważ jest on spolaryzowany w kierunku przewodnictwa. Opór R_E złącza jest mały, a moc wynosi

$$M_E = R_E I_E^2.$$



21.17. Działanie złącza *p-n-p* (tranzystora).

Opór R_K obwodu kolektora jest bardzo duży, ponieważ jest on spolaryzowany w kierunku zaporowym. Stąd i moc w tym obwodzie jest duża

$$M_K = R_K I_K^2.$$

Wzmocnienie definiowane jest jako

$$W = \frac{M_K}{M_E} = \frac{R_k I_k^2}{R_E I_E^2}.$$

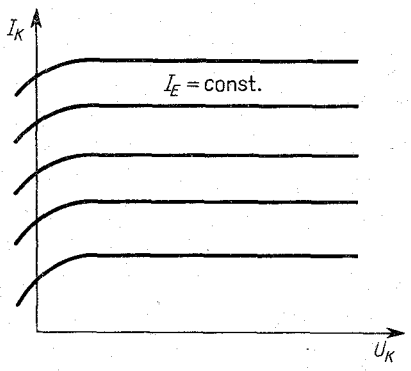
Ponieważ $I_K \simeq I_E$, otrzymamy

$$W = \frac{R_K}{R_E} \text{ lub } W = \frac{U_K}{U_E}, \tag{21.16}$$

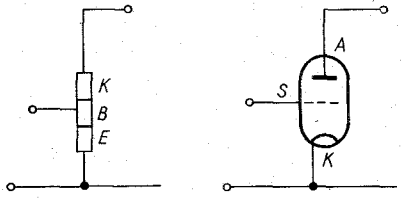
gdzie $U_K = I_K R_K$.

Za pomocą tranzystora uzyskać możemy wzmocnienie mocy rzędu 10^4. Charakterystyka tranzystora, a więc zależność prądu kolektora I_K od napięcia kolektora U_K dla $I_E = \text{const}$ jest prostą równoległą do osi U_K i zależy wyłącznie od wartości prądu emitera I_E (rys. 21.18). Własności wzmacniające pozwalają porównać tranzystor do triody

(§ 25.2). Jeżeli w spolaryzowanym w kierunku przewodzenia obwodzie emitera włączymy dodatkowo wzmacniany sygnał, to w obwodzie kolektora również uzyskamy zmiany prądu I_K równe w przybliżeniu zmianom prądu w obwodzie kolektora, lecz moc ich będzie odpowiednio wzmocniona. Szczególne podobieństwo tranzystora do triody istnieje przy łączeniu w układzie z wspólnym emiterem (rys. 21.19). Wtedy baza spełnia rolę siatki, emiter — katody, a kolektor — anody.



21.18. Przebiegi charakterystyk tranzystora.

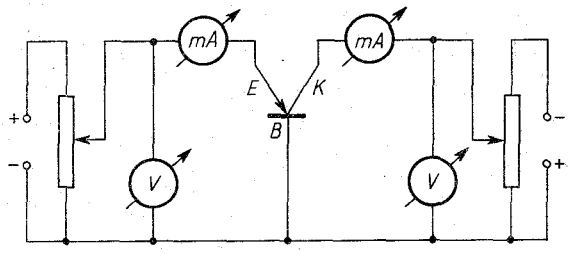


21.19. Podobieństwo tranzystora i triody.

Pomiary

Układ łączymy według schematu 21.20, który składa się z dwóch obwodów potencjometrycznych z rys. 4.18. W przypadku, gdy badamy charakterystykę tranzystora *n-p-n*, musimy stosować przeciwne polaryzacje, a więc przeciwnie łączymy źródła prądu. Celem wykonania pomiarów w obwodzie emitera włączamy prąd o natężeniu I_E = = 0,2 mA lub o wartości podanej w instrukcji, notujemy napięcie U_K w tym obwodzie i wyznaczamy przebieg zależności natężenia I_K w obwodzie kolektora od przyłożonego w tym obwodzie napięcia U_K. Wyniki ujmujemy w tabelę. Pomiary natężenia I_K wykonujemy dla 10-ciu napięć U_K niezależnie od tego czy wartość tego napięcia pozostaje stała, czy też ulega zmianie. Po wykonaniu pierwszej serii pomiarów wykonujemy podobne serie dla następnych wartości prądu emitera.

Jeżeli przy napięciu $U_K = 0$ prąd I_K nie spada do zera, charakterystykę możemy poszerzyć wykonując pomiary dla niewielkich napięć ujemnych $U_K < 0$. Odwrócenie



21.20. Układ do badania tranzystora.

znaku napięcia U_K otrzymamy zmieniając rolę przewodów doprowadzających napięcie z woltomierza V_K do mikroamperomierza i bazy. Pomiary wykonujemy dla bardzo małych ujemnych napięć U_K, przy których prąd I_K jest jeszcze większy od zera.

Obliczenia

Wykreślamy charakterystyki czyli zależności natężenia I_K od napięcia U_K na jednym arkuszu dla wszystkich wartości I_E, a krzywe wykreślamy różnymi kolorami. Nad krzywymi wpisujemy wartość natężenia I_E. Dla kilku punktów nanosimy prostokąty błędów. Dla najniższej wartości napięcia kolektora, dla której prąd I_K osiąga już nasycenie, obliczamy moc w obwodzie emitera $M_E = U_E I_E$ i kolektora $M_K = U_K I_K$ oraz najmniejsze wzmocnienie mocy z wzoru (21.16). Dodać należy, że za pomocą tranzystora można uzyskać znacznie większe wzmocnienia, jeżeli w obwodzie kolektora przykłada się wyższe napięcia. Błąd mocy obliczamy tylko dla jednej wartości prądu emitera.

ZJAWISKA ELEKTROMAGNETYCZNE; PRĄD PRZEMIENNY

22. MAGNETYZM (S3, rozdz. VIII; P3 rozdz. 10)

22.01. PODATNOŚĆ MAGNETYCZNA

Własności magnetyczne materii określamy następującymi parametrami: przenikalnością magnetyczną μ (1.23), przenikalnością magnetyczną środowiska μ_r (1.24), indukcją magnetyczną B (1.21), polaryzacją magnetyczną $\mathcal{J}$ (1.30), namagnesowaniem M (1.31) lub podatnością magnetyczną χ. Podstawiając do (1.30) wyrażenie (1.23), w którym na μ podstawiono (1.24), otrzymamy $\mu_0 \mu_r H - \mu_0 H = \mathcal{J}$ lub $\mathcal{J} = \mu_0(\mu_r - 1)H$. Podstawiając

$$\chi = \mu_r - 1 \tag{22.1}$$

otrzymamy

$$\mathcal{J} = \mu_0 \chi H. \tag{22.2}$$

Jeżeli wykonamy te same obliczenia wychodząc ze związku (1.31) otrzymamy

$$M = \chi H. \tag{22.2a}$$

Wielkość χ zdefiniowaną wzorem (22.2) nazywamy *podatnością magnetyczną* środowiska. Często własności magnetyczne substancji określamy wartością indukowanego w niej dipolowego momentu magnetycznego j (por. wzór 1.26)

$$j = \Phi_i l = B_i S l = B_i V. \tag{22.3}$$

Przez B_i rozumiemy wzrost indukcji magnetycznej środowiska względem indukcji B przyłożonej do próbki; $B_i = B_r - B$, gdzie $B_r = \mu_0 \mu_r H = \mu_r B$ (por. wzory 1.23 i 1.24). Zatem

$$B_i = \mu_r B - B = \chi B.$$

Łącząc ostatnie dwa wzory otrzymamy

$$j = \chi B V. \tag{22.4}$$

Z wzoru (22.3) wynika, że wzrost indukcji magnetycznej próbki jest równy momentowi dipolowemu indukowanemu w jednostce objętości próbki. Dzieląc równanie (22.4) przez μ otrzymamy

$$m = \chi H V. \tag{22.4a}$$

Podatność magnetyczna jest parametrem, który bardzo dobrze opisuje własności ciał bardzo słabo magnesujących się (małe χ). W przypadku ciał ferromagnetycznych częściej stosujemy moment dipolowy lub polaryzację magnetyczną.

22.02. MOMENTY MAGNETYCZNE ATOMÓW

Na całkowity moment magnetyczny ciała składają się momenty poszczególnych atomów lub drobin. Stąd, aby zrozumieć własności magnetyczne, musimy wpierw poznać przyczyny występowania momentów magnetycznych w atomach. Zgodnie z współczesnym stanem wiedzy (S5, rozdział VI), atom składa się z jądra otoczonego powłoką elektronową. Elektron posiada własny moment pędu (moment mechaniczny) L_{si} zwany *spinem*. W polu magnetycznym spin może przyjąć jedną z dwóch możliwych orientacji: równoległą do pola lub antyrównoległą, a jego wartość wynosi $L_{si} = \hbar/2$. Ze spinem elektronu związany jest *magnetyczny moment spinowy*

$$m_{si} = g_s L_{si},$$

gdzie wielkość g_s nazywa się *współczynnikiem giromagnetycznym dla elektronu*. Moment spinowy jest momentem elektromagnetycznym i w układzie SI zachodzi

$$g_s = -\frac{e}{m} \quad \text{oraz} \quad m_{si} = -\frac{e\hbar}{2m} = \mu_B = 0{,}927\ \text{Am}^2, \tag{22.5}$$

gdzie e/m — nabój właściwy elektronu, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s oznacza stałą Plancka oraz $\hbar = h/2\pi$. Wielkość μ_B zwana *magnetonem Bohra* jest jedną z podstawowych wielkości fizycznych. Poza spinem elektron w atomie posiada jeszcze orbitalny moment pędu L_{oi}, z którym związany jest magnetyczny moment orbitalny

$$m_{oi} = gL_{oi}.$$

Współczynnik giromagnetyczny wynosi w tym przypadku $g = -e/2m$, a więc orbitalny moment magnetyczny jest dwukrotnie mniejszy od momentu spinowego, skąd

$$m_{oi} = -\frac{e\hbar}{4m}. \tag{22.6}$$

Cały atom posiada wypadkowy magnetyczny moment spinowy będący sumą momentów spinowych Z elektronów

$$m_s = \sum_{i=1}^{Z} m_{si},$$

oraz wypadkowy magnetyczny moment orbitalny atomu

$$m_o = \sum_{i=1}^{Z} m_{oi}.$$

Obydwa te momenty sumują się dając wypadkowy, elektromagnetyczny moment atomu

$$m_i = m_o + m_s.$$

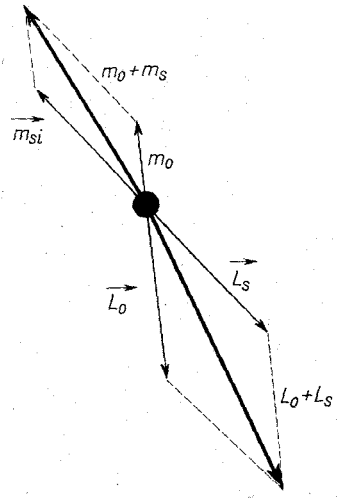
Namagnesowanie ciała jest sumą wypadkowych momentów elektromagnetycznych atomów jednostki objętości ciała

$$M = \sum_i m_i/V.$$

W przypadku rzeczywistych atomów wypadkowy moment magnetyczny może przyjmować różne wartości, a w jego skład mogą wchodzić wyłącznie magnetyczne momenty spinowe bądź też magnetyczne momenty orbitalne. Ze względu na to, że $g_s = 2g$, wypadkowy moment magnetyczny atomu nie jest antyrównoległy do wypadkowego momentu pędu

$$L = \sum_{i=1}^{Z} L_{si} + \sum_{i=1}^{Z} L_{oi}$$

(porównaj wzory 22.5 i 22.6 oraz rys. 22.1). Istnieje taka grupa ciał, w których wypadkowe momenty spinowe i wypadkowe momenty orbitalne są równe zeru; nazywamy je ciałami diamagnetycznymi.



22.1. Sumowanie momentów pędu i momentów elektromagnetycznych w atomie.

Diamagnetyzm. Pole magnetyczne przyłożone do atomu diamagnetycznego działa indywidualnie na każdy moment magnetyczny. Dla przykładu na rys. 22.2a pokazano skutki działania pola na moment orbitalny m_{si}. Pole to działa momentem siły (S3, § 30)

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_{oi} \times \mathbf{B},$$

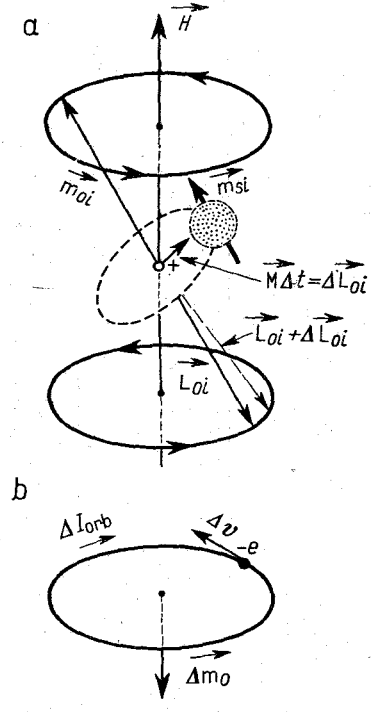
który wywołuje precesję momentu magnetycznego (por. § 8.4) wokół kierunku przyłożonego pola. Tym samym, *w ruch precesyjny zostaje wprowadzony* związany z nim *moment pędu* L_{oi} (22.6). Zgodnie z teorią Larmora prędkość kątowa tej precesji wyraża się wzorem (S5, § 145):

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}.$$

Kierunek i zwrot wektora ω_L jest zgodny z wektorem B. Precesja jest równoważna powstawaniu dodatkowego, indukowanego orbitalnego prądu elektrycznego ΔI_0 (rys. 22.2b), a tym samym indukowanego orbitalnego momentu magnetycznego elektronu Δm_0, skierowanego przeciwnie do wektora B;

$$\Delta m_0 = -\frac{e^2 B \varrho_\perp}{4\pi m},$$

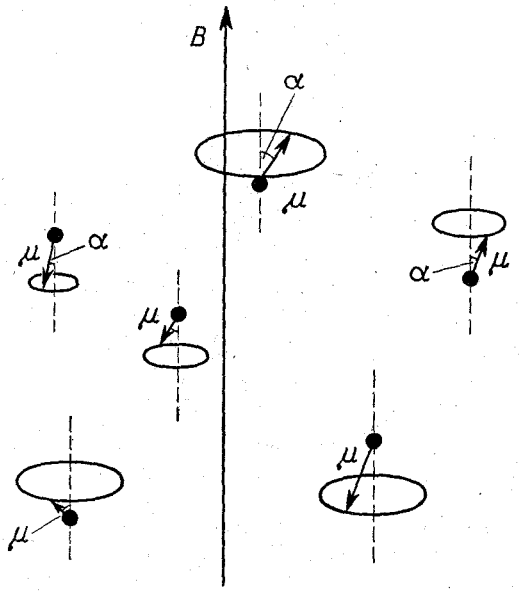
gdzie $\varrho_\perp$ oznacza średni kwadratowy promień rzutu orbity na płaszczyznę prostopadłą do B. Zgodnie z ostatnim wzorem, indukowany moment magnetyczny skierowany jest przeciwnie względem przyłożonego pola, skąd też podatność magnetyczna χ występująca w równaniu (22.4a) przyjmuje wartości ujemne. Wartość χ dla ciał diamagnetycznych mieści się w granicach od -10^{-6} do -10^{-7}. Diamagnetyzm jest powszechną własnością wszystkich ciał, niezależną od wartości wypadkowego momentu magnetycznego atomu. W ciałach, które omawiać będziemy w następnej kolejności, jest on przysłaniany silniejszymi momentami wypadkowymi atomów.



22.2. Precesja orbitalnego momentu magnetycznego.

Paramagnetyzm. W atomach lub drobinach ciał paramagnetycznych istnieje wypadkowy, niezerowy moment magnetyczny i wypadkowy moment pędu. Przyłożone pole magnetyczne działając na moment elektromagnetyczny, podobnie jak w przypadku ciał diamagnetycznych, działa również na wypadkowy moment pędu. W wyniku tego oddziaływania występuje precesja obydwu momentów wokół kierunku pola przyłożonego (rys. 22.3). Precesja nie zmienia jednak kąta α, który przyjmuje dla różnych atomów różne wartości zawarte w granicach od 0 do π. Stąd też sumaryczny moment elektromagnetyczny wszystkich atomów, będący sumą rzutów momentów atomów na kierunek wektora B, powinien być równy zeru. W praktyce obserwujemy jednak magnesowanie się ciał paramagnetycznych. Przyczyną niezgodności naszych przewidywań z praktyką są ruchy cieplne drobin. W czasie zderzeń drobiny wymieniają między sobą energię, a więc mogą zmieniać również kierunek momentu pędu. Zmiany w zewnętrznym polu magnetycznym następują w taki sposób, że suma rzutów momentów na kierunek pola

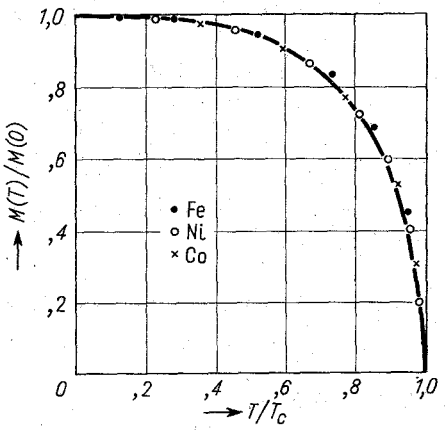
rośnie, a tym samym rośnie namagnesowanie. Tenże sam bezładny ruch cieplny nie pozwala na całkowite uporządkowanie momentów magnetycznych. W wyniku porządkującego działania pola i dezorientującego ruchu cieplnego ustala się równowaga dynamiczna, w której suma składowych momentów magnetycznych skierowanych zgodnie z polem jest większa od sumy składowych momentów magnetycznych skierowanych przeciwnie. Nadwyżka składowych momentów magnetycznych ustawionych zgodnie z polem rośnie wraz ze wzrostem natężenia pola i spadkiem temperatury. Podatność magnetyczna χ ciał paramagnetycznych jest liczbą dodatnią rzędu 10^{-4}.



22.3. Precesja momentów magnetycznych atomów ciała paramagnetycznego.

Ferromagnetyzm i ferrimagnetyzm. Mimo, iż zewnętrzne pole magnetyczne nie może „zmusić" momentów magnetycznych do przyjęcia orientacji zgodnej z jego kierunkiem, istnieje grupa ciał wykazujących bardzo dużą podatność magnetyczną, rzędu 10^4. Do takich ciał należą: żelazo, nikiel, kobalt oraz ich związki. Wyniki dokładnych pomiarów prowadzą do wniosku, że dla niektórych spośród tych ciał bardzo małe pole magnetyczne rzędu 10–100 A/cm wystarcza do całkowitego uporządkowania momentów magnetycznych. Zjawiska powyższego nie da się wytłumaczyć działaniem pola magnetycznego, dla jego wytłumaczenia przyjąć trzeba teorię Weissa, w myśl której momenty magnetyczne sąsiednich atomów przyjmują orientację równoległą w sposób spontaniczny (samorzutnie) na skutek wzajemnego oddziaływania (energia wymiany). Dodać jeszcze należy, że w takich ciałach na wypadkowy moment magnetyczny atomu składają się niemal wyłącznie momenty spinowe. Sposób wzajemnego ustawienia sąsiednich momentów zależy od odległości. Sąsiadujące momenty magnetyczne ustawiają się równolegle w ciałach ferromagnetycznych, które wykazują największą wartość polaryzacji magnetycznej. Jeżeli momenty magnetyczne sąsiadujących atomów ustawiają się antyrównolegle (równoległe, lecz przeciwne zwroty), ciała nazywamy antyferromagnetycznymi. Podatność ciał antyferromagnetycznych jest tego samego rzędu co ciał paramagne-

tycznych. W ciałach ferromagnetycznych w miarę wzrostu temperatury rośnie energia ruchu cieplnego atomów i namagnesowanie ciała powoli maleje (rys. 22.4). W niskich temperaturach zmiany namagnesowania są bardzo małe, lecz w miarę wzrostu temperatury szybkość spadku namagnesowania gwałtownie rośnie. W tzw. *temperaturze Curie* namagnesowanie maleje teoretycznie do zera. Powyżej tej temperatury ciało zachowuje się tak samo jak ciało paramagnetyczne. W temperaturze Curie energia drgań cieplnych równoważy energię wymiany, a w temperaturach wyższych przeważa energia drgań cieplnych i spontaniczna orientacja momentów nie występuje.



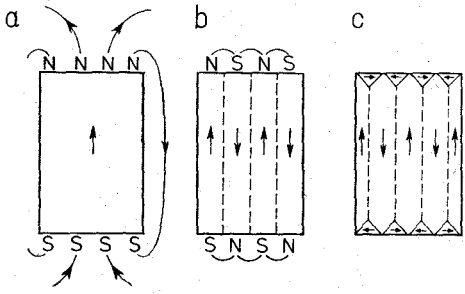
22.4. Zależność namagnesowania od temperatury dla ciał ferromagnetycznych.

Istnieje jeszcze grupa ciał podobnych do ciał ferromagnetycznych. Zawierają one dwa rodzaje atomów o nieskompensowanych momentach magnetycznych. Każdy rodzaj atomów tworzy własną podsiatkę krystaliczną. Obydwie podsiatki wzajemnie się przenikają tworząc tzw. *sieć złożoną*. W sieci złożonej najbliższymi sąsiadami są atomy różnych podsiatek. Jeżeli w każdej z podsieci momenty ustawione są równolegle, a zwroty momentów należące do różnych podsieci są przeciwne, to ciało posiada budowę podobną do ciała antyferromagnetycznego, lecz ze względu na nierówność momentów różnych atomów wykazuje ono duże namagnesowanie i zachowuje się podobnie do ciał ferromagnetycznych. Ciała takie nazywamy ferrimagnetycznymi. Przedstawicielami ciał ferrimagnetycznych są ferryty, czyli żelaziny, do których należy magnetyt.

Struktura domenowa. Ze względu na to, że w ciałach ferromagnetycznych i ferrimagnetycznych poniżej temperatury Curie momenty magnetyczne są uporządkowane, powinny one być makroskopowym dipolem, czyli magnesem. W rzeczywistości większość ciał nie wykazuje trwałego namagnesowania. Zjawisko powyższe można wytłumaczyć w następujący sposób. Na zewnątrz ciała, w którym wszystkie momenty są w pełni uporządkowane, istnieje bardzo silne pole magnetyczne. Ponieważ linie sił tego pola łączą obydwa bieguny magnesu, pole to nazywamy *polem zamykającym*. Z istnieniem pola zamykającego związana jest duża energia potencjalna pola magnetycznego, wyrażająca się wzorem

$$E_p = \int \mathbf{BH} dV, \tag{22.7}$$

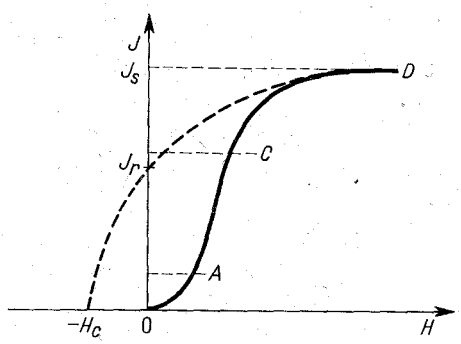
gdzie **H** oznacza natężenie pola magnetycznego, **B** — indukcję magnetyczną, V — objętość. Energia potencjalna pola zamykającego znacznie się zmniejszy, jeżeli ciało będzie podzielone na obszary namagnesowane w przeciwnych kierunkach. Obszary, w których wszystkie momenty posiadają taki sam zwrot, nazywamy domenami. Rysunek 22.5c przedstawia układ domen o najniższej energii. W próbce posiadającej taki układ domen momenty magnetyczne są uporządkowane, a mimo to próbka nie jest magnesem; jej namagnesowanie jest równe zeru.



22.5. Podział na domeny przy dużej energii pola zewnętrznego (a), gdy brak pola zewnętrznego (c).

22.03. PĘTLA HISTEREZY MAGNETYCZNEJ

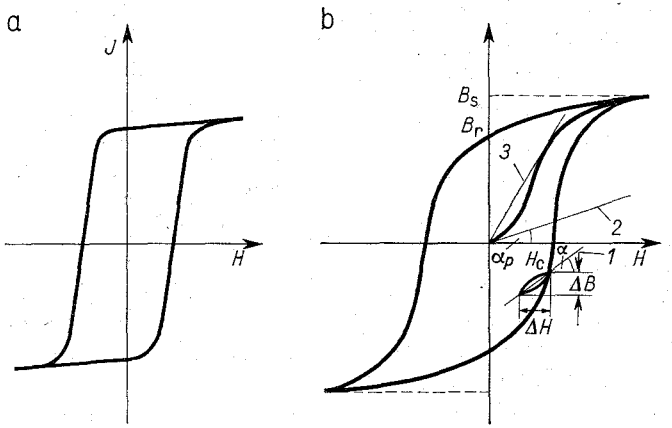
Jeżeli ciało ferromagnetyczne nienamagnesowane umieścimy w słabym polu magnetycznym, to domeny, w których kierunek namagnesowania lub inaczej polaryzacji tworzy mały kąt z kierunkiem pola, będą się rozrastać kosztem innych, lecz wektor polaryzacji poszczególnych domen nie zmienia kierunku. W miarę wzrostu pola granice między domenami przesuwają się i wzrasta namagnesowanie ciała. Przy niewielkich natężeniach pola (odcinek OA na rys. 22.6), przesunięcia ścian domenowych są odwra-



22.6. Krzywa pierwotna i krzywa rozmagnesowania.

calne; przy wyższych stają się nieodwracalne, tzn. że po usunięciu pola rozkład domen nie wraca do stanu pierwotnego (odcinek AC na rys. 22.6). Ostatnia część krzywej polaryzacji (odcinek CD) pochodzi nie od ruchu ścian domenowych, lecz od obrotu wektorów namagnesowania w poszczególnych domenach. Zależność polaryzacji magne-

tycznej $\mathcal{J}$ od natężenia pola H nazywa się krzywą *polaryzacji magnetycznej*. Na rysunku 22.6 pokazano krzywą polaryzacji ciała, które jeszcze nigdy nie było magnesowane, zwaną krzywą pierwotną polaryzacji. Polaryzację odpowiadającą asymptocie krzywej $\mathcal{J}(H)$ dla $H = \infty$ nazywamy *polaryzacją nasycenia* $\mathcal{J}_s$. W materiale namagnesowanym do nasycenia momenty magnetyczne wszystkich atomów ustawione są niemal równolegle (na dokładnie równoległe ustawienie nie pozwala ruch cieplny atomów). Przy zmniejszaniu natężenia pola magnetycznego można zaobserwować zjawisko histerezy magnetycznej polegające na tym, że po zredukowaniu pola do zera polaryzacja nie znika.



22.7. Pętla histerezy w układzie H i B (rys. a) oraz w układzie H i $\mathcal{J}$ (rys. b).

Polaryzacja odpowiadająca polu zerowemu nazywa się *pozostałością polaryzacji* ($\mathcal{J}_r$) lub pozostałością magnetyczną. Polaryzacja próbki redukuje się do zera dopiero wtedy, gdy przyłożymy pole $-H_c$ o kierunku przeciwnym do pierwotnego zwane polem koercji lub krótko *koercją*. Przy cyklicznej zmianie natężenia pola polaryzacja zmienia się po zamkniętej krzywej (rys. 22.7a), którą nazywamy pętlą histerezy magnetycznej. Jeżeli polaryzację zastąpimy indukcją magnetyczną, to pętla histerezy przyjmuje kształt pokazany na rysunku 22.7b. Wielkość

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{B}{H} \tag{22.8}$$

nazywamy przenikalnością magnetyczną. Przenikalność magnetyczna zależy od natężenia pola magnetycznego, stąd nie wyznacza ona jednoznacznie własności magnetycznych ciała. Definiuje się również przenikalność różniczkową (1 na rys. 22.7b)

$$\mu_d = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{dB}{dH}. \tag{22.9}$$

W praktyce duże znaczenie ma przenikalność początkowa μ_p definiowana jako wartość przenikalności w punkcie $H = 0$ (2 na rys. 22.7b)

$$\mu_p = \frac{1}{\mu_0} \lim_{H \to 0} \frac{B}{H}. \tag{22.10}$$

Przenikalność ta jest równa nachyleniu krzywej pierwotnej w punkcie $H = 0$. Inną wielkością często stosowaną w praktyce jest przenikalność maksymalna, zdefiniowana jako największa wartość przenikalności (3 na rys. 22.7b)

$$\mu_{max} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{B}{H}\right)_{max}.$$

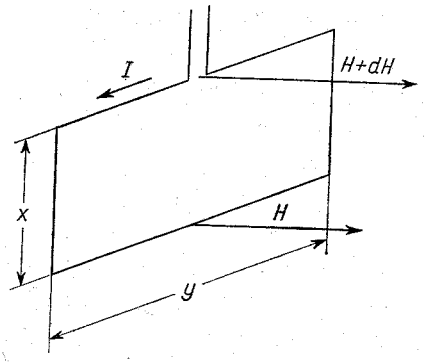
Ze względu na kształt pętli histerezy wszystkie materiały magnetyczne dzielimy na magnetycznie twarde i magnetycznie miękkie. Materiały magnetycznie twarde charakteryzują się dużą koercją, a więc i dużą szerokością pętli histerezy. Są one stosowane do produkcji magnesów stałych (magnesy mierników, soczewki ogniskujące wiązkę elektronów w lampach kineskopowych itp.). Materiały magnetycznie miękkie posiadają wąską i stromą pętlę histerezy, a więc małą koercję. Stosowane są one do produkcji wszelkiego typu rdzeni (transformatory, prądnice, cewki itp.). W praktyce dla wszystkich materiałów magnetycznych wymagana jest duża wartość polaryzacji nasycenia.

22.1. PODATNOŚĆ MAGNETYCZNA

Cel: wyznaczanie podatności magnetycznej kilku próbek metodą wahadła bocznego.
Przyrządy: elektromagnes (§ 4.9), opornik (§ 4.2), źródło prądu (§ 4.1), amperomierz (§ 18.01–03).
Zagadnienia: podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2 i 1.5), magnetyczne własności materii (§ 22.01–02; S3, § 81–87), ruch precesyjny (§ 8.4).

Wprowadzenie

Załóżmy, że cewka o N zwojach z prądem I znajduje się w niejednorodnym polu magnetycznym (rys. 22.8). Oznaczamy duży bok cewki przez y, a krótszy przez Δx. Załóżmy, że wzdłuż boku Δx natężenie pola zmienia się w sposób liniowy, a jego gra-



22.8. Ramka z prądem w polu magnetycznym.

dient wynosi $\partial H/\partial x$ oraz że płaszczyzna cewki jest prostopadła do pola H. Natężenie pola magnetycznego w miejscu, w którym znajduje się dolny bok cewki, wynosi H, a w miejscu, w którym znajduje się jej górny bok, $H + dH$. Na dolny bok, zgodnie z wzorem (1.21) działa siła

$$F_1 = NI\mu_0 Hy$$

skierowana w górę. Podobnie na górny bok ramki działa siła skierowana w dół

$$F_2 = NI\mu_0\left(H+\frac{\partial H}{\partial x}\Delta x\right)y.$$

Na pozostałe boki działają dwie równe, przeciwnie skierowane siły, które znoszą się wzajemnie. Całkowita siła F działająca na ramkę jest równa różnicy sił $F = F_2 - F_1$, skąd

$$F = NIy\Delta x\mu_0\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Iloczyn $NIy\Delta x = NIS = m$ jest zgodnie z (1.28) momentem elektromagnetycznym cewki. Zatem ostatecznie

$$F = m\mu_0\frac{\partial H}{\partial x} \tag{22.11}$$

lub

$$F = j\frac{\partial H}{\partial x} \tag{22.11a}$$

(porównaj wzór 1.29). Wzór powyższy posiada charakter ogólny i stosuje się nie tylko do cewki z prądem, lecz dla dowolnego ciała o dipolowym momencie magnetycznym j, jeżeli ciało to znajduje się w niejednorodnym polu magnetycznym o gradiencie $\partial H/\partial x$. Siła F posiada taki zwrot, że jeżeli moment j jest skierowany zgodnie z polem H, próbka jest wciągana w obszar silniejszego pola. Jeżeli zwrot momentu j jest przeciwny względem zwrotu H, to próbka jest wypychana z obszaru pola. Ponieważ w ciałach paramagnetycznych i ferromagnetycznych dipolowy moment magnetyczny j ma taki sam zwrot jak pole magnetyczne, ciała te są wciągane w obszar silnego pola. Ciała diamagnetyczne są wciągane w obszar słabszego pola (wypychane z pola). Podstawiając we wzorze (22.11) za moment wartość z wzoru (22.4a), otrzymamy

$$F = \mu_0\chi HV(\partial H/\partial x). \tag{22.12}$$

Jeżeli próbką jest pręt o przekroju S, i jego dolny koniec znajduje się w polu o natężeniu H_1, a górny w polu H_2, to siła wyrazi się wzorem

$$F = \frac{1}{2}\mu_0\chi S(H_1^2 - H_2^2). \tag{22.13}$$

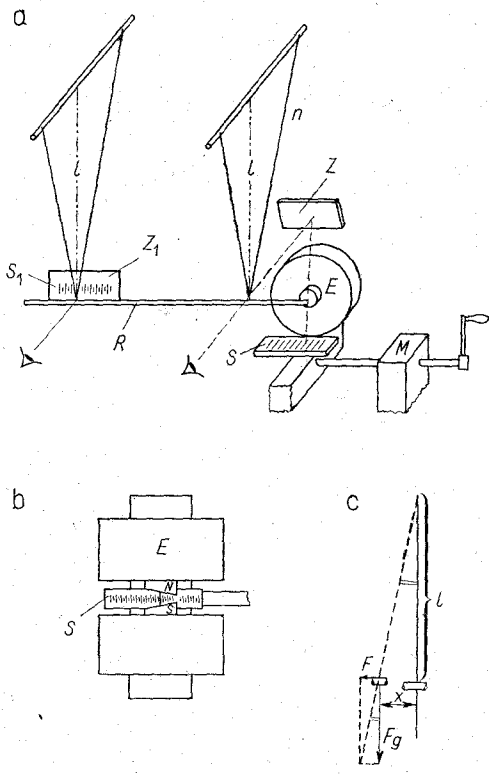
Zatem jeżeli mierzymy siłę działającą na próbkę umieszczoną w niejednorodnym polu magnetycznym, to korzystając z jednego z ostatnich dwóch wzorów obliczyć możemy podatność magnetyczną.

Aparatura

Siłę działającą na próbkę w polu magnetycznym elektromagnesu mierzymy za pomocą wahadła bocznego w sposób pokazany na rys. 22.9. Sproszkowany materiał znajduje się w rurce szklanej R. Rurka ta jest zawieszona na czterech długich niciach n. Gradient pola i działająca na próbkę siła F skierowane są poziomo. Na skutek działania siły próbka przesuwa się wzdłuż swojej osi. Zgodnie z rys. 22.9c, siła F jest proporcjonalna do wychylenia x

$$F = F_g x/l. \tag{22.14}$$

Położenie wahadła odczytujemy na podziałce umieszczonej na tle zwierciadła Z_1. Rolę wskazówki spełniają nici, na których zawieszony jest uchwyt próbki (rurka R). Elektromagnes możemy przesuwać wzdłuż osi wahadła za pomocą mechanizmu M. Ze względu na niejednorodność pola, w czasie pomiaru próbka musi zajmować zawsze dokładnie to samo położenie między biegunami elektromagnesu. Kontrolę zerowego położenia próbki umożliwia znaczek umieszczony na ściance jarzma elektromagnesu; jest nim



22.9. Wahadła boczne — waga magnetyczna.

czerwona kreska lub podziałka umieszczona na zwierciadle S. Położenie próbki obserwujemy w zwierciadle Z. Wykonując pomiar, elektromagnes przesuwamy do takiego położenia, by koniec próbki oraz jego odbicie w zwierciadle S pokryły się i dotykały czerwonej linii na podziałce S. Układ pozwala wyeliminować błąd paralaksy. Może być zaopatrzony w tłumienie elektromagnetyczne składające się z przymocowanej do rurki R blachy miedzianej poruszającej się między dwoma magnesami stałymi.

Pomiary

Przed rozpoczęciem doświadczenia ważymy próbki i mierzymy długości nici. Obwód elektromagnesu łączymy według schematu 4.15. Próbkę zawieszamy na niciach, zamykamy gablotę i odczytujemy położenie x_p. Włączamy prąd w obwodzie elektromagnesu (ok. 2 A), próbka wychyli się z pierwotnego położenia. Wtedy elektromagnes przesuwamy ponownie do położenia pomiarowego (koniec próbki pokrywa się z kreską skali S)

i ponownie odczytujemy położenie x_k. Podobne pomiary wykonujemy dla 3–5 próbek, w tym jednej wzorcowej o znanej podatności. Dla każdej próbki wychylenie mierzymy przy 2–3 wartościach prądu.

Obliczenia

Dla każdego z pomiarów obliczamy podatność z wzoru (22.13) przyjmując $H_2 = 0$. Na siłę F przyjmujemy wartość (22.14), a przekrój próbki $S = (\pi/4)\Phi^2$, zatem ostatecznie $(x = x_p - x_k)$

$$\chi = \frac{8F_g x}{\pi\mu_0 l\Phi^2 H_1^2}.$$

W doświadczeniu nie znamy natężenia pola magnetycznego elektromagnesu; obliczamy je przyjmując dla wybranej próbki wzorcowej podatność χ z tablic. Korzystając z pomiaru wykonanego dla tej próbki obliczamy pole magnetyczne H_1^2 panujące w punkcie pomiarowym. Mając już wartość pola obliczamy podatności innych próbek. Błędy obliczamy metodą Studenta–Fishera.

W przypadku, gdy próbki mają kształt kulek, postępujemy w podobny sposób wychodząc z wzoru (22.12). Ponadto zgodnie z wzorem (22.11) wahadło boczne może służyć również do wyznaczania dipolowych momentów magnetycznych.

22.2. BADANIE KRZYWEJ PIERWOTNEJ ZA POMOCĄ STRUMIENIOMIERZA

Cel: wyznaczanie krzywej pierwotnej polaryzacji lub namagnesowania próbki pierścieniowej.

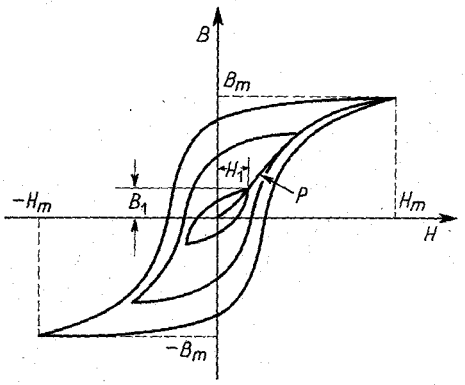
Przyrządy: strumieniomierz (§ 18.6), mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki (§ 4.2), autotransformator (§ 4.5), źródła prądu (§ 4.1).

Zagadnienia: podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2 i 1.5), ruch precesyjny (§ 8.4), magnetyczne własności materii (22.01–03).

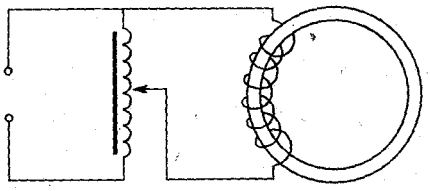
Wprowadzenie

Zasadę pomiaru krzywej pierwotnej zilustrowano rysunkiem 22.10. Nienamagnesowaną próbkę umieszczamy w bardzo słabym polu magnetycznym H_1 i kilkanaście razy zmieniamy kierunek tego pola. W tym czasie namagnesowanie zmienia się, zakreślając małą pętlę histerezy tzn. taką pętlę, w której nie osiąga się nasycenia. W czasie pierwszych przełączeń zmiany indukcji nie są powtarzalne, dopiero po kilku przełączeniach (tzw. komutacjach) zmiany są powtarzalne; zostaje ustalony magnetyczny stan próbki. Mierzymy zmianę indukcji wynoszącą $2B_1$, zachodzącą przy komutacji pola czyli zmianie o $2H_1$. Następne punkty pomiarowe otrzymamy przez powtórzenie tych samych czynności przy stopniowo rosnącym natężeniu pola magnetycznego. Wyznaczona w ten sposób krzywa nie jest faktyczną krzywą pierwotną, lecz bardzo mało od niej się różni. Próbka stosowana w doświadczeniu nie musi być próbką dziewiczą, tzn. taką, która po oziębieniu poniżej temperatury Curie nie była jeszcze magnesowana. Można ją odmagnesować. W czasie pomiaru wielokrotnie zmienia się natężenie pola, zwiększając je do wartości odpowiadającej polu nasycającemu H_m. Jeżeli te same czynności wyko-

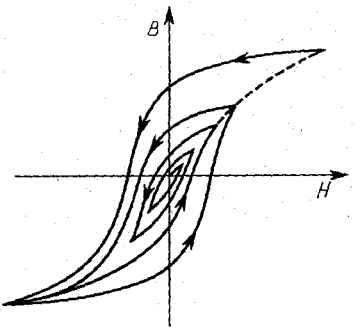
namy w odwrotnej kolejności, a więc będziemy wielokrotnie zmieniać kierunek pola obniżając równocześnie jego natężenie od wartości H_m do zera, to w wyniku końcowym otrzymamy próbkę nienamagnesowaną lub bardzo słabo namagnesowaną. Można również do odmagnesowania próbki zamiast prądu stałego zastosować prąd przemienny o malejącej amplitudzie. Odpada wtedy konieczność wielokrotnego komutowania prądu. Zachodzące w próbce zjawiska magnetyczne zilustrowano rysunkiem 22.12.



22.10. Zasada pomiaru krzywej pierwotnej namagnesowania.



22.11. Układ do odmagnesowania próbki.



22.12. Przebieg indukcji w odmagnesowanej próbce.

Aparatura

Stosowana w doświadczeniu próbka posiada kształt pierścienia zwanego również torusem. Na próbce nawinięte są dwa uzwojenia: magnesujące i pomiarowe. Zwoje tworzące uzwojenie magnesujące są ułożone równomiernie wzdłuż całego obwodu pierścienia (tworzą toroid) i można założyć, że tworzą one solenoid o stykających się końcach. Pole magnesujące próbkę wyraża się wzorem (1.20); $H = NI/l$, gdzie I oznacza natężenie prądu, N — liczbę zwojów, l — długość solenoidu. Jeżeli założymy, że przekrój pierścienia jest stały wzdłuż całego obwodu, a przez r_1 i r_2 oznaczymy wewnętrzny i zewnętrzny jego promień, to długość solenoidu wyrazi się wzorem

$$l = \pi(r_1 + r_2).$$

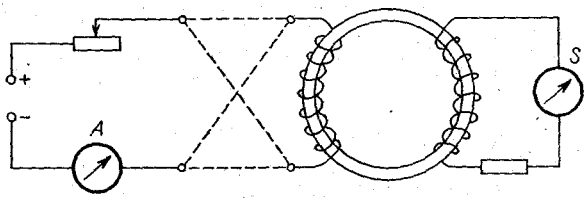
Zatem natężenie pola magnetycznego określone jest przez

$$H = \frac{NI}{\pi(r_1 + r_2)}. \tag{22.15}$$

Uzwojenie pomiarowe jest cewką, którą łączymy ze strumieniomierzem S lub galwanometrem balistycznym.

Pomiary

Przed przystąpieniem do pomiarów rozmagnesowujemy próbkę. W tym celu uzwojenia magnesujące łączymy z autotransformatorem według schematu 22.11. Nastawiamy napięcie dwukrotnie przewyższające napięcie stosowane do pomiarów i powoli zmniejszamy je do zera. Czynności te powtarzamy wychodząc od napięcia niższego od stosowanego w pierwszym rozmagnesowaniu o 5 V. Postępując dalej w ten sam sposób dochodzimy do napięcia zerowego. Rozmagnesowaną próbkę łączymy według schematu 22.13 i uzwojenie pomiarowe ze strumieniomierzem. Nastawiamy maksymalny opór w obwodzie magnesującym i strumieniomierz zwieramy za pomocą wyłącznika wbudowanego w miernik lub włączanego dodatkowo równolegle do strumieniomierza.



22.13. Układ do wyznaczania krzywej pierwotnej za pomocą strumieniomierza.

Włączamy prąd o małym natężeniu, włączamy strumieniomierz i komutując prąd określamy wychylenie strumieniomierza. Ustalamy natężenie I_1, przy którym strumieniomierz wychyla się ok. 2 działki. Podobnie ustalamy wartości $I_2, I_3, \ldots$, przy których strumieniomierz przy komutacji wychyla się w przybliżeniu o 4, 8, 15, 20, 25, 30, ... działek (łącznie 10–15 punktów). Maksymalny prąd I_m, po przekroczeniu którego wychylenie wzrasta już nieznacznie, jest określony w instrukcji. Ustalamy natężenie $I_p = \frac{1}{2} I_m$ i wielokrotnie mierzymy wskazanie strumieniomierza α_1 przed komutacją oraz α_2 po komutacji celem ustalenia rzędu wielkości błędu przypadkowego oraz opanowania sztuki pomiaru za pomocą strumieniomierza. Notujemy wymiary próbki (podane w instrukcji): wewnętrzną $2r_1$ i zewnętrzną $2r_2$ średnicę pierścienia, jego wysokość h, liczbę zwojów uzwojenia magnesującego N oraz pomiarowego N_p, a ponadto stałą strumieniomierza K.

Dla natężenia I_p obliczamy natężenie pola magnetycznego z wzoru (22.15) i indukcję magnetyczną B z wzoru (18.28), który w omawianym przypadku przyjmuje postać

$$B = K[N_p(r_2 - r_1)h]^{-1}\Delta\alpha.$$

Analizujemy uzyskane wyniki oraz ich błędy i planujemy, jakie pomiary musimy wywykonać by uzyskać optymalny wynik. Przed przystąpieniem do właściwych pomiarów

ponownie próbkę rozmagnesowujemy. Włączamy prąd przy największym oporze w obwodzie magnesującym, ustalamy prąd I_1 i przystępujemy do właściwych pomiarów. Przed rozpoczęciem pomiaru wskazania strumieniomierza, wielokrotnie komutujemy prąd przy zwartym strumieniomierzu, celem ustalenia stanu magnetycznego próbki, wtedy odczytujemy natężenie I_1 i mierzymy wychylenie strumieniomierza. Powtarzamy czynności i pomiar przy natężeniach $I_2, I_3, \ldots I_m$ ustalonych w czasie pomiarów próbnych. Wykonując pomiary musimy przestrzegać następujących zasad: mierząc wychylenie strumieniomierza komutować prąd w takim kierunku, by wskazówka nie wyszła poza skalę; przy innych komutacjach zwieramy strumieniomierz. W czasie końcowych pomiarów nie wolno nigdy obniżać natężenia prądu. Jeżeli przez niedopatrzenie włączyliśmy prąd o zbyt dużym natężeniu, to próbkę musimy na nowo odmagnesować.

Obliczenia

Wykonując ostateczne obliczenia pola magnetycznego z wzoru (22.15) wielkość $N \cdot \pi^{-1}(r_1+r_2)^{-1}$ obliczamy jednorazowo. Podobnie dla indukcji magnetycznej współczynnik przy $\Delta\alpha$ obliczamy jednorazowo. Z wzoru (1.30) obliczamy polaryzację magnetyczną $\mathcal{J}$. Wykreślamy krzywe pierwotne $\mathcal{J}(H)$ oraz $B(H)$ w układach SI oraz CGSEM. Błędy pola magnetycznego i polaryzacji obliczamy dla kilku punktów pomiarowych. Na zakończenie krótko omawiamy przebieg uzyskanych krzywych.

22.3. POMIAR NAMAGNESOWANIA METODĄ GAUSSA

Cel: wyznaczenie przebiegu pętli histerezy magnetycznej metodą Gaussa.

Przyrządy: amperomierz (§ 18.01–03), opornik (§ 4.2), suwmiarka (§ 3.1), autotransformator (§ 4.5), cewki Helmholtza (§ 4.9).

Zagadnienia: podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2 i 1.5), magnetyczne własności materii (§ 22.01–22.03), precesja (§ 8.4).

Wprowadzenie

a. Opis metody pomiaru. Gaussowska metoda wyznaczania indukcji magnetycznej jest oparta na pomiarze natężenia pola magnetycznego wytworzonego przez dipol magnetyczny o momencie j. Natężenie H pola magnetycznego wytworzonego w odległości r od dipola magnetycznego wyraża się wzorem

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\frac{3(\mathbf{jr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{j}}{r^3}\right]. \tag{22.16}$$

Wzór (22.16) składa się z dwóch składników, z których pierwszy ma zwrot promienia wodzącego r, a drugi przeciwny do zwrotu momentu magnetycznego j. Przebieg linii sił pola magnetycznego dipola pokazany jest na rys. 22.14. Szczególnie interesować nas będzie natężenie pola wzdłuż osi dipola (linia D na rys. 22.14) oraz w jego płaszczyźnie równikowej (płaszczyzna C). Jeżeli magnes ustawiony jest względem interesującego nas punktu w ten sposób, że jego oś jest równoległa do promienia wodzącego, to mówimy,

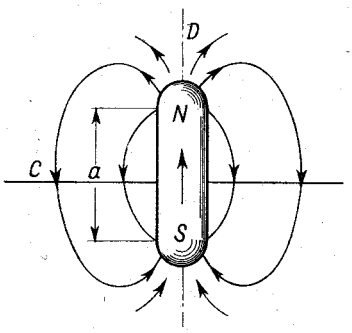
że znajduje się on w pierwszym położeniu głównym Gaussa. Natężenie pola wyraża się wtedy wzorem

$$\mathbf{H}_{\mathrm{I}} = \frac{\mathbf{j}}{2\pi\mu_0 r^3}. \tag{22.17}$$

Jeżeli natomiast magnes ustawiony jest w ten sposób, że interesujący nas punkt leży w jego płaszczyźnie równikowej, to mówimy, że znajduje się on w drugim położeniu głównym Gaussa. Natężenie pola określone jest wtedy wzorem

$$\mathbf{H}_{\mathrm{II}} = -\frac{\mathbf{j}}{4\pi\mu_0 r^3}. \tag{22.18}$$

Prosta postać wzorów (22.17) i (22.18) pozwala stosować je do wyznaczania momentów magnetycznych magnesów, jak również indukcji lub polaryzacji magnetycznej. Wystarczy zmierzyć natężenie pola magnetycznego w którymś z jego położeń głównych oraz odległość r. Natężenie pola wytworzonego przez dipol wyznaczyć możemy za pomocą igły magnetycznej. W tym celu tak należy ustawić magnes, by w miejscu, w którym znajduje się igła, wektor natężenia składowej poziomej pola magnetycznego Ziemi był



22.14. Linie sił dipola magnetycznego.

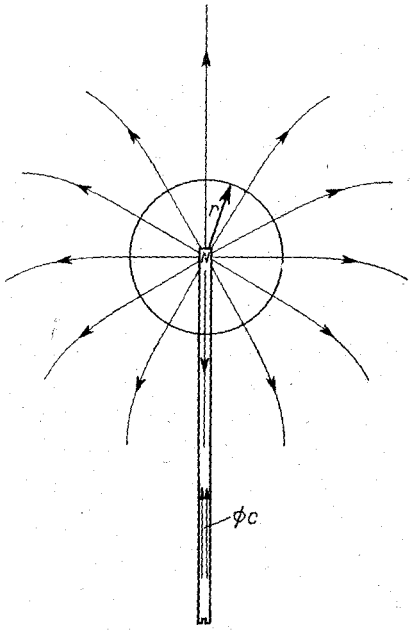
prostopadły do wektora natężenia pola wytworzonego przez dipol. Znając wartość składowej poziomej i kąt wychylenia igły obliczyć możemy natężenie pola wytworzonego przez dipol. Jednak z powodu dużych zakłóceń pola ziemskiego spowodowanych obecnością przedmiotów stalowych, mierników itp. pomiary takie są bardzo niedokładne. W omawianym doświadczeniu posługujemy się wprawdzie igłą magnetyczną, lecz jej wychylenie kompensujemy za pomocą cewek Helmholtza–Gaugaina. Natężenie pola wytworzonego przez dipol w miejscu igły magnetycznej jest wtedy równe natężeniu pola wytworzonego przez cewki, a jego zwrot jest przeciwny.

b. Wyprowadzenie wzoru na pole magnetyczne dipola. W przypadku bardzo długiego magnesu założyć możemy, że z jego biegunów linie sił pola magnetycznego wychodzą promieniście (rys. 21.15). Na całej powierzchni kuli o promieniu r otaczającej biegun panuje wtedy indukcja magnetyczna $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Całkowity strumień indukcji Φ_c wychodzącej z tego bieguna wyraża się wzorem

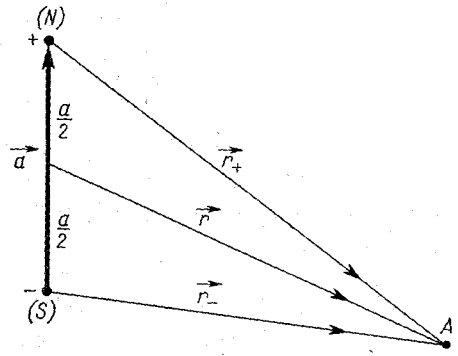
$$\Phi_c = 4\pi r^2 \mu_0 \mathbf{H}.$$

Z powyższego wzoru obliczyć możemy natężenie pola magnetycznego wytworzonego przez biegun

$$\mathbf{H} = \Phi_c[4\pi\mu_0 r^2]^{-1}.$$



22.15. Przebieg linii sił wychodzących z bieguna bardzo długiego magnesu.



22.16. Rysunek pomocniczy do obliczania natężenia pola dipola magnetycznego.

Pole magnetyczne wytworzone w punkcie A przez dipol pokazany na rys. 22.16 wynosi

$$\mathbf{H} = \frac{\Phi_c}{4\pi\mu_0}\left(\frac{r_+}{|r_+|^3} - \frac{r_-}{|r_-|^3}\right),$$

gdzie $|r_+|$ i $|r_-|$ oznaczają odpowiednio odległości biegunów N i S od punktu A. Wektory $\mathbf{r}_+$ i $\mathbf{r}_-$ możemy wyrazić za pomocą wektora $\mathbf{r}$, łączącego środek dipola z punktem A oraz przez wektor $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{r}_+ = -\frac{\mathbf{a}}{2} + \mathbf{r}, \quad |r_+| = |r| - \left(\frac{\mathbf{a}}{2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|r|}\right),$$

$$\mathbf{r}_- = \frac{\mathbf{a}}{2} + \mathbf{r}, \quad |r_-| = |r| + \left(\frac{\mathbf{a}}{2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|r|}\right).$$

Podstawiając te wartości do wzoru określającego wartość $\mathbf{H}$ w punkcie A i sprowadzając do wspólnego mianownika otrzymamy

$$\mathbf{H} = \frac{\Phi_c}{4\pi\mu_0}\,\frac{\left[|r| + \left(\frac{\mathbf{a}}{2}\frac{\mathbf{r}}{|r|}\right)\right]^3\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{2}\right) - \left[|r| - \left(\frac{\mathbf{a}}{2}\frac{\mathbf{r}}{|r|}\right)\right]^3\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right)}{\left[r^2 - \left(\frac{\mathbf{a}}{2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|r|}\right)^2\right]^3}.$$

Po prostych przekształceniach algebraicznych wyrażenie przyjmuje postać

$$\mathbf{H} = \frac{\Phi_c}{4\pi\mu_0}\,\frac{\left[6r^2\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|r|}\right) + \left(2\,\frac{\mathbf{a}}{2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|r|}\right)^3\right]r - \left[2r^3 + 6r\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\frac{\mathbf{r}}{|r|}\right)^2\right]\frac{\mathbf{a}}{2}}{\left[r^2 - \left(\frac{\mathbf{a}}{2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|r|}\right)^2\right]^3}.$$

Zakładamy, że $|a| < |r|$, wobec tego $\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)^2 \ll r^2$. Oznacza to, że możemy zaniedbać wyrazy zawierające $\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ w drugiej i wyższych potęgach otrzymując

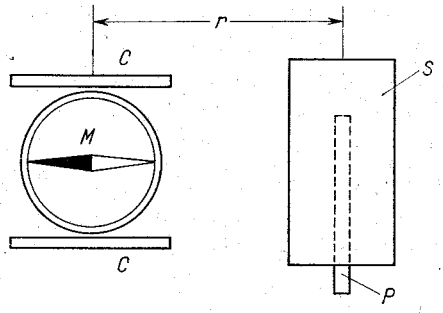
$$\mathbf{H} = \frac{\Phi_c}{4\pi\mu_0}\left[\frac{3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{a}}{r^3}\right].$$

Strumień indukcji Φ_c wychodzący z biegunów musi być równy strumieniowi łączącemu wewnątrz sztabki bieguny N i S. Ponieważ zgodnie z definicją (1.26) dipolowy moment magnetyczny wyraża się wzorem $j = \Phi_c \cdot \mathbf{a}$, otrzymamy ostatecznie równanie (22.16), czego mieliśmy dowieść.

Aparatura

Przyrząd (rys. 22.17) składa się z solenoidu S, w którym umieszcza się próbkę P, igły magnetycznej M umieszczonej w drugim położeniu głównym Gaussa oraz cewek Helmholtza C. Wewnątrz solenoidu istnieje w przybliżeniu jednorodne pole magnetyczne, którego natężenie określa wzór (1.20)

$$H_m = NI_m/l. \tag{22.19}$$



22.17. Aparatura do wyznaczania pętli histerezy metodą Gaussa.

Próbka znajdująca się w solenoidzie magnesuje się i staje się dipolem o dipolowym momencie magnetycznym j określonym wzorem (1.26)

$$j = \Phi l = BSl,$$

gdzie B oznacza indukcję magnetyczną w próbce, S — przekrój poprzeczny, l — długość próbki. Dipol ten wytwarza własne pole magnetyczne, którego wartość w miejscu, w którym znajduje się igła, wyraża się wzorem (22.18), który po uwzględnieniu momentu magnetycznego przyjmuje postać

$$H_{II} = -\frac{BSl}{4\pi\mu_0 r^3}.$$

Ponieważ po skompensowaniu wychylenia igły za pomocą cewek Helmholtza, pole H_{II} wyrażone ostatnim wzorem jest równe polu H z wzoru (4.5), lecz przeciwnie skierowanym $H_{II} = -H$, otrzymujemy następujący wzór określający indukcję magnetyczną próbki:

$$B = \frac{32\pi\mu_0 NIr^3}{5\sqrt{5}R \cdot V}, \tag{22.20}$$

gdzie I oznacza natężenie prądu w cewkach Helmholtza, N — łączną liczbę zwojów, R — promień cewek, r — odległość igły od środka solenoidu, V — objętość próbki.

Pomiary

Pomiary rozpoczynamy od odmagnesowania próbki. W tym celu umieszczamy ją w cewce magnesującej i cewkę łączymy z autotransformatorem (rys. 22.11a). Rozmagnesowujemy próbkę w taki sam sposób jak w doświadczeniu 22.2. Następnie łączymy ob-

wód solenoidu i cewek Helmholtza–Gaugaina według schematu 4.15. Ponadto mierzymy średnicę próbki 2ϱ, jej długość l, odległość próbki od środka igły r, liczbę zwojów cewki magnesującej N_m oraz cewek Helmholtza N oraz promień R cewek Helmholtza. Ustawiamy przyrząd, mierniki i oporniki w takich miejscach, by zwolniona igła magnetyczna wskazywała zero na umieszczonej pod nią skali. Przy największej wartości oporu w obwodzie magnesującym włączamy prąd I_m. Igła wychyli się z położenia zerowego. Włączamy prąd w obwodzie cewek i jeżeli wychylenie igły zwiększyło się, zmieniamy jego kierunek, wtedy wychylenie zmniejszy się lub igła wychyli się w kierunku przeciwnym. Dobieramy taką wartość prądu I w cewkach, by igła przyjęła na powrót położenie zerowe. Zapisujemy natężenia prądów w obydwu obwodach. W podobny sposób mierzymy natężenia prądów dla kolejno rosnących natężeń I_m w obwodzie magnesującym. Wykonujemy pomiary dla 5 do 10-ciu wartości natężenia prądu magnesującego w granicach od $I_m = 0$ do $(I_m)_{max}$ odpowiadającego zerowemu oporowi w obwodzie solenoidu. Pomiary te wyznaczają przebieg krzywej pierwotnej, tzn. odcinka 0–B_s na rys. 22.7b. Podobne pomiary wykonujemy dla krzywej rozmagnesowania B_s–B_r–$(-H_c)$ oraz pozostałej części pętli $(-H_c)-(-B_s)$–(H_c)–B_s. Natężenie prądu musi zmieniać się kolejno 0–$(I_m)_{max}$–0–$(-I_m)_{max}$–0–$(I_m)_{max}$. Dla każdego odcinka pętli wykonujemy po pięć pomiarów. Wychylenie igły kompensujemy również wtedy, gdy $I_m = 0$.

Obliczenia

Wszystkie wielkości obliczamy w układach SI oraz CGSEM. Pole magnetyczne obliczamy z wzoru dla solenoidu (1.20), a indukcję magnetyczną ze wzoru (22.20). Dla stosowanego przyrządu współczynnik stojący przy natężeniu prądu I we wzorze (22.20) jest wielkością stałą dla wszystkich pomiarów. Obliczamy go jednorazowo, a następnie mnożymy przez kolejne wartości natężenia prądu. Polaryzację magnetyczną $\mathcal{J}$ obliczamy z wzoru (1.30). Wykonujemy dwa wykresy. Na jednym wykreślamy zależność $B(H)$ oraz $\mathcal{J}(H)$ w układzie SI, a na drugim te same zależności w układzie CGSEM. Obliczamy błędy obliczanych wielkości dla trzech wybranych punktów pomiarowych. Z wykresów odczytujemy polaryzację magnetyczną nasycenia i koercję oraz błędy tych wielkości.

22.4. OBSERWACJA PĘTLI HISTEREZY

Cel: obserwacja i pomiar pętli histerezy dla różnych wartości prądu magnesującego.

Przyrządy: autotransformator (§ 4.5), mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oscylograf katodowy (§ 25.5).

Zagadnienia: podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2 i 1.5), magnetyczne własności materii (§ 22.01–22.03), precesja (§ 8.4).

Wprowadzenie i aparatura

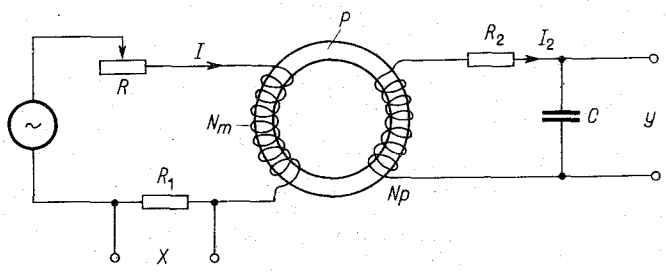
Układ do badania pętli histerezy za pomocą oscylografu (ferrograf) pokazano na rys. 22.18. Próbka P może posiadać kształt pierścienia. Jeżeli kształt próbki jest inny, jej obwód magnetyczny musi być zamknięty. Próbka musi składać się z odizolowanych elektrycznie blaszek, dzięki czemu eliminujemy prądy wirowe. Na próbce znajdują się

dwa uzwojenia: magnesujące złożone z N_m zwojów nawinięte równomiernie wzdłuż obwodu pierścienia i pomiarowe o N_p zwojach. Uzwojenie magnesujące zasilamy prądem przemiennym

$$I = I_0 \sin \omega t, \tag{22.21}$$

który płynąc przez opornik wytwarza na nim spadek napięcia U proporcjonalny do H. Zgodnie z wzorem definicyjnym natężenia pola magnetycznego (1.20) mamy

$$H = \frac{N_m I}{l}, \text{ skąd } H = \frac{N_m U}{R_1 l} \quad \text{lub} \quad U = \frac{R_1 l H}{N_m}. \tag{22.22}$$



22.18. Układ do badania pętli histerezy za pomocą oscylografu.

a przykładając do płytek x oscylografu napięcie U otrzymamy wychylenie proporcjonalne do natężenia pola magnetycznego. Do płytek y przykładamy napięcie, które otrzymujemy na kondensatorze C obwodu pomiarowego. Jest ono proporcjonalne do indukcji magnetycznej próbki. Zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej Faradaya, siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu pomiarowym wyraża się wzorem*

$$E = \frac{d\Phi}{dt} = N_p S \frac{dB}{dt}, \tag{22.23}$$

gdzie $d\Phi = N_p S dB$ oraz S jest przekrojem poprzecznym próbki.

$$E dt = N_p S dB. \tag{22.24}$$

Z wzoru powyższego wynika, że indukcja magnetyczna jest równa całce z indukowanej siły elektromotorycznej. Całkowanie wykonujemy za pomocą tzw. integratora składającego się z opornika R_2 i kondensatora C. Udowodnimy, że na kondensatorze istnieje napięcie U_C proporcjonalne do indukcji. Zgodnie z definicją pojemności (1.11)

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I_p dt,$$

ponadto $I_p = E/R_2$, skąd $U_C = \frac{1}{R_2 C} \int E dt$, a po podstawieniu (22.24) i scałkowaniu

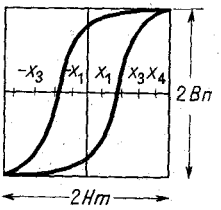
$$U_C = \frac{N_p S}{R_2 C} B. \tag{22.25}$$

* Znak „−" pomijamy, gdyż kierunek przyłożonego sygnału możemy zmieniać sposobem łączenia końcówek uzwojeń transformatora. Ponadto zaniedbujemy opór $(\omega C)^{-1}$ w porównaniu z R_2.

Zasilając więc układ prądem przemiennym, na ekranie oscylografu otrzymamy pętlę histerezy magnetycznej.

Omawiany układ pomiarowy możemy dostosować do pomiarów ilościowych. Natężenie pola magnetycznego obliczyć możemy z wzoru definicyjnego (1.20), który dla maksymalnego natężenia pola magnetycznego H_m (rys. 22.19) odpowiadającego szczytowej wartości prądu I_m przyjmuje postać

$$H_m = \frac{N_m I_s \sqrt{2}}{l}, \tag{22.26}$$



22.19. Amplitudy pętli histerezy.

gdzie I_s natężenie skuteczne w obwodzie magnesującym. Celem obliczenia indukcji korzystamy z wzoru (22.24), który możemy napisać w postaci

$$B = \frac{1}{N_p S} \int E_0 \cos \omega t \cdot dt.$$

Stąd po scałkowaniu, dla wartości szczytowych otrzymamy

$$B_m = \frac{1}{N_p S \omega} E_m. \tag{22.27}$$

Poprawny pomiar siły elektromotorycznej możemy wykonać za pomocą woltomierza elektrostatycznego lub kompensatora. Błąd spowodowany zastosowaniem zwykłego woltomierza możemy wyeliminować stosując pomocnicze źródło prądu, które podłączone równolegle do woltomierza i płytek y oscylografu daje taką samą amplitudę na ekranie jak sygnał pomiarowy. Wtedy $E_m = \sqrt{2} U_s$, gdzie U_s — napięcie skuteczne zbierane z autotransformatora i wzór (22.27) przyjmuje postać

$$B_m = \frac{\sqrt{2} U_s}{N_p S \omega}. \tag{22.28}$$

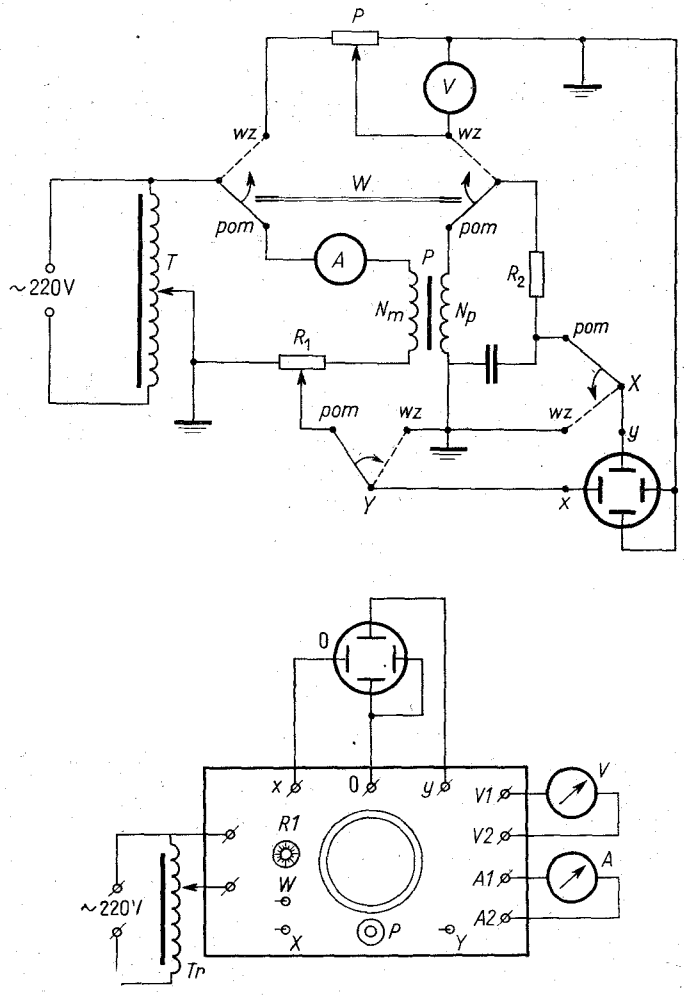
Szczegółowy schemat układu pomiarowego pokazano na rys. 22.20.

Celem ułatwienia pomiaru długości linii na ekranie lampy oscylograficznej, układ zaopatrzono w wyłączniki „wzorcowanie X" i „wzorcowanie Y", za pomocą których przy odczycie długości linii (amplitudy pętli) wyłącza się sygnał przychodzący na drugą parę płytek. Przełącznik W wyłącza prąd w obwodzie magnesującym, sygnał z integratora, a na płytki y włącza sygnał odniesienia, regulowany potencjometrem P.

Pomiary

Łączymy układ według schematu pokazanego na rys. 20.20, redukujemy napięcie autotransformatora do zera, podłączamy do źródła oscylograf katodowy i autotransformator.

Przełączniki X, Y i W ustawiamy w pozycji pomiarowej i zwiększamy nieco napięcie autotransformatora i regulujemy wzmocnienie y oscylografu i położenie suwaka opornika R_1 w ten sposób, by na ekranie uzyskać wyraźną, lecz nie dużą pętlę histerezy, przy możliwie najniższym napięciu autotransformatora zasilającego układ. Na ekranie oscylografu znajduje się skala w postaci kratek. Za pomocą odpowiednich potencjometrów oznaczonych ↕, ↔ przesuwamy pętlę dokładnie na środek ekranu. Przerysowujemy pętlę,



22.20. Budowa ferrografu (a) i przykładowe rozmieszczenie elementów na płycie czołowej (b).

a następnie przechodzimy do wzorcowania pola magnetycznego i indukcji. W tym celu odczytujemy natężenie prądu I_s. Następnie przełącznik x ustawiamy w położeniu „wzorcowanie" i mierzymy długość uzyskanej linii. Następnie przełącznik X nastawiamy na pomiai, a Y na wzorcowanie. Mierzymy długość uzyskanej linii, przełącznik W ustawiamy w położeniu „wzorcowanie" i za pomocą potencjometru P dobieramy napięcie w ten sposób, by uzyskać linie dokładnie tej samej długości jak wtedy, gdy przełącznik W znajduje się w położeniu „pomiar". Odczytujemy napięcie skuteczne U_s.

Pomiary długości linii wykonujemy dla kilku (5 do 10-ciu) wyższych wartości napięcia zasilającego. W przypadku, gdy przy wyższych napięciach musimy zmienić wzmocnienie w oscylografie, musimy również powtórzyć cechowanie indukcji magnetycznej. Zapisujemy wszystkie wielkości stałe, a więc liczby zwojów i wymiary geometryczne próbki: r_1, r_2, h, N_m, N_p oraz dokładność stosowanych mierników i pomiarów oscylograficznych, ponadto przekrój rdzenia transformatora S.

Obliczenia

W oparciu o wykonane wzorcowanie, które daje nam wartości maksymalnego pola i maksymalnej indukcji magnetycznej dla każdej obserwowanej pętli, wykonujemy skalę na osi H i osi B. W tym celu, w przypadku osi H obliczamy maksymalne pole z wzoru (22.26). Następnie wybieramy wartości pola H_1, $2H_1$, ..., które chcemy oznaczyć na rysunku (3 do 5 punktów dla pętli obserwowanej przy najniższym napięciu) i wyliczamy ich współrzędne x_1, $2x_1$ ... z wzoru

$$x_i = \frac{AB}{2}\frac{H_i}{H_m}.$$

W przypadku oznaczenia osi indukcji postępujemy w taki sam sposób, obliczając indukcję B_m z wzoru (22.28). Po oznaczeniu osi współrzędnych dla poszczególnych pętli, wszystkie obserwowane pętle przenosimy na wspólny arkusz. W tym celu wyznaczamy punkty poszczególnych pętli dla wybranych wartości H_1, H_2 ... oraz B_1, B_2, ... i nanosimy je na nowy arkusz, na którym jest jedna wspólna skala. Dyskusję błędów ograniczamy do wyznaczenia błędu procentowego wielkości H_m i B_m dla pętli uzyskanej przy średniej wartości napięcia zasilającego.

22.5. INDUKCJOMIERZ

Cel: wyznaczenie przebiegu pętli histerezy magnetycznej próbki w kształcie pręta.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki (§ 4.2), źródła prądu (§ 4.1).

Zagadnienia: podstawowe wielkości magnetyczne (§ 1.2 i 1.5), magnetyczne własności materii (§ 22.01–0.3), precesja (§ 8.4).

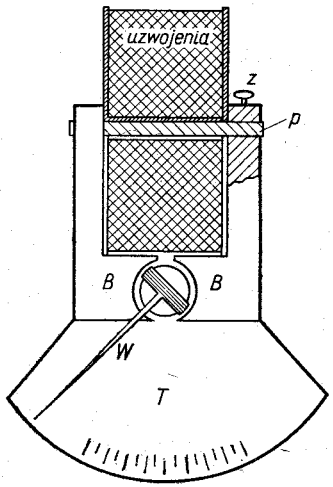
Wprowadzenie

Indukcjomierz (rys. 22.21) jest zbudowany podobnie jak miernik magnetoelektryczny, w którym magnes stały zastąpiono elektromagnesem. Rdzeniem elektromagnesu jest badana próbka P, a uzwojenia stanowią solenoid wytwarzający pole magnesujące. Strumień powstałej w próbce indukcji magnetycznej jest prowadzony przez nabiegunniki $B\,B$ i zamyka się w szczelinie, w której umieszczona jest ramka zasilana z pomocniczego źródła prądem o niewielkim natężeniu. Ramka podobnie jak w miernikach zaopatrzona jest w sprężynki powrotne i w wskazówkę W. Zgodnie z wzorem (18.2) na ramkę działa moment siły

$$M = NSIB,$$

gdzie iloczyn NS jest przekrojem czynnym ramki, I — natężeniem prądu płynącego przez ramkę, B — indukcją magnetyczną panującą w szczelinie. Ponieważ wychylenie

ramki jest proporcjonalne do działającego momentu siły, przy stałym natężeniu prądu jest ono również proporcjonalne do panującej w szczelinie indukcji magnetycznej B, która z kolei jest proporcjonalna do indukcji w próbce. Przyrząd jest wyskalowany wprost w jednostkach indukcji, a jego zakres zależy od natężenia prądu płynącego przez cewkę. Dla każdego zakresu podano wartość natężenia I tego prądu. Natężenie pola magnetycznego obliczamy z wzoru definicyjnego dla solenoidu (1.20).



22.21. Budowa indukcjomierza.

Pomiary

Mierzymy wymiary geometryczne próbki i wkładamy ją do wnętrza solenoidu, a następnie dokręcamy za pomocą zacisków zz. Włączamy obwód źródła pomocniczego i nastawiamy prąd odpowiadający maksymalnemu zakresowi indukcjomierza (rys. 4.15). Po czym w obwodzie solenoidu włączamy maksymalny prąd i obserwujemy wychylenie indukcjomierza. Jeżeli jest ono małe, zwiększamy czułość przyrządu podwyższając prąd w cewce do wartości odpowiadającej innemu zakresowi miernika i wyłączamy prąd pomocniczy. Do solenoidu podłączamy autotransformator i rozmagnesowujemy próbkę postępując w sposób opisany w doświadczeniu 22.2. Następnie łączymy obwód solenoidu według schematu 4.15, zwiększamy opór opornika R do maksimum i włączamy prąd w cewce pomiarowej i solenoidzie. Redukując opór R mierzymy indukcję. Natężenie prądu I_m wzrasta wtedy do maksimum $(I_m)_{max}$, co odpowiada krzywej pierwotnej. Następnie prąd zmieniamy przechodząc kolejno cykl $(I_m)_{max}$–0–$(-I_m)_{max}$–0–$(I_m)_{max}$ opisujący pętlę histerezy. Na każdą ćwiartkę pętli powinno przypadać przynajmniej po 6 punktów pomiarowych.

Obliczenia

Natężenie pola magnetycznego H obliczamy z wzoru

$$H = \frac{NI_m}{l},$$

gdzie N — liczba zwojów solenoidu, a l — jego długość. Polaryzację obliczamy z wzoru

$$\mathcal{J} = B - \mu_0 H.$$

Korzystając z uzyskanych wyników wykreślamy na jednym arkuszu pętlę histerezy w układach $B(H)$ oraz $\mathcal{J}(H)$. Dla 2–3 punktów nanosimy prostokąty błędów. Z wykresu odczytujemy polaryzację nasycenia $\mathcal{J}_s$ oraz koercję H_c. Oceniamy błędy tych wielkości i piszemy dla nich zestawienie wyników.

23. BADANIE PRĄDNIC I SILNIKÓW

23.1. PRĄDNICA

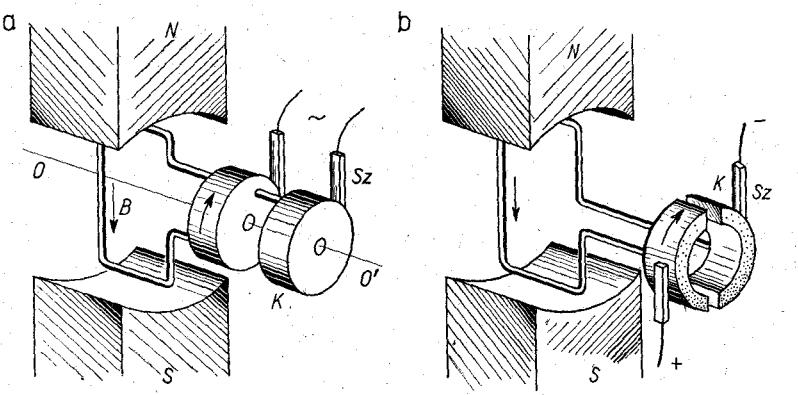
Cel: wyznaczanie charakterystyki biegu jałowego oraz charakterystyki obciążenia prądnicy prądu stałego.

Przyrządy: źródło prądu (§ 4.1), oporniki (§ 4.2), silnik trójfazowy (§ 4.8), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

Zagadnienia: materiały magnetyczne (§ 22.03), zjawisko indukcji elektromagnetycznej (S3, § 74–76; P2, § 4.1–5; J, § 20,1–2), prądnice (S3, § 101–104; P2, § 4.14–22; J, § 20.6).

Wprowadzenie

Prądnicą nazywamy urządzenie, które kosztem pracy mechanicznej wytwarza prąd elektryczny. Prądnica składa się z części obrotowej zwanej wirnikiem (rotor, twornik) oraz z części nieruchomej zwanej magneśnicą (stator, stojan). Pracę mechaniczną zużywa się na podtrzymanie ruchu obrotowego wirnika. W uproszczony sposób budowę prądnicy pokazano na rys. 23.1. W uproszczonym przypadku pokazanym na rysunku wirnik



23.1. Budowa prądnic prądu przemiennego (a) i prądu stałego (b).

składa się z jednego zwoju drutu, a część nieruchoma jest magnesem stałym. W czasie obrotu wirnika, strumień indukcji magnetycznej przechodzącej przez ramkę (zwój drutu wirnika) zmienia swoją wartość od 0 do Φ_0. Zmiany w czasie strumienia przechodzącego przez ramkę opisać możemy wzorem:

$$\Phi = \Phi_0 \cos \omega t, \tag{23.1}$$

gdzie ω jest prędkością kątową ramki. Na skutek tych zmian strumienia indukcji w ramce, zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej Faradaya, indukuje się siła elektromotoryczna

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{23.2}$$

i podstawiając (23.1) otrzymujemy

$$E = \omega\Phi_0 \sin\omega t. \tag{23.3}$$

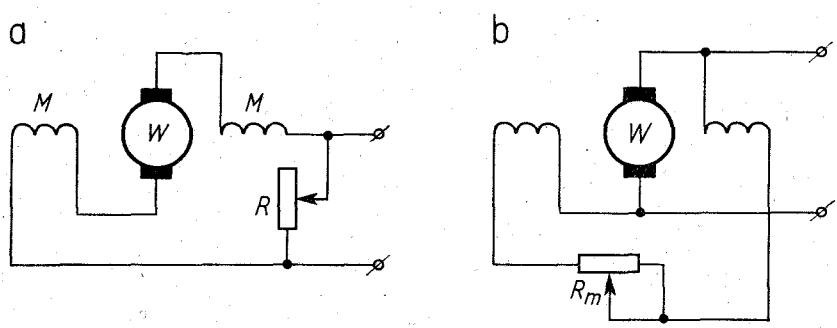
Oznaczając maksymalną wartość siły elektromotorycznej przez $E_0 = \omega\Phi_0$, otrzymamy

$$E = E_0 \sin\omega t. \tag{23.4}$$

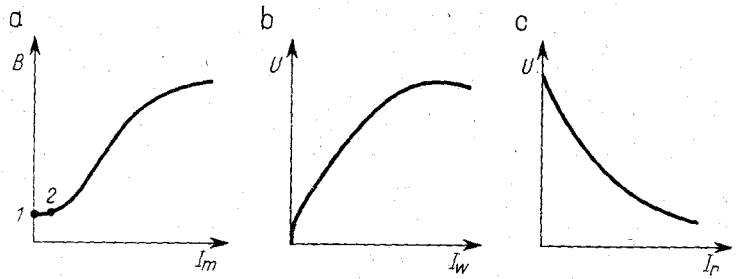
Siłę elektromotoryczną wytworzoną w ramce wyprowadza się na zewnątrz prądnicy za pomocą kolektora K. Jeżeli kolektor zbudowany jest w sposób pokazany na rys. 23.1a, tzn. każdy koniec przewodu jest zakończony oddzielnym pierścieniem, z którego prąd zbieramy za pomocą tzw. szczotki Sz, to otrzymujemy prąd przemienny, którego siła elektromotoryczna wyraża się wzorem (23.4). Prąd jednokierunkowy otrzymać możemy stosując kolektor składający się z dwóch półpierścieni (rys. 23.1b). Szczotki ustawione są w ten sposób, że w chwili, gdy zmienia się kierunek indukowanej siły elektromotorycznej w ramce, zmieniają się pod nimi półpierścienie. Zatem, mimo że kierunek siły elektromotorycznej indukowanej w ramce zmienia się co pół okresu, jedna ze szczotek jest zawsze biegunem dodatnim, a druga ujemnym. Siła elektromotoryczna wyraża się wtedy wzorem

$$E = E_0 |\sin\omega t|. \tag{23.5}$$

Prądnice stosowane w praktyce mają bardzo złożoną budowę. Zamiast jednej ramki istnieje ich N i tworzą one ze sobą równe kąty. Kolektor składa się wtedy z $2N$ wycinków, z których każde dwa połączone są z końcówkami innej ramki. Przestrzeń między ramkami wypełniona jest materiałem magnetycznym miękkim, co znacznie zwiększa strumień indukcji magnetycznej (por. § 22.03). Wirnikiem nazywamy wtedy całą ruchomą część składającą się z ramek (uzwojeń), rdzenia, kolektora oraz osi. Zamiast magnesu stałego stosuje się elektromagnes zasilany albo prądem z prądnicy w przypadku prądnic samowzbudnych, lub też z innego, dodatkowego źródła w przypadku prądnic obcowzbudnych. W zależności od sposobu łączenia uzwojeń magneśnicy M z wirnikiem, prądnice samowzbudne dzielimy na szeregowe i równoległe (rys. 23.2).



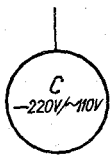
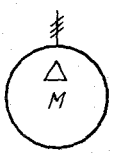
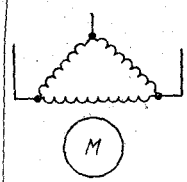
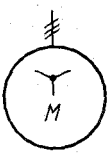
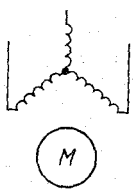
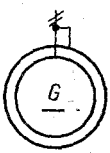
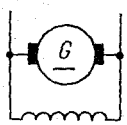
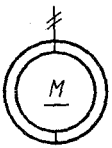
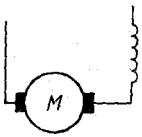
23.2. Łączenie magneśnicy w prądnicy szeregowej (a) i równoległej (b), W — wirnik, M — magneśnica.



23.3. Charakterystyki prądnic: biegu jałowego (a), szeregowej (b), bocznikowej (c)

Tabela 23.1

Oznaczenia silników i prądnic w schematach elektrycznych

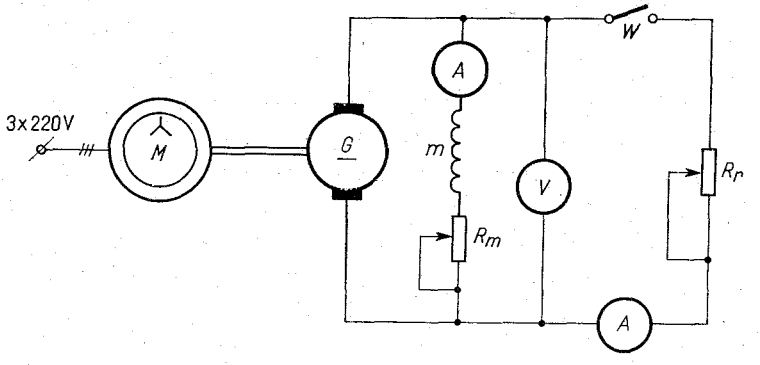
Rodzaj maszyny	Symbol	
	uproszczony	pełny
maszyna elektryczna wirująca, gdzie wewnątrz kółka oznacza się: a. rodzaj maszyny (*G* — prądnica, *M* — silnik, *C* — przetwornica), b. rodzaj prądu, liczbę faz i sposób łączenia uzwojeń		
silnik asynchroniczny 3-fazowy klatkowy z uzwojeniem połączonym w trójkąt		
silnik asynchroniczny 3-fazowy klatkowy z uzwojeniem połączonym w gwiazdę		
prądnica bocznikowa prądu stałego		
silnik szeregowy prądu stałego		

Zależność indukcji magnetycznej prądnicy od natężenia prądu w magneśnicy nazywamy charakterystyką magnetyczną prądnicy. W prądnicy samowzbudnej w chwili, w której wprowadzamy w ruch wirnik, strumień indukcji wytwarzany przez magneśnicę (elektromagnes) jest bardzo słaby i pochodzi wyłącznie od pozostałości magnetycznej rdzenia, tzw. magnetyzm szczątkowy (punkt 1 na rys. 23.3a). Wtedy w wirniku wytwarza się prąd o bardzo małej sile elektromotorycznej E_1. Przez uzwojenia magneśnicy zaczyna płynąć słaby prąd, który powoduje zwiększenie strumienia indukcji, co z kolei powoduje wzrost siły elektromotorycznej itd. Równocześnie w miarę wzrostu natężenia prądu czerpanego z prądnicy rośnie opór stawiany przez wirnik. Rośnie wtedy moc P_w, którą musimy wkładać dla podtrzymania ruchu obrotowego ramki wirnika. Moc P_w jest zawsze nieco większa od mocy P_p czerpanej z prądnicy. W tabeli 23.1 przedstawiono sposoby oznaczania prądnic i silników w schematach elektrycznych.

Działanie prądnicy określają jej charakterystyki. Charakterystyką biegu jałowego nazywamy wykres przedstawiający zależność siły elektromotorycznej (napięcia U_w) prądu wytwarzanego przez prądnicę od natężenia prądu I_m płynącego przez uzwojenia magneśnicy $U_w(I_m)$. Charakterystyką obciążenia nazywamy wykres zależności napięcia U_r od natężenia I_r prądu czerpanego z prądnicy $U_r(I_r)$ (patrz rys. 23.3). W prądnicy równoległej (bocznikowej) część wytwarzanego prądu I_m płynie przez magneśnicę, a pozostała część I_r przez odbiornik, stąd $I_w = I_m + I_r$.

Aparatura i pomiary

W doświadczeniu prądnicę wprawiamy w ruch za pomocą silnika trójfazowego krótkozwartego. Układ prądnicy samowzbudnej łączymy według schematu 23.4, a w przypadku prądnicy obcowzbudnej obwód magneśnicy według schematu 4.15, natomiast obwód roboczy, według schematu 23.4. Gdy podłączamy silnik do źródła prądu, obserwujemy kierunek obrotu jego wirnika. Gdy nie jest on zgodny ze strzałką na prądnicy, zmieniamy kolejność podłączenia dowolnych dwóch faz.



23.4. Schemat połączeń prądnicy bocznikowej.

Rozpoczynając pomiary włączamy silnik, a następnie obwód magneśnicy do badania charakterystyki biegu jałowego (obwodu roboczego nie włączamy), po czym mierzymy napięcie U dla 10-ciu różnych wartości I_m. Wartości I_m dobieramy za pomocą opornika R_m. Celem wyznaczenia charakterystyki obciążenia włączamy obwód obciążenia

(włącznikiem W), a opór R_m po uruchomieniu prądnicy redukujemy do zera lub minimum wskazanego w instrukcji. Natężenie prądu I_r czerpanego z prądnicy zmieniamy za pomocą opornika R_r. Mierzymy napięcie U_r oraz natężenie I_m w zależności od prądu I_r. Wyniki doświadczenia nanosimy na wykres i kontrolujemy przebieg uzyskanej zależności. Jeżeli zachodzi potrzeba, pomiary powtarzamy lub uzupełniamy.

Obliczenia

Wykreślamy na wspólnym arkuszu charakterystykę biegu jałowego $U_w(I_m)$ oraz obciążenia $U_r(I_r)$. Błędy nanosimy dla 2–3 punktów pomiarowych. Określamy optymalną wartość prądu wzbudzenia I_m, powyżej której napięcie wzrasta bardzo wolno (i w przybliżeniu liniowo). Obliczamy moc pobieraną przez magneśnicę $P_m = I_m U_m$ oraz obciążenie $P_r = I_r U_r$ i wykreślamy te wielkości na wspólnym arkuszu w zależności od I_r. Dyskutujemy przebieg uzyskanych wykresów i określamy optymalne warunki pracy prądnicy, tzn. natężenie prądu I_r odpowiadające takiemu punktowi na wykresie $P_r(I_r)$, powyżej którego moc wzrasta bardzo wolno i w przybliżeniu liniowo.

23.2. SILNIK PRĄDU STAŁEGO

Cel: zbadanie zależności częstości obrotów wirnika od natężenia prądu w magneśnicy i od mocy czerpanej z silnika.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki (§ 4.2), omomierz lub mostek MW4 (§ 4.3), tachometr elektryczny (§ 3.9).

Zagadnienia: materiały magnetyczne (§ 22.03), zjawisko indukcji elektromagnetycznej (S3, § 74–76; P2, § 4.1–5; J, § 20.1–2), budowa i działanie prądnic (S3, § 101–104; P2, § 4.14–22; J, § 20.6).

Wprowadzenie

Silnik elektryczny jest urządzeniem, które zamienia energię prądu elektrycznego na pracę mechaniczną. Silnik prądu stałego zbudowany jest tak samo jak prądnica (rys. 23.1). Prądnica kosztem pracy mechanicznej wytwarza prąd elektryczny, natomiast do silnika dostarczamy energię elektryczną (prąd), a wytwarza on pracę mechaniczną, bowiem jego wirnik może wprawić w ruch inne urządzenia mechaniczne. Oczywiście moc prądu dostarczanego do silnika jest większa od czerpanej zeń mocy mechanicznej.

Prąd płynie zarówno przez uzwojenia magneśnicy, jak i wirnika. Dzięki temu magneśnica wytwarza indukcję magnetyczną B proporcjonalną do I_m (prąd magneśnicy), a wirnik staje się dipolem o momencie elektromagnetycznym m proporcjonalnym do prądu I_w. Zatem na wirnik (dipol magnetyczny) w polu magneśnicy działa moment siły M (S3, § 30)

$$M = mB \sim CI_w I_m \tag{23.6}$$

powodujący obrót wirnika. W obracającym się wirniku indukuje się siła przeciwelektromotoryczna (23.3). W omawianym przypadku zachodzi $\Phi_0 = SB_0 \sim I_m$ i wzór (23.3) przyjmuje postać

$$E = -Av I_m, \tag{23.7}$$

gdzie $\nu = \omega/2\pi$ oznacza częstość obrotu wirnika. Do obwodu wirnika, w którym płynie prąd I_w zastosować możemy II prawo Kirchhoffa (17.4) $U+E = R_w I_w$, skąd

$$U - A\nu I_m = I_w R_w, \tag{23.8}$$

gdzie U napięcie zasilające. Z wzoru powyższego wynika, że częstość obrotu wirnika jest odwrotnie proporcjonalna do prądu I_m w magneśnicy

$$\nu = \frac{U - R_w I_w}{A} \frac{1}{I_m}. \tag{23.9}$$

W nieobciążonym silniku siła przeciwelektromotoryczna indukowana w wirniku (wzór 23.7) jest tak duża, że kompensuje niemal całkowicie przyłożone napięcie U. Zatem lewa strona równania (23.8) jest mała i równa spadkowi napięcia wynikającemu z ciepła Joule'a (prawa strona równ. 23.8). Całkowite straty mocy P_j w silniku otrzymamy sumując straty mocy w wirniku i magneśnicy

$$P_j = I_w U + I_m U.$$

Po obciążeniu silnika maleje siła przeciwelektromotoryczna (23.7), a więc częstość ν obrotów wirnika. Zgodnie z (23.8) wzrasta wtedy prąd w obwodzie wirnika do wartości I_r i silnik pobiera moc

$$P_r = I_r U + I_m U.$$

Różnica mocy $P_r - P_j = P$, która zostaje zamieniona na pracę mechaniczną wynosi

$$P = U(I_r - I_w). \tag{23.10}$$

Najczęściej w silnikach zachodzi $I_r \gg I_w$ oraz $U \gg R_w I_w$, skąd zaniedbując wyraz $R_w I_w$ w (23.9), a I_w wobec I_r w (23.10) i podstawiając U z (23.10) do (23.9) otrzymamy

$$P \simeq A\nu I_r I_m. \tag{23.11}$$

Aparatura

W doświadczeniu stosujemy zespół: silnik prądu stałego i prądnicę (prądu stałego lub przemiennego) lub przetwornicę z prądu stałego na przemienny względnie stały o innym napięciu. W obydwu przypadkach prądnica spełnia rolę obciążenia silnika. Spełnia ona swą rolę doskonale, ponieważ stanowi znikomo małe obciążenie w przypadku biegu jałowego lub też w sposób płynny regulowane obciążenie w przypadku biegu roboczego. Wielkość obciążenia regulujemy mocą prądu czerpanego z prądnicy. Zaniedbując niewielkie straty mocy prądnicy możemy założyć, że moc P_p czerpana z silnika jest równa mocy $U_p I_p$ prądu czerpanego z prądnicy

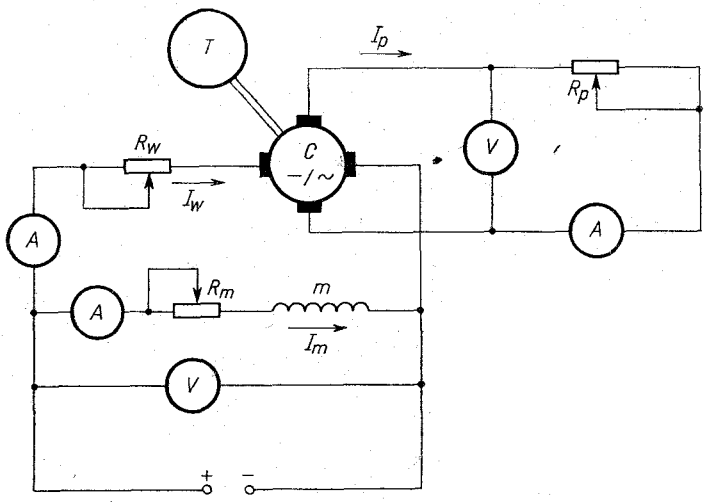
$$P = P_p = U_p I_p = R_p I_p^2. \tag{23.12}$$

Do pomiaru częstości obrotów wirnika stosujemy tachometr elektryczny T, którego oś jest połączona z osią silnika.

Pomiary

Mierzymy opór R_w uzwojeń wirnika oraz R_m magneśnicy za pomocą omomierza lub mostka Wheatstone'a MW4. Obliczamy prąd I_m, który popłynie po włączeniu magneśnicy do źródła prądu. Obwody elektryczne silnika i prądnicy łączymy według

schematów pokazanych na rysunku 23.5. Pomiary rozpoczynamy od wyznaczenia charakterystyki biegu jałowego, tzn. zależności częstości obrotów wirnika od natężenia I_m prądu w uzwojeniach magneśnicy. W tym celu włączamy obwód silnika do źródła prądu zachowując kolejność włączeń: magneśnica, wirnik. Opór na oporniku R_w zmniejszamy do zera, gdy wirnik jest już w ruchu. Obwodu prądnicy na razie nie zamykamy. Zmieniając opornikiem R_m opór w obwodzie magneśnicy mierzymy natężenie prądów I_m — magneśnicy oraz I_w — wirnika, a ponadto częstość ν obrotu wirnika. Pomiary te wykonujemy dla ok. 10-ciu różnych wartości R_m, a wyniki wykreślamy (zależność $I_m\nu$ od I_w). Jeżeli zachodzi potrzeba pomiary powtarzamy.



23.5. Schemat połączeń przetwornicy.

W drugiej części doświadczenia mającej na celu badanie warunków pracy prądnicy, opór R_w w obwodzie silnika redukujemy do zera. Mierzymy natężenie I_p i napięcie U_p w obwodzie prądnicy, prądy I_r i I_m w obwodzie silnika oraz częstość ν w zależności od oporu R_p w obwodzie prądnicy. Pomiary wykonujemy dla ok. 10-ciu różnych wartości R_p. Wykonujemy orientacyjny wykres zależności mocy $P_p = U_pI_p$ od $I_r\nu$ i analizujemy jego przebieg. Jeżeli zachodzi potrzeba, uzupełniamy pomiary.

Obliczenia

Dla prądnicy nieobciążonej (biegu jałowego) obliczamy wartości iloczynu $I_m\nu$ i wykreślamy go w zależności od I_w. Według równania (23.8) zależność powyższa jest liniowa, a nachylenie uzyskanej linii jest równe R_w/A. Obliczamy wartość stałej A. W oparciu o wyniki pomiarów biegu roboczego obliczamy wartości mocy $P_p = I_pU_p$, $P = U(I_r+I_m)$ oraz iloczynu $I_r\nu$. Wykonujemy dokładny wykres zależności mocy P_p od $(I_r\nu)$, który zgodnie z równaniami (23.11) i (23.12) powinien przedstawiać linię prostą, gdyż I_m jest stałe. Obliczamy straty mocy $P_s = P-P_p$ i wykreślamy zależność mocy P_s od mocy czerpanej P_p. Dyskusję błędów ograniczamy do kilku punktów na wykresach. Dyskutujemy wyniki.

24. PRĄD PRZEMIENNY

24.01. PRĄD SINUSOIDALNY

Prądem zmiennym nazywamy prąd o zmieniającym się w czasie natężeniu. W przypadku, gdy średnia w czasie wartość natężenia prądu jest równa zeru, prąd nazywamy *przemiennym*. W praktyce najczęściej stosujemy prąd o natężeniu i napięciu zmieniającym się sinusoidalnie

$$I_c = I_0 \sin(\omega t + \varphi_1), \tag{24.1}$$

$$U_c = U_0 \sin(\omega t + \varphi_2). \tag{24.2}$$

Wielkości I_c, U_c nazywamy odpowiednio natężeniem i napięciem chwilowym, a wartościami szczytowymi tych wielkości I_0, U_0;

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T \tag{24.3}$$

nazywamy częstością kołową lub pulsacją, $\nu = \frac{1}{T}$ — częstością lub częstotliwością, T — okresem, ωt — argumentem, φ — fazą początkową. Faza początkowa φ zależy od wyboru początku układu współrzędnych, a wyboru dokonujemy dowolnie. W szczególności funkcję $\cos\omega t$ przedstawić możemy jako sinusoidę o fazie początkowej $\varphi = \pi/2$.

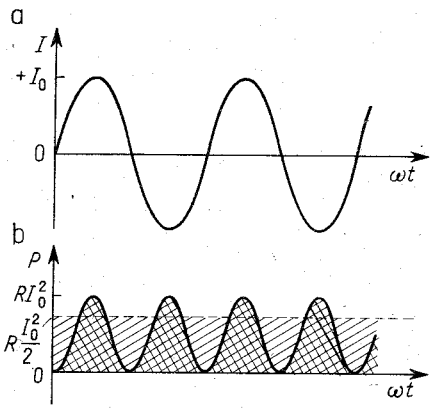
Bardzo ważną wielkością jest praca wykonana przez prąd przemienny. Przykładowo obliczymy energię cieplną wydzieloną w czasie $t = T$ w oporniku R, prądem o natężeniu $I_c = I_0 \sin\omega t$, wtedy

$dW = RI_0^2 \sin^2\omega t\, dt$, skąd $W_T = RI_0^2 \int_0^T \sin^2\omega t$, a podstawiając $\sin^2\omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$ i wykonując całkowanie otrzymamy

$$W_T = R\frac{I_0^2}{2} T.$$

Taką samą ilość pracy ($W_T = RI^2T$) wykonałby płynący przez opornik R prąd stały o natężeniu $I = I_0/\sqrt{2}$. Wielkość

$$I = I_0/\sqrt{2} \simeq 0{,}707\, I_0 \tag{24.4}$$



24.1. Zmiany natężenia w prądzie sinusoidalnym (a) oraz zmiany kwadratu natężenia i mocy (b).

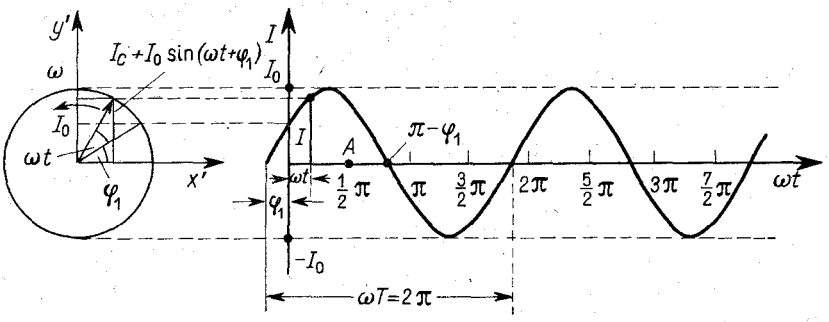
nazywamy *natężeniem skutecznym*. Słownie, natężenie skuteczne definiujemy jako natężenie prądu stałego, który płynąc w takim samym czasie przez taki sam opornik jak prąd przemienny, wydzieli tyle energii co prąd przemienny. Na rys. 24.1 przedstawiono natężenie (a) oraz moc (b) wydzielaną w oporniku R przez prąd przemienny. Podobnie definiujemy *napięcie skuteczne*

$$U = U_0/\sqrt{2}. \tag{24.5}$$

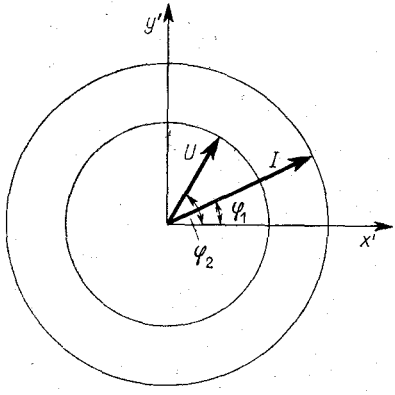
W praktyce oba terminy: natężenie i napięcie stosujemy w znaczeniu wartości skutecznych. Na przykład napięcie skuteczne prądu przemiennego wynosi 220 V, a jego napięcie szczytowe $U_0 = \sqrt{2}U = 312$ V. Mierniki prądu przemiennego wskazują również wielkości skuteczne.

24.02. WEKTOROWE I SYMBOLICZNE PRZEDSTAWIENIE WIELKOŚCI ELEKTRYCZNYCH

Zauważymy, że dowolną wielkość elektryczną np. natężenie (24.1) możemy interpretować jako wynik rzutowania na oś y' *wektora* $\mathbf{I}_0$ obracającego się z prędkością kątową ω wokół punktu 0 (początku wektora) w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 24.2). Wektor $\mathbf{I}_0$ możemy uważać za obraz graficzny maksymalnego natężenia.



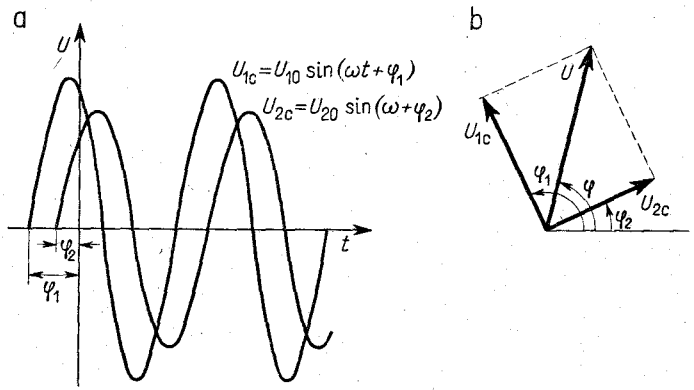
24.2. Prąd sinusoidalny jako wynik rzutowania wektora natężenia na oś y.



24.3. Wektory: natężenia (24.1) i napięcia (24.2) w układzie biegunowym.

Dla prądu przemiennego, którego częstość $\nu = 50$ Hz jest stała, obraz graficzny upraszcza się. W tym przypadku *wykresem wektorowym* nazywamy wykres biegunowy, w którym promieniem jest wartość skuteczna wielkości, a kątem — faza początkowa. Do wektorów elektrycznych możemy stosować zwykłe reguły dodawania (i odejmowania) wektorów. Na rys. 24.4 przedstawiono przykład dodawania dwóch napięć sinusoidalnych. Zgodnie z wzorem Carnota zachodzi

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{24.6}$$



24.4. Dodawanie dwóch napięć: przedstawienie trygonometryczne (a), b) wektorowe (b).

Ponadto można udowodnić, że

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_1 \sin\varphi_1 + U_2 \sin\varphi_2}{U_1 \cos\varphi_1 + U_2 \cos\varphi_2}. \tag{24.7}$$

Dla skomplikowanych obwodów elektrycznych również opis wektorowy jest bardzo złożony. Najprostszy opis uzyskać możemy za pomocą liczb zespolonych, czyli metodą symboliczną.

Zauważymy, że jeżeli na osi x' rys. 24.2 odkładać będziemy jednostki rzeczywiste, a na osi y' — jednostki urojone, to wektor I_0 możemy przedstawić w trygonometrycznej postaci *liczby zespolonej**,

$$\dot{I}_c = I_0[\cos(\omega t + \varphi_1) + i \sin(\omega t + \varphi_1)], \tag{24.8}$$

$$\dot{U}_c = U_0[\cos(\omega t + \varphi_2) + i \sin(\omega t + \varphi_2)], \tag{24.8a}$$

$$\dot{I}_c = I_0 \exp i(\omega t + \varphi_1) = I_0 \exp(i\omega t)\exp(i\varphi_1), \tag{24.9}$$

$$\dot{U}_c = U_0 \exp i(\omega t + \varphi_2) = U_0 \exp(i\omega t)\exp(i\varphi_2). \tag{24.9a}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\dot{I}_0 = I_0 \exp(i\varphi_1), \tag{24.10}$$

$$\dot{U}_0 = U_0 \exp(i\varphi_2), \tag{24.10a}$$

otrzymamy

$$\dot{I}_c = \dot{I}_0 \exp(i\omega t), \tag{24.11}$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_0 \exp(i\omega t). \tag{24.11a}$$

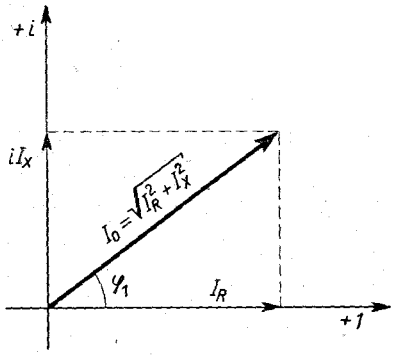
* Analogiczne wzory dla napięcia numerować będziemy taką samą cyfrą z dopiskiem a.

Zauważymy ponadto, że wektor I_0 (rys. 24.5) przedstawić możemy za pomocą algebraicznej postaci liczb zespolonych

$$\dot{I}_0 = I_R + iI_X, \tag{24.12}$$

$$\dot{U}_0 = U_R + iU_X, \tag{24.12a}$$

gdzie $I_X = I_0 \sin\varphi_1$ oraz $I_R = I_0 \cos\varphi_1$.



24.5. Wektor natężenia w płaszczyźnie liczb zespolonych.

Każdą funkcję sinusoidalną możemy uważać za część urojoną liczby zespolonej (por. wzór 24.8), co matematycznie zapiszemy dla prądu

$$I_0 \sin(\omega t + \varphi_1) = \mathrm{Im}\{I_0[\cos(\omega t + \varphi_1) + i\sin(\omega t + \varphi_1)]\}$$

lub

$$I_c = \mathrm{Im}(\dot{I}_c). \tag{24.13}$$

Podobnie funkcję cosinus możemy przedstawić jako część rzeczywistą liczby zespolonej

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi_1) = \mathrm{Re}(\dot{I}_c).$$

Symbol Im (imaginary) oznacza, że bierzemy tylko część urojoną liczby zespolonej. Podobnie symbol Re (real) oznacza tylko część rzeczywistą. Im i Re są symbolami operacji matematycznych podobnie jak np. symbol różniczkowania. Operacje matematyczne Im i Re są przemienne z dodawaniem, odejmowaniem, różniczkowaniem i całkowaniem:

$$\mathrm{Im}(\dot{A}) \pm \mathrm{Im}(\dot{B}) = \mathrm{Im}(\dot{A} \pm \dot{B}); \quad \mathrm{Re}(\dot{A}) \pm \mathrm{Re}(\dot{B}) = \mathrm{Re}(\dot{A} \pm \dot{B}),$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Im}\,\dot{A} = \mathrm{Im}\frac{d}{dt}\dot{A}; \quad \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\,\dot{A} = \mathrm{Re}\frac{d}{dt}\dot{A}, \tag{24.14}$$

$$\int \mathrm{Im}\,\dot{A} = \mathrm{Im}\int \dot{A}; \quad \int \mathrm{Re}\,\dot{A} = \mathrm{Re}\int \dot{A}.$$

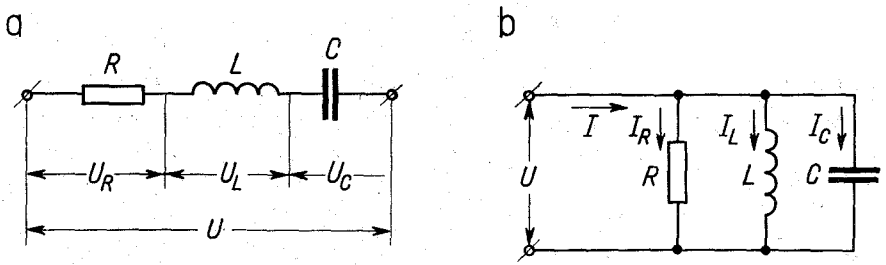
Zauważymy, że działania matematyczne na wielkościach matematycznych będących funkcją sinus są równoważne działaniom na częściach urojonych wielkości zespolonych. Zgodnie z (24.14), dodawanie, odejmowanie, różniczkowanie i całkowanie części urojonych wielkości zespolonych możemy zastąpić działaniem na wielkościach zespolonych, a dopiero później możemy wyodrębnić część urojoną. Stąd też wymienione cztery operacje matematyczne na wielkościach elektrycznych wykonać możemy na odpowiada-

jących tym wielkościom liczbach zespolonych przyjmując jako wynik końcowy urojoną część wyniku. Prawo przemienności nie obowiązuje dla mnożenia i dzielenia, stąd tych operacji nie możemy wykonywać na liczbach zespolonych.

24.03. PRAWA OHMA I KIRCHHOFFA W METODZIE SYMBOLICZNEJ

Prawo Ohma i prawa Kirchhoffa stosują się do obwodów prądu przemiennego również wtedy, gdy natężenia, napięcie i opory wyrazimy w postaci zespolonej. Rozważymy to na przykładzie obwodu 24.6a, w którym szeregowo połączony jest opornik, cewka i kondensator. II prawo Kirchhoffa dla takiego obwodu przyjmuje postać

$$\dot{U}_c - \dot{E} = R\dot{I}_c + \dot{U}_C. \tag{24.15}$$



24.6. Schemat połączenia elementów R, L, C: szeregowego (a) i równoległego (b).

Zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej $E = -L\frac{dI_c}{dt}$, natomiast $\dot{U}_C = \frac{1}{C}\int \dot{I}_c dt$, czyli

$$\dot{U}_c = R\dot{I}_c + L\frac{d}{dt}\dot{I}_c + \frac{1}{C}\int \dot{I}_c dt.$$

Podstawiając na $\dot{I}_c$ wyrażenie (24.9) i wykonując różniczkowania otrzymamy

$$\dot{U}_c = R\dot{I}_c + i\omega L\dot{I}_c + \frac{1}{i\omega C}\dot{I}_c$$

lub upraszczając przez $\exp(i\omega t)$

$$\dot{U}_0 = R\dot{I}_0 + i\omega L I_0 + \frac{1}{i\omega C}\dot{I}_0. \tag{24.16}$$

Wielkość

$$\dot{Z}_0 = R + iX = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{24.17}$$

ponadto

$$X = X_L + X_C, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = -(\omega C)^{-1} \tag{24.18}$$

nazywamy *oporem zespolonym* lub impedancją, R — *oporem rzeczywistym*, X — oporem pozornym lub *reaktancją*, X_L — oporem pozornym indukcyjnym, X_C — oporem pozornym pojemnościowym. Uwzględniając powyższe podstawienia, równanie (24.16) napiszemy w postaci

$$\dot{U}_c = \dot{Z}\dot{I}_c. \tag{24.19}$$

Równanie powyższe znamy pod nazwą prawa Ohma. Podstawiając na $\dot{U}_c$ i $\dot{I}_c$ wartości (24.9a) i (24.9) otrzymamy

$$\dot{Z} = \frac{U_0}{I_0} \exp i(\varphi_2 - \varphi_1)$$

lub

$$\dot{Z} = \dot{Z}_0 \exp i\Psi.$$

Porównując ostatnie wyrażenie z (24.17), zgodnie z teorią liczb zespolonych możemy napisać

$$|Z_0| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \tag{24.20}$$

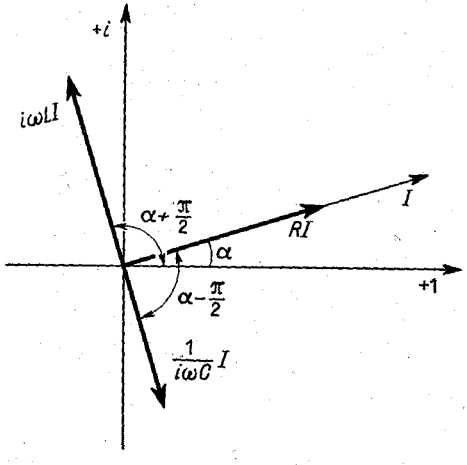
a argument

$$\operatorname{tg}\Psi = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Równanie (24.16) możemy przedstawić graficznie za pomocą wektorów. Zauważymy w tym celu, że spadek napięcia na oporniku R jest zgodny w fazie z prądem $U_R = R\dot{I}_c$. Spadek napięcia na oporze indukcyjnym $U_L = i\omega L\dot{I}_c$ wyprzedza prąd o $\pi/2$, ponieważ $i\omega L\dot{I}_c = i\omega LI_0(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \omega LI_0(-\sin\varphi_1 + i\cos\varphi_1) = \omega LI_0\left[\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right]$. W podobny sposób możemy udowodnić, że spadek napięcia na oporze pojemnościowym opóźnia się względem prądu o kąt $\frac{\pi}{2}$, co przedstawiono na rys. 24.7. Obrazem graficznym równania (24.16) jest rys. 24.8.

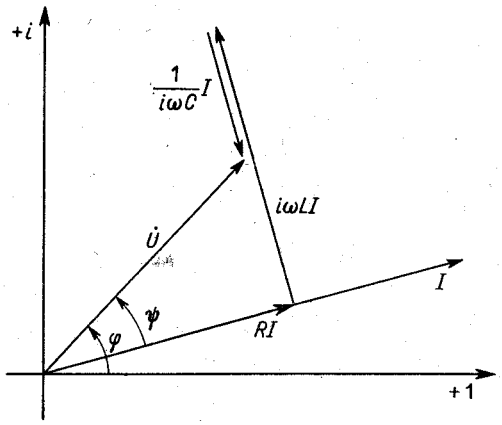
W przypadku równoległego połączenia opornika, indukcyjności i pojemności (rys. 24.6b) zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa zachodzi

$$\dot{I}_c = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C.$$

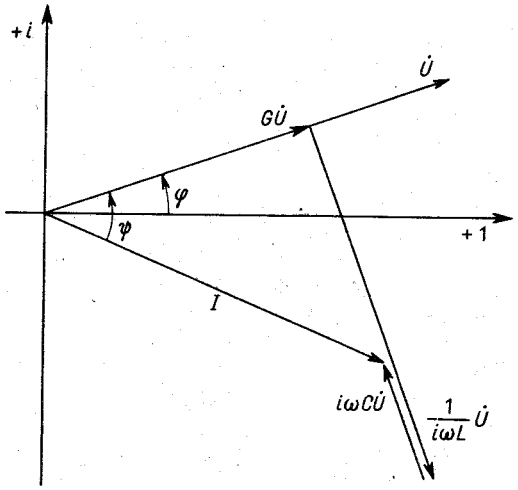


24.7. Wykres wektorowy natężenia na płaszczyźnie liczb zespolonych.

Jeżeli do układu przyłożymy napięcie (24.9a), to natężenie prądu w gałęzi R wyniesie $\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_c}{R} = G\dot{U}_c$, gdzie G — przewodnictwo elektryczne. W gałęzi zawierającej indukcyjność $\dot{I}_L = -\frac{1}{L}\int \dot{U}_c dt$ $\left(\text{z prawa indukcji Faradaya } \dot{U}_c = -L\frac{d}{dt}\dot{I}_c\right)$. Wresz-



24.8. Obraz wektorowy równania (24.16).



24.9. Obraz wektorowy równania (24.21).

cie dla gałęzi zawierającej pojemność $\dot{I}_C = C\frac{d}{dt}\dot{U}_c$ $\left(\text{z wzoru } C = \frac{Q}{U} = \frac{\int I dt}{U}\right)$. Stąd ostatnie równanie po uproszczeniu przez $\exp(i\omega t)$ przyjmuje postać

$$\dot{I}_0 = G\dot{U}_0 + \frac{\dot{U}_0}{i\omega L} + i\omega C\dot{U}_0. \tag{24.21}$$

Tabela 24.01

Nazwa wielkości		Oznaczenie	Wzór definicyjny	
Fizyczna	Elektrotechniczna		Skalarny	Zespolony
Prąd elektryczny*				
natężenie chwilowe		I_c	$I_c = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$	$\dot{I}_c = I_0 \exp i(\omega t + \varphi)$ lub $\dot{I}_c = \dot{I}_0 \exp i\omega t$, gdzie $\dot{I}_0 = I_0 \exp i\varphi$
natężenie szczytowe		I_0		
argument		ωt	$I_c = \mathrm{Im}\, I_c$	$\dot{I}_c = I_R + i\, I_X$ lub $\dot{I}_c = \dot{I}_0 (\cos\omega t + i \sin\omega t)$, gdzie $\dot{I}_0 = I_0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
okres		T		
faza początkowa, przesunięcie fazowe		φ		
częstość kołowa	pulsacja	ω	$\omega = 2\pi/T$	
Opór elektryczny				
opór elektryczny, zawada	oporność zespolona	$\lvert Z_0 \rvert$	$U_c = \lvert Z_0 \rvert I_c$	$\dot{U}_c = \dot{Z}\dot{I}_c$, $\dot{Z} = \dot{Z}_0 \exp i\psi$, gdzie $\mathrm{tg}\,\psi = XR^{-1}$
opór rzeczywisty	rezystancja, impedancja	R	$U = RI$**	$\dot{Z}_0 = R + iX$
opór pozorny	reaktancja	X	$Z^2 = R^2 + X^2$	$X = X_L + X_C$
opór indukcyjny	reaktancja indukcyjna	X_L	$X_L = \omega L$	
opór pojemnościowy	reaktancja pojemnościowa	X_C	$X_C = -(\omega C)^{-1}$	
Przewodnictwo elektryczne				
przew. elektryczne	admitancja	$\lvert Y_0 \rvert$	$\lvert Y_0 \rvert = \lvert Z_0 \rvert^{-1}$	$\dot{I}_c = \dot{Y}\dot{U}_c$
przew. rzeczywiste	konduktencja	G	$GU = I$** $G = R^{-1}$	$\dot{Y}_0 = G + iB$
przew. pozorne	susceptancja	B	$B = X^{-1}$	$B = B_L + B_C$
przew. indukcyjne	susceptancja indukcyjna	B_L	$B_L = -(\omega L)^{-1}$	
przew. pojemnościowe	susceptancja pojemnościowa	B_C	$B_C = \omega C$	

*W taki sam sposób definiuje się napięcie chwilowe U_c.
** U oraz I oznacza w tym przypadku napięcie i natężenie prądu stałego.

Równanie powyższe przedstawia graficznie wykres na rysunku (24.9). Wyłączając $\dot{U}_0$ poza nawias i wprowadzając oznaczenie

$$\dot{Y}_0 = G+i\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right) = G+iB \tag{24.22}$$

oraz

$$B = \omega C-\frac{1}{\omega L} \tag{24.23}$$

otrzymamy

$$\dot{I}_0 = \dot{Y}_0\dot{U}_0 \tag{24.24}$$

Wielkość $\dot{Y}_0$ nazywamy przewodnictwem zespolonym lub admitancją zespoloną. Równanie (24.24) jest inną postacią prawa Ohma.

24.04. MOC PRĄDU PRZEMIENNEGO

W elektrotechnice moc prądu przemiennego definiujemy jako iloczyn zespolonego napięcia skutecznego $\dot{U} = U\exp i\varphi_1$ oraz zespolonego natężenia skutecznego $\dot{I} = I\exp i\varphi_2$, więc

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I} = UI\exp i(\varphi_1-\varphi_2), \tag{24.25}$$

gdzie $\dot{S}$ oznacza moc zespoloną. Oznaczając $\psi = \varphi_1-\varphi_2$ i przedstawiając ostatnie wyrażenie w postaci trygonometrycznej otrzymamy

$$\dot{S} = UI\cos\psi+iUI\sin\varphi \tag{24.26a}$$

lub

$$\dot{S} = P+iQ, \tag{24.26b}$$

gdzie

$$P = UI\cos\psi, \tag{24.27}$$

a

$$Q = UI\sin\psi. \tag{24.28}$$

Wielkość $\dot{S}$ nazywamy *mocą zespoloną*, którą wyrażamy w woltamperach [VA], natomiast P nazywamy *mocą czynną* i mierzymy ją w watach oraz Q — *moc pozorną* mierzymy w warach. Wymiar każdej z wymienionych jednostek jest równy watowi, a zróżnicowanie terminologiczne wprowadzamy dla uniknięcia pomyłek. Moc czynna P jest mocą rzeczywiście przekazaną odbiornikowi w postaci energii cieplnej czy mechanicznej. Moc bierna Q wyraża wielkość energii gromadzonej w jednej części okresu w postaci pola elektrycznego lub magnetycznego, a następnie w innej części okresu oddawanej na powrót do źródła. W przypadku rezonansu w obwodzie moc bierna jest równa zeru, patrz § 25.01–03.

24.1. INDUKCJA WŁASNA I POJEMNOŚĆ W OBWODZIE PRĄDU PRZEMIENNEGO

Cel: wyznaczanie współczynnika indukcji własnej dławika i pojemności kondensatora przez pomiar modułu oporu zespolonego.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki (§ 4.2), kondensatory (§ 4.4), mostek Wheatstone'a (§ 4.3).

Zagadnienia: prąd przemienny (§ 24.01–02; S3, § 94–98; P2, § 4.21–38; J, § 20.6 i 7), pojemność i indukcja własna w obwodzie prądu przemiennego (§ 24.03 i 04; S3, § 95; P2, § 4.28 i 29; J, § 20.8).

Pomiary

Układ łączymy według schematu 4.16, w którym rolę odbiornika spełnia badana cewka, dławik lub szeregowo połączony kondensator z opornikiem R_C o małym oporze. Dla każdego z odbiorników mierzymy zależność natężenia skutecznego $I_\sim$ od napięcia skutecznego $U_\sim$, dla obwodu zasilanego prądem przemiennym. Mierzymy również zależność natężenia I_- od napięcia U_- dla obwodu zasilanego prądem stałym. Wykonując pomiary prądem stałym, okładki kondensatora zwieramy grubym krótkim przewodem. Wykonując pomiary zwracamy uwagę na to, by do każdego pomiaru stosować właściwe mierniki o właściwie dobranych zakresach. Zamiast pomiarów prądem stałym, możemy dokładnie zmierzyć opór omowy poszczególnych elementów za pomocą mostka Wheatstone'a. Pomiary wykonujemy dla dławika i dwóch kondensatorów (C_1 i C_2) oraz dla tych samych kondensatorów połączonych równolegle (C_r) i szeregowo (C_s).

Obliczenia

Obliczamy moduły oporu zespolonego oraz odchylenia standardowe stosując metodę wyrównawczą dla przebadanych zależności $U_-(I_-)$ oraz $U_\sim(I_\sim)$. Nachylenie tych krzywych jest równe odpowiednio oporowi rzeczywistemu lub modułowi oporu zespolonego. Z wzoru (24.20) obliczamy współczynniki indukcji własnej lub pojemności oraz błędy tych wielkości. W omawianym przypadku wzór (24.20) przyjmuje postać

$$Z_{0L} = \sqrt{R_L^2+\omega^2L^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \omega L R_L^{-1},$$

$$Z_{0C} = \sqrt{R_C^2+(\omega C)^{-2}}, \quad \operatorname{tg}\psi = -(\omega C R)^{-1}.$$

Dla szeregowej i równoległej baterii kondensatorów niezależnie od wykonanych pomiarów obliczamy C_r' i C_s' z wzorów

$$C_r' = C_1+C_2, \; 1/C_s = 1/C_1+1/C_2$$

oraz błędy pojemności C_r' i C_s'. Sprawdzamy zgodność wyników C_r i C_r' oraz C_s i C_s'.

24.2. WATOMIERZ

Cel: wyznaczenie cosinusa kąta przesunięcia fazowego w obwodzie zawierającym cewkę lub kondensator oraz wyznaczenie współczynników indukcji własnej i pojemności różnych odbiorników.

Przyrządy: mierniki elektryczne w tym również watomierz (§ 18.01–03), mostek Wheatstone'a lub omomierz (§ 4.3).

Zagadnienia: prąd przemienny (§ 24.01 i 02; S3, § 94–98; P2, § 4.21–38; J § 20–6 i 7), pojemność i indukcja własna w obwodzie prądu przemiennego (§ 24.03 i 04; S3, § 95; P2, § 4.28 i 29; J, § 20.8).

Wprowadzenie

Moc rzeczywista P wydzielana przez prąd o natężeniu skutecznym I płynącym przez obwód pod napięciem skutecznym U wyraża się wzorem (24.27). Wzór powyższy może posłużyć do obliczenia różnicy faz początkowych ψ napięcia i natężenia. Z drugiej

strony $\cos\psi$ wyrazić możemy przez moduł oporu zespolonego. Korzystając ze związku $\cos\alpha = (1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{-1/2}$ oraz wzoru (24.20) na $\mathrm{tg}\,\alpha$ otrzymamy

$$\cos\psi = R[R^2+(\omega L-1/\omega C)^2]^{-1/2}.$$

Korzystając ponadto z wzoru (24.27) napiszemy

$$R^2+(\omega L-1/\omega C)^2 = \left(\frac{RUI}{P}\right)^2.$$

Dla obwodu zawierającego tylko cewkę otrzymamy

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{(RUI/P)^2-R^2}. \tag{24.29}$$

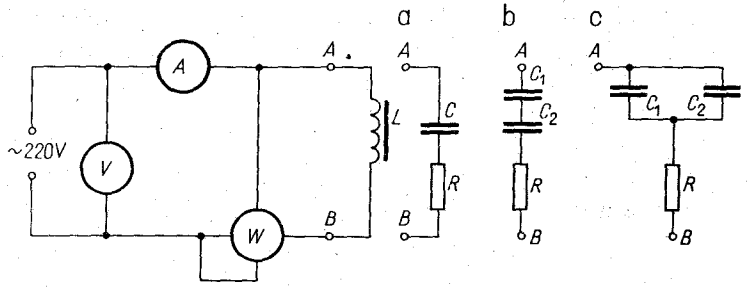
Dla obwodu zawierającego wyłącznie kondensator wzór przyjmuje postać

$$C = \omega^{-1}[(RUI/P)^2-R^2]^{-1/2}. \tag{24.30}$$

W obydwu przypadkach R oznacza całkowity opór rzeczywisty odbiornika wraz z doprowadzeniami.

Pomiary

Stosujemy układ elektryczny 24.10. W obwodzie tym możemy również badać kondensatory, jednak w tym przypadku w szereg z kondensatorem włączyć musimy opornik R, gdyż kondensator nie ma składowej rzeczywistej oporu, lecz tylko składową urojoną. Obwód pokazany na rysunku 24.10 nie jest jedynym możliwym. Takie połączenia stosujemy w przypadku, gdy opór uzwojeń napięciowych watomierza jest bardzo duży, a opór uzwojeń prądowych mały; również opór wewnętrzny amperomierza powinien być mały. Gdy warunki te nie są spełnione, powstają błędy wynikające stąd, że spadki napięć na amperomierzu i watomierzu dodajemy do spadku napięć na odbiorniku. Układ można zasilać z autotransformatora.



24.10. Układ do wyznaczania cosinusa przesunięcia fazowego.

Pomiary sprowadzają się do pomiaru mocy rzeczywistej P za pomocą watomierza, oraz napięcia skutecznego U i natężenia skutecznego I za pomocą woltomierza i amperomierza. Pomiary wykonujemy dla kilku dławików i kilku kondensatorów, łączonych zawsze w szereg z opornikiem. W przypadku, gdy mierzymy cewki o niewielkiej indukcji własnej, do obwodu włączamy je również w szereg z opornikiem. Przed przystą-

pieniem do pomiarów w obwodzie prądu przemiennego mierzymy opory poszczególnych cewek i oporników za pomocą mostka MW4. Następnie łączymy układ i wykonujemy pomiary wszystkich elementów, a więc kilku dławików i kondensatorów. Dla dwóch wybranych kondensatorów wykonujemy pomiary pojemności C_s i C_r w przypadku, gdy łączymy je w baterię szeregowo (rys. 24.10b) lub równolegle (rys. 24.10c).

Obliczenia

Korzystając z wzoru (24.27) obliczamy wartości $\cos\psi$ dla wszystkich wykonanych pomiarów. W oparciu o wzory (24.29) i (24.30) obliczamy współczynniki indukcji własnej L lub pojemności C. Przyjmujemy $\nu = 50$ Hz ($\omega = 2\pi\nu$). W przypadku badania kondensatorów mamy wyniki pomiaru ich pojemności C_1 i C_2, a także pojemności C_s w połączeniu szeregowym i równoległym (C_r). Obliczamy również C_r' i C_s' z wzorów:

$$C_r' = C_1 + C_2, \quad 1/C_s' = 1/C_1 + 1/C_2.$$

Błędy maksymalne obliczamy dla pomiarów wykonanych dla dwóch cewek i dwóch kondensatorów C_1 i C_2 oraz dla C_r i C_s. Sprawdzamy zgodność wyników C_r i C_r' oraz C_s i C_s'.

24.3. TRANSFORMATOR

Cel: Zbadanie biegu jałowego i roboczego transformatora, wyznaczenie przekładni, napięcia pracy i strat.

Przyrządy: oporniki (§ 4.2), autotransformator (§ 4.5), mierniki elektryczne (§ 18,01–03).

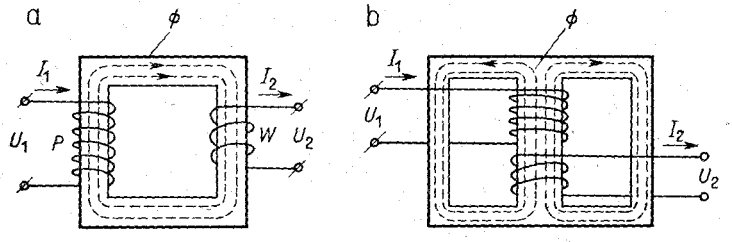
Zagadnienia: podstawowe wielkości magnetyczne, histereza magnetyczna (§ 1.5 i § 22.03), prąd przemienny (§ 24.01–03; S3, § 94–98; J, § 20.7), indukcja elektromagnetyczna (S3, § 74 i 75; P2, § 4.1–4.9; J, § 20.1–4).

Wprowadzenie

Transformator (rys. 24.11) składa się z dwóch uzwojeń: pierwotnego P i wtórnego W oraz rdzenia żelaznego. Załóżmy, że do uzwojenia pierwotnego podłączamy napięcie przemienne

$$\dot{U}_1 = iU_0 e^{i\omega t} \tag{24.31}$$

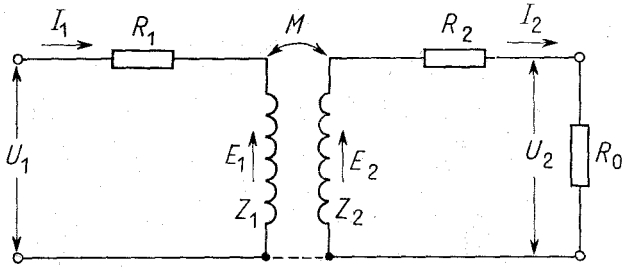
(taką postać napięcia zespolonego przyjmujemy umownie w tym celu, by było ono skierowane całkowicie wzdłuż osi urojonej w sposób pokazany na rys. 24.13). Zgodnie



24.11. Transformator z rdzeniem w kształcie prostokąta (a) i podwójnego prostokąta (b).

z wzorem (24.17) opór zespolony w obwodzie pierwotnym transformatora wynosi $\dot{Z} = R_1 + i\omega L_1$, gdzie R_1 jest oporem rzeczywistym uzwojenia pierwotnego. Stąd zgodnie z prawem Ohma zachodzi związek:

$$iU_{01}e^{i\omega t} = (R_1 + i\omega L_1)\dot{I}_1$$



24.12. Schemat obwodu zastępczego transformatora.

i eliminując liczby urojone z mianownika, otrzymujemy następujący wzór na prąd w obwodzie pierwotnym

$$\dot{I}_1 = \frac{\omega L_1 U_{01}}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} + i\frac{R_1 U_{01}}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} e^{i\omega t}. \tag{24.32}$$

Gdy opór rzeczywisty R_1 jest znikomo mały ($R_1 \simeq 0$), możemy napisać

$$\dot{I}_1 = \frac{U_0}{\omega L} e^{i\omega t}, \quad \text{dla} \quad R_1 \simeq 0. \tag{24.32a}$$

Z wzoru powyższego wynika, że dla idealnego przypadku, gdy przyłożone napięcie ma tylko składową urojoną (24.31), natężenie ma tylko składową rzeczywistą, jest więc opóźnione w fazie względem napięcia o $\pi/2$ dla przypadku $R_1 \simeq 0$. Wykres wektorowy pokazano na rysunku (24.13). Opóźnienie fazy natężenia powoli maleje w miarę wzrostu oporu R_1. Ponieważ zgodnie z II prawem Kirchhoffa zachodzi $U_1 = -E_1 + Z_1 I_1$, suma wektorów $-E_1$ oraz $Z_1 I_1$ musi dać wektor U_1, co pokazano na rysunku 24.13. Prostopadłość wektora E_1 do I_1 wynika również ze związku $E = -L\frac{dI}{dt}$ (por. § 23.03).

Strumień indukcji magnetycznej obliczamy wychodząc z II prawa Kirchhoffa

$$iU_0 \exp(i\omega t) = N_1 \frac{d\Phi}{dt} - Z_1 I_1.$$

Zakładając, że opór rzeczywisty R_1 uzwojenia pierwotnego jest bardzo mały, tzn. $Z_1 = i\omega L$, obliczamy z powyższego wzoru $d\Phi/dt$, a następnie całkując otrzymamy następujący wzór na zespolony strumień indukcji magnetycznej:

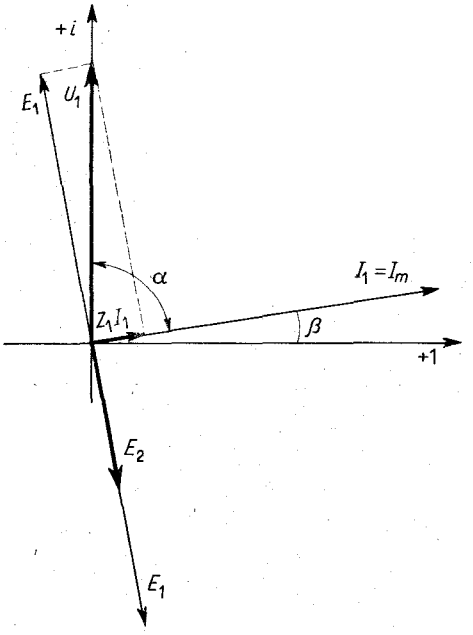
$$\Phi = \frac{\omega L_1^2}{N_1(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)} + i\frac{L_1 R_1}{N_1(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)} U_{01} e^{i\omega t}, \quad (\Phi = (\Phi_R + i\Phi_X)e^{i\omega t}).$$

Moduł strumienia zdefiniowany jako $\Phi_0 = \sqrt{\Phi_R^2 + \Phi_X^2}$ jest stały w czasie i wynosi

$$\Phi_0 = \frac{L_1}{N_1 \sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}}. \tag{24.33}$$

Strumień indukcji magnetycznej przechodzi zarówno przez pierwotne jak i przez wtórne uzwojenia transformatora indukując w nich siły elektromotoryczne

$$E_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \text{ oraz } E_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$



24.13. Wykres wektorowy transformatora nieobciążonego.

Ze względu na stałość strumienia, również $d\Phi/dt$ występujące w ostatnich wzorach jest stałe. Dzieląc więc obydwa równania stronami otrzymamy

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{24.34}$$

Wynika stąd, że stosunek napięć ($E_1 \sim U_1$ i $E_2 \sim U_2$) na uzwojeniach transformatora jest równy stosunkowi liczby zwojów, czyli *przekładni* transformatora.

Transformator obciążony można uważać za układ dwóch obwodów elektrycznych sprzężonych magnetycznie (rys. 24.12). Obwód pierwotny (uzwojenie pierwotne) zawiera źródło, natomiast obwód wtórny źródła nie zawiera. II prawo Kirchhoffa dla tych obwodów możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} U_1 &= (R_1 + i\omega L_1) I_1 - i\omega M I_2, \\ 0 &= (R_2 + i\omega L_2) I_2 - i\omega M I_1. \end{aligned} \tag{24.35}$$

R_2 oznacza całkowity opór rzeczywisty obwodu wtórnego, M — współczynnik indukcji wzajemnej, który dla obwodu pozbawionego strat strumienia magnetycznego wyraża się przez $M = \sqrt{L_1 L_2}$, gdy $i\omega M$ — opór urojony spowodowany sprzężeniem magnetycznym, wreszcie wyrazy $i\omega M I_2$ oraz $i\omega M I_1$ odpowiadają spadkom napięcia. Równania (24.35) możemy rozwiązać ze względu na I_1 i I_2 otrzymując

$$I_1 = \left[\frac{\omega R_2 H - R_1 R_2 \omega L_2}{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 H^2} + i\frac{R_1 R_2^2 + \omega L_2 H}{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 H^2}\right] U_0 e^{i\omega t}, \tag{24.36}$$

$$I_2 = \left[-\frac{\omega M R_1 R_2}{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 H^2} + i\frac{\omega^2 M H}{R_1^2 R_2^2 + \omega^2 H^2}\right] U_0 e^{i\omega t}, \tag{24.37}$$

gdzie $H = R_1 L_2 + R_2 L_1$. Wzory powyższe znacznie się upraszczają w przypadku, gdy R_1 jest znikomo małe, $R_1 \simeq 0$,

$$I_1 = \left[\frac{1}{\omega L_1} + i\frac{L_2}{R_2 L_1}\right] U_0 e^{i\omega t}, \tag{24.36a}$$

$$I_2 = i\frac{M}{R_2 L_1} U_0 e^{i\omega t} = i\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\frac{U_0}{R_2} e^{i\omega t}. \tag{24.37a}$$

Jeżeli w obwodzie wtórnym nie płynie prąd, wtedy $R_2 = \infty$ i z równania (24.37a) wynika $I_2 = 0$, co jest zgodne z założeniem, a I_1 wyraża się wzorem (24.32a).

Celem ustalenia wykresu wektorowego z równań (24.35) obliczymy opór zespolony obwodu pierwotnego. Podstawiając I_2 z drugiego równania (24.35) do pierwszego otrzymamy

$$U_1 = \left(R_1 + i\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + i\omega L_2}\right) I_1$$

lub oddzielając składową rzeczywistą i urojoną otrzymamy:

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} + i\left[\omega L_1 - \frac{\omega^3 M^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}\right], \tag{24.38}$$

$$Z_1 = R_1' + iX_1'.$$

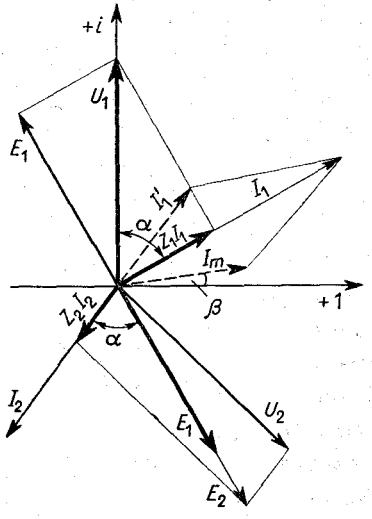
Z wzoru powyższego wynika, że na skutek obciążenia uzwojenia wtórnego obydwie składowe oporu zespolonego uzwojenia pierwotnego, który dla $I_2 = 0$ wynosi $Z_1 = R_1 + i\omega L_1$, uzyskują dodatkowe przyrosty:

$$\Delta R_1 = \frac{\omega^2 M^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \tag{24.39}$$

oraz

$$\Delta X_1 = \frac{-\omega^3 M^2 L_2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} = -\frac{\omega^2 M^2 X_2}{R^2 + \omega^2 L_2^2},$$

gdzie $X_2 = \omega L_2$. Przy czym przyrost składowej rzeczywistej jest zawsze dodatni, a przyrost składowej urojonej ma znak przeciwny w stosunku do oporu urojonego X_2 uzwojenia wtórnego. Ze względu na



24.14. Wykres wektorowy transformatora obciążonego.

złożony charakter podanych tu zależności rozkład wektorów poszczególnych wielkości jest trudny do wyobrażenia. Wychodząc z założenia $U_1 = iU_0 e^{i\omega t}$ i korzystając z prawa Ohma $\dot{U}_1 = R_1'\dot{I} + iX_1'\dot{I}$ (por. 24.38) możemy wykres wektorowy przedstawić w sposób pokazany na rysunku 24.14. W miarę wzrostu I_2 (odpowiednio maleje R_2) kąt α na rysunku 24.14 maleje, czyli maleje składowa rzeczywista prądu I_1, a rośnie składowa urojona. Punktem wyjścia w analizie układu wektorów w obwodzie wtórnym jest kierunek wektora E_2, który jest prostopadły do wektora I_1 podobnie jak E_1. Celem ustalenia kierunku prądu I_2 musimy zanalizować działanie transformatora. Na skutek istnienia siły elektromotorycznej E_2 w obwodzie wtórnym popłynie prąd I_2. W rdzeniu transformatora powstaje dodatkowy strumień indukcji $\Phi_z' = KN_2I_2$, gdzie $K = \frac{S\mu}{l}$ a I_2 oraz I_1 oznaczają natężenia skuteczne. Zgodnie z regułą Lenza strumień ten posiada zwrot przeciwny względem pierwotnego i zmniejsza jego wartość. Ponieważ jednak zgodnie z (24.33) moduł strumienia jest stały, strumień Φ_1 musi wzrosnąć o wartość $\Phi_1' = -KN_1I_1'$, skąd natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym musi wzrosnąć o wartość

$$I_1' = -\frac{I_2N_2}{N_1} \tag{24.40}$$

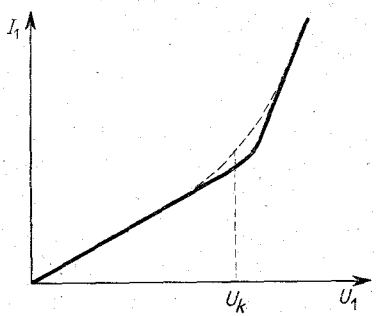
Prąd I_1 możemy więc rozłożyć na dwie składowe $I_1 = I_1' + I_m$, gdzie I_m jest prądem magnesującym biegu jałowego (por. rys. 24.14). Prąd I_2 zgodnie z równaniem (24.38) ma zwrot przeciwny względem I_1'. Znając E_2 oraz I_2, wykreślić możemy U_2 stosując metodę równoległoboku. Założyliśmy tu, że odbiornik posiada tylko opór rzeczywisty, gdy jest on oporem zespolonym, wykres wektorowy ulega dalszym komplikacjom.

W każdym transformatorze występują straty spowodowane:

1. ciepłem Joule'a–Lenza, 2. prądami wirowymi, 3. histerezą magnetyczną, 4. rozproszeniem strumienia indukcji magnetycznej. W przypadku ciepła Joule'a–Lenza straty występują w drucie tworzącym uzwojenia. Można je ograniczyć przez zastosowanie drutu o małym oporze. Przyczyna występowania strat na prądy wirowe leży w samym prawie indukcji elektromagnetycznej $E = -\frac{d\Phi}{dt}$. Siła elektromotoryczna E indukowana jest nie tylko w uzwojeniach, lecz również w samym rdzeniu (prądy Foucaulta). W rdzeniu płyną wtedy prądy po zamkniętych pętlach i wydziela się ciepło. Celem zmniejszenia do minimum strat związanych z prądami wirowymi, rdzenie są składane z cienkich blach oddzielonych warstwą izolacyjną z lakieru. Blachy wycinane są w ten sposób, by ich powierzchnia była równoległa do osi cewek. Straty na histerezę magnetyczną spowodowane są energią cieplną wydzielającą się na skutek ciągłego przemagnesowywania rdzenia. Wielkość strat jest proporcjonalna do powierzchni pętli histerezy. Z tego powodu rdzenie wykonuje się z materiałów magnetycznie miękkich o znikomo małej koercji. Strumień rozproszony i straty z tym związane ograniczyć możemy do minimum przez zastosowanie odpowiedniej konstrukcji rdzeni. Wszystkie wymienione straty powodują zawsze dodatkowy wzrost pola magnetycznego B, jak również zwiększanie fazy początkowej β tego prądu.

Na zakończenie rozważań przedyskutujemy wpływ wartości napięcia U_1 na pracę transformatora. Załóżmy, że uzwojenie twórne nie jest obciążone (bieg jałowy) i zwiększamy stopniowo wartość napięcia U_1. Wtedy, w miarę wzrostu U_1 wzrasta powoli prąd magnesujący, strumień indukcji magnetycznej i siła elektromotoryczna E_1. Jednak strumień indukcji magnetycznej nie może rosnąć nieograniczenie (ponieważ występuje zjawisko nasycenia magnetycznego), lecz osiąga pewną wartość maksymalną Φ_{max}. Wzrost napięcia powyżej wartości określającej $U_{1\,max}$ (odpowiadającej Φ_{max}) nie jest już skompensowany wzrostem siły elektromotorycznej E_1, lecz natężeniem prądu I_1.

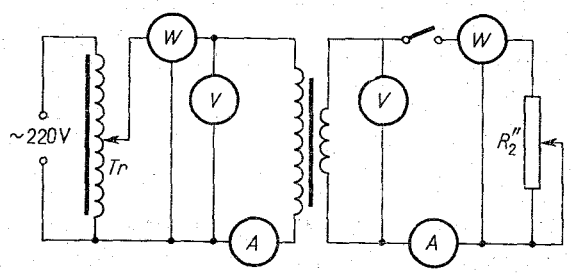
Na wykresie 24.13 maleje wtedy kąt α, przy czym $|E_1| = |E_{max}|$ i nie jest zachowana prostopadłość wektora E_1 do I_1. Nie wzrasta również siła elektromotoryczna E_2, a wzrasta tylko I_1, i tym samym ilość ciepła wydzielanego w uzwojeniu pierwotnym, wskutek czego uzwojenia te mogą ulec zniszczeniu. Zależność $U_1(I_1)$ dla idealnego transformatora pokazano na rysunku 24.15. W transformatorach z rdzeniami o nieliniowej zależności $B(I)$ wykres ten wykazuje pewne odstępstwa od przebiegu liniowego, jednak wzrost I_1 po przekroczeniu U_k jest zawsze dość wyraźny. Nie wolno do transformatora przykładać napięć przekraczających wartość krytyczną U_k.



24.15. Zależność prądu I_1 od napięcia U_1 dla transformatora idealnego (linia ciągła) i rzeczywistego (linia przerywana).

Aparatura i pomiary

Układ łączymy według schematu 24.16. W pierwszej części doświadczenia badamy bieg jałowy transformatora, czyli pracę transformatora nieobciążonego. Mierzymy napięcie U_1, natężenie I_1 i moc P_1 w obwodzie pierwotnym oraz napięcie U_2 w obwodzie wtórnym przynajmniej dla 15-tu różnych wartości U_1. W oparciu o powyższe dane wykonujemy orientacyjny wykres zależności $I_1(U_1)$ (por. rys. 23.15) i określamy największe dopuszczalne napięcie w obwodzie pierwotnym U_k.



24.16. Układ do badania transformatora.

Celem zbadania biegu roboczego, za pomocą autotransformatora nastawiamy napięcie U_1' nieco mniejsze od napięcia krytycznego U_k, i już nie zmieniamy go w dalszej części doświadczenia. Włączamy obwód pierwotny i mierzymy U_2', po czym zwiększamy do maksimum opór R_2 i włączamy obwód wtórny. Mierzymy zależność wskazań wszystkich mierników od oporu R_2; pomiary te wykonujemy dla około 10-ciu różnych wartości R_2. (Dla odróżnienia wszystkie odczyty dla biegu roboczego oznaczać będziemy znaczkiem prim).

Obliczenia

W pierwszej części doświadczenia wykreślamy zależność $I_1(U_1)$ dla biegu jałowego. Obliczamy przekładnię dla wszystkich punktów pomiarowych leżących na prostoliniowym odcinku krzywej $I_1(U_1)$. Obliczamy średnią wartość przekładni i jej odchylenie standardowe.

W oparciu o pomiary wykonane dla biegu roboczego obliczamy oddzielnie dla każdego punktu pomiarowego współczynnik sprawności $\eta = P_2'/P_1'$ oraz wartości $\cos\varphi_1$ i $\cos\varphi_2$ z wzoru (24.27). Wykreślamy zależność $\eta(I_2')$. Dla obwodu wtórnego stosowanego dla biegu roboczego, zgodnie z II prawem Kirchhoffa możemy napisać

$$U_{2k}' = U_2' + I_2' R_2'',$$

gdzie R_2'' oznacza opór wewnętrzny uzwojenia wtórnego. Opór wewnętrzny R_2'' oraz napięcie U_{2k}' obliczyć możemy metodą najmniejszych kwadratów, ponieważ są one równe odpowiednio nachyleniu $a = R_2''$ oraz rzędnej $b = U_{2k}'$ krzywej $U_2'(I_2')$. Obliczamy również tą metodą odchylenia standardowe tych wielkości. Sprawdzamy zgodność napięcia U_{2k}' obliczonego z wynikiem bezpośredniego pomiaru. Obliczamy straty na ciepło Joule'a z wzoru $W = R_1 I_1'^2 + R_2'' I_2'^2$. Wykreślamy na wspólnym arkuszu zależności: $U_2'(I_2')$, $W(I_1')$ oraz $W(I_2')$, dobierając na osi y oddzielne skale dla każdej wielkości. W kilku zdaniach dyskutujemy uzyskane wyniki omawiając między innymi ich zgodność z przewidywaniami teoretycznymi oraz zgodność pomiaru oporu uzwojenia wtórnego za pomocą mostka oraz z obliczenia.

24.4. BADANIE PRĄDÓW ZA POMOCĄ OSCYLOGRAFU

Cel: badanie prądu przemiennego i zjawiska prostowania prądu, pomiar przesunięcia fazowego w obwodach zawierających pojemność lub indukcyjność własną.

Przyrządy: oscylograf katodowy (§ 25.5), opornik (§ 4.2) transformator (§ 4.5), układ prostowniczy (§ 4.6), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

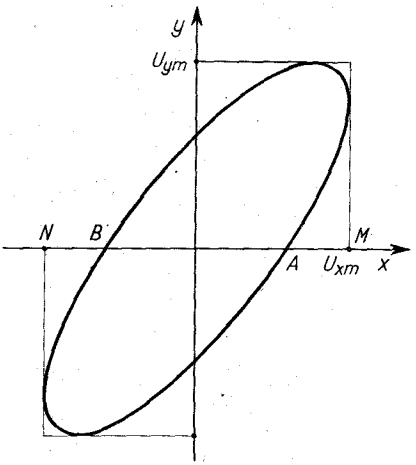
Zagadnienia: prąd przemienny (§ 24.01–03; S3, § 94, 97; P2, § 4.21–38; J, § 20.6 i 7), lampy elektroniczne (§ 25.01–03), figury Lissajous (§ 10.04).

Wprowadzenie

Jeżeli na dwie pary płytek odchylających lampy oscylograficznej przyłożymy dwa różne napięcia przemienne, na ekranie otrzymamy obraz figur Lissajous. W przypadku, gdy częstości obydwu drgań są równe, figury przyjmują szczególnie prostą postać koła, elipsy lub prostej. Kształt uzyskanej krzywej zależy od przesunięcia faz pomiędzy obydwoma napięciami. Do płytek y odchylających w kierunku pionowym, przyłożymy napięcie $U_y = U_{ym}\sin\omega t$, a do płytek x: $U_x = U_{xm}\sin(\omega t + \varphi)$. Dla wszystkich punktów leżących na osi x, a w szczególności dla punktu A (rys. 24.17) napięcie chwilowe $U_{yA} = 0$; skąd wynika $\omega t = 0$. Napięcię $U_{xA} = U_{xm}\sin\varphi$, skąd wprost wynika związek

$$\sin\varphi = \frac{U_{xA}}{U_{xm}} = \frac{OA}{OM}. \tag{24.41}$$

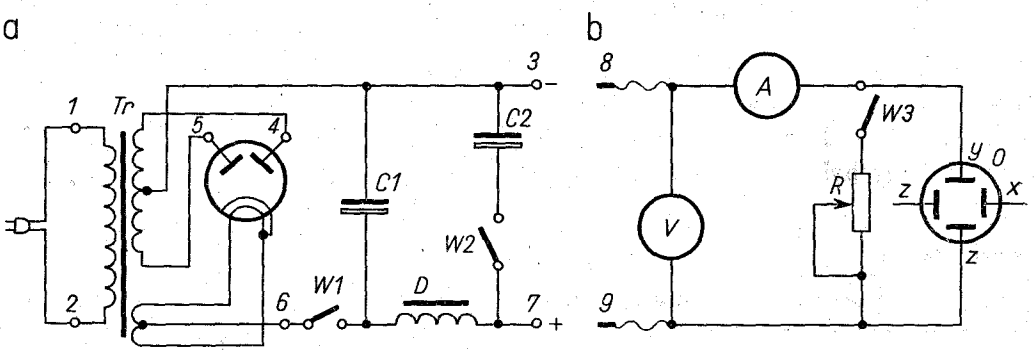
Ostatni związek wyrażający $\sin\varphi$ przez odcinki OA i OM napisać możemy w przypadku, gdy wychylenie plamki jest proporcjonalne do napięcia przyłożonego. W przypadku oscylografu założenie to spełnione jest wystarczająco dokładnie.



24.17. Obraz oscylograficzny w przypadku, gdy istnieje różnica faz między napięciami U_x i U_y przykładanymi do płytek x i y.

Aparatura

Najważniejszym przyrządem w omawianym doświadczeniu jest oscylograf katodowy. Powinien on posiadać duży ekran i podstawę czasu o zakresie od 20 Hz oraz wyjście na obydwie pary płytek odchylających. Układ, na którym wykonujemy pomiary, jest dość skomplikowany. Składa się on z transformatora, lampy prostowniczej, filtru i obciążenia. Najkorzystniej jest, jeżeli wszystkie elementy układu są zbudowane na dwóch



24.18. Układ do badania prądu przemiennego na oscylografie.

podstawkach w sposób pokazany na rysunku 24.18. Układ taki pozwala uzyskać wszystkie kombinacje potrzebne przy wykonywaniu doświadczenia bez potrzeby wielokrotnego zmieniania układu połączeń. Elementy zastosowane w układzie filtrującym, a więc kondensatory C_1 i C_2 oraz dławik D nie zapewniają optymalnego prostowania, dzię-

ki czemu można uchwycić wpływ kolejnych elementów. Opornik R wraz z woltomierzem stanowi oddzielną całość i stanowi obciążenie badanego układu. W doświadczeniu element ten włączamy równolegle do oscylografu.

Pomiary

1. Badanie zależności przesunięcia fazowego od mocy pobieranej z transformatora. Układ z rysunku 24.18b łączymy z płytkami odchylającymi y, ponadto przewód *9* łączymy z gniazdkiem *3*, a przewód *8* z gniazdkiem *4* lub *5*. Napięcie z punktów *1* i *2* przyłączamy do płytek x oscylografu. Włączamy oscylograf do sieci, wyłączając podstawę czasu. Po uzyskaniu plamki regulujemy jej jasność i ostrość, po czym włączamy transformator. Dobieramy wzmocnienie w taki sposób, by na ekranie uzyskać możliwie dużą figurę. Wyłączamy opornik R. Na ekranie powstaje prosta tworząca z osiami kąt $\pi/4$, co oznacza brak przesunięcia fazy. Włączamy opornik R ustawiając suwak na maksimum oporu. Mierzymy za pomocą linijki odcinki AB oraz NM (wzdłuż osi x). Wykonujemy około 10-ciu takich pomiarów przy różnych wartościach oporu R.

2. Badanie prądu przemiennego. Odłączamy od płytek x oscylografu wejście transformatora i włączamy podstawę czasu, suwak opornika R ustawiamy w środkowym położeniu. Obserwujemy obraz otrzymany na oscylografie i przerysowujemy ten obraz starannie do protokołu. Notujemy napięcie skuteczne U_a i amplitudę Y_a wychylenia. Odłączamy punkty *8* i *9* od układu prostującego i nie regulując wzmocnienia włączamy do źródła prądu stałego (baterii anodowej). Notujemy napięcie U_s i wielkość przesunięcia Y_s linii na oscylografie. Zmieniamy bieguny baterii i pomiar powtarzamy. Obliczamy i zapisujemy wartości średnie $\overline{U}_s$ i $\overline{Y}_s$. Wykonując dalsze pomiary nie regulujemy wzmocnienia oscylografu. Gdy zachodzi konieczność zmiany wzmocnienia, musimy powtórzyć cechowanie prądem stałym.

Przewody *8* i *9* włączamy pomiędzy punkty *6* i *5* lub *6* i *4*. Odrysowujemy uzyskany obraz. Notujemy wartość wychylenia maksymalnego $Y_{1/2}$ i napięcia $U_{1/2}$. Podobne pomiary wykonujemy, gdy przewody *8* i *9* połączone są z punktami *3* i *6* po włączeniu kondensatora C_1 wyłącznikiem W_1 oraz *3* i *7* po włączeniu kondensatora C_2 wyłącznikiem W_2. W ostatnim przypadku obserwujemy zmiany kształtu linii uzyskanej na oscylografie na skutek zmiany oporu R. W tym celu dla kilku położeń suwaka notujemy napięcie i wychylenie linii na oscylografie z położenia zerowego.

Obliczenia

W części pierwszej, dotyczącej przesunięcia fazowego obliczamy dla poszczególnych pomiarów przesunięcie fazy φ z wzoru (24.41) oraz moc czerpaną. Wykreślamy otrzymaną zależność i uzasadniamy teoretycznie konieczność zmian fazy φ. Obliczamy błędy dla 2–3 pomiarów.

W drugiej części doświadczenia, korzystając z pomiarów wykonanych prądem stałym obliczamy napięcie szczytowe U_m i skuteczne U, które porównujemy z napięciem U zmierzonym woltomierzem. Dyskutujemy korzyści i wady zastosowanej metody prostowania i filtrowania prądu. Dyskutujemy wpływ mocy pobieranej z układu na napięcie i tętnienie prądu prostowanego.

25. LAMPY ELEKTRONICZNE

25.01. EMISJA ELEKTRONÓW

Próżnia jest doskonałym izolatorem. Jeżeli zatem dwa przeciwnie naładowane przewodniki umieścimy w próżni, w pewnej odległości od siebie, to prąd elektryczny nie popłynie. Prąd może płynąć wtedy, gdy istnieją elektrony. Wprawdzie w każdym z przewodników istnieją swobodne elektrony, lecz nie mogą one opuścić powierzchni. Elektron opuszczając powierzchnię przewodnika, musi wykonać pracę wyjścia równą różnicy energii elektronu w próżni i w metalu. Elektrony mogą zostać wyrwane z powierzchni przewodnika pod wpływem pewnych czynników zewnętrznych jak: silne pole elektryczne (emisja polowa lub zimna), wysoka temperatura przewodnika (termoemisja), oświetlenie jego powierzchni (fotoemisja) oraz bombardowanie powierzchni przez inne cząstki.

Zgodnie z pasmową teorią metali (§ 21.01) elektron opuszczający metal wykonać musi pracę wyjścia Φ, która dla przeciętnego metalu jest rzędu $\Phi \simeq 3$ eV. Energia potencjalna E_p elektronu znajdującego się na zewnątrz metalu jest równa iloczynowi ładunku e i przyłożonego napięcia U, wyrażając napięcie przez natężenie pola elektrycznego E przyłożonego do powierzchni metalu (1.13) otrzymamy

$$E_p = -eEx. \tag{25.1}$$

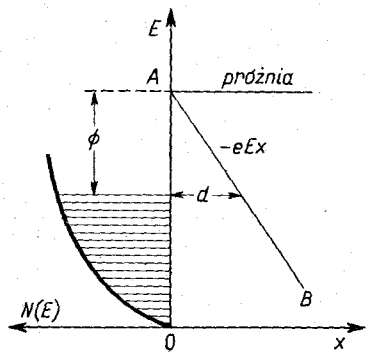
Rysunek 25.1 przedstawia przebieg tej energii. Elektrony metalu są oddzielone od otoczenia trójkątną barierą potencjału OAB. Jeżeli szerokość d bariery na poziomie Fermiego E_F jest rzędu $x \simeq 10$ Å $= 10^{-7}$ cm, to elektrony mogą wyjść z metalu na skutek efektu tunelowego. Porównując energię $\Phi = 3$ eV* z energią E_p (25.1) stwierdzimy, że natężenie pola elektrycznego konieczne do wyrwania elektronów z metalu jest rzędu $E = 10^7$ V. W rzeczywistości w temperaturach bardzo niskich do wywołania emisji elektronów wystarcza pole rzędu 10^6 V. Obniżenie pola emisji o jeden rząd względem

* eV (elektronowolt) jest jednostką energii równą pracy wykonanej przez elektron pokonujący różnicę potencjałów 1 V.

wartości teoretycznej przypisać możemy nierównościom powierzchni. Gęstość prądu $j_E = I/S$ emisji polowej wyraża się wzorem

$$j_E = BE^2 \exp(-\beta/E), \quad . \tag{25.2}$$

gdzie β i B są funkcjami wielkości Φ. Ze względu na bardzo duże natężenie pola E emisja polowa nie ma większego znaczenia praktycznego.



25.1. Bariera potencjału oddzielająca elektrony metalu od otoczenia.

W zjawisku termoemisji energia potrzebna do wykonania pracy wyjścia jest dostarczona w postaci ciepła. Ilość emitowanych elektronów określamy gęstością prądu termoelektrycznego j_T. Zgodnie z prawem Richardsona–Dushmana j_T wyraża się następującym wzorem:

$$j_T = AT^2 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \text{ dla metali} \tag{25.3}$$

oraz

$$j_T = CT^{1/2} \exp\left(-\frac{\Phi_p}{kT}\right) \text{ dla półprzewodników,} \tag{25.3a}$$

gdzie T oznacza temperaturę ciała emitującego, k — stałą Boltzmanna, Φ — pracę wyjścia, A, C, b — wielkości stałe. W rzeczywistości obydwa wzory różnią się niewiele, ponieważ $\Phi \gg kT$ i gęstość prądu jest określona przede wszystkim członem eksponencjalnym, który w obydwu przypadkach ma taką samą postać.

Prędkości termoelektronów nie są równe. Zależą one od rozkładu energii elektronów metalu w pobliżu poziomu Fermiego. W temperaturze 0°C obsadzone poziomy energetyczne są oddzielone poziomem Fermiego E_F (rys. 21.3), w temperaturach $T > 0$ K granica między poziomami zajętymi i niezajętymi rozmywa się w sposób pokazany na rysunku 21.3. W zjawisku termoelektrycznym emitują najszybsze elektrony, a więc te, których energia zawarta jest w przedziale E_1 do E_2. Rozkład prędkości termoelektronów wyrazić można wzorem

$$N(v)dv = N\frac{m}{kT} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) dv, \tag{25.4}$$

gdzie $N(v)$ oznacza ilość elektronów o prędkości zawartej w granicach od v do $v+dv$, N — całkowitą liczbę elektronów emitowanych w jednostce czasu, m — masę elektronu,

kT — czynnik boltzmannowski, ε — energię elektronów. Rozkład (25.5) jest rozkładem maxwellowskim, tzn. takim samym jak w gazach.

W przypadku fotoemisji energię potrzebną do wykonania pracy wyjścia dostarczają kwanty światła. Zgodnie z korpuskularną teorią, światło posiada budowę korpuskularną, przy czym każda cząsteczka zwana kwantem niesie energię $h\nu$ będącą iloczynem częstości światła i stałej Plancka $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s. Jeżeli energia kwantu przewyższa pracę wyjścia elektronów, to pod wpływem oświetlenia wystąpi emisja elektronów. Nadmiar energii kwantu zostanie również przekazany fotoelektronowi w postaci energii kinetycznej $1/2\ mv^2$. Zatem zachodzi równość:

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + p. \tag{25.5}$$

Ostatni wzór nazywa się wzorem Einsteina.

Emisja elektronów na skutek bombardowania występuje wtedy, gdy z powierzchnią przewodnika zderzają się cząstki o dużej energii. Cząstkami takimi mogą być jony, elektrony, cząstki elementarne pochodzące z rozpadu promieniotwórczego i promienie kosmiczne.

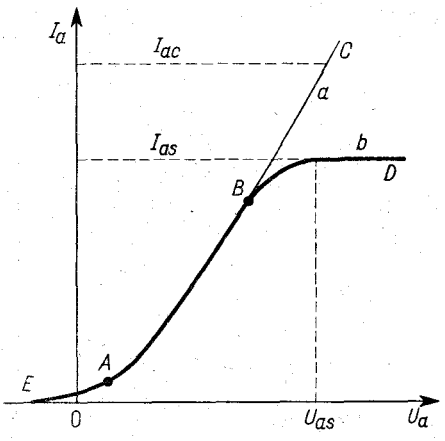
25.02. PODSTAWOWE INFORMACJE O LAMPACH ELEKTRONICZNYCH

Najprostszym typem lampy elektronicznej jest tzw. dioda. Jest to lampa dwuelektrodowa. Jej elektrody: anoda i katoda znajdują się w bańce szklanej dokładnie odpompowanej. Katoda posiada zazwyczaj kształt pręta lub rozpiętej nici leżącej na osi walca metalowego spełniającego rolę anody. Katoda lampy musi być podgrzewana, by emitowane były elektrony. Katodę nagrzewa pomocniczy prąd $I_ż$, który płynąc przez drut tworzący katodę, wydziela ciepło Joule'a. W obecnie produkowanych lampach stosuje się trzy rodzaje katod: wolframowe, karbidowane (pokryte warstwą monomolekularną) oraz tlenkowe (półprzewodnikowe). Najczęściej stosowane są ostatnie. Tlenek (strontu, baru lub wapnia) tworzy cienką warstwę na powierzchni niklu. Katody tlenkowe mogą być żarzone bezpośrednio, gdy prąd płynie wprost przez metal katody, oraz żarzone pośrednio. W katodach żarzonych pośrednio grzejnik — drut oporowy podgrzewający katodę, jest izolowany elektrycznie od katody.

Zależność prądu I_a płynącego przez diodę (prądu anody) od tzw. napięcia anody U_a przyłożonego między katodą i anodą nazywamy charakterystyką (rys. 25.2). Przebieg charakterystyki w znacznym stopniu zależy od gęstości prądu termoemisji, stąd dla każdej lampy określone są dokładnie warunki pracy katody, a więc natężenie i napięcie prądu żarzenia. Warunki pracy lampy dobrane są w ten sposób, że natężenie całkowite prądu termoemisji $\jmath_T \cdot S_k$, gdzie S_k — powierzchnia katody, jest znacznie większe od prądu anodowego. Z tego powodu, przy zerowym napięciu anody (liczonym zawsze względem potencjału katody), emitowane elektrony tworzą chmurę — ładunek przestrzenny otaczający katodę. Są one przyciągane na powrót przez katodę, która tracąc termoelektrony ładuje się dodatnio. Ustala się równowaga dynamiczna między ilością elektronów wyemitowanych i powracających. Przyłożenie napięcia dodatniego do anody narusza równowagę dynamiczną. Elektrony z chmury odpływają do anody, a nowe porcje są emitowane z katody. W przypadku katody wolframowej występuje tzw. zja-

wisko nasycenia. Przy pewnym napięciu anody U_{as} wszystkie elektrony wyemitowane płyną do anody i nie tworzą chmury. W lampach z katodą tlenkową nie osiąga się prądu nasycenia. Przy podwyższaniu napięcia anody natężenie szybko wzrasta i przy pewnej krytycznej wartości I_{ac} katoda ulega zniszczeniu. Dla niskich napięć U_a charakterystykę diody opisuje dobrze krzywa wykładnicza (por. wzór 25.3). Dla większych U_a zmiany prądu zachodzą zgodnie z prawem

$$j_a = aU_a^{3/2}. \tag{25.6}$$



25.2. Przebieg charakterystyki diody z katodą tlenkową (a) i wolframową (b).

Podstawowym parametrem charakteryzującym diodę jest *nachylenie* charakterystyki S zdefiniowane wzorem:

$$S = \frac{dI_a}{dU_a}. \tag{25.7}$$

Ma ono wymiar przewodnictwa elektrycznego. Odwrotność nachylenia

$$R = \frac{1}{S} = \frac{dU_a}{dI_a} \tag{25.7a}$$

nazywa się *oporem wewnętrznym* diody. Poza nachyleniem charakterystyki, dla diody z katodą wolframową określa się wartość prądu nasycenia I_{as}, a z katodą tlenkową największy dopuszczalny prąd anodowy I_{ac}. Diody stosowane są do prostowania prądu technicznego (kenotrony) oraz w układach pomiarowych wysokiej częstości (diody wysokiej częstości). Poza diodami istnieją lampy o większej liczbie elektrod, których nazwy tworzy się od greckich liczebników i tak lampę 3-elektrodową nazywamy triodą, 4-elektrodową — tetrodą, 5-elektrodową (w tym trzy siatki) — pentodą itd. Bliższy opis triody znajdzie czytelnik w § 25.2, a inne lampy nie wchodzą w zakres zainteresowań pracowni.

Poza emisją termoelektryczną w lampach elektronowych występuje zjawisko emisji wtórnej na anodzie. Emisja ta zachodzi przy wyższych napięciach anody na skutek uderzania w nią elektronów. Emisja wtórna obniża prąd anody i z tego powodu nie jest pożądana.

25.03. RUCH ELEKTRONU W POLU ELEKTRYCZNYM I MAGNETYCZNYM

Na elektron znajdujący się w obszarze pola elektrycznego i magnetycznego działa siła Lorentza (por. wzory 1.14 i 1.21)

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{25.8}$$

Składa się ona z dwóch członów. Pierwszy pochodzi od działania pola elektrycznego o natężeniu **E**, a drugi od pola magnetycznego o indukcji B. Siła działająca na elektron w polu elektrycznym jest skierowana wzdłuż linii sił pola elektrycznego, a w polu magnetycznym prostopadle zarówno do kierunku linii sił indukcji magnetycznej B jak i do prędkości **v**. Na skutek działania siły Lorentza elektron w polu elektrycznym doznaje przyspieszenia. W lampach elektronowych istnieje zawsze pole elektryczne między anodą i katodą. Pole elektryczne przyspieszając elektron wykonuje pracę określoną wzorem (25.1), $L = eU_a$. Praca ta zamienia się na energię kinetyczną elektronów $\frac{mv^2}{2}$. Po przebyciu różnicy potencjałów U_a prędkość elektronów określona będzie równością pracy i energii kinetycznej $eU_a = \frac{mv^2}{2}$, skąd

$$v = \sqrt{2\frac{e}{m}U_a}. \tag{25.9}$$

25.1. DIODA

Cel: Wyznaczenie charakterystyki diody w zakresie prądu początkowego, wyznaczenie temperatury katody, napięcia kontaktowego i prędkości termoelektronów.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki i potencjometry (§ 4.2), źródła prądu (§ 4.1).

Zagadnienia: emisja elektronów (§ 25.01; S3, § 59), napięcia kontaktowe (§ 21.2; S3, § 52); lampy elektronowe (§ 25.02–03; S3, § 107–109; J, § 22.4–6).

Wprowadzenie

Na wykresie zależności natężenia anody od napięcia czyli tzw. charakterystyce diody wyróżniamy trzy odcinki zwane zakresami (rys. 25.2). Zakres prądu początkowego, zakres ładunku przestrzennego i zakres prądu nasycenia (w diodach z wolframową katodą) lub prądu krytycznego (w diodach z katodą tlenkową). Zakres prądu początkowego obejmuje część krzywej od punktu styczności z ujemną osią U_a do pewnego punktu A, któremu odpowiada napięcie bliskie $U_a = 0$. W obszarze tym stosuje się ujemne napięcia diody. Gdy $U_a = 0$, natężenie prądu anody jest określone całkowitym prądem emisyjnym katody, czyli równaniem (25.3), które ze względu na niewielki wpływ czynnika T^2 stojącego przed funkcją wykładniczą napisać możemy w postaci:

$$I_n = B\exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right).$$

Dla $U_a < 0$ w wyrażeniu powyższym musimy uwzględnić wpływ potencjału hamującego. Możemy założyć, że potencjał ten zwiększa barierę potencjału do wartości Φ', którą musi

pokonać elektron wybiegający z katody, przy czym $\Phi' = \Phi - eU_a$. Podstawiając Φ' w miejsce Φ do ostatniego równania otrzymamy następujące wyrażenie na prąd anody

$$I_a = B\exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)\exp\left(\frac{eU_a}{kT}\right)$$

lub

$$I_a = I_n\exp\left(\frac{eU_a}{kT}\right). \tag{25.10}$$

Logarytmując to równanie otrzymamy

$$\ln I_a = \frac{e}{kT}U_a + \ln I_n. \tag{25.11}$$

Jeszcze jeden czynnik wpływa na pracę lampy; jest nim napięcie kontaktowe U_k (potencjał kontaktowy) pomiędzy materiałem katody i anody (por. § 21.0). Napięcie to nie zależy od materiału rozdzielającego te dwa przewody (w naszym przypadku jest to próżnia) i dodaje się do napięcia przyłożonego. Po uwzględnieniu napięcia kontaktowego równanie (25.10) napiszemy w postaci

$$I_a = I_n\exp\left[\frac{e}{kT}(U_a + U_k)\right] = I_n\exp\left(\frac{e}{kT}U_k\right)\exp\left(\frac{e}{kT}U_a\right). \tag{25.12}$$

Szczególnie interesujący jest przypadek tzw. prądu zerowego $I_a(0)$ czyli prądu, który płynie przy $U_a = 0$

$$I_a(0) = I_n\exp\left(\frac{e}{kT}U_k\right). \tag{25.13}$$

Podstawiając to wyrażenie do (25.12) otrzymujemy

$$I_a = I_a(0)\exp\left(\frac{e}{kT}U_a\right)$$

albo po zlogarytmowaniu

$$\ln\frac{I_a}{I_a(0)} = \frac{e}{kT}U_a \tag{25.14}$$

lub

$$\ln I_a = \ln I_a(0) + \frac{e}{kT}U_a. \tag{25.14a}$$

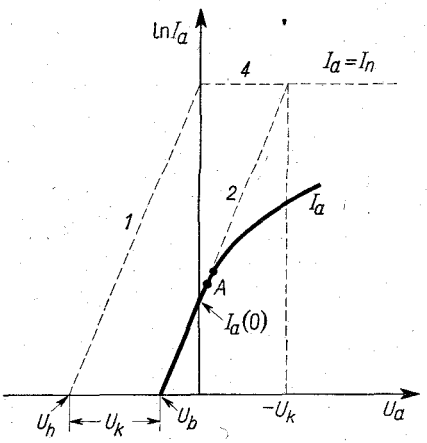
Na rysunku 25.3 krzywa *1* przedstawia obraz graficzny równania (25.11), a krzywa *2* stanowi ostateczny wynik przewidywań i jest obrazem równania (25.14a). Zależność obserwowana w doświadczeniu (krzywa I_a) stosuje się do teoretycznej krzywej tylko do punktu A, dalej w stosowanym układzie współrzędnych występuje odstępstwo od liniowej zależności. Wystąpić ono musi, ponieważ jest to zakres ładunku przestrzennego, w którym nie obowiązuje już równanie wykładnicze, lecz zależnością I_a od U_a rządzi równanie (25.6). Znając przebieg zależności $I_a(U_a)$ w zakresie prądu początkowego oraz prąd emisyjny katody I_n możemy wykreślić przebieg krzywej teoretycznej *2* (rys. 25.3) i wyznaczyć następujące wielkości:

1. Temperaturę katody z nachylenia a krzywej *2*, bowiem zgodnie z równaniem (25.14a) mamy

$$a = \frac{e}{kT}, \quad \text{czyli} \quad T = \frac{e}{kT}. \tag{25.15}$$

2. Wartość napięcia kontaktowego U_k z równania (25.13) lub z wykresu jako wartość odciętej $-U_a$ punktu przecięcia prostej *2* z prostą odpowiadającą rzędnej $I_a = I_n$.

3. Prędkość wyjściową najszybszych elektronów z równania (25.9), podstawiając na U_a potencjał hamujący U_h równy odciętej punktu przecięcia krzywej *1* z osią U_a.



25.3. Teoretyczna analiza charakterystyki diody.

Należy odróżnić napięcie hamujące U_h od tak zwanego napięcia blokującego U_b, które jest minimalną wartością bezwzględną ujemnego napięcia anody, przy której prąd anody spada do zera ($I_a = 0$). Napięcie blokujące jest sumą napięcia hamującego i kontaktowego $U_b = U_h + U_k$. Wartość bezwzględna napięcia blokującego, a tym samym i hamującego zależy od temperatury katody (U_k = const). Zgodnie z (25.10), od temperatury katody zależy również prędkość termoelektronów.

Pomiary

Celem wyznaczenia przebiegu charakterystyki w zakresie prądu początkowego łączymy układ według schematu 4.20. Prędkość termoelektronów zależy od temperatury katody, czyli zgodnie z prawem Joule'a–Lenza od natężenia prądu żarzenia. Celem zapewnienia wymaganej stabilności prostownik selenowy służący do zasilania obwodu żarzenia jest stabilizowany za pomocą magnetycznego stabilizatora napięcia. Do anody przykładamy napięcie hamujące. Łącząc mikroamperomierz musimy pamiętać, że prąd w obwodzie płynie zawsze od katody do anody i zacisk „–" mikroamperomierza zawsze musi być połączony z anodą. Włączamy obwód żarzenia i za pomocą opornika R nastawiamy natężenie I podane w instrukcji (ok. 0,3 A). Włączamy obwód anodowy i za pomocą potencjometru P nastawiamy potencjał $U_a = 0$. Czekamy do chwili, gdy prąd anody przestanie się zmieniać, po czym mierzymy natężenie prądu I_a dla ok. 10-ciu różnych wartości potencjału hamującego $-U_a$ w zakresie od $U_a = 0$ do wartości $U_a = U_b$, przy której $I_a = 0$. Zmieniamy polaryzację anody łącząc biegun dodatni źródła

z anodą, po czym wykonujemy pomiary I_a dla ok. 10-ciu różnych wartości $U_a > 0$. Maksymalną wartość U_a dobieramy w ten sposób, by prąd I_a nie przekroczył zakresu mikroamperomierza. Podobne pomiary wykonujemy dla dwóch innych natężeń prądu żarzenia.

Celem wyznaczenia prądu emisyjnego katody I_n rozłączamy obwód anodowy i łączymy według schematu 4.17. Przy czym zmieniamy źródło zasilania anody na źródło o napięciu rzędu 100 V, a mierniki na inne o dobranym odpowiednio zakresie. Obwodu żarzenia nie zmieniamy. Włączamy obwód anodowy i badamy zależność natężenia prądu anody I_a od napięcia anody U_a (dodatniego) przy stałym prądzie żarzenia wynoszącym dokładnie tyle, ile w jednym z pomiarów części pierwszej. Podobne zależności wyznaczamy dla dwóch pozostałych natężeń żarzenia stosowanych w części pierwszej doświadczenia.

Obliczenia

Wykreślamy na jednym arkuszu zależności natężenia anody od napięcia anody $I_a(U_a)$ w oparciu o wyniki uzyskane w drugiej części doświadczenia i ekstrapolujemy uzyskane krzywe do $U_a = \infty$. Uzyskane wartości asymptotyczne $I_a(U_a = \infty)$ są równe prądowi emisyjnemu katody I_n. Oczywiście dla każdego natężenia żarzenia otrzymujemy inną wartość I_{n1}, I_{n2}, I_{n3}. Określamy błędy maksymalne tej wielkości.

Obliczamy wartości logarytmu dziesiętnego prądów I_a z części pierwszej doświadczenia. Po czym wykreślamy na oddzielnych arkuszach zależności $\lg I_a(U_a)$. Na wykresach tych nanosimy linię *4* dla $\lg I_n$ oraz asymptotę krzywej doświadczalnej (linia *2* z wykresu 25.3). Obliczamy nachylenia a asymptot, a następnie temperaturę z równania (25.15), które w omawianym przypadku, ze względu na zastosowanie logarytmów dziesiętnych przyjmuje postać

$$T = \frac{e}{ka} \lg e .$$

Napięcia kontaktowe U_k wyznaczamy z wykresów. Kreślimy krzywą teoretyczną *1* skorygowaną ze względu na napięcie kontaktowe (por. rys. 25.3) jako równoległą do krzywej *2* przechodzącą przez punkt ($\lg I_a = \lg I_n$, $U_a = 0$) i odczytujemy wartości potencjału hamującego U_h. Wreszcie z wzoru (25.9) obliczamy prędkości wyjściowe najszybszych elektronów.

Dyskusję błędów wykonujemy dla wszystkich obliczonych wartości z jednego wykresu, tak więc określamy błędy nachylenia a i napięć U_a, U_h metodą graficzną i obliczamy błędy maksymalne temperatury T i prędkości v.

Odpowiadamy na pytania: Jak prąd żarzenia wpływa na temperaturę katody? Czy napięcie kontaktowe i prędkość wyjściowa zależą od temperatury katody i w jaki sposób?

25.2. TRIODA

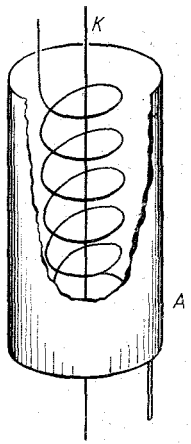
Cel: Wyznaczenie przebiegu charakterystyk anodowych i siatkowych triody, wyznaczenie nachylenia charakterystyki, oporu wewnętrznego i współczynnika wzmocnienia.

Przyrządy: źródła prądu (§ 4.1), oporniki i potencjometry (§ 4.2), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

Zagadnienia: emisja elektronów (§ 25.01; S3, § 59), lampy elektroniczne (§ 25.02; S3, § 107–109; J, § 22.4–6).

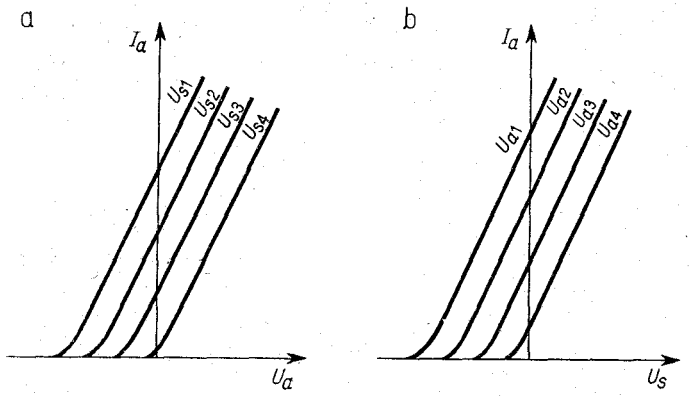
Wprowadzenie

Trioda jest lampą trójelektrodową i służy do wzmacniania sygnałów elektrycznych. Dwoma elektrodami, podobnie jak w diodzie, są anoda A i katoda K. Trzecia elektroda zwana siatką posiada postać spirali (sprężynki) wykonanej z drutu i znajduje się pomiędzy katodą i anodą (rys. 25.4). Siatka oddziela od anody chmurę elektronów związaną z rozżarzoną katodą. Od jej potencjału zależy przepływ elektronów. Jeżeli siatka ma potencjał U_s ujemny (potencjały liczymy zawsze względem katody), wtedy odpycha elektrony



25.4. Budowa triody.

na powrót w kierunku katody i przy dostatecznie dużej wartości U_s prąd w obwodzie anoda-katoda płynąć nie może; mówimy wtedy, że lampa jest zablokowana. W przypadku dodatniego potencjału siatki elektrony są przyspieszane i bez przeszkód dochodzą do anody; prąd płynie. Ponieważ potencjałem siatki możemy regulować prąd anody, siatkę nazywamy siatką sterującą. Natężenie prądu anody I_a w triodzie jest funkcją dwóch zmiennych: potencjału anody U_a i potencjału siatki U_s, więc $I_a = f(U_a, U_s)$. Ze względu na skomplikowany charakter tej funkcji wprowadza się dwa oddzielne parametry: charakterystykę anodową $I_a = f_2(U_a)$ przy $U_s = \text{const}$ oraz charakterystykę siatkową



25.5. Rodzina charakterystyk anodowych (a) i siatkowych (b) triody.

$I_a = f_1(U_s)$ przy $U_a = \text{const}$. Krzywe przedstawiające powyższe zależności tworzą dwie rodziny charakterystyk: rodzinę charakterystyk anodowych i rodzinę charakterystyk siatkowych (rys. 25.5). Dla lepszego zaobserwowania roli charakterystyk przedstawimy natężenie prądu anody w pobliżu wartości $U_a = U_{a0}$ i $U_s = U_{s0}$ w postaci różniczki zupełnej

$$dI_a = \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_s}\right)_{U_a=U_{a0}} \cdot dU_s + \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_a}\right)_{U_s=U_{s0}} \cdot dU_a, \tag{25.16}$$

pochodną cząstkową

$$S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_a}\right)_{U_a=U_{a0}} \tag{25.17}$$

nazywamy nachyleniem charakterystyki siatkowej. Natomiast

$$\left(\frac{\partial I_a}{\partial U_a}\right)_{U_s=U_{s0}} = \frac{1}{R_i}, \tag{25.18}$$

gdzie wielkość R_i nazywamy oporem wewnętrznym lampy. Uwzględniając powyższe podstawienia w równaniu (25.16) otrzymamy

$$dI_a = \frac{1}{R_i}(SR_i dU_s + dU_a). \tag{25.19}$$

Oznaczymy ponadto

$$\mu = SR_i \text{ oraz } D = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{SR_i}. \tag{25.20}$$

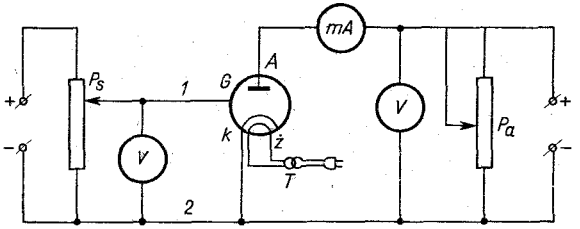
Wielkość μ nazywamy statycznym współczynnikiem wzmocnienia, a D — przechwytem lampy. Z wzoru (25.19) wynika, że wzrost napięcia siatki wywołuje μ-krotnie większy wzrost natężenia prądu anody niż podobny wzrost U_a. Z tego powodu lampę stosować można do wzmocnienia sygnałów przyłożonych do siatki. Niewielkie zmiany napięcia siatki powodują duże zmiany natężenia I_a anody, czyli zostają wzmocnione. Parametry S i R_i są funkcjami potencjału siatki i anody. Wartość współczynnika wzmocnienia jest niemal niezależna od tych potencjałów, co ma bardzo duże znaczenie praktyczne. Zmiany współczynników S i R_i ze wzrostem przyłożonego napięcia U_a i U_s są nieznaczne ze względu na niemal prostoliniowy przebieg charakterystyk (rys. 25.5).

Katoda triody może być katodą wolframową lub półprzewodnikową. W ostatnim przypadku, podobnie jak w przypadku diody, nie można pracować przy dużych napięciach dodatnich, gdyż katoda ulega zniszczeniu (por. § 25.02). W praktyce najczęściej pracujemy przy ujemnych napięciach siatki.

Pomiary

Obwód łączymy według schematu 25.6. Lampa umieszczona jest na podstawce, a jej elektrody wyprowadzone są do odpowiednio oznakowanych zacisków. Przykładane napięcia zmieniać można za pomocą potencjometrów P_a i P_s. Zakres zmian wartości wielkości mierzonych zależy od typu stosowanej lampy i jest podany w instrukcji doświadczenia. Dla lamp o półprzewodnikowych katodach pomiary wykonujemy tylko dla $U_s \leqslant 0$.

Celem zbadania przebiegu charakterystyki anodowej ustalamy napięcie siatki (w pierwszym pomiarze $U_s = 0$), a następnie mierzymy natężenie prądu I_a dla 10 do 15-tu różnych wartości U_a pokrywających cały przedział zmienności tego napięcia. Pomiary wykonujemy również przy kilku innych wartościach U_s wskazanych w instrukcji.



25.6. Układ do badania charakterystyki triody.

Charakterystyki siatkowe mierzymy przy stałym napięciu anody, w pierwszym pomiarze ustalamy maksymalną wartość U_a. Zakres zmian napięcia siatki U_s przyjmujemy według instrukcji, najczęściej poczynając od wartości ujemnej blokującej lampę do zera dla lamp z katodą półprzewodnikową lub do $U_{s,\max} \simeq +5$ V dla lamp z katodą wolframową. Zmianę znaku napięcia U_s otrzymujemy zamieniając podłączenia przewodów *1* i *2*; wtedy *1* łączymy z *K*, a *2* z *S*. Pomiary natężenia prądu anody I_a wykonujemy dla około 10-ciu różnych wartości U_s w całym zakresie zmienności. Podobne pomiary wykonujemy dla czterech innych mniejszych wartości U_a. Notujemy dokładności przyrządów.

Obliczenia

Wykonujemy dwa wykresy: na jednym nanosimy rodzinę charakterystyk anodowych, a na drugim — rodzinę charakterystyk siatkowych. Po jednej krzywej — najbardziej udanej — z każdej rodziny wybieramy do dalszej analizy. Na tych wybranych krzywych zaznaczamy prostokąty błędów dla 2–3 punktów, wybieramy prostoliniowe odcinki i wyznaczamy ich nachylenie. Zgodnie z wzorem (25.17) nachylenie charakterystyki siatkowej jest równe parametrowi S o tej samej nazwie. Z nachylenia charakterystyki anodowej, zgodnie z wzorem (25.18), wyznaczamy opór wewnętrzny lampy. Korzystając z wzoru (25.20) obliczamy współczynnik wzmocnienia μ oraz przechwyt D.

Obliczamy błędy wyznaczonych w wykresu wielkości S i R_i oraz obliczonych: μ i D. Dyskutujemy zgodność przebiegu wszystkich charakterystyk z danymi katalogowymi badanej lampy, a także wpływ wielkości znanych stałych w doświadczeniu, czyli parametrów krzywych na przebieg charakterystyk (np. wpływ U_A na S).

25.3. DRGANIA RELAKSACYJNE

Cel: Wyznaczanie napięcia zapłonu i gaśnięcia oraz charakterystyki lampy neonowej, badanie drgań relaksacyjnych i ewentualnie nieznanej pojemności.

Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–0.3), oporniki, potencjometry (§ 4.2), sekundomierz (§ 3.5).

Zagadnienia: emisja elektronów (§ 25.01–02; S3, § 59); wyładowania w gazach (S3, § 67; J, § 26.1–3); równanie krzywej ładowania kondensatora (§ 19.4).

Wprowadzenie

Drganiami relaksacyjnymi nazywamy drgania elektryczne, w których wzrosty i spadki napięcia zachodzą w sposób wykładniczy. Zazwyczaj do wytwarzania drgań relaksacyjnych wykorzystuje się procesy ładowania i rozładowania kondensatora przez opornik. Napięcie na jego okładkach zmienia się wykładniczo (por. wzory 19.14a i 19.15a), według równania

$$U = U_0\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] \quad \text{ładowanie,} \tag{25.21}$$

$$U = U_0\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{rozładowanie.} \tag{25.21a}$$

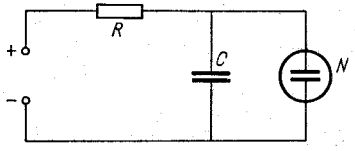
Obwód służący do wytwarzania drgań relaksacyjnych musi zawierać element, który samoczynnie reguluje czas trwania ładowania i rozładowania. Rolę takiego elementu spełnia lampa neonowa zwana również neonówką lub stabiliwoltem. Jest to bańka szklana wypełniona gazem, najczęściej neonem pod ciśnieniem około 20 mm Hg. Neonówka ma dwie elektrody metalowe pokryte warstwą metalu łatwo emitującego elektrony np. baru. Jeżeli do elektrod przyłożymy niewielkie napięcie, to ze względu na złe przewodnictwo gazu prąd nie popłynie. Po przekroczeniu wartości U_z (napięcie zapłonu) potrzebnej do spowodowania jonizacji lawinowej, przez lampkę popłynie prąd o natężeniu ograniczonym tylko oporem zewnętrznym. Gdy napięcie na elektrodach spadnie poniżej napięcia gaśnięcia U_g, to jonizacja lawinowa nie rozwija się i lampka znowu staje się doskonałym izolatorem. W czasie jarzenia pomiędzy elektrodami znajdują się ładunki elektryczne, które dają dodatkowy przyczynek do pola przyspieszającego. Z tego względu do podtrzymania jarzenia wystarczy napięcie nieco niższe od napięcia zapłonu U_z ($U_z > U_g$). Przepływowi prądu przez lampkę neonową towarzyszy świecenie. Mamy tu do czynienia z wyładowaniem w gazach rozrzedzonych. Ze względu na małą odległość elektrod nie występuje cały obraz wyładowania, lecz tylko warstwa katodowa świecąca na powierzchni katody.

Lampkę neonową wykorzystuje się do stabilizowania napięcia. W czasie jarzenia jej opór wewnętrzny jest bardzo mały i prąd przez nią płynący bardzo silnie wzrasta nawet przy niewielkim wzroście napięcia. Stąd, jeżeli lampkę neonową zasilać będziemy ze źródła o oporze wewnętrznym dużym w stosunku do oporu neonówki w czasie jarzenia, to napięcie na zaciskach neonówki prawie nie rośnie. Najmniejszemu wzrostowi napięcia zasilającego o ΔU towarzyszy duży wzrost prądu ΔI płynącego przez neonówkę, przy czym $\Delta U = R_i \Delta I$ (R_i — opór neonówki w czasie jarzenia).

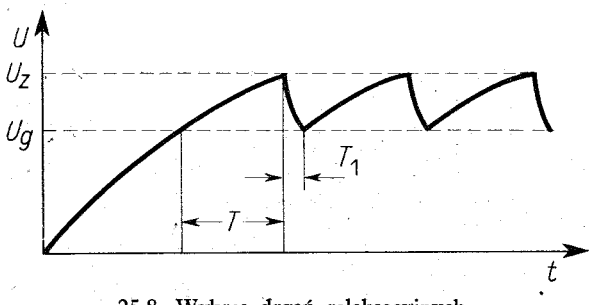
Najprostszy obwód służący do wytwarzania drgań relaksacyjnych pokazano na rysunku 25.7. Kondensator C ładuje się ze źródła prądu stałego przez opornik R o dużym oporze. Napięcie na jego okładkach narasta w sposób wykładniczy według równania (25.21). Jeżeli osiągnie ono wartość U_z, to podłączona równolegle do okładek kondensatora neonówka N zapala się i płynie przez nią prąd rozładowania kondensatora. Napięcie U maleje według równania (25.21a). Rozładowanie kończy się z chwilą, gdy napięcie spada do wartości U_g, po czym napięcie ponownie wzrasta. Proces ten powtarza się cyklicznie i otrzymujemy drgania pokazane na rysunku 25.8. Przez T oznaczymy czas narastania napięcia od U_g do U_z, a przez T_1 — czas opadania od U_z do U_g, przez U_0

oznaczymy napięcie źródła ładującego kondensator. Ze względu na to, że w chwili jarzenia neonówka stawia stosunkowo mały opór, czas rozładowania jest bardzo krótki i możemy przyjąć, że $T \gg T_1$. Stąd przyjmujemy, że okres drgań jest równy T. Napięcie U_g zostaje osiągnięte po czasie t, który zgodnie z (25.21) spełnia związek

$$U_g = U_0\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right].$$



25.7. Najprostszy obwód do badania drgań relaksacyjnych.



25.8. Wykres drgań relaksacyjnych.

Napięcie wzrasta w dalszym ciągu do wartości U_z po czasie $T+t$, stąd:

$$U_z = U_0\left[1-\exp\left(-\frac{T+t}{RC}\right)\right].$$

Po wykonaniu prostych przekształceń i po zlogarytmowaniu otrzymamy

$$-t = RC\ln(U_0-U_g)+RC\ln U_0,$$
$$-(t+T) = RC\ln(U_0-U_z)+RC\ln U_0.$$

Odejmując powyższe równania stronami, okres T wyrazimy wzorem

$$T = RC\ln\frac{U_0-U_g}{U_0-U_z}. \tag{25.22}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$K = \ln\frac{U_0-U_g}{U_0-U_z} \tag{25.23}$$

otrzymamy

$$T = KRC, \tag{25.22a}$$

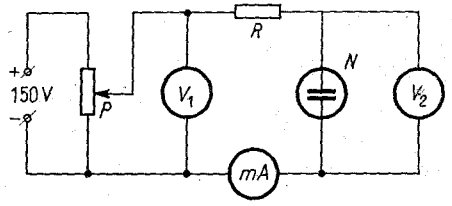
gdzie współczynnik K jest wielkością niemianowaną.

Pomiary

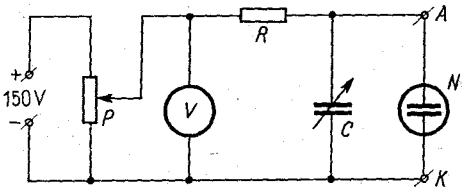
Podstawową częścią aparatury jest umieszczony na podstawce stabiliwolt np. StR 75/6. (Liczba 75 oznacza tu nominalną wartość napięcia stabilizowanego w V, a liczba 6 maksymalne, dopuszczalne natężenie prądu w mA.)

W pierwszej części doświadczenia badamy charakterystykę lampy neonowej, tzn. wyznaczamy napięcie zapłonu i gaśnięcia oraz zależność natężenia prądu od przyłożonego napięcia. Układ łączymy według schematu 25.9. Napięcie zapłonu i gaśnięcia

mierzymy za pomocą woltomierza V_2, a regulujemy za pomocą potencjometru P. Ze względu na gwałtowne zmiany napięcia występujące w chwili zapłonu lub gaśnięcia musimy obserwować woltomierz, a nie lampkę. Zwiększając stopniowo napięcie zaobserwujemy nagły jego spadek w chwili zapłonu, a wzrost w chwili gaśnięcia lampki. Napięcie U_g jest równe najwyższemu wskazaniu woltomierza odczytanemu w chwili bezpośrednio poprzedzającej zgaśnięcie. Odczyty U_z i U_g powtarzamy 2 lub 3-krotnie i w oparciu o analizę uzyskanych wyników planujemy właściwą liczbę pomiarów i pomiary te wykonujemy. Mierzymy napięcie U_2 panujące na zaciskach lampki oraz natężenie I płynącego przez nią prądu dla około 10-ciu różnych wartości przykładanego napięcia $U_1 \geqslant U_z$, oraz dla kilku wartości $U_1 < U_z$.



25.9. Obwód do badania charakterystyki lampy neonowej.



25.10. Obwód do badania drgań relaksacyjnych.

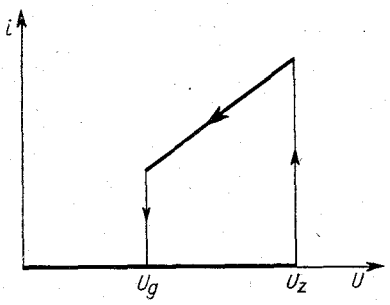
W drugiej części doświadczenia układ łączymy według schematu 25.10 i utrzymujemy stałą wartość napięcia np. 90 V, korygując ewentualne wahania potencjometrem P. Mierzymy okres drgań dla stałej wartości C, obliczamy stałą K (por. wzór 25.22a), analizujemy uzyskany wynik i błędy, po czym planujemy właściwy sposób pomiaru stałej K. Ostateczne pomiary wykonujemy dla ok. 10-ciu różnych wartości C.

Układ do badania drgań relaksacyjnych możemy wykorzystać do wyznaczenia pojemności C_x nieznanego kondensatora. W tym celu kondensator C_x łączymy w obwód równolegle do kondensatora C i dobieramy taką jego pojemność C_1, by okres T_x drgań był tego samego rzędu co okresy w poprzedniej części doświadczenia. Przebieg drgań można również oglądać na oscylografie. W tym celu do y-kowych płytek oscylografu przykładamy napięcie z punktów K i A (rys. 25.10).

Obliczenia

Wykreślamy na jednym arkuszu charakterystyki lampki, czyli zależności $U_2(U_1)$ oraz $I(U_1)$. Orientacyjny przebieg wykresu $I(U_1)$ pokazano na rysunku 25.11. Z wykresów tych możemy wyciągnąć wnioski o przydatności lampy neonowej do stabilizowania napięcia. W szczególności odczytujemy zakres napięcia U_1 odpowiadającego zmianom prądu I w przedziale od 0 do wartości maksymalnej $I_m = 6$ mA dla StR 75/6. Przedział ten określa maksymalne wahania napięcia stabilizowanego. Obliczamy okresy T drgań dla wszystkich pomiarów wykonanych w części drugiej doświadczenia i wykreślamy zależność okresu T od pojemności C. Dla każdego pomiaru z wzoru (25.22a) obliczamy stałą K oraz dla kilku pomiarów jej błąd. Stałą K' i jej błąd obliczamy niezależnie z wzoru (25.23) i sprawdzamy zgodność wartości K i K'. Możemy się spodziewać odstępstw przekraczających nierówność wyrażającą kryterium

zgodności wyników, ponieważ wyprowadzając wzór (25.23) nie uwzględniliśmy czasu T_1 oraz zaniedbaliśmy prąd rozładowania związany ze stratami kondensatora. Kondensator nie ma doskonałej izolacji między płytkami, stąd jego opór nie jest nieskończenie duży i może być porównywalny z oporem opornika R w schemacie 23.9.



25.11. Przebieg charakterystyki lampy neonowej.

Celem obliczenia pojemności C_x wykreślamy zależność okresu T od pojemności C. Z wykresu odczytujemy pojemność C_2 odpowiadającą okresowi T_x. Ze względu na to, że pojemności równolegle połączonych kondensatorów dodają się zachodzi związek

$$C_x + C_1 = C_2,$$

z którego obliczamy nieznaną pojemność C_x.

25.4. EFEKT MAGNETRONOWY

Cel: wyznaczenie ładunku właściwego elektronu metodą efektu magnetronowego.

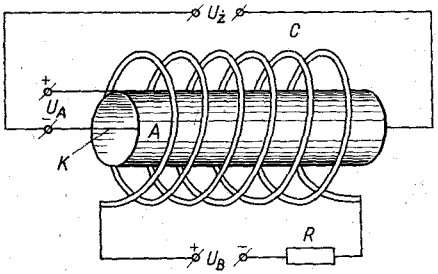
Przyrządy: wytwarzanie pól magnetycznych (§ 4.9), mierniki elektryczne (§ 18.01–03), oporniki i potencjometry (§ 4.2).

Zagadnienia: emisja elektronów (§ 25.01; S3, § 59; J, § 22.4–6); lampy elektronowe (§ 25.02–03; S3, § 107–109; J, § 22.5 i 6).

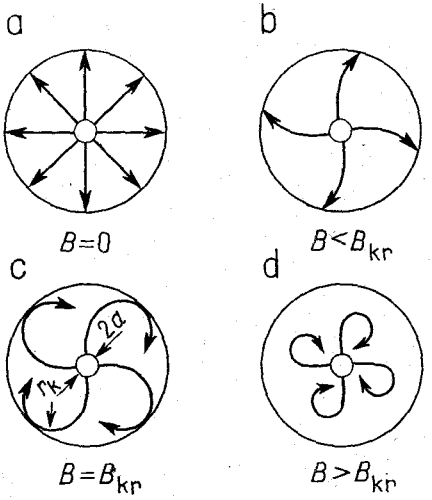
Wprowadzenie

Rys. 25.12 przedstawia schemat układu, w którym występuje efekt magnetronowy. Podstawowym elementem jest dioda, której katodę stanowi cienki drucik znajdujący się w osi cylindrycznej anody. Cewka C służąca do wytwarzania indukcji magnetycznej znajduje się na zewnątrz diody. Elektrony wybiegające z katody przyspieszane są w polu elektrycznym, którego linie sił biegną promieniście od anody A do katody K i równocześnie w polu o indukcji magnetycznej B skierowanej równolegle do osi lampy. W wyniku działania siły Lorentza (25.8), tor elektronu zakrzywia się w sposób pokazany na rys. 25.13. Zakrzywienie toru rośnie w miarę wzrostu B, a przy $B = B_{kr}$ elektrony nie mogą dojść do anody; prąd anodowy przestaje płynąć. Zilustrowano to zjawisko wykresem 25.14a przedstawiającym zależność prądu anodowego od indukcji. Parametrem dla rodziny charakterystyk $I_a(B)$ jest napięcie anodowe U_a. Zjawisko wzrostu prądu uzyskać można zmieniając napięcie anodowe U_a przy stałej indukcji B. W tym

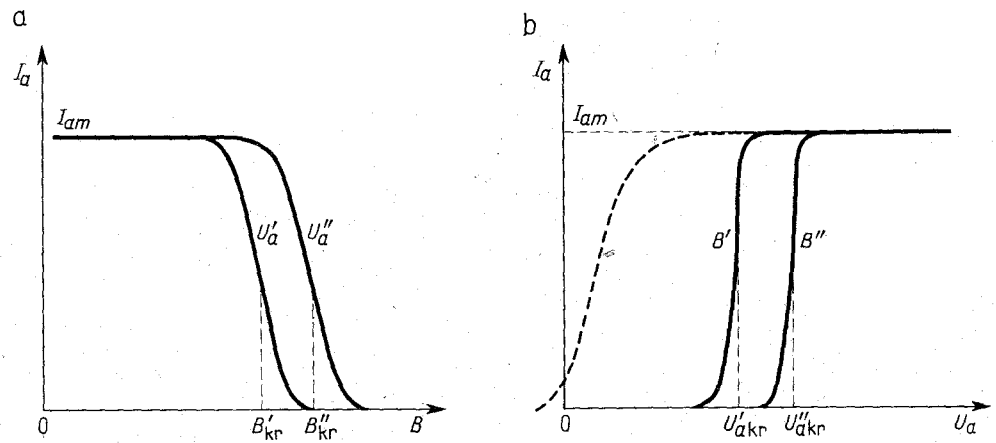
przypadku prąd zaczyna płynąć dopiero przy pewnej krytycznej wartości napięcia wynoszącej U_{kr} (rys. 25.14b). Na wykresie tym parametrem jest indukcja magnetyczna B, a linią przerywaną zaznaczono charakterystykę przy $B = 0$.



25.12. Układ, w którym występuje efekt magnetronowy.



25.13. Zakrzywienie toru elektronów w polu magnetycznym.



25.14. Typowe przebiegi charakterystyk diody w efekcie magnetronowym.

Obecnie wyprowadzamy wzór na ładunek właściwy elektronu. W tym celu rozpatrzymy przypadek graniczny, w którym tor elektronu jest styczny do powierzchni anody (rys. 25.13c). Wtedy elektron ma prędkość określoną wzorem (25.9) i działa na niego przyspieszenie $a = \frac{F}{m}$ pochodzące od działania pola magnetycznego (wzór 24.8) wynoszące, gdy v prostopadłe do B

$$a = \frac{evB}{m}. \tag{25.24}$$

Na skutek działania tego przyspieszenia elektron porusza się po kole o promieniu r_k, a przyspieszenie (25.24) jest przyspieszeniem dośrodkowym $\left(a = \frac{v^2}{r_k}\right)$, stąd

$$\frac{v^2}{r_k} = \frac{evB}{m}.$$

Podstawiając prędkość z wzoru (25.9) otrzymamy

$$e/m = \frac{2U_a}{r_k^2 B^2}.$$

W skrajnym przypadku, gdy promienie: katody a i anody b spełniają związek $a \gg b$ i gdy zakładamy, że tor elektronu jest styczny do anody i elektron zatacza koło o średnicy $2r_k = b$ ostatni wzór przyjmuje postać

$$\frac{e}{m} = \frac{8U}{b^2 B^2}. \tag{25.25}$$

W przypadku gdy nie możemy pominąć promienia katody, wzór na e/m ma postać

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_a}{b^2 B^2}\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^{-2} \tag{25.25a}$$

Aparatura

Do pomiaru stosujemy dowolną diodę, której budowa spełnia warunki doświadczenia, a więc katoda musi być osadzona współosiowo z cylindryczną anodą. Do wytwarzania indukcji magnetycznej służy solenoid osadzony również współosiowo z diodą. Indukcja magnetyczna w solenoidzie wyraża się (por. wzór 1.20) wzorem

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l_s}.$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (25.25) otrzymamy

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_{a\,\mathrm{kr}} l_s^2}{\mu_0^2 N^2 I^2 b^2} \tag{25.26}$$

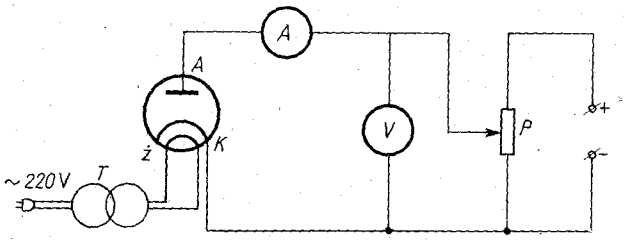
lub

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_{a\,\mathrm{kr}} l_s^2}{\mu_0^2 N^2 I^2 b^2}\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^{-2}. \tag{25.26a}$$

Pomiary

Układ lampy łączymy według schematu 25.15, a układ solenoidu według schematu (4.15). Nastawiamy dowolne natężenie I prądu zasilającego solenoid i nie zmieniając tej wartości zmieniamy napięcie anodowe w całym dostępnym zakresie osiągalnym za pomocą potencjometru P. Dla pewnej wartości napięcia $U_{a\,\mathrm{kr}}$ powinien wystąpić gwałtowny wzrost natężenia I_a. Jeżeli zjawiska nie zaobserwowaliśmy, podwyższamy natężenie w solenoidzie i powtarzamy próbę. Gdy zjawisko wystąpi, nie zmieniamy już prądu w solenoidzie i wykonujemy systematyczne pomiary zależności $I_a(U_a)$. Punkty pomiarowe zagęszczamy w okolicy $U_{a\,\mathrm{kr}}$. Podobne pomiary wykonujemy przy dwóch

innych wartościach I oraz dla $I = 0$ (w ostatnim przypadku otrzymujemy zwykłą charakterystykę lampy.) Podobne serie pomiarów wykonujemy przy stałym napięciu anody $U_a = \text{const}$. Mierzymy wtedy zależność natężenia prądu anody I_a od prądu I płynącego przez solenoid. Ostatnie pomiary wykonujemy dla trzech różnych wartości U_a. Notujemy stałe aparaturowe, a więc długość solenoidu l_s, liczbę zwojów N oraz promień anody b i katody a. Notujemy dokładności wykonanych pomiarów.



25.15. Obwód anodowy układu magnetronowego.

Obliczenia

Obliczamy przybliżoną wartość wyrażenia $(a/b)^2$; gdy wynosi ona mniej niż 0,05, w dalszych obliczeniach zaniedbujemy poprawkę $[1-(a/b)^2]^{-2}$ w równaniu (24.26a). Wykonujemy wykresy obydwu rodzin krzywych $I_a(U_a)$ przy $I = \text{const}$ oraz $I_a(I)$ przy $U_a = \text{const}$. Z wykresów tych określamy dokładnie wartości I_{kr} i $U_{a,kr}$ dla każdego z pomiarów. Wartość I_{kr} lub U_{kr} jest równa odciętej punktu, w którym $I_a = \frac{1}{2} I_{a\max}$ (porównaj rys. 25.14). Podstawiając odczytane w ten sposób wartości krytyczne do wzoru (25.26) lub (25.26a) otrzymamy wartości e/m. Otrzymamy więc 6 wartości e/m odpowiadających każdej parze napięcia anody i natężenia prądu w solenoidzie: dla $U_a = \text{const}$ (U_{a1}, U_{a2}, U_{a3}) otrzymamy odpowiednio I_{kr1}, I_{kr2} i I_{kr3} oraz dla $I = \text{const}$ (I_1, I_2, I_3) otrzymamy wartości krytyczne $U_{a,kr1}$, $U_{a,kr2}$, $U_{a,kr3}$. Obliczamy wartość średnią $\overline{e/m}$. Błędy wartości krytycznych określamy graficznie. Dla dwóch pomiarów obliczamy błędy maksymalne $\Delta(e/m)$.

25.5. LAMPA OSCYLOGRAFICZNA

Cel: wyznaczenie czułości odchylania elektrostatycznego oraz magnetycznego lampy, wyznaczenie ładunku właściwego elektronu.

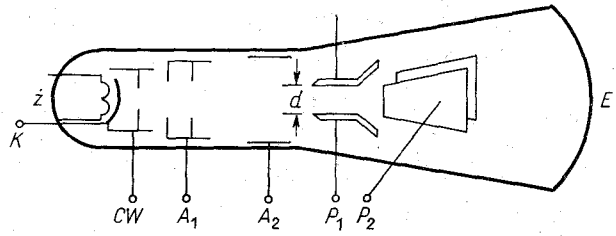
Przyrządy: mierniki elektryczne (§ 18.01–03), autotransformator (§ 4.5), oporniki i potencjometry (§ 4.2), źródła prądu (§ 4.1), wytwarzanie pól magnetycznych (§ 4.9).

Zagadnienia: emisja elektronów (§ 25.01; S3, § 59; J, § 22.4–6), lampy elektronowe (§ 25.02–03; S3, § 107–109; J, § 22.5 i 6).

Wprowadzenie

a. Lampa oscylograficzna (rys. 25.16) *służy do obserwowania zmian napięcia lub natężenia prądu w czasie.* Źródłem elektronów jest, podobnie jak w innych lampach, pośrednio żarzona katoda K. Katodę otacza cylinder metalowy zwany cylindrem Weh-

nelta CW. Od strony ekranu w cylindrze Wehnelta znajduje się mały otwór, przez który wybiega wiązka elektronów. Cylinder Wehnelta posiada ujemny potencjał względem katody. Wartość tego potencjału decyduje o ilości wysyłanych elektronów, a więc o jasności plamki na ekranie. Ekranem E nazywamy przednią, niemal płaską ścianę zewnętrznej szklanej obudowy lampy. Ekran pokryty jest warstwą substancji fluoryzującej, która świeci pod wpływem padającej na nią wiązki elektronów. Wewnętrzne ścianki lampy od ekranu aż po układ anod A_1, A_2 pokryte są warstwą grafitu połączonego elektrycznie z katodą, dzięki czemu na powierzchni szkła nie gromadzą się ładunki elektryczne. Elektrony wybiegające z katody posiadają małą prędkość i nie są ogniskowane (tworzą wiązkę rozbieżną). Przyspieszamy je za pomocą pola elektrycznego wytworzonego między katodą i anodą A_2. Osiągają one prędkość określoną wzorem (25.9).



25.16. Budowa lampy oscylograficznej.

Wiązkę można zogniskować, stosując odpowiednio dobrany przebieg potencjału przyspieszającego. W praktyce osiągamy to przez zastosowanie dwóch anod o odpowiednio dobranych wartościach napięcia. W niektórych typach lamp oscylograficznych, np. w kineskopach telewizyjnych, stosuje się magnetyczne ogniskowanie elektronów za pomocą podłużnego pola magnetycznego. Wektor natężenia tego pola jest równoległy do kierunku ruchu elektronów. Pole magnetyczne wytwarza się za pomocą magnesów pierścieniowych. Dwie pary prostopadle ustawionych płytek P_1 i P_2 służą do elektrostatycznego odchylania wiązki. Każda para płytek jest kondensatorem płytkowym. Po przyłożeniu do okładek tego kondensatora napięcia U, wytworzy się w przestrzeni między jego okładkami pole elektryczne o natężeniu $E = Ua^{-1}$. Na elektrony przebiegające ten obszar działa siła F skierowana w kierunku elektrody dodatniej (por. wzór 25.8). Skutkiem działania tej siły zmienia się kierunek ruchu elektronów i plamka na ekranie lampy przesuwa się wzdłuż linii równoległej do osi kondensatora. Stosunek wychylenia d plamki z pierwotnego położenia do napięcia U przyłożonego do płytek nazywamy czułością C_0 lampy

$$C_0 = \frac{d}{U}. \tag{25.27}$$

Obydwie pary płytek mają różny kształt i znajdują się w innej odległości od ekranu, stąd czułość każdej pary jest inna. Ponieważ osie obydwu par płytek są do siebie prostopadłe, wychylenia plamki spowodowane przyłożonym do nich napięciem zachodzą wzdłuż osi wzajemnie prostopadłych.

Jeżeli do płytek przyłożymy napięcie przemienne, którego wartość chwilowa określona jest wzorem

$$U = U_0 \sin \omega t,$$

to w takt zmian napięcia na płytkach zmieniać się będzie położenie plamki na ekranie oscylografu. Częstość tych zmian wynosi 50 Hz. Przy tak dużej częstości zmian napięcia oko nasze nie zauważy ruchu plamki, a jedynie równoległą do osi kondensatora linię ciągłą o długości d. Zerowe położenie plamki znajduje się w środku długości tej linii. Wartość napięcia stałego U, które odchyliłoby wiązkę z położenia równowagi o odległość d, musiałaby być równa podwójnej wartości szczytowej napięcia przemiennego, $U = 2U_0$ (różnicy amplitud od $-U_0$ do $+U_0$). Napięcie U nazywać będziemy napięciem odchylającym. Stosowane do pomiaru woltomierze prądu przemiennego mierzą napięcie skuteczne U_s wyrażające się wzorem $U_s = U_0/\sqrt{2}$. Między napięciem odchylającym a napięciem skutecznym istnieje więc następujący związek:

$$U = 2\sqrt{2}U_s. \tag{25.28}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do równania (25.27), otrzymamy

$$C_E = \frac{d}{2\sqrt{2}U_s}. \tag{25.29}$$

Często do odchylania wiązki elektronów stosuje się pole magnetyczne. Pole magnetyczne wytwarza się za pomocą dwóch współosiowych cewek umieszczonych na zewnątrz lampy. Jeżeli przez cewki przepływa prąd elektryczny o natężeniu I, w przestrzeni pomiędzy cewkami wytwarza się indukcja magnetyczna B. Na elektron przebiegający ten obszar z prędkością v działa siła F (25.8), a właściwie drugi jej składnik. W przypadku odchylenia magnetycznego czułość lampy jest stosunkiem wychylenia plamki do natężenia prądu przepływającego przez cewki

$$C_H = \frac{d_H}{I}.$$

Czułość ta zależy od budowy cewek. Jeżeli lampę wzorcujemy za pomocą prądu przemiennego, to związek między natężeniem odchylającym i natężeniem skutecznym wyraża się wzorem analogicznym jak w przypadku napięcia (25.28)

$$I = 2\sqrt{2}I_s, \tag{25.28a}$$

i również wyrazi się wzorem

$$C_H = \frac{d_H}{2\sqrt{2}I_s}. \tag{25.30}$$

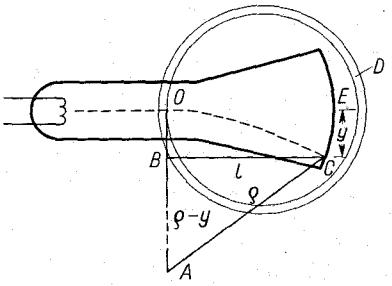
b. Ładunkiem właściwym e/m elektronu nazywamy stosunek ładunku e elektronu do jego masy m. W obecnym doświadczeniu wyznaczamy e/m z odchylenia w polu magnetycznym. Elektrony po przekroczeniu anody A_2 mają stałą prędkość określoną wzorem (25.9). Jeżeli w obszarze określonym kołem na rysunku 25.17 działa jednorodne pole magnetyczne o indukcji B skierowane prostopadle do płaszczyzny rysunku, to na elektrony działa składnik magnetyczny siły Lorentza (wzór 25.8) zakrzywiając tor elektronów. Ponieważ w omawianym przypadku kierunek prędkości v jest zawsze prostopadły do B,

siłę Lorentza napisać możemy skalarnie $F = evB$. Promień krzywizny ϱ toru elektronu jest wtedy również stały, a siła Lorentza jest siłą dośrodkową $F = \frac{mv^2}{\varrho}$ i porównanie obwodu sił prowadzi do wzoru:

$$\frac{v}{\varrho} = \frac{e}{m} B$$

lub po podstawieniu (25.9)

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 \varrho^2}.$$



25.17. Droga elektronu w lampie oscylograficznej umieszczonej w polu o indukcji B.

Promień krzywizny toru elektronu wyrazić możemy przez odchylenie y plamki oraz odległość OE. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta A, B, C (gdzie A — środek krzywizny toru) otrzymamy $\varrho = (y^2 + l^2)(2y)^{-1}$ podstawiając, tę wartość do ostatniego wzoru otrzymamy

$$\frac{e}{m} = \frac{16Uy^2}{B^2(y^2 + l^2)^2}. \tag{25.31}$$

Źródłem indukcji magnetycznej jest para cewek Helmholtza–Gaugaina, które wytwarzają niemal jednorodne pole o natężeniu wyrażonym wzorem (4.5). Podstawiając więc

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{8NI}{5\sqrt{5}R}$$

otrzymamy

$$\frac{e}{m} = \frac{125UR^2}{16\mu_0^2 N^2} \frac{y^2}{I^2(y^2 + l^2)^2}. \tag{25.32}$$

Współczynnik $\frac{125UR^2}{16\mu_0^2 N^2}$ stanowi stałą aparaturową. Wartość powyższej stałej lub niektórych wielkości wchodzących w skład powyższej stałej mogą być podane w szczegółowej instrukcji doświadczenia.

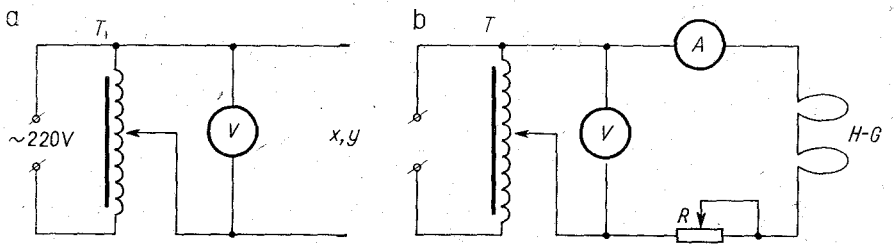
Aparatura

Aparatura składa się z lampy oscylograficznej z układem zasilającym oraz cewek Helmholtza–Gaugaina. Lampa oscylograficzna znajduje się na zewnątrz układu zasilającego pomiędzy cewkami Helmholtza o dużym promieniu R. Cewki powinny wytwa-

rzać jednorodne pole w obszarze od układu anod do ekranu włącznie. Układ zasilający daje możliwość regulacji jasności i ostrości plamki, a ponadto pozwala mierzyć napięcie przyspieszające U.

Pomiary

Układ do odchylania elektrostatycznego łączymy według schematu 25.18. Włączamy zasilacz lampy oscylograficznej i czekamy do chwili nagrzania się lamp elektronicznych. Po pojawieniu się plamki na ekranie lampy oscylograficznej, za pomocą pokrętła potencjometru „jasność" nastawiamy możliwie małą, lecz wystarczającą do obserwacji jasności. (Zbyt duża jasność niszczy ekran lampy.) Za pomocą pokrętła „ostrość" staramy się uzyskać największą ostrość. Do płytek y przykładamy napięcie odchylające stosując układ 24.18a. Po włączeniu autotransformatora do sieci i przyłożeniu niewiel-



25.18. Układ do badania charakterystyki napięciowej lampy oscylograficznej (a), układ zasilający cewki Helmholtza (b).

kiego napięcia na ekranie otrzymujemy linię równoległą do osi y i symetryczną względem środka ekranu. Długość tej linii mierzymy dla około 10-ciu różnych napięć U_y. Długość linii w pomiarach tych powinna zmieniać się od 10 mm do mierzalnego jeszcze maksimum. Następnie napięcie odchylające przykładamy do płytek x i wykonujemy taką samą serię pomiarów.

Obwód cewek Helmholtza–Gaugaina łączymy według schematu 25.18b. Po włączeniu prądu I o niewielkim natężeniu, na ekranie obserwujemy kreskę równoległą do osi y. Mierzymy długość y tej kreski dla 10 do 15-tu różnych wartości natężenia I prądu w cewkach. Mierzymy długość drogi elektronów (l) od środka uzwojeń cewki do ekranu (OE na rys. 25.17), promień cewek Helmholtza–Gaugaina oraz liczbę zwojów cewek i stałą aparaturową.

W doświadczeniu, do odchylania elektronów, zamiast prądu przemiennego stosować możemy prąd stały. Wtedy w układzie 25.18a autotransformator zastępujemy potencjometrem, a do zasilania cewek Helmholtza–Gaugaina stosujemy układ 4.15. Zamiast długości linii na ekranie mierzymy wtedy wychylenie plamki z położenia zerowego.

Obliczenia

Korzystając z pomiarów wykonanych dla odchylania elektrostatycznego obliczamy nachylenia $\overline{a_x}$ i $\overline{a_y}$ oraz odchylenia standardowe $S_{\overline{ax}}$ i $S_{\overline{ay}}$ metodą najmniejszych kwadratów i wykreślamy zależność $x(U_x)$ oraz $y(U_y)$. Zgodnie z wzorem (25.29) nachylenia

uzyskanych prostych są równe $a_x = 2\sqrt{2}\,C_{E_x}$ oraz $a_y = 2\sqrt{2}\,C_{E_y}$. Obliczamy czułości C_{E_x} i C_{E_y} oraz ich odchylenia standardowe. W oparciu o pomiary odchylenia w polu magnetycznym obliczamy nachylenie $\overline{a_H}$ oraz $S_{\overline{a_H}}$ i wykreślamy zależność $y(I)$. Zgodnie z wzorem (25.30) nachylenie wyraża się wzorem $a_H = 2\sqrt{2}\,C_H$ i może posłużyć do obliczenia czułości C_H odchylania magnetycznego. (Musimy jednak pamiętać, że w praktyce do odchylenia magnetycznego nie stosuje się tak dużych cewek, lecz parę małych cewek przylegających bezpośrednio do lampy.)

Podstawiając wyrażenie (25.28a) do równania (25.32) oraz uwzględniając ewentualnie sposób zdefiniowania stałej aparaturowej otrzymamy wzór ostateczny na e/m. Korzystając z tego wzoru obliczamy wartości e/m dla wszystkich pomiarów odchylenia w polu magnetycznym. Obliczamy wartość średnią $\overline{e/m}$ oraz odchylenie standardowe tej wielkości traktowanej jako wielkość prosta. Dla jednego wybranego pomiaru e/m obliczamy również błąd maksymalny. Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej określa wartość całej serii pomiarów, a błąd maksymalny jednego z pomiarów — dokładność stosowanej aparatury. W przypadku pomiarów wykonanych za pomocą prądu stałego nachylenia prostych z wykonanych wykresów jest równe wprost czułości, a e/m obliczamy z wzoru (25.32) po uwzględnieniu stałych aparaturowych. Sprawdzamy zgodność uzyskanych wyników z danymi z tablic fizycznych.

25.6. WYZNACZANIE NABOJU WŁAŚCIWEGO METODĄ THOMSONA

Cel: wyznaczenie ładunku właściwego.

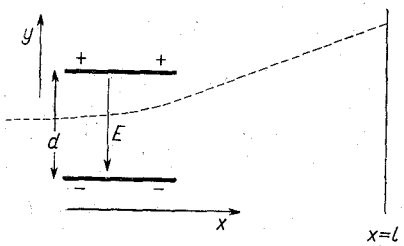
Przyrządy: lampa oscylograficzna (§ 25.5), mierniki elektryczne (§ 18.01–03), wytwarzanie pól magnetycznych (§ 4.9), oporniki i potencjometry (§ 4.2) lub autotransformator (§ 4.5), źródła prądu (§ 4.1).

Zagadnienia: emisja elektronów (§ 25.01; S3, § 59; J, § 22.4–6), lampy elektroniczne (§ 25.02–03; S3, § 107–109; J, § 22.5 i 6).

Wprowadzenie

Na elektron poruszający się z prędkością v w kierunku x (rys. 25.19) w polu elektrycznym działa siła (25.8) $F = eE$ skierowana w kierunku osi y. Podstawiając $F = ma = m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ otrzymamy równanie ruchu

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m}E. \tag{25.33}$$



25.19. Odchylenie elektronu w polu elektrycznym.

Ze względu na jednostajny ruch elektronu w kierunku osi x, jego ruch w kierunku osi y zależy od współrzędnej x, a współrzędną y uważać możemy za złożoną funkcję czasu. Wtedy $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}v$ oraz $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}v^2$ i ostatnie równanie przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{e}{mv^2}E.$$

Całkując to równanie w granicach od 0 do x otrzymamy

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{e}{mv^2}\int_0^x E\,dx.$$

Drugie całkowanie wykonujemy dla całej drogi od początku pola ($x = 0$) do ekranu $x = l$, otrzymując

$$y = \frac{e}{mv^2}\int_0^l dx\int_0^x E\,dx.$$

Stosujemy całkowanie przez części, podstawiając

$$u = \int_0^x E\,dx,\ dv = dx,\ \text{skąd}\ du = E\,dx,\ v = x\ \text{oraz}$$

$$y = \frac{e}{mv^2}\left[l\int_0^l E\,dx - \int_0^l xE\,dx\right] = \frac{e}{mv^2}\int_0^l (l-x)E\,dx.$$

Zakładając, że istnieje jednorodne pole elektryczne E na przestrzeni od $x = 0$ do $x = a$ a na odcinku $x = a$ do $x = l$ pole elektryczne $E = 0$, otrzymamy

$$\int_0^l (l-x)E\,dx = a\left(l-\frac{a}{2}\right)E = K_E,$$

gdzie

$$E = U/d,$$

otrzymamy

$$y_E = \frac{e}{mv^2}\cdot\frac{U}{d}\cdot a\left(l-\frac{a}{2}\right) = K_E\cdot U\frac{e}{mv^2}. \tag{25.34}$$

Wielkość K_E zależy od konstrukcji aparatury i można ją uważać za stałą aparaturową.

Siła działająca na elektron w polu magnetycznym przy założeniu, że ($v \perp B$), wyraża się wzorem

$$F = evB.$$

Stąd podobne rozumowanie jak w przypadku pola elektrycznego prowadzi do następującego równania ruchu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{e}{m}vB. \tag{25.35}$$

Porównując powyższe wyrażenie z równaniem (25.33) dla pola elektrostatycznego stwierdzimy, że wyrażenie e/m z równania (25.33), w równaniu (25.35) odpowiada

$(e/m)v$. Stąd też, wykonując takie same działania matematyczne jak w przypadku pola elektrycznego, przy założeniach: $B = \text{const}$ i jest równoległe do osi z na odcinku od $x = 0$ do $x = b$ oraz $B = 0$ na odcinku od $x = b$ do $x = l$, F równoległe do y, otrzymamy następujący wynik:

$$y_B = \frac{e}{mv} I K_H, \tag{25.36}$$

gdzie K_H jest stałą aparaturową i wyraża się wzorem:

$$K_H = b\left(l - \frac{b}{2}\right)B.$$

Podstawiając $B = \mu_0 H$ oraz zakładając, że pole H wytworzone za pomocą cewek Helmholtza–Gaugaina i wyraża się wzorem (4.5), otrzymamy

$$K_H = b\left(l - \frac{b}{2}\right)\frac{16NI\mu_0}{5\sqrt{5}R}. \tag{25.37}$$

W doświadczeniu wyznaczyć można wielkości $\frac{e}{m}$ oraz v. W tym celu musimy znać wychylenie y_E w polu elektrycznym i y_B w polu magnetycznym. Z dwóch równań (25.34) i (25.36) obliczyć możemy e/m jak również v. Poważne trudności polegają na poprawnym wyznaczeniu stałych K_E i K_B. Nie można praktycznie wytworzyć tak prostej sytuacji jaką założyliśmy wyprowadzając wzory, gdy pole było jednorodne w pewnym obszarze, a poza tym obszarem nie istniało. Na brzegach kondensatora istnieje zakrzywienie linii sił. Podobnie pole magnetyczne nie jest jednorodne w obszarze cewek, a poza tym obszarem istnieje pole zamykające podobne do pola dipola.

Aparatura

Podstawową częścią zestawu jest lampa oscylograficzna z układem zasilającym. Lampa oscylograficzna nie może być wbudowana w skrzynkę, a zasilacz powinien mieć potencjometry służące do regulacji ostrości i jasności wiązki. Na zewnątrz lampy znajduje się para cewek Helmholtza–Gaugaina. W idealnym przypadku lampa powinna być wykonana z przezroczystego szkła i powinna istnieć możliwość pomiaru wszystkich wielkości wchodzących do wzorów (25.34) i (25.36). Wykonanie tych pomiarów nie jest jednak możliwe w istniejących lampach, gdyż poza trudnościami związanymi z określeniem granic pola istnieją i takie jak nierównoległość płytek odchylających itp. Stąd też w praktyce pewną liczbę wielkości włącza się do stałej aparaturowej. Nie musi to być stała K_E lub K_H, może ona zawierać mniejszą liczbę trudnych do zmierzenia wielkości.

Pomiary

Układ zasilający płytki kondensatora odchylającego wiązkę elektronów łączymy według schematu 25.18a, a układ cewek Helmholtza według schematu 25.18b. Układ możemy zasilać prądem przemiennym lub stałym (w ostatnim przypadku zamiast autotransformatora stosujemy potencjometr), stosujemy napięcie 25–50 V. Włączamy zasilacz lampy oscylograficznej i czekamy do chwili nagrzania się lamp elektronicznych. Po pojawieniu się plamki na ekranie lampy, za pomocą pokrętła potencjometru „jasność"

nastawiamy możliwie małą, lecz wystarczającą do obserwacji plamkę (zbyt duża jasność niszczy ekran lampy). Za pomocą potencjometru „ostrość" staramy się uzyskać największą ostrość. Celem wykonania pomiarów w polu elektrycznym mierzymy wychylenie y_E plamki dla ok. 10-ciu różnych wartości przyłożonego do kondensatora napięcia U. Napięcia dobieramy w ten sposób, by wychylenie zmieniało się w granicach od 5 mm do maksymalnej wartości mierzalnej jeszcze na ekranie. Wyniki ujmujemy w tabelę. W drugiej części doświadczenia włączamy obwód 25.18a i przepuszczamy prąd przez cewki Helmholtza. Wykonujemy ok. 10-ciu pomiarów wychylenia y_H dla wychyleń od 5-ciu mm do mierzalnego jeszcze maksimum. Mierzymy wszystkie wskazane w instrukcji wielkości stałe oraz zapisujemy stałą aparatury i błędy odczytu.

Obliczenia

Obliczamy metodą najmniejszych kwadratów nachylenie wykresu krzywej zależności y_E w funkcji od U oraz odchylenie standardowe nachylenia ($\overline{a_E}$ i $S_{\overline{a_E}}$). Zgodnie z równaniem (25.39) nachylenie a_E spełnia związek

$$a_E = K_E \frac{e}{mv^2}.$$

W podobny sposób opracowujemy zależność y_B od I otrzymując wartość $\overline{a_B}$ oraz $S_{\overline{a_B}}$. W oparciu o równanie (25.41) dla nachylenia $\overline{a_B}$ napisać możemy związek*.

$$a_B = K_B \frac{e}{mv}.$$

Korzystając z ostatnich dwóch równań obliczamy v i e/m oraz odchylenia standardowe tych wielkości.

26. DRGANIA ELEKTRYCZNE

26.01. DRGANIA ELEKTRYCZNE

(uprzednio zapoznać się z § 10.01–02 i § 10.5)

Drgania elektryczne występują w obwodach zawierających indukcję własną i pojemność (opór omowy). Występują one zarówno wtedy, gdy cewka i kondensator włączone są równolegle (układ równoległy), jak i przy połączeniu szeregowym (układ szeregowy). Rozważania rozpoczynamy od układu równoległego (rys. 26.1a). Założymy, że w chwili $t = 0$ w obwodzie płynie prąd o natężeniu I oraz że $I_g = 0$. Wtedy na oporze omowym R (jest to łączny opór opornika, cewki i przewodów) wystąpi spadek napięcia $U_R = RI$. Spadek napięcia wystąpi również na kondensatorze i zgodnie z definicją pojemności wyrazi się wzorem $U_C = \frac{1}{C}Q$, gdzie $Q = \int I\,dt$. Natomiast na cewce wystąpi siła przeciwelektromotoryczna $E_L = -L\frac{dI}{dt}$. Zatem stosując II prawo Kirchhoffa (17.4) otrzy-

* W przypadku stosowania prądu przemiennego napięcie odchylające obliczamy z wzoru (25.28), a natężenie odchylające z wzoru (25.28a).

mamy

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int I\,dt=0. \tag{26.1}$$

Po zróżniczkowaniu i podzieleniu przez L otrzymamy

$$\frac{d^2I}{dt^2}+2\beta\frac{dI}{dt}+\omega_0^2 I=0, \tag{26.2}$$

gdzie

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC} \tag{26.3}$$

oraz

$$2\beta=\frac{R}{L}. \tag{26.4}$$

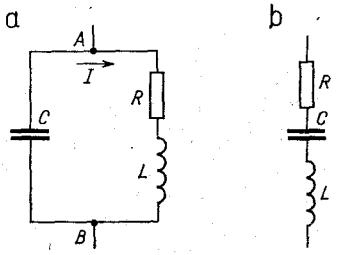
Zauważmy, że równanie (26.2) jest identyczne z równaniem (10.12), jest więc równaniem ruchu harmonicznego tłumionego. Przyłączenie do powyższego obwodu zewnętrznego napięcia $U=U_0\sin\omega t$ jest równoważne działaniu siły wymuszającej (w przypadku drgań mechanicznych). Napięcie U musimy więc dodać po prawej stronie równania (26.1) otrzymując po zróżniczkowaniu

$$\frac{d^2I}{dt^2}+2\beta\frac{dI}{dt}+\omega_0^2 I=P\cos\omega t, \tag{26.5}$$

gdzie

$$P=\frac{U_0\omega}{L}. \tag{26.6}$$

Zauważmy, że równanie (26.5) jest identyczne z równaniem (10.60) i opisuje drgania wymuszone. W przypadku układu szeregowego zastosowanie II prawa Kirchhoffa prowadzi wprost do równania (26.5). Stąd też wyniki rozważań dla obwodu równoległego stosują się wprost do obwodu szeregowego.



26.1. Obwód, w którym występują drgania elektryczne: równoległy (a), szeregowy (b).

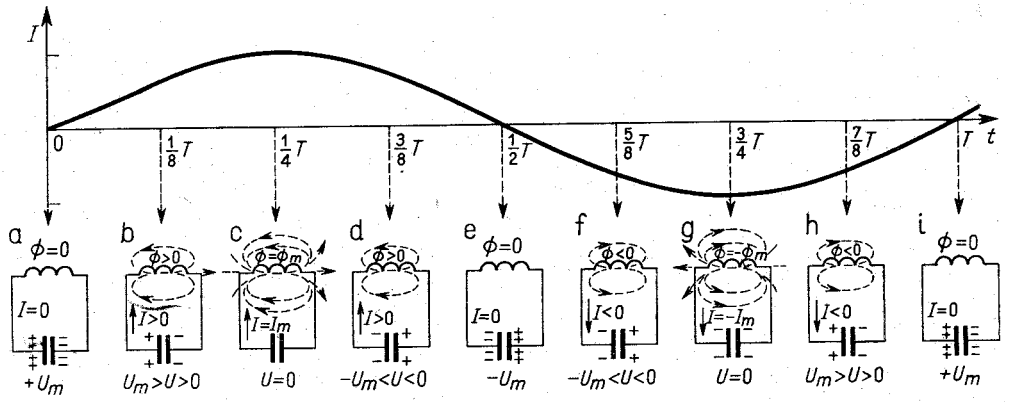
Równanie (26.2) jest równaniem ruchu tłumionego i stosują się do niego wszystkie rozważania dla ruchu tłumionego z § 10.02. Inna jest tylko interpretacja współczynników ω_0 i β. Dla drgań zachodzących w obwodzie wprowadzić możemy również czas relaksacji τ:

$$\tau=\frac{1}{2\beta}=\frac{L}{R}. \tag{26.7}$$

W czasie 2τ amplituda drgań maleje do 1/e wartości początkowej. Zgodnie z równaniem (26.3) zachodzi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{lub} \quad T = 2\pi\sqrt{LC}\,. \tag{26.8}$$

Wzór powyższy nazywamy wzorem Thomsona. Wiąże on częstość drgań własnych z parametrami elektrycznymi obwodu. Zachodzące w obwodzie drgania polegają na kolejnym ładowaniu i rozładowaniu kondensatora przez cewkę (rys. 26.2). Jeżeli w chwili $t = 0$ kondensator jest naładowany napięciem U_m, to w obwodzie zaczyna płynąć prąd.



26.2. Kolejne fazy drgań elektrycznych w obwodzie LC.

Prąd ten nie wzrasta od razu do maksymalnej wartości, gdyż przeciwdziała mu siła przeciwelektromotoryczna cewki. W cewce wytwarza się wtedy pole magnetyczne H oraz strumień indukcji magnetycznej $\Phi = \mu HS$. Na rysunku 27.2b pokazano sytuację po $\frac{1}{8}$ okresu drgań. Po $\frac{1}{4}$ okresu prąd uzyskuje najwyższą swoją wartość I_m; również strumień Φ osiąga najwyższą wartość Φ_m, lecz kondensator rozładował się, napięcie na jego okładkach jest równe $U = 0$. W następnej chwili $\left(\text{po } \frac{3}{8}T\right)$ prąd płynie nadal w tym samym kierunku, ponieważ zaczyna zanikać strumień magnetyczny $\left(\text{indukując siłę elektromotoryczną } E = -\frac{d\Phi}{dt}\right)$. Prąd ten ładuje kondensator przeciwnie względem naładowania pierwotnego. Natężenie tego prądu powoli maleje i po $\frac{1}{2}T$ wytwarza się sytuacja podobna do początkowej, tzn. $I = 0$ i $\Phi = 0$, a napięcie $U = -U_m$. Różnica polega na tym, że kondensator naładowany jest przeciwnie. Dlatego też prąd oraz strumień indukcji magnetycznej, które powstaną na skutek ponownego rozładowania kondensatora oznaczymy znakiem „$-$”. W drugiej połowie okresu, poza zmianą kierunku, zjawiska przebiegają w taki sam sposób jak w pierwszej części. Po czasie T układ wraca do sytuacji wyjściowej, a następnie cykl powtarza się. W przypadku drgań wymuszonych zastosować możemy również wszystkie rozważania z § 10.5. Rozwiązanie równania ruchu przyjmuje postać

$$I = I_0 \cos(\omega t + \delta), \tag{26.9}$$

gdzie

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \quad \text{oraz} \quad I_0 = P[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]^{-1/2} \tag{26.10}$$

(por. równania: 10.61, 10.64 i 10.65), a częstość kołowa drgań własnych wyrazi się wzorem Thomsona (26.8).

Zmieniając jeden z parametrów układu L lub C uzyskać możemy przypadek rezonansu, w którym $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$. Wtedy amplituda przyjmie wartość

$$I_r = P\left[2\beta\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}\right]^{-1}. \tag{26.11}$$

Przy bardzo małym tłumieniu $\beta \ll \omega_0$ zachodzi $\omega \simeq \omega_0$ i otrzymujemy

$$I_0 = \frac{U_0}{R}. \tag{26.12}$$

Oznacza to, że obwód zachowuje się jak gdyby nie zawierał kondensatora i cewki. Ten sam warunek uzyskamy z wzoru (24.20) na moduł oporu zespolonego zakładając warunek Thomsona (26.8). Ponieważ w obwodzie istnieją opory pozorne $X_L = \omega L$ oraz $X_C = \frac{1}{\omega C}$, napięcia na okładkach cewki i kondensatora przyjmują wartości

$$U_L = I_0\omega L \quad \text{oraz} \quad U_C = \frac{I_0}{\omega C}, \tag{26.13}$$

które zgodnie z wzorem Thomsona muszą być równe, $U_L = U_C$.

W przypadku drgań elektrycznych często określa się również *dobroć* obwodu (10.31), która zgodnie z równaniem (10.32), w naszym przypadku, po podstawieniu na $\tau = \frac{1}{2\beta}$ wartości z równania (26.4) przyjmuje postać

$$Q = \frac{\omega L}{R} \quad \text{lub} \quad Q = \frac{1}{\omega CR} \tag{26.14}$$

(ostatni wzór otrzymamy podstawiając L z równania 26.8). W praktyce najczęściej dobroć określamy z krzywej rezonansu, czyli wykresu przedstawiającego zależność prądu I_0 lub napięcia U_0, od częstości napięcia wymuszającego lub od pojemności C względnie indukcji własnej L. Zgodnie z wzorem (10.72) zachodzi

$$Q = \omega/\Delta\omega. \tag{26.15}$$

Doświadczalnie łatwiej zmierzyć pojemność niż częstość i krzywą rezonansu najczęściej przedstawiamy w układzie $I(C)$ lub $\frac{I}{I_r}\left(\frac{C}{C_r}\right)$, gdzie wskaźnik r oznacza wartości rezonansu. Zgodnie z prawem Ohma (§ 24.03) natężenie prądu w obwodzie LC wyraża się wzorem $I = U_0\left[R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{-1/2}$, a w przypadku rezonansu (spełniony warunek Thomsona) $I_r = U_0R^{-1}$. Wprowadzimy oznaczenie $y = (I/I_r)^2$, które wyrazi się wzorem:

$$y = \left[1+R^{-2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{-1}.$$

Mnożąc i dzieląc drugi składnik sumy w nawiasie kwadratowym przez L/C_r, gdzie C_r oznacza wartość rezonansową pojemności otrzymamy

$$y = \left[1 + \frac{L}{R^2 C_r}\left(\omega\sqrt{C_r L} - \frac{\sqrt{C_r}}{\omega C\sqrt{L}}\right)^2\right]^{-1}.$$

Podstawiając w ostatnim wzorze $\omega = (C_r L)^{-1/2}$ (porównaj wzór 26.8) i $Q_r = (1/R)\sqrt{L/C_r}$ (ostatnie wyrażenie otrzymamy podstawiając $\omega = (C_r L)^{-1/2}$ do równania 26.14) otrzymamy

$$y = [1 + Q_r^2(x-1)^2]^{-1},$$

gdzie $x = C_r/C$. Wprowadzając oznaczenie $\Delta x = x - 1$ określające wartość liczbową odciętej punktów wykresu $y(x)$, w których odcięta y zmalała do połowy wartości rezonansowej ($y = 1/2$), otrzymamy $(1/2) = [1 + Q_r^2(\Delta x)^2]^{-1}$, skąd

$$Q_r = \frac{1}{\Delta x}. \tag{26.15a}$$

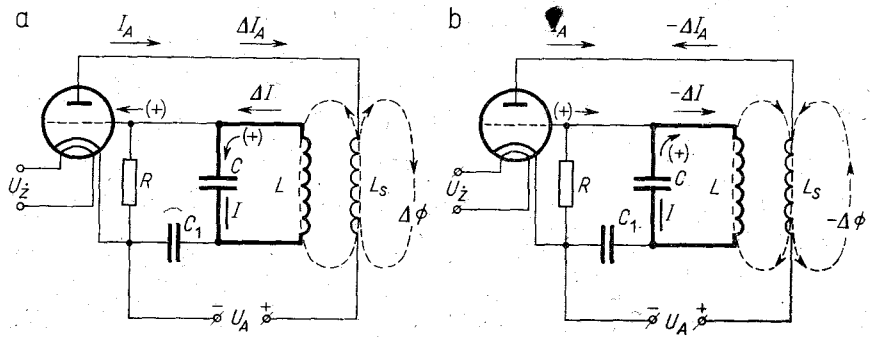
Podstawiając na powrót $\Delta x = x - 1$ oraz $x = C_r/C$ otrzymamy $Q_r = C(C_r - C)^{-1}$. Wprowadzając dla krzywej rezonansu przedstawionej w układzie $y(C)$ oznaczenie połówkowej szerokości $\Delta C = C_r - C$ oraz przyjmując w liczniku wyrażenia na Q_r, że $C \simeq C_r$ (jest to uzasadnione w przypadku, gdy $\Delta C \ll C_r$) wyrazimy dobroć wzorem

$$Q_r = \frac{C_r}{\Delta C}. \tag{26.15b}$$

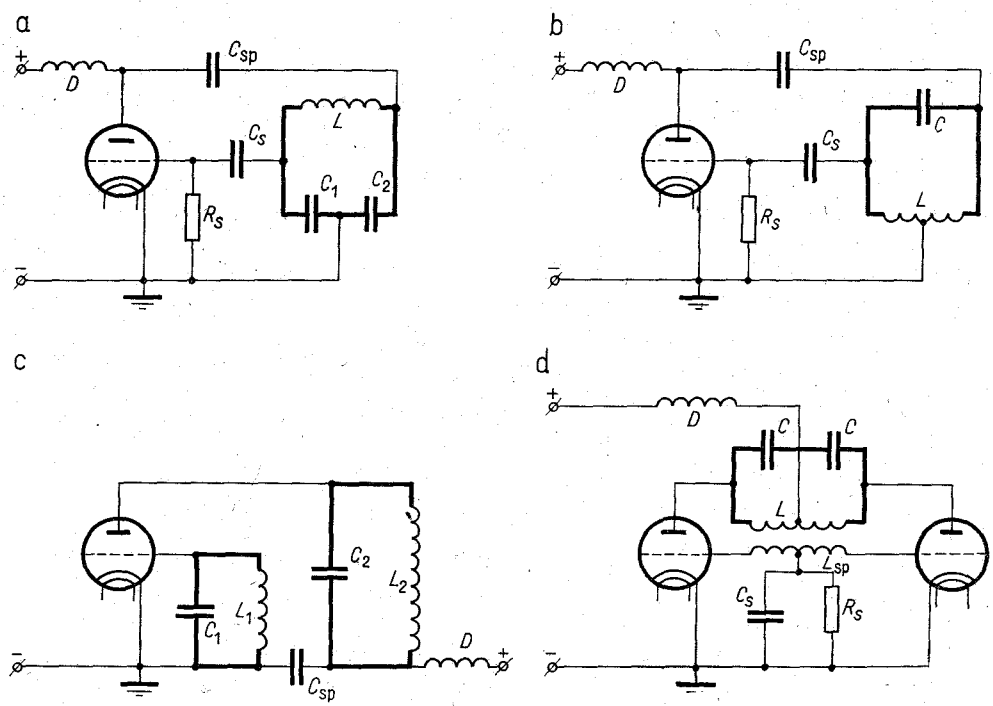
26.02. WYTWARZANIE DRGAŃ NIEGASNĄCYCH

Z praktycznego punktu widzenia interesujący jest tylko przypadek drgań o amplitudzie nie zmieniającej się w czasie. Drgania takie powstawać mogą wyłącznie przy działaniu napięcia wymuszającego. Nie istnieją bowiem układy pozbawione strat energii, w których współczynnik tłumienia $\beta = 0$. Źródłem siły wymuszającej może być przyłożone do układu napięcie zmienne. Z przypadkiem takim mamy do czynienia w obwodach prądu przemiennego. Istnieje również możliwość wzbudzania drgań elektrycznych za pomocą układów z lampami elektronicznymi, czyli tzw. generatorów. Istnieje wiele typów generatorów jak Meissnera (rys. 26.3), Hartleya, Colpittsa. Właściwy obwód drgający składa się z kondensatora C i cewki L. Pozostałe części układu dostarczają energii kompensującej ubytek w układzie LC. W chwili, gdy górna płytka kondensatora C ładuje się dodatnio, dodatnio ładuje się również siatka G, a prąd płynący przez lampę wzrasta o ΔI_A. Zmiana natężenia anodowego powoduje wzrost strumienia magnetycznego w cewce L_s o $\Delta\Phi$. Cewki L i L_s rozmieszczone są w ten sposób, że strumień indukcji cewki L_s przechodzi równocześnie przez cewkę L. Stąd też zmiana natężenia prądu anodowego powoduje zmianę strumienia indukcji $\Delta\Phi$ w cewce L, a ten zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej i regułą Lenza indukuje prąd ΔI w cewce L zgodny z prądem I występującym na skutek drgań własnych w obwodzie. Kiedy w cyklu drgań własnych ładunek z górnej okładki kondensatora zaczyna odpływać, to odpływa on również i z siatki. Wtedy zmniejsza się dodatni potencjał siatki, na skutek czego zmniejsza się prąd anodowy o $-\Delta I_a$. Zmniejszenie prądu anodowego powoduje zmniej-

szenie strumienia indukcji magnetycznej o $-\Delta\Phi$, który zmniejsza się równocześnie w cewce L indukując prąd $-\Delta I$, w przeciwnym kierunku względem prądu indukowanego, niż wtedy gdy siatka ładowała się dodatnio. Zatem prąd $-\Delta I$ dodaje się do prądu $-I$ drgań własnych obwodu LC. Mechanizm takich samych dalszych zmian w obwodzie przebiega cyklicznie i nie wymaga dodatkowych objaśnień. Ten dodatkowy prąd kompensuje straty występujące w obwodzie na skutek oporu omowego jak również promieniowania elektromagnetycznego. W omawianym układzie Meissnera opornik R odprowadza nadmiar ładunków ujemnych, które gromadzą się na siatce na skutek obecności chmury elektronowej wokół katody. Kondensator C_1 zapobiega rozładowaniu kondensatora C przez opornik R.

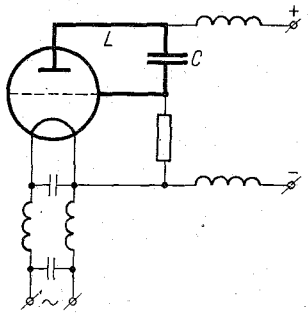


26.3. Działanie generatora typu Meissnera.



26.4. Różne typy generatorów drgań nietłumionych: Colpittsa (a), Hartleya (b), układ o sprzężeniu elektronicznym (c), układ przeciwsobny (d).

Zasada działania układu polega na tym, że drgania występujące w obwodzie LC wpływają na prąd anodowy lampy, a prąd ten wykorzystuje się do wzmacniania drgań. Zjawisko wzajemnego oddziaływania na siebie dwóch układów (lampy i obwodu rezonansowego) nazywamy *sprzężeniem zwrotnym*. Omawiane tus przężenie zwrotne, które powodowało wzmocnienie zjawiska w omawianym przypadku, nazywamy dodatnim sprzężeniem zwrotnym. Zwróćmy uwagę na fakt, że odwrócenie jednej z cewek o 180° spowodowałoby zmianę zwrotu prądu ΔI i zmniejszenie prądu I, a tym samym osłabienie drgań. Tego typu sprzężenie nazywamy ujemnym sprzężeniem zwrotnym. W przypadku generatora ujemne sprzężenie zwrotne uniemożliwia drgania w obwodzie LC, gdyż zwiększa dodatkowo tłumienie. Układ Meissnera nie jest jedynym możliwym układem, w którym realizuje się dodatnie sprzężenie zwrotne. Na rys. 26.4 przedstawiono kilka innych możliwości. Dławiki D zaznaczone na rysunkach nie pozwalają na



26.5. Generator wysokiej częstości (ok. 0,5 MHz).

przepływ prądu wysokich częstości generowanych w obwodzie, do źródła prądu lub do katody. Częstość drgań generatorów zmieniać można w szerokich granicach, jednak nie można osiągać dowolnie wysokich częstości. Zgodnie z wzorem Thomsona (26.8), dla zwiększenia częstości musimy zmniejszać indukcję własną L i pojemność C. Indukcję zmniejszać możemy przez odejmowanie liczby zwojów cewki do możliwych granic, a więc do jednego zwoju. Pojemność ogranicza pojemność własna „kondensatora" utworzonego przez anodę i siatkę lampy. Na rys. 26.5 przedstawiono układ dający drgania o częstości rzędu 0,5 MHz, co odpowiada fali rzędu jednego metra. Jest to praktycznie kres możliwości klasycznych układów lampowych.

26.1. REZONANS W OBWODZIE PRĄDU PRZEMIENNEGO

Cel: wyznaczenie przebiegu krzywych rezonansu obwodu szeregowego i równoległego, dobroci obwodu oraz współczynnika indukcji własnej uzwojeń cewki.

Przyrządy: kondensatory (§ 4.4), transformatory (§ 4.5), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

Zagadnienia: prąd przemienny (§ 24.01–03), drgania elektryczne (26.01–02; S3, § 110–112; P2, § 4.41–50; H2, § 38.1–5).

Wprowadzenie i aparatura

Do obwodów zawierających indukcję własną i pojemność stosować możemy zarówno rozważania dotyczące zjawisk rezonansu, jak i prądu przemiennego. Dla obwodu szeregowego moduł oporu zespolonego wyraża się wzorem (24.20) i jest on równocześnie

równy stosunkowi napięcia skutecznego do natężenia skutecznego. W przypadku połączenia równoległego opory zespolone poszczególnych gałęzi wyrażają się następująco:

$$\dot{Z}_L = R_L + i \cdot X_L, \quad \dot{Z}_C = -i \cdot X_C.$$

Ponieważ mamy tu do czynienia z równoległym połączeniem oporów, opór całkowity $\dot{Z}$ wyrazi się wzorem:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_L \dot{Z}_C (\dot{Z}_L + \dot{Z}_C)^{-1} \quad \text{lub} \quad \dot{Z} = \frac{-iX_c(R_L + iX_L)}{R_L + i(X_L - X_C)}.$$

Przyjmując z wzoru Thomsona (26.8) $X_L = X_C$, po obliczeniu otrzymamy

$$|Z| = \frac{X_C}{R_L}\sqrt{X_L^2 + R_L^2} \quad \text{lub} \quad |Z| = \frac{1}{\omega C R_L}\sqrt{\omega^2 L^2 + R_L^2}. \tag{26.16}$$

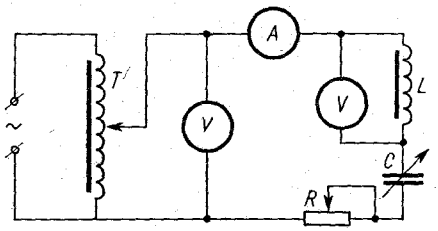
Gdy $R_L \ll \omega L$, możemy napisać

$$|Z| = L/CR_L. \tag{26.16a}$$

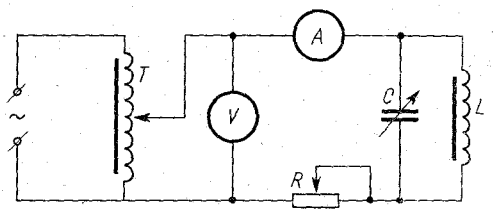
Z wzoru powyższego wynika, że dla połączenia równoległego w warunkach rezonansu moduł oporu zespolonego rośnie do nieskończoności, gdy opór omowy w obwodzie rezonansowym spada do zera ($R_L \searrow 0$, $|Z| \nearrow \infty$). Tak więc natężenie prądu czerpanego ze źródła przez układ zawierający obwód rezonansowy posiada minimum wtedy, gdy spełniony jest dokładnie warunek Thomsona.

Pomiary

Mierzymy za pomocą mostka MW4 opory cewek przeznaczonych do pomiaru oraz opornika, a następnie łączymy układ szeregowy (rys. 26.6). Na wstępie dobieramy niewielkie napięcie zasilające za pomocą autotransformatora T i dobieramy pojemność w ten sposób, by uzyskać rezonans objawiający się maksymalnym napięciem U_L na cewce oraz maksymalnym natężeniem. Po dobraniu warunków rezonansu podwyższamy napięcie zasilające do wartości, przy której wskazówka woltomierza mierzącego U_L



26.6. Układ szeregowy do badania rezonansu w obwodzie prądu przemiennego.



26.7. Układ równoległy do badania rezonansu w obwodzie prądu przemiennego.

wychyli się na ok. 3/4 skali. Notujemy wartość pojemności rezonansowej C_r, a następnie przy stałym napięciu U zasilającym wykonujemy systematyczne pomiary napięcia U_L i natężenia I w zależności od pojemności C dla pojemności zawartych w granicach od $C_r - \delta C$ do $C_r + \delta C$ ($\delta C \simeq 10\ \mu F$). Punkty pomiarowe zagęszczamy w okolicy maksimum krzywej. Pomiary krzywej rezonansu powtarzamy przy innym napięciu zasilającym i dla innych cewek lub dławików.

Celem zbadania rezonansu natężenia łączymy układ według schematu 26.7. Za pomocą autotransformatora nastawiamy napięcie ok. 100 V i dobieramy pojemność C_r w ten sposób, by uzyskać rezonans (minimum prądu). Zmieniamy wartość pojemności o ok. 10 μF i dobieramy taką wartość napięcia zasilającego i zakres amperomierza, by jego wychylenie wynosiło ok. 3/4 skali. Wykonujemy pomiary przynajmniej dla 10-ciu różnych pojemności zawartych w przedziale od $C_r - 10\ \mu F$ do $C_r + 10\ F$. W okolicy rezonansu zagęszczamy punkty pomiarowe. Pomiary wykonujemy dla wszystkich dławików i cewek wskazanych w instrukcji.

Obliczenia

Wyniki pomiaru krzywych rezonansu opracowujemy następująco: dla każdego punktu pomiarowego obliczamy odpowiednio stosunek prądu do wartości rezonansowej $y_I = I/I_r$ lub napięcia do jego wartości rezonansowej $y_U = U/U_r$ oraz $x = C_r/C$. Wykreślamy na jednym arkuszu zależności y_I od x oraz y_U od x. Z krzywych tych określamy współczynnik dobroci $Q = 1/\Delta x$, gdzie Δx oznacza różnicę odciętych tych punktów krzywej rezonansu, dla których y_I lub y_U spada do połowy wartości rezonansowej, a więc do 0,5.

Z wzoru (26.14) obliczamy współczynnik indukcji własnej L oraz opór omowy R'_L (z drugiego równania). Obliczamy błędy wyznaczonych wielkości. Sprawdzamy zgodność wyniku R'_L z wartością R_L otrzymaną z pomiaru bezpośredniego wykonanego mostkiem. Podobne obliczenia wykonujemy dla wszystkich wykonanych pomiarów. Obliczenia L i R_L możemy również oprzeć na pomiarze modułu oporu zespolonego $|Z_0|$, który jest równy stosunkowi napięcia i natężenia skutecznego i wyraża się wzorem (24.20) dla obwodu szeregowego lub (26.16a) dla równoległego. Ponieważ w obydwu przypadkach szeregowo włączony jest jeszcze opornik R, wzory te przyjmują postać

$$|Z_s| = R + \sqrt{R_L^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\ , \quad |Z_r| = R + \frac{L}{CR_L}.$$

26.2. OBWÓD REZONANSOWY WYSOKIEJ CZĘSTOŚCI

Cel: wyznaczenie krzywej rezonansu i dobroci obwodu oraz współczynnika indukcji własnej i pojemności nieznanego kondensatora.

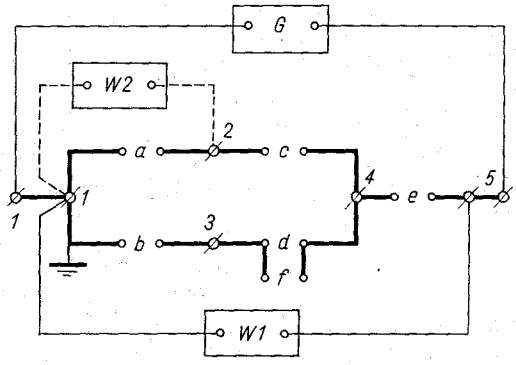
Przyrządy: generator wysokiej częstości i woltomierz lampowy (§ 4.11) lub oscylograf katodowy (§ 25.5).

Zagadnienia: prąd przemienny (§ 24.01–03), drgania elektryczne (26.01–02; S3, § 110–112; P2, § 4.41–50; H2, § 38.1–5).

Aparatura

W omawianym doświadczeniu badamy zjawisko rezonansu w obwodach złożonych z elementów radiotechnicznych. Źródłem prądu jest generator elektroniczny tzn. wzorcowy, dający możliwości zmiany częstości drgań w szerokich granicach (do ok. 0,5 MHz), regulacji i pomiaru napięcia wyjściowego. Napięcie mierzymy woltomierzem lampowym. Woltomierz lampowy ma różne zakresy pomiarowe. Zaopatrzony jest on w przełącznik zakresów oraz pokrętło „regulacja zera". Rozpoczynając pracę zwieramy wyjście wol-

tomierza i sprowadzamy wychylenie do zera. Wyjście woltomierza wyprowadzone jest przewodem koaksjalnym. Zewnętrzną część przewodu (oplot) łączymy z punktem, względem którego napięcie chcemy mierzyć. Obwody rezonansowe łączymy na płycie zaopatrzonej w zaciski i gniazdka połączone w sposób pokazany na rysunku 26.8.



26.8. Schemat układu do badania rezonansu w obwodach wysokiej częstości. Połączenia zaznaczone grubą linią są wykonane na płytce montażowej.

W miejscach $a, b, \ldots, f$ znajdują się gniazdka, do których można włączać elementy radiowe, same elementy radiowe zamocowane są na specjalnych podstawkach i mogą być włączane w dowolnym miejscu obwodu. Można również zwierać obwód w położeniach $a, b, \ldots, f$ włączając w tym miejscu podstawkę Z z zaciskami zwartymi przewodem. Same podstawki są oznaczone odpowiednio C, L lub R oraz cyfrą oznaczającą numer kolejny. Na opornikach i niektórych kondensatorach podana jest wartość ich oporu lub pojemności.

Pomiary

Celem uzyskania szeregowego układu rezonansowego łączymy kondensator o znanej pojemności w punkcie *a*, cewkę w punkcie *c* oraz opornik w punkcie *e*. Punkty *b* i *f* pozostają wolne. Do zacisków *1* i *5* podłączamy generator *G* i równolegle woltomierz *W1* służący do pomiaru napięcia na zaciskach generatora. Zaciski oznaczone symbolem ⏚ łączymy z zaciskiem *1*. Drugi woltomierz *W2* włączamy między zaciski *1* i *2*. Włączamy przyrządy elektroniczne do sieci prądu przemiennego; po ok. 5-ciu minutach, gdy ustalą się warunki pracy przyrządów elektronicznych, regulujemy wskazanie zerowe woltomierzy wyłączając na chwilę nieuziemiony przewód woltomierza z badanego obwodu i dołączając go również do zacisku *1*. Dobieramy częstość generatora do chwili uzyskania maksymalnego wskazania woltomierza pomiarowego. Jeżeli zachodzi potrzeba, zmieniamy zakresy pomiarowe lub napięcie generatora. Wykonujemy systematyczne pomiary zależności wskazań U_C woltomierza od częstości ν celem wyznaczenia przebiegu krzywej rezonansu zagęszczając punkty w okolicy maksimum krzywej (łącznie 10–15 pomiarów). Szczególnie precyzyjnie staramy się wyznaczyć częstość rezonansową ν_r. Utrzymujemy w czasie pomiarów stałą wartość napięcia generatora. Ewentualne wahania korygujemy. Zamieniamy miejscami kondensator z cewką, łącząc cewkę w po-

łożeniu *a*, a kondensator w położeniu *c*. Wykonujemy pomiary napięcia U_L dla tych samych częstości, dla których wykonaliśmy pomiary U_C. W dalszej części zamieniamy cewkę z opornikiem i powtarzamy te same pomiary dla *R*. Zmieniamy kondensator w układzie na inny o znanej pojemności i wyznaczamy częstość rezonansową ω_r postępując w podobny sposób jak poprzednio.

Stosując kondensator i cewkę tę samą, którą posługiwaliśmy się w pierwszej części doświadczenia, łączymy układ równoległy włączając kondensator w miejscu *c*, cewkę w miejscu *d*, w miejscach *a*, *b* i *e* równe oporniki o niedużej wartości oporu. Woltomierz *W2* włączamy między punktami *1* i *2* mierząc U_{RC} oraz znajdujemy częstość rezonansową postępując podobnie jak w części pierwszej. Wyznaczamy przebieg krzywej rezonansu. Podobne pomiary wykonujemy, gdy woltomierz lampowy włączony jest między punktami *1* i *3*, mierząc U_{RL} oraz między punktami *4* i *5* mierzymy U_{RR}. Pomiary wykonujemy wtedy przy tych samych częstościach jak w przypadku pierwszym. Równolegle do kondensatora *C* (gniazdo *f*) włączamy drugi kondensator (jeden z kondensatorów ma znaną pojemność) i wyznaczamy częstość rezonansową, gdy woltomierz włączony jest między zaciski *1* i *3*. Mierzymy omomierzem lub mostkiem *MW4* opory poszczególnych oporników oraz cewek.

Obliczenia

W przypadku układu szeregowego obliczamy stosunki: U_C/U_{Cr}, U_L/U_{Lr}, U_R/U_{Rr} i wykreślamy je w zależności od ω/ω_r. Wszystkie krzywe tej części doświadczenia powinny dać jeden wspólny przebieg. Kreślimy linię równoległą do osi odciętych (ω/ω_r) na wysokości $U/U_r = 1/2$ i określamy częstości ω' i ω'' odpowiadające punktom przecięcia tej linii z pobocznicami krzywej rezonansu. Obliczamy połówkową szerokość krzywej rezonansu $\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')$ i z równania (26.15) obliczamy dobroć *Q*. Znając dobroć, opór obwodu oraz częstość rezonansową z równań (26.14) obliczamy pojemność kondensatora i współczynnik indukcji własnej cewki. Sprawdzamy zgodność uzyskanego tą drogą wyniku dla pojemności z wartością podaną na kondensatorze. Z pomiarów wykonanych dla obwodu zawierającego nieznaną pojemność wyznaczamy dobroć. Pojemność kondensatora obliczamy wtedy z wzoru Thomsona przyjmując na *L* wartość uzyskaną w pierwszej części doświadczenia.

W oparciu o wyniki pomiarów części dotyczącej połączenia równoległego obliczamy stosunki: U_{RC}/U_{RCr}, U_{RL}/U_{RLr}, U_{RR}/U_{RRr} i wykreślamy zależności tych wielkości od ω/ω_r, a następnie wykonujemy obliczenia takie same jak w części pierwszej dla obwodu szeregowego. Znając wartości oporu oporników, z których zbieraliśmy napięcie na woltomierz lampowy obliczamy natężenie I_C lub I_L prądu płynącego przez różne gałęzie: $I_C = U_{RCr}/R_C$ oraz $I_L = U_{RLr}/R_L$, jak również natężenie prądu czerpanego z generatora $I_R = U_{RRr}/R_R$. Wykreślamy na wspólnym arkuszu zależność wszystkich natężeń od częstości i uzasadniamy prawidłowości przebiegu tych zależności. Z pomiaru wykonanego przy równolegle połączonych kondensatorach obliczamy ich łączną pojemność *C* z wzoru Thomsona (*L* znamy z poprzedniej części doświadczenia) i odejmując pojemność kondensatora znanego obliczamy pojemność kondensatora dołączonego równolegle.

26.3. REZONANS OBWODÓW DRGAŃ

Cel: wyznaczenia przebiegu rodziny krzywych rezonansowych obwodu rezonansowego przy różnych oporach R w obwodzie. Zbadanie zależności dobroci od oporu R, oraz poziomu drgań od wzajemnej odległości generatora i rezonatora.

Przyrządy: generator drgań nietłumionych (§ 26.02), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

Zagadnienia: drgania elektryczne (§ 26.01–02; S3, § 110–113; P2, § 4.41–50; H2, § 38.1–5). Fale elektromagnetyczne (§ 27.01–03), budowa i działanie lamp elektronicznych (§ 25.01–02).

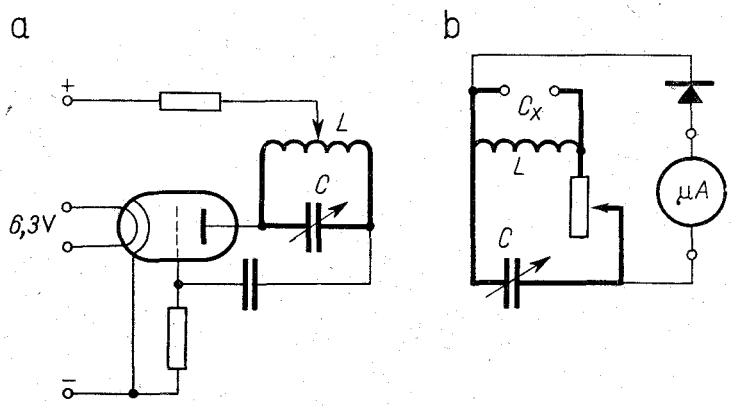
Wprowadzenie i aparatura

Dwa obwody drgań znajdują się w rezonansie, jeżeli ich częstości drgań własnych są równe: $\omega_1 = \omega_2$*. Korzystając z wzoru Thomsona (26.8) możemy napisać

$$L_1 C_1 = L_2 C_2. \tag{26.18}$$

Jeżeli układy te są ze sobą sprzężone, to drgania mogą przenosić się z jednego układu do drugiego. Sprzężenie polega na takim rozmieszczeniu elementów, by zmienne pole magnetyczne jednego obwodu mogło wzbudzać prąd również w drugim obwodzie. Mimo że pole magnetyczne jest bardzo słabe i szybko maleje z odległością, to wzbudzenie drgań w obwodzie rezonansowym następuje nawet przy znacznych odległościach, gdyż dodatkowym czynnikiem sprzęgającym są fale elektromagnetyczne wytwarzające się w obwodzie drgającym.

W doświadczeniu rolę jednego z obwodów rezonansowych spełnia generator drgań nietłumionych. Drugi obwód nazywany rezonatorem ma zmienną pojemność. Poziom drgań w rezonatorze mierzymy mikroamperomierzem połączonym szeregowo z diodą



26.9. Schemat układu do badania rezonansu obwodów drgań: generator (a), rezonator (b).

germanową prostującą sygnał. Rezonator zbudowany jest na oddzielnej podstawce i można zmieniać jego odległość od generatora. Opornik R jest opornikiem zmiennym o oporze rzędu kilku omów. Schemat elektryczny układu przedstawiono na rysunku 26.9. Drgania w układzie rezonansowym wzbudzane są nie tylko wtedy, gdy warunek Thomsona (26.8) spełniony jest dokładnie, lecz również wtedy, gdy częstości drgań własnych

* Zaniedbaliśmy wpływ tłumienia.

są zbliżone. Dzięki zastosowaniu w obwodzie rezonansowym kondensatora zmiennego, możemy zmieniać częstość drgań własnych tego obwodu. Badając wpływ pojemności C na poziom drgań w rezonatorze otrzymamy krzywą rezonansową.

Pomiary

Łączymy generator z zasilaczem (napięcie żarzenia oraz anodowe), a w obwód rezonatora włączamy mikroamperomierz. Zasilacz podłączamy do sieci prądu przemiennego i czekamy do chwili nagrzania się lamp. Opór w obwodzie rezonansowym nastawiamy na maksimum. Zmieniamy powoli pojemność w obwodzie generatora do chwili uzyskania maksymalnego wychylenia mikroamperomierza. Jeżeli wychylenia są za duże, odsuwamy obwód rezonansowy od generatora do odległości d_0, dla której mikroamperomierz wychyla się do ok. 3/4 skali. Mierzymy zależność natężenia I prądu w obwodzie rezonatora od odległości tego obwodu od generatora poczynając od odległości d_0 do maksymalnej (łącznie około 10-ciu pomiarów). Celem wyznaczenia przebiegu krzywych rezonansu zbliżamy rezonator do odległości d_0 i mierzymy zależność wskazań amperomierza I od wskazań na skali kondensatora; czyli wyznaczamy przebieg krzywej rezonansu. Punkty pomiarowe zagęszczamy w okolicy maksimum krzywej i staramy się by ilość punktów była równa dla obydwu zboczy krzywej. Podobne pomiary krzywej rezonansu wykonujemy dla ok. 6-ciu różnych innych oporów R odpowiadających różnym położeniom suwaka opornika zmiennego R. Pomiary każdej serii wykonać musimy w jak najkrótszym czasie nie zmieniając wtedy nawet własnego położenia. Jakiekolwiek przemieszczenie osób lub przedmiotów w pobliżu obwodu rezonansowego zmienia pojemności rozproszone i zmienia również poziom drgań prowadząc do błędów systematycznych. Notujemy błędy poszczególnych pomiarów i korzystając z wykresu odczytujemy pojemności C odpowiadające określonym wskazaniom C' skali pokrętła kondensatora obrotowego. (Jeżeli dysponujemy mostkiem do pomiaru pojemności, porównaj § 19.5, mierzymy i wyznaczamy krzywą cechowania tzn. zależność pojemności od wskazania C' skali pokrętła).

Obliczenia

Wykreślamy zależność natężenia prądu od odległości $I(1/d^2)$ oraz $I(1/d^3)$. Dyskutujemy przebieg tych zależności, a w szczególności staramy się określić typ sprzężenia między obwodami. Jeżeli jest to sprzężenie indukcyjne, to powinno maleć z trzecią potęgą odległości, gdyż w taki sposób maleje pole dipola (wzór 22.16). W przypadku sprzężenia za pomocą fal elektromagnetycznych amplituda maleje tak samo jak dla fali kulistej, a więc wraz z drugą potęgą odległości. Tak więc w przypadku sprzężenia magnetycznego zależność $I(1/d^3)$ powinna być liniowa, natomiast w drugim przypadku linię prostą powinien dawać wykres $I(1/d^2)$.

Wykreślamy zależności $I(C)$ i z wykresów tych odczytujemy wartość I_r oraz C_r dla maksymalnego natężenia prądu oraz pojemność przy rezonansie. Obliczamy wartość stosunku $y = I/I_r$ oraz stosunku $x = C_r/C$ dla wszystkich punktów pomiarowych. Korzystając z tak przygotowanych wyników pomiarowych wykreślamy dokładnie wszystkie krzywe rezonansu na jednym arkuszu w układzie $y(x)$. Na wykresie tym linią przerywaną zaznaczamy wartość $y = 1/2$. Dla każdej krzywej odczytujemy wartości

x' i x'' odpowiadające przecięciom krzywej rezonansu z linią $y = 1/2$. Obliczamy połówkową szerokość Δx tej krzywej z wzoru $\Delta x = \frac{1}{2}(x' - x'')$. Z wzoru (26.15a) obliczamy dobroć dla poszczególnych krzywych. Dla kilku punktów pomiarowych obliczamy i zaznaczamy na wykresie błędy wielkości y oraz x. Określamy błąd odczytanych z wykresu wielkości x' i x'', a następnie obliczamy błędy wielkości x oraz Q. Krótko omawiamy wpływ oporu R na dobroć obwodu.

27. FALE ELEKTROMAGNETYCZNE

27.01. TEORIA MAXWELLA

(S3, § 27 i 77; P2, § 5.29-32; P3, rozdz. 7; H2, § 38, 8-10)

Tworząc teorię fal elektromagnetycznych Maxwell wyszedł ze znanych wcześniej faktów doświadczalnych:

a. Wokół każdego ładunku elektrycznego rozciąga się obszar pola elektrycznego o natężeniu $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\mathbf{r}$ (dla kondensatora płaskiego $E = U/d$). Całka z przesunięcia elektrycznego po zamkniętej powierzchni S otaczającej ładunek Q jest równa ładunkowi

$$Q = \oiint D\,dS. \tag{27.1}$$

b. Wokół każdego przewodnika z prądem istnieje pole magnetyczne H o indukcji magnetycznej $B = \mu H$, lecz nie istnieją ładunki magnetyczne podobne do ładunków elektrycznych i dlatego przez analogię do równania (27.1) możemy napisać

$$\oiint B\,dS = 0. \tag{27.2}$$

c. Prąd I wytwarza wokół przewodnika, w którym płynie, pole magnetyczne o natężeniu $H = I/(2\pi r)$ lub $2\pi rH = I$. Wielkość $2\pi rH$ jest przypadkiem szczególnym wyrażenia ogólnego $\oint H_l\,dl$. (Jeżeli jako drogę całkowania przyjmiemy koło o promieniu r prostopadle i koncentrycznie ustawione względem przewodnika, wtedy $\oint H_l\,dl = 2\pi rH$.) Zatem możemy napisać

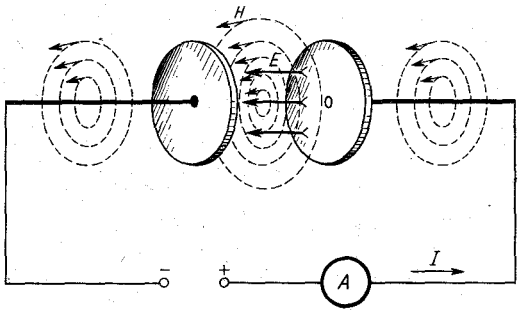
$$\oint H_l\,dl = I. \tag{27.3}$$

d. Zmieniające się pole magnetyczne wytwarza w przewodniku siłę elektromotoryczną $U = -\frac{d\Phi}{dt}$ (prawo Faradaya). Siłę elektromotoryczną U możemy interpretować jako sumę małych przyczynków dU, na krótkich odcinkach dl. Ponieważ dla jednorodnego pola $U = El$, możemy napisać związek $dU = E\,dl$ oraz $U = \oint E\,dl$. Można doświadczalnie stwierdzić, że pole E powstaje również wtedy, gdy nie ma przewodnika. Strumień indukcji magnetycznej Φ w przypadku, gdy pole magnetyczne nie jest jednorodne wyrazić możemy wzorem: $\Phi = \iint_S B_n\,dS$, gdzie B_n jest składową indukcji prosto-

padłą do elementu powierzchni dS. Tak więc prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya napiszemy w postaci

$$\oint E_l \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int\int_S B_n \, dS. \tag{27.4}$$

Wychodząc z tych faktów doświadczalnych Maxwell stworzył swą teorię przez uogólnienie równania (27.3). Załóżmy, że w pokazanym na rysunku 27.1 obwodzie ładujemy kondensator. Wtedy w przewodach przepłynie krótkotrwały prąd I ładowania kondensatora. Prąd nie popłynie w obszarze pomiędzy okładkami kondensatora. W czasie



27.1. Pole elektryczne i magnetyczne między okładkami kondensatora.

przepływu prądu wokół przewodnika wytworzy się krótkotrwałe pole magnetyczne o liniach koncentrycznych z przewodnikiem. Zgodnie z twierdzeniem Maxwella, również w obszarze pomiędzy okładkami kondensatora powstaną linie sił pola magnetycznego, mimo iż tam prąd nie płynął, bowiem w tym obszarze zmieniało się przesunięcie elektryczne D. Zmiana przesunięcia elektrycznego musi być równoważna przepływowi prądu o natężeniu I_p,

$$I_p = \frac{\partial D}{\partial t} S \text{ lub dla pola niejednorodnego } I_p = \int\int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS.$$

W jednym obszarze mogą równocześnie występować prąd I_p zwany prądem przesunięcia oraz prąd I (przewodzony lub konwekcyjny). Ten ostatni możemy wyrazić przez gęstość prądu j

$$I = \int\int_S j \, dS.$$

Sumowanie to rozciągnąć możemy na dowolną powierzchnię S, ponieważ dla przewodnika gęstość prądu j poza przewodnikiem jest równa zeru. Stosuje się to wyrażenie również dla prądu konwekcyjnego. Zatem ostatecznie w równaniu (27.3) zamiast I napiszemy sumę

$$(I + I_p) = \int\int_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS$$

otrzymując

$$\oint H_l \, dl = \int\int_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS. \tag{27.5}$$

W szczególności, gdy brak prądu przewodzonego lub konwekcyjnego ($j = 0$) otrzymujemy

$$\oint H_l \, dl = \frac{\partial}{\partial t} \int\int_S D_n \, dS. \tag{27.6}$$

Równania (27.1), (27.2), (27.4) i (27.5) lub (27.6) nazywamy całkową postacią równań Maxwella.

Równanie Maxwella można zapisać również w postaci różniczkowej. Załóżmy w tym celu, że w obszarze powierzchni S indukcja elektryczna posiada stałą wartość (pole jednorodne). Wtedy prawą stronę równania (27.6) napisać możemy w postaci

$$\frac{\partial}{\partial t} D_n \int\int_S dS = \frac{\partial}{\partial t} D_n S.$$

Dzieląc ponadto równanie (27.6) przez S otrzymamy

$$\frac{1}{S} \oint H_l dl = \frac{\partial}{\partial t} D_n.$$

Przechodząc do granicy przy l dążącym do 0 (wtedy również $S \to 0$), zgodnie z twierdzeniem Stokesa otrzymamy

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_n, \text{ lub } \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_n, \text{ lub wreszcie rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_n,$$

gdzie operator ∇ wyraża się wzorem $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$.

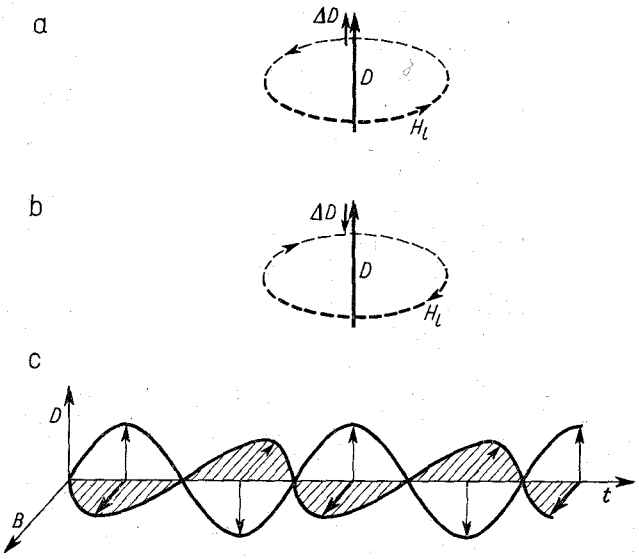
Podobnie, stosując twierdzenie Greena $\left(\lim_{V \to 0}\left[\frac{1}{V} \oiint D_n \, dS\right] = \nabla \cdot \mathbf{D}\right)$ do równania (27.1) otrzymamy $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho$. Podobnie możemy przekształcić również drugą parę równań Maxwella otrzymując postać różniczkową. Wszystkie równania Maxwella zebrano w tabelce 27.01.

Tabela 27.1

Równania Maxwella

Lp.	Postać różniczkowa	Postać całkowa
I	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint E_l \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int\int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S}$
II	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
III	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$	$\oint H_l \, dl = \int\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}\right) d\mathbf{S}$
IV	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho$	$\int\int \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = Q$
ponadto: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$		

Celem zrozumienia istoty równań Maxwella zastanowimy się nad procesami zachodzącymi poza kondensatorem w przypadku, gdy między jego okładkami zmienia się natężenie pola, a tym samym przesunięcie elektryczne $D = \varepsilon E$. Załóżmy, że w pewnej chwili w kondensatorze zaczyna wytwarzać się pole elektryczne co odpowiada wzrostowi przesunięcia o ΔD. Wtedy zgodnie z równaniem (27.6) powstaje wirowe pole magnetyczne o natężeniu proporcjonalnym do $\frac{\partial D}{\partial t}$. Kierunek linii sił tego pola jest określony regułą śruby prawoskrętnej (rys. 27.2a). W przypadku, gdy pole elektryczne maleje, znak prędkości zmiany pola $-\frac{\partial D}{\partial t}$ jest ujemny, a zwrot pola magnetycznego jest przeciwny (rys. 27.2b). Jeżeli założymy, że pole elektryczne zmienia się sinusoidalnie $D = D_0 \sin \omega t$, jak to ma miejsce w obwodzie drgającym (§ 26.01). Wtedy pole magnetyczne, zmieniające się proporcjonalnie do szybkości zmian pola elektrycznego, zmieniać się będzie według wzoru $\cos \omega t \simeq \frac{\partial}{\partial t} \sin \omega t$, co przedstawiono na rysunku 27.2c.

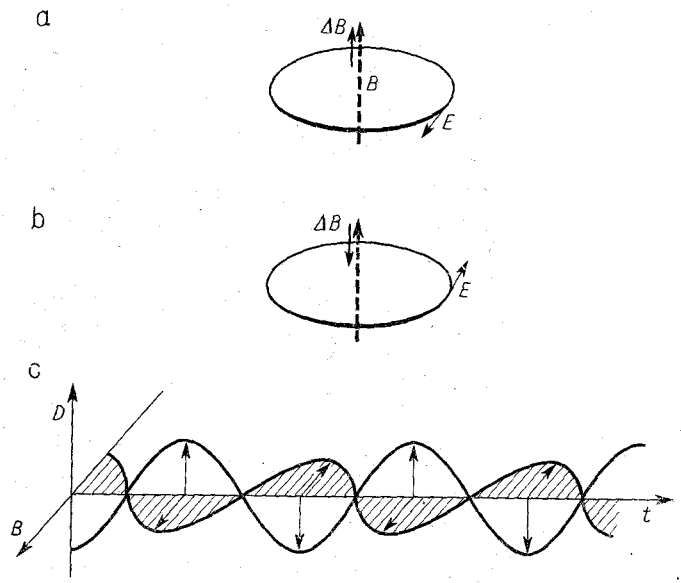


27.2. Zmiana przesunięcia magnetycznego wytwarza wir pola magnetycznego.

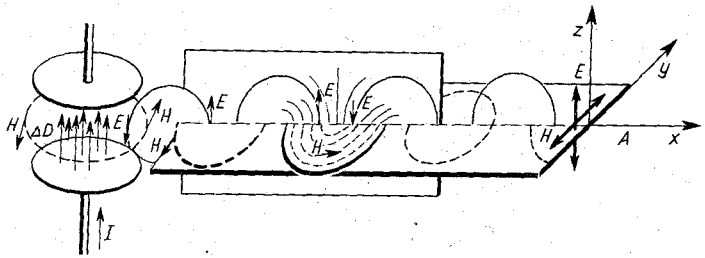
Podobne rozważania przeprowadzić możemy wychodząc z pola magnetycznego lub indukcji magnetycznej $B = \mu H$, istniejącego w cewce obwodu drgającego. Pole to również zmienia się sinusoidalnie $B = B_0 \sin(\omega t + \varphi)$ i zgodnie z równaniem (27.4) musi powstawać wirowe pole elektryczne o znaku przeciwnym do prędkości zmian pola magnetycznego $E \sim \mu \frac{\partial}{\partial t} H$, czyli do $-\cos(\omega t + \varphi)$. Pokazano to w cyklu rysunków 27.3.

Równania Maxwella (27.4) i (27.6) zastosować możemy nie tylko w odniesieniu do pola wytwarzanego w cewce lub w kondensatorze, lecz również do dowolnego zmieniają-

cego się w czasie pola magnetycznego lub elektrycznego. W szczególności może to być pole H_l lub E_l wytworzone przez pierwotną zmianę pola w kondensatorze lub w cewce. Powstaje więc łańcuch utworzony na przemian przez wirowe pola elektryczne i magnetyczne (rys. 27.4). Pola te przemieszczają się w kierunku zaznaczonym strzałką. Ostateczny wynik jest taki, że przemieszczają się w prawo zmiany pola elektrycznego i towarzyszące mu zmiany pola magnetycznego, co dla chwili t i punktu A przedstawiono strzałkami E i H. Jeżeli pole w kondensatorze drga w sposób sinusoidalny, wtedy w sposób sinusoidalny w kierunku osi x przenoszą się zmiany pola elektrycznego i magnetycznego. Mówimy, że z punktu O rozchodzi się fala elektromagnetyczna. Dla pewnej chwili t obraz rozkładu pól elektrycznych i magnetycznych dają rysunki 27.2c i 27.3c.



27.3. Zmiana indukcji magnetycznej wytwarza wirowe pole elektryczne.



27.4. Rozchodzenie się fal elektromagnetycznych (obraz graficzny).

Celem formalnego udowodnienia, że z równań Maxwella wynikają fale elektromagnetyczne wyprowadzimy z nich równanie fali (11.2). Pomnóżmy lewostronnie wektorowo przez ∇ równanie różniczkowe I (tabl. 27.01) otrzymując

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{27.7}$$

Po prawej stronie występuje tu podwójne różniczkowanie: po współrzędnych przestrzennych (∇) i po czasie. Ponieważ przy różniczkowaniu cząstkowym kolejność różniczkowania jest dowolna, zamieniamy ją otrzymując

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}).$$

Po lewej stronie występuje podwójny iloczyn wektorowy, który możemy zapisać w postaci $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$.

Zauważymy, że $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (ze względu na równanie *II*) oraz $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} =$

$= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (z równania *III* przy założeniu $j = 0$), zatem (27.7) przyjmie postać:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}. \tag{27.8}$$

Przyjmując układ współrzędnych z rysunku 27.4 możemy założyć, że pole E ma jedną składową w kierunku osi z i zależy wyłącznie od współrzędnej x, otrzymamy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{E}_z = \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_z. \tag{27.9}$$

Jest to równanie różniczkowe fali, porównaj (11.2), której prędkość rozchodzenia się c wyraża się wzorem

$$c^{-1} = \sqrt{\mu \varepsilon}\,. \tag{27.10a}$$

W próżni zachodzi

$$c_0 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} \simeq 3 \cdot 10^8 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \tag{27.10}$$

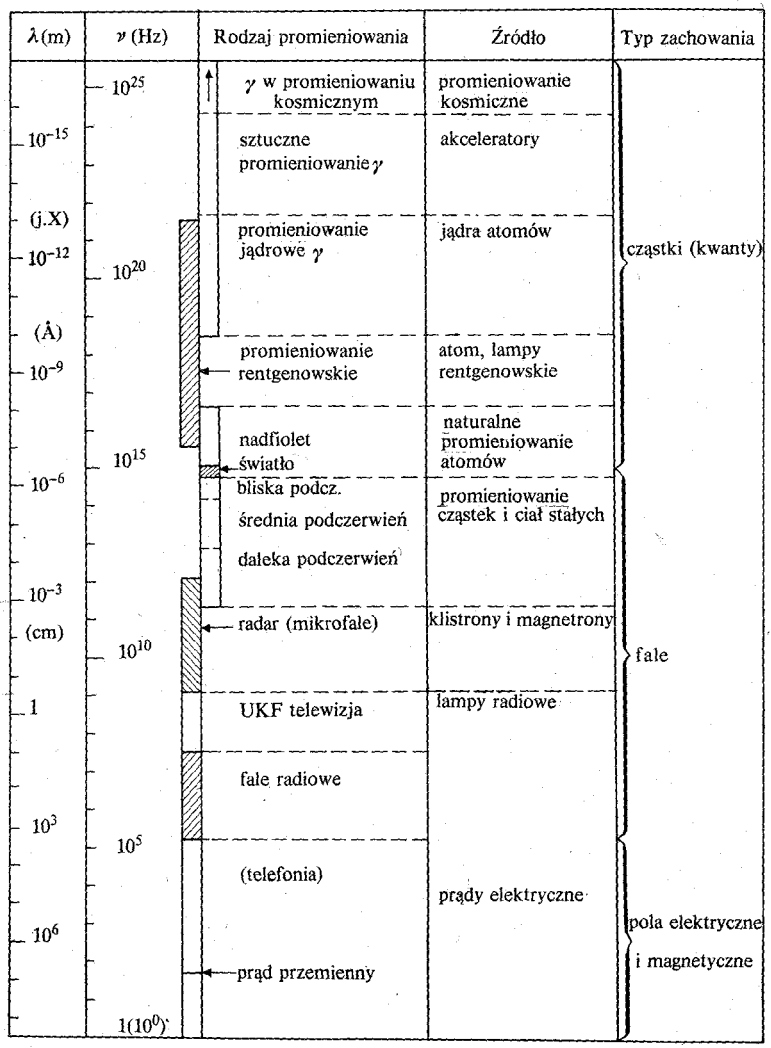
Równanie (27.8) jest oczywiście równaniem ogólniejszym i również daje opis matematyczny fali. Gdybyśmy w naszym rozumowaniu wyszli z równania *III*, otrzymalibyśmy dla pola magnetycznego równanie fali takie samo pod względem matematycznym jak równanie (27.9). Zatem zarówno pola elektryczne jak i magnetyczne przemieszczają się w sposób falowy z prędkością c, stąd też omawianą falę nazywamy elektromagnetyczną. Jest to fala poprzeczna, co oznacza, że natężenia pól elektrycznego i magnetycznego drgają w kierunkach prostopadłych względem kierunku rozchodzenia się, jak również wzajemnie prostopadłych. Ogólne rozwiązanie równania (27.8) jest skomplikowane, natomiast rozwiązaniem równania (27.9) może być funkcja sinusoidalna typu

$$E = E_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right) + \varphi\right], \tag{27.11}$$

lub dowolna funkcja periodyczna, w tym również funkcja zespolona. Fale elektryczne są w przyrodzie bardzo rozpowszechnione, a ich własności w znacznym stopniu zależą od długości. W tabeli 27.02 podano wykaz fali elektromagnetycznych oraz sposoby ich wytwarzania.

Tabela 27.2

Fale elektromagnetyczne

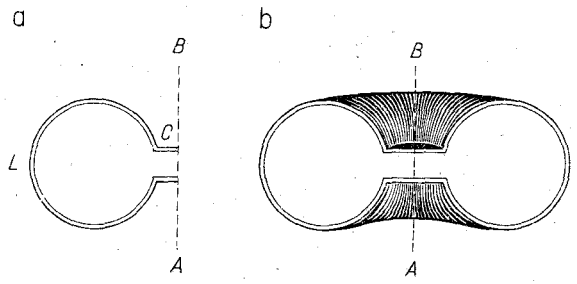


27.03. SPOSOBY WYTWARZANIA FAL RADIOWYCH I MIKROFAL

Źródłem fal radiowych jest obwód drgań nietłumionych (§ 26.02). Obwód taki bezpośrednio wypromieniowuje stosunkowo małą energię. Celem uzyskania większych energii stosuje się antenę tzn. przewodnik elektryczny sprzężony indukcyjnie lub pojemnościowo z obwodem drgań. W antenie wytwarzają się drgania elektryczne polegające na przepływie elektronów z jednego końca przewodu w drugi z częstością drgań obwodu rezonansowego. Z tego powodu antena powinna spełniać takie same warunki rezonansu jak pręt, w którym zachodzą drgania mechaniczne (§ 11.02). Jej długość powinna być równa 1/4 długości wypromieniowanej fali elektromagnetycznej. Przykładem nadajnika fal elektromagnetycznych może być obwód pokazany na rys. 27.12.

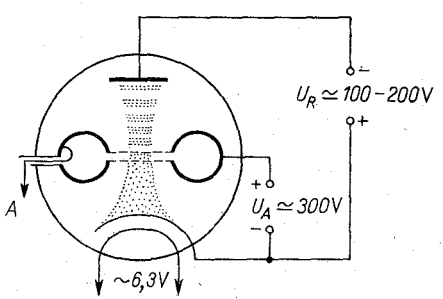
Za pomocą zwykłych lamp radiowych można uzyskać fale elektromagnetyczne o długościach od najdłuższych fal radiowych do fal metrowych. Do wytwarzania fal radarowych czyli mikrofal służą magnetrony oraz klistrony. W laboratoriach najbardziej rozpowszechnione są obecnie klistrony.

Celem zwiększenia częstości drgań obwodu LC, zgodnie z wzorem Thomsona (26.8), należy zmniejszać wartości L i C. Wielkości tych nie można jednak zmniejszać nieograniczenie, ponieważ w skrajnym przypadku nawet jeden zwój drutu ma pewną indukcję własną. W przypadku mikrofal nie można już stosować klasycznego obwodu składającego się z kondensatora i jednego zwoju drutu (rys. 27.5a). Dla tych długości fal rolę obwodu rezonansowego spełnia wnęka zwana często komorą rezonansową wykonana w dobrym przewodniku (miedź, srebro). Częstość rezonansowa czyli częstość drgań własnych wnęki zależy od jej kształtu i wymiarów. Można ją dobierać dowolnie. Na rys. 27.5 pokaza-



27.5. Podobieństwo wnęki rezonansowej (b) do obwodu rezonansowego (a) obróconego wokół osi AB.

no podobieństwo obwodu drgającego i wnęki rezonansowej. Oczywiście fala elektromagnetyczna nie powstaje we wnęce automatycznie. We wnęce trzeba wzbudzić drgania lub wprowadzić do niej falę. W przypadku klistronu, który jest tzw. lampą przelotową, drgania wzbudzają elektrony przebiegające przez pewną część wnęki rezonansowej.



27.6. Budowa i zasada działania klistronu.

Schematycznie budowę klistronu przedstawiono na rysunku 27.6. Stosowana tu wnęka rezonansowa posiada kształt podobny do wnęki z rysunku 27.5. Środkowa zwężona część nie jest jednak ograniczona pełnymi ściankami, lecz spiralnymi siateczkami drutu, podobnymi do siatki lampy elektronowej. Siatki te spełniają równocześnie rolę anody lampy. Po jednej stronie wnęki, na jej osi symetrii znajduje się wyrzutnia elektronów

(katoda), a po przeciwnej dodatkowa elektroda zwana reflektorem. Reflektor posiada potencjał ujemny względem katody. Całość jest zatopiona w bańce szklanej lub metalowej i odpompowana. Elektrony wybiegające z katody są przyspieszane przez anodę, lecz tylko nieznaczna ich część trafi w anodę. Inne przechodzą przez obszar wnęki w kierunku reflektora. Drobne nieregularności przepływu elektronów wzbudzają elektromagnetyczne drgania własne wnęki, czyli falę elektromagnetyczną. Fala ta działa na elektrony przebiegające przez komorę modulując ich prędkość (tzn. zwiększa lub zmniejsza). Pole elektryczne fali istniejącej w komorze zmienia się sinusoidalnie i w jednej połowie okresu elektrony są przyspieszane, a w drugiej opóźniane. Na skutek modulacji prędkości, po przejściu przez wnękę, elektrony zaczynają się grupować w paczki. Niezależnie od tego efektu pole wytwarzane przez reflektor hamuje je i zawraca na powrót w kierunku wnęki. Tworzą więc one paczki przebiegające przez wnękę z częstością równą jej częstości drgań własnych. Napięcie reflektora dobrane jest w ten sposób, by zawrócone elektrony trafiły ponownie do wnęki we właściwej fazie. Każde przejście paczki elektronów powoduje gwałtowny wzrost pola elektrycznego, które dodaje się do pola fali istniejącej już wewnątrz wnęki. Mechanizm ten w zupełności kompensuje straty energii drgań spowodowane ich odprowadzeniem na zewnątrz przez antenę — pętlę A.

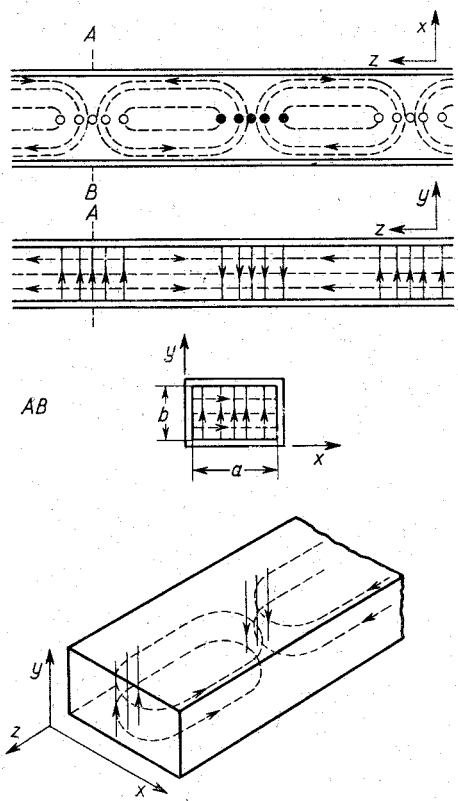
Klistron jest na stałe połączony z układem zasilającym. Jeżeli układ włączamy w kilku etapach, czynimy to w kolejności: reflektor, żarzenie, anoda. Przyłożenie napięcia anodowego w nieobecności napięcia reflektora może spowodować uszkodzenie lampy. Wyłączając klistron zachowujemy odwrotną kolejność. Po nagrzaniu lamp prąd anodowy w klistronie K19 osiąga wartość 20–30 mA; napięcie reflektora wynosi 130–180 V. Klistron generuje falę tylko przy określonych wartościach napięcia reflektora. Celem ustalenia warunków pracy, zmieniając bardzo powoli napięcie reflektora, dobieramy taką jego wartość, przy której mikroamperomierz połączony z detektorem wychyla się maksymalnie.

27.04. ELEMENTY TECHNIKI MIKROFALOWEJ

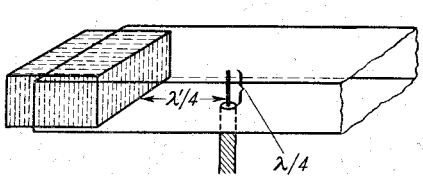
Fale elektromagnetyczne mogą rozchodzić się swobodnie w przestrzeni, względnie mogą być prowadzone. Do fal prowadzonych należą między innymi fale rozchodzące się wzdłuż przewodów. Do prowadzenia mikrofal czyli fal centymetrowych stosuje się przewody koaksjalne i falowody. W pierwszych, pojedynczy drut osłonięty dobrym dielektrykiem jest otoczony oplotem miedzianym. Kable takie są czasem stosowane jako telewizyjne przewody antenowe. Falowodami nazywamy puste wewnątrz rury metalowe o przekroju prostokątnym i bokach a, b. W falowodach straty energii są bardzo małe i istnieje możliwość przesyłania stosunkowo dużych energii na dalekie odległości. Fala elektromagnetyczna w falowodzie posiada inną strukturę niż fala w wolnej przestrzeni. Nie jest ona już falą poprzeczną, lecz jej pole elektryczne lub magnetyczne posiada składową równoległą do kierunku rozchodzenia się. Rozkład linii sił pola elektrycznego i magnetycznego, w posiadającej składową pola magnetycznego równoległą do kierunku rozchodzenia się, tzw. fali H_{10} pokazano na rysunku 27.7.

Do falowodu lub wnęki wprowadza się falę za pomocą anteny, pętli lub odpowiednio usytuowanego otworu. Antena musi być usytuowana w ten sposób, by znajdowała się

w maksimum pola elektrycznego i była równoległa do linii sił tego pola. Antenę stanowi przewód o długości równej 1/4 fali (rys. 27.8). Jeżeli stosujemy pętlę jak np. w klistronie (rys. 27.6), to musi ona obejmować obszar maksimum pola magnetycznego, by zmiany



27.7. Struktura fali elektromagnetycznej w falowodzie prostokątnym (linie ciągłe — pole elektryczne, przerywane — pole magnetyczne).



27.8. Sposób umieszczenia anteny w falowodzie.

tego pola indukowały prąd w pętli. Długość λ' fali o częstości ν rozchodzącej się w falowodzie jest większa od długości fali λ rozchodzącej się w wolnej przestrzeni, przy czym zachodzi następujący związek:

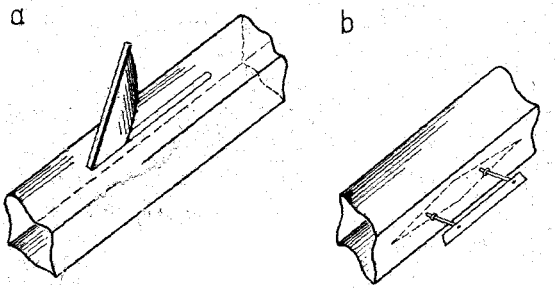
$$\frac{1}{\lambda'} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{m^2}{2a}\right) - \left(\frac{n^2}{2b}\right)}, \tag{27.12}$$

gdzie m oznacza ilość półfal pola magnetycznego układających się wzdłuż boku a, natomiast n odpowiednio wzdłuż boku b. W przypadku falowodu pokazanego na rysunku

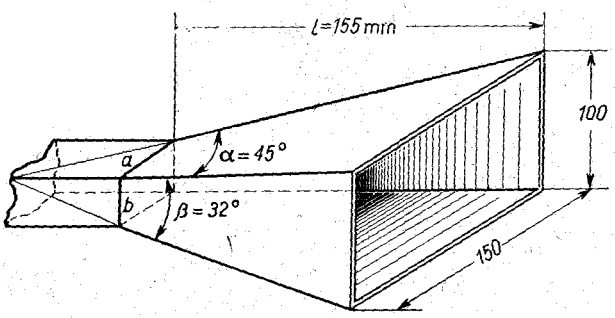
27.7 $m = 1, n = 0$. Wzór (27.12) ogranicza stosowalność falowodu o danych wymiarach. Może rozchodzić się w nim tylko fala o skończonej długości λ'. Graniczną długość fali, dla której $\lambda' = \infty$ nazywamy długością krytyczną λ_c. Z równania (27.12) otrzymujemy następujący wzór na λ_c:

$$\frac{1}{\lambda_c} = \sqrt{\left(\frac{m^2}{2a}\right) + \left(\frac{n^2}{2b}\right)}. \tag{27.12a}$$

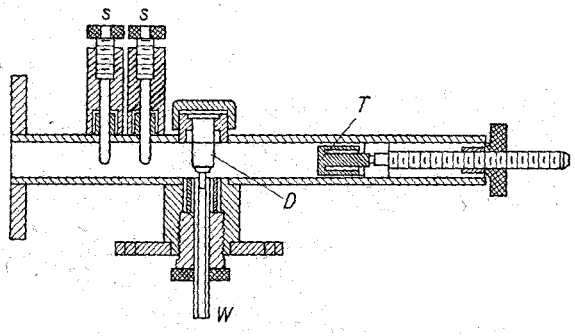
Odpowiednikiem opornika dla fali elektromagnetycznej jest tłumik (rys. 27.9). Energia fali jest absorbowana przez warstwę grafitu pokrywającą płytkę gumoidową wchodzącą przez szczelinę do wnętrza falowodu. Inne rozwiązanie pokazano na rys. 27.9b, gdzie pokryta grafitem płytka przesuwa się od strony ścianki ku środkowi falowodu, gdzie



Budowa tłumików.



27.10. Budowa tuby.



27.11. Budowa głowicy detekcyjnej.

znajduje się maksimum pola elektrycznego. Do wyprowadzania fali w przestrzeń stosuje się tuby (rys. 27.10). W przypadku gdy chcemy wyprowadzić z falowodu całą moc mikrofalową, stosujemy specjalne zakończenie falowodu zwane głowicą detekcyjną (rys. 27.11). W głowicy detekcyjnej rolę anteny spełnia dioda ostrzowa *D*. Końcowa ścianka *T* falowodu jest przesuwalna, dzięki czemu można tak dobrać warunki, by w obszarze, w którym znajduje się dioda powstało maksimum pola elektrycznego. Ułatwiają to dodatkowo śruby stroikowe *ss*. Końce tych śrub wchodząc do falowodu zmieniają fazę fali. Prąd stały wytworzony w diodzie *D* jest odprowadzony przewodem koaksjalnym *W* do mikroamperomierza.

27.1. STRUKTURA FALI ELEKTROMAGNETYCZNEJ

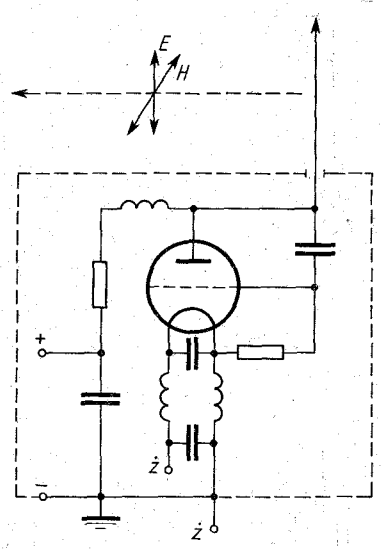
Cel: określenie kierunków pola elektrycznego i magnetycznego fali elektromagnetycznej wypromieniowanej przez antenę liniową.

Przyrządy: generator drgań nietłumionych (§ 26.02), mikroamperomierz (§ 18.01–03).

Zagadnienia: fale elektromagnetyczne, ich własności i wytwarzanie (§ 27.01–03; S3, § 115–118, 130, 131; P2, § 5.1–28; J, § 22.1–3; H2, § 38 i 39); dioda germanowa (§ 21.01–03, 21.3).

Aparatura

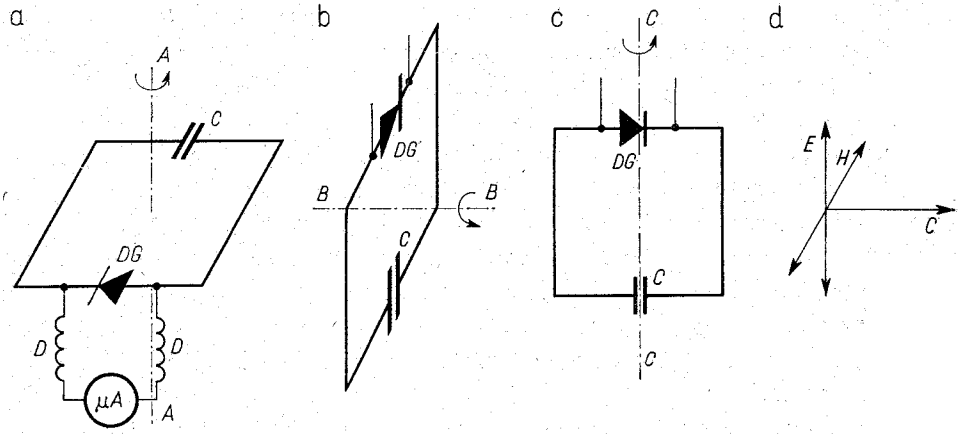
Aparatura (rys. 27.12) składa się z generatora z anteną w postaci długiego pręta i obwodu rezonansowego (rys. 27.13) połączonego z mikroamperomierzem. Sam generator zamknięty jest w metalowym pudełku, które nie przepuszcza na zewnątrz fali elektromagnetycznej pochodzącej bezpośrednio z obwodu generatora. Dzięki takiemu



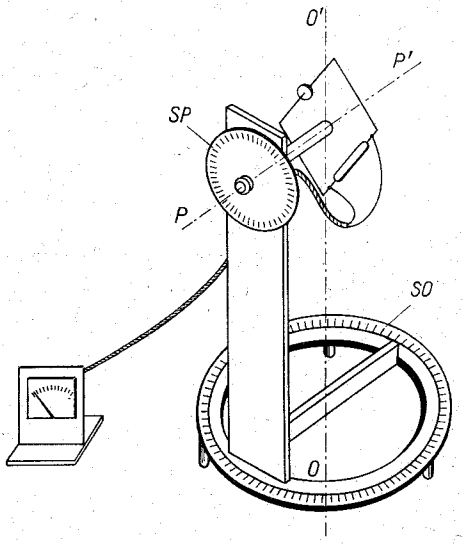
27.12. Budowa generatora fali elektromagnetycznej.

rozwiązaniu fala wypromieniowana wyłącznie przez antenę jest falą spolaryzowaną, to znaczy ma określony jeden tylko kierunek wektora natężenia pola elektrycznego i inny prostopadły do pierwszego, kierunek pola magnetycznego. Generator wraz z anteną może znajdować się w drewnianej skrzyni, wtedy kierunek pól w wypromieniowanej

fali nie jest znany. Obwód rezonansowy (rys. 27.13) jest utworzony przez równolegle połączony kondensator płaski C i diodę germanową DG. Amplitudę drgań bada się za pomocą mikroamperomierza połączonego równolegle z diodą przez dławiki D, D nie przepuszczające do miernika drgań wysokiej częstości. Omówiony obwód ma następującą istotną własność: na pole magnetyczne fali elektromagnetycznej reaguje tylko wtedy, gdy pole to ma składową normalną do powierzchni ramki, natomiast pole elektryczne wzbudzić może drgania tylko w przypadku, gdy ma ono składową równoległą do gałęzi ramki zawierających kondensator lub diodę. W przypadku, gdy rezonator ustawiony w sposób pokazany na rys. 27.13a obracać będziemy wokół osi AA, a fala ma strukturę pokazaną na rysunku 27.13d, nie zarejestruje on fali. Żadne z pól nie może wzbudzić drgań w obwodzie. Dla tej samej fali rezonator w położeniu b również nie rejestruje drgań, lecz obracany wokół osi BB reagować będzie na pole elektryczne.



27.13. Budowa układu rezonansowego z wyjaśnieniem jego działania.



27.14. Układ (rezonator) do badania struktury fali elektromagnetycznej.

W szczególności po obróceniu o $\pi/2$ wykaże maksimum pola elektrycznego. W położeniu *c* rezonator obracany wokół osi *CC* reagować może wyłącznie na magnetyczne pole fali elektromagnetycznej. W praktyce rezonator jest zamocowany na płytce szkła organicznego (rys. 27.14), a sama płytka może być przykręcona do statywu, który z kolei może obracać się wokół dwóch osi *OO'* i *PP'*. Kąty obrotu wokół obydwu osi odczytywać można na skalach kątomierzy *SO* i *SP*. Rezonator można przykręcić do statywu w sposób pokazany na rysunku, tzn. płaszczyzną płytki prostopadle do osi *PP'* lub też równolegle do tej osi.

Pomiary i obliczenia

Doświadczenie wykonywane może być w różnych wersjach. W najprostszym przypadku antena generatora jest widoczna. Wtedy doświadczenie polega na sprawdzeniu założeń objaśnionych na rysunku 27.13 odnośnie struktury fali. Mierzymy kątowe zależności natężenia prądu od ustawienia ramki przy obrocie wokół trzech kolejnych osi pokazanych na rysunkach 27.13a, b i c. Dla każdej z wymienionych osi wykonujemy pomiary co 10°.

W przypadku, gdy antena nie jest widoczna, a podany jest przybliżony kierunek biegu fal elektromagnetycznych, zadanie polega na wyznaczeniu płaszczyzn drgań wektorów pól: elektrycznego i magnetycznego. W tym przypadku, korzystając z własności obwodu rezonansowego, należy określić kierunek pola elektrycznego i magnetycznego fali oraz określić położenie ramki, w których drgania wzbudza pole magnetyczne, pole elektryczne, obydwa pola równocześnie albo żadne z pól nie wzbudza drgań. W tym celu w pierwszym etapie pracy staramy się ustalić w przybliżeniu kierunki pola *E* i *H*; na przykład przez ustawienie powierzchni ramki rezonatora prostopadle do kierunku fali i przez obrót wokół osi *BB* określenie kierunku wektora *E* (rys. 27.13b). Dalsze szczegółowe pomiary powinny potwierdzić wnioski dotyczące szczegółów struktury fali. Z tego powodu, najpierw staramy się przewidzieć zachowanie się obwodu przy obrotach wokół osi *AA*, *BB* lub *CC* (rys. 27.13), a następnie sprawdzamy swoje wnioski wykonując pomiary co 10°. Opracowanie wyników polega na pisemnym opracowaniu wniosków wynikających z pomiarów i obserwacji poczynionych w czasie wykonywania doświadczenia.

27.2. DRUTY LECHERA

Cel: zbadanie rozkładu pola elektrycznego i magnetycznego wzdłuż drutów Lechera.

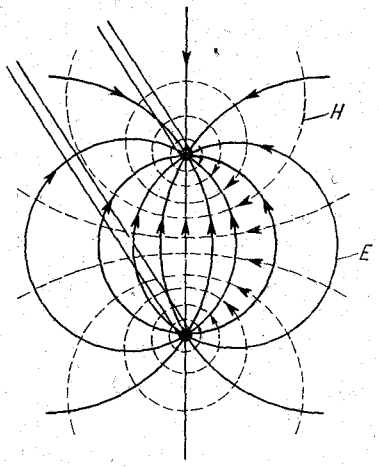
Przyrządy: generator drgań nietłumionych (§ 26.02), galwanometr (§ 18.01–03).

Zagadnienia: fale elektromagnetyczne (§ 27.01–03; S3, § 115–118, 125, 128, 130 i 131; P2, § 5.1–28; P3, rozdz. 7; J, § 22.1–3; H2, § 38 i 39).

Wprowadzenie

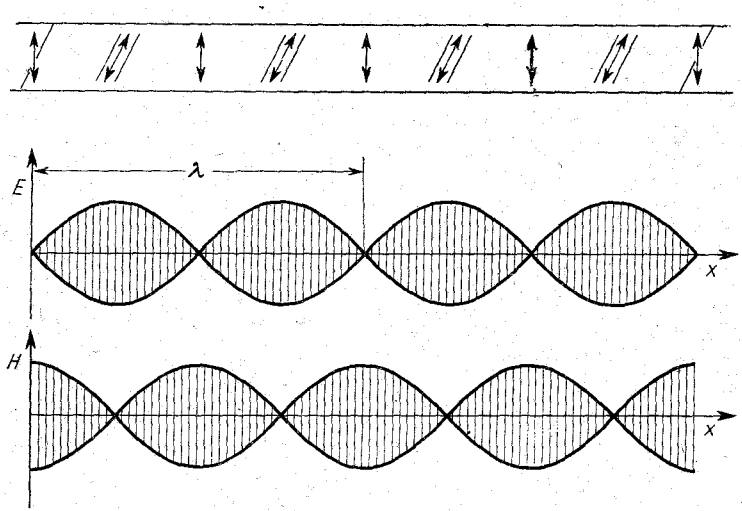
Układ dwóch przewodów, wzdłuż których fale elektromagnetyczne mogą się rozchodzić, nazywamy drutami Lechera. Fali prowadzonej wzdłuż drutów, w przeciwieństwie do fali w wolnej przestrzeni, towarzyszą prądy w przewodach. Dzięki temu w drutach wytwarzają się ładunki elektryczne, a linie sił pola elektrycznego rozpoczynają

i kończą się na tych ładunkach. Linie pola magnetycznego otaczają przewody w sposób pokazany na rysunku 27.15. Z prądem w przewodach związane jest wydzielanie ciepła Joule'a–Lenza, a tym samym straty energii fali proporcjonalne do oporu właściwego przewodów. Stąd należy stosować jak najlepsze przewodniki, a więc miedziane lub srebrne.



27.15. Rozkład pól: elektrycznego (linia ciągła) i magnetycznego wokół drutów Lechera.

Jeżeli w pewnym miejscu złączymy obydwa przewody dobrym przewodnikiem, czyli tzw. mostkiem, fala nie może się dalej rozchodzić, lecz ulega odbiciu. Fala odbita nakłada się na falę bieżącą, stąd powstaje sytuacja, w której mogą powstać fale stojące, jeżeli tylko długość przewodów liczona od jednego mostka do drugiego jest równa całkowitej liczbie połówek fal (por. rys. 11.3). Jeżeli końcówki drutów zwarte są mostkiem, na końcach nie mogą się wytworzyć strzałki pola elektrycznego, lecz węzły, ponieważ

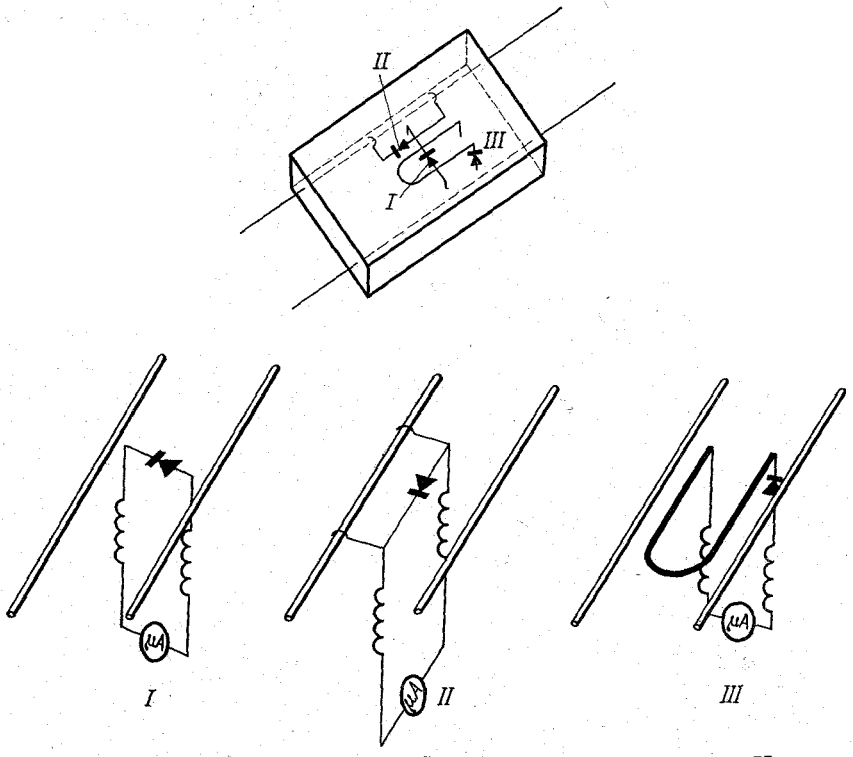


27.16. Fala wzdłuż drutów Lechera.

w przypadku strzałek płynąłby w mostkach prąd o dużym natężeniu. Tak więc rozkład pól elektrycznych w zwartych mostkami drutach przypomina falę stojącą w dwustronnie zamocowanej strunie. Pole magnetyczne posiada strzałki w węzłach pola elektrycznego. Tak więc rozkład pola magnetycznego przypomina falę w pręcie o swobodnych końcach, lub w dwustronnie otwartym słupie powietrza (rys. 11.3). Zatem struktura fali elektromagnetycznej w drutach Lechera różni się od fali w swobodnej przestrzeni przesunięciem maksimów natężenia pól: elektrycznego i magnetycznego. Rozkład pól w fali stojącej pokazano na rysunku 27.16. Za pomocą drutów Lechera można w łatwy sposób wyznaczyć długość fali elektromagnetycznej, a tym samym jej prędkość rozchodzenia się $c = \lambda\nu$.

Aparatura

Układ drutów Lechera ograniczony jest z dwóch stron płaską blachą miedzianą będącą w dobrym kontakcie elektrycznym z przewodami. Jedna ze ścian jest przesuwalna, dzięki czemu można zmieniać długość przewodów i wzdłuż przewodów uzyskać falę stojącą. Do badania fali służy układ dwóch diod germanowych zamocowanych na ruchomym mostku ze szkła organicznego (rys. 27.17). Dioda *I* ustawiona jest wzdłuż linii łączącej przewody nie pozostając z nimi w kontakcie elektrycznym i reaguje na pole elektryczne. Dioda *II* końcami dotyka jednego z przewodów, dzięki czemu reaguje na różnice potencjałów wzdłuż przewodów. Napięcie z diod zbierane jest poprzez



27.17. Układ detektorów fali elektromagnetycznej: *I* — detektor pola elektrycznego, *II* — różnic potencjałów wzdłuż przewodów, *III* — pola magnetycznego.

dławiki na galwanometr. Pole magnetyczne badać można również za pomocą pętli leżącej w płaszczyźnie drutów.

Strukturę fali elektromagnetycznej wypromieniowanej wzdłuż drutów Lechera badać można również za pomocą układu rezonansowego pokazanego na rysunku 27.13 postępując podobnie jak przy badaniu struktury fali elektromagnetycznej. Specjalny system bloczków i taśma miernicza służą do przesuwania mostka wzdłuż drutów i odczytywaniu jego położenia, dzięki czemu obserwator nie musi zmieniać swego położenia co mogłoby zakłócić pomiar.

Pomiary i obliczenia

Włączamy generator, a przewody z mikroamperomierzem łączymy z diodą *I*. Po nagrzaniu się lampy generatora przesuwamy mostek do położenia odpowiadającego maksimum pola elektrycznego, a tym samym maksymalnemu wychyleniu mikroamperomierza i potencjometrem znajdującym się pod miernikiem regulujemy czułość w ten sposób, by wychylenie było duże, lecz mieściło się w skali dla dowolnego położenia mostka. Mierzymy rozkład pól elektrycznych w odstępach 5-centymetrowych wzdłuż całej długości przewodów.

Miernik łączymy z diodą *II*, powtarzamy te same czynności mierząc rozkład potencjału wzdłuż przewodów lub pole magnetyczne diodą *III*. Możemy również wykonać podobne pomiary za pomocą obwodu rezonansowego. Obwód rezonansowy musimy wtedy odpowiednio ustawić, by reagował wyłącznie na pole elektryczne lub magnetyczne. Mierzymy długość układu drutów i notujemy dokładności wykonanych pomiarów.

Opracowanie wyników polega na wykreśleniu uzyskanych wskazań w zależności od położenia suwaka. Wykresy dla obydwu pomiarów wykonujemy na jednym arkuszu, jeden pod drugim. Z wykresów określamy dokładnie długość fali biorąc pod uwagę maksymalną ilość półfal celem zmniejszenia błędu. Obliczamy częstość drgań generatora z wzoru $\nu = c/\lambda$ oraz błąd tej wielkości. Dyskutujemy krótko zgodność uzyskanych wyników z przewidywaniami teoretycznymi.

27.3. DŁUGOŚĆ MIKROFAL

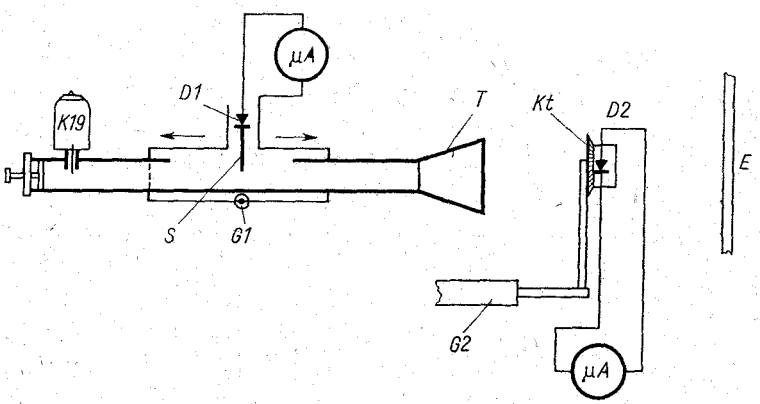
Cel: wyznaczenie długości elektromagnetycznej fali stojącej w powietrzu i w falowodzie.
Przyrządy: aparatura mikrofalowa (§ 27.04), noniusz (§ 3.1), mikroamperomierz (§ 18.01–03).
Zagadnienia: fale elektromagnetyczne (§ 27.01–03; S3, § 115–118, 123, 126, 128 i 129; P2, rozdz. 5 J, § 22.1–3; H2, § 38 i 39).

Aparatura

Schemat aparatury pokazano na rysunku 27.18. Fala z klistronu *K* jest wprowadzona do falowodu o przekroju prostokątnym. Dalszy odcinek falowodu nazywa się miernikiem fali stojącej, ma podłużne rozcięcie, przez które wprowadza się sondę — antenę *S*. Sonda zamocowana jest w tzw. karetce, którą można przesuwać wzdłuż falowodu. Karetka pozwala zmieniać położenie sondy za pomocą pokrętła *G* i odczytywać jej położenie z dokładnością do 0,1 mm. Sonda — antena jest połączona bezpośrednio z diodą *D1* i mikroamperomierzem. Wskazanie mikroamperomierza jest miarą poziomu

drgań w antenie, a tym samym amplitudy składowej natężenia pola elektrycznego, równoległej do kierunku anteny. Przesuwając karetkę wraz z anteną możemy badać rozkład pola elektrycznego w falowodzie.

Do pomiaru natężenia pola elektrycznego fali wypromieniowanej w powietrze służy dioda *D2* zamocowana w uchwycie ze szkła organicznego i połączona z mikroamperomierzem. Diodę *D2* można przesuwać wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali za pomocą pokrętła *G2*. Jej położenie można odczytać z dokładnością do 0,1 mm. Dioda



27.18. Aparatura mikrofalowa do pomiaru długości fali w falowodzie i powietrzu.

ta wraz z urządzeniami towarzyszącymi stanowi falomierz fali w powietrzu. Dioda *D2* zamocowana jest w uchwycie, który daje się obracać wokół osi będącej przedłużeniem osi falowodu. Kąt położenia odczytujemy na kątomierzu *Kt*.

Ustawiając na drodze wiązki mikrofal przeszkodę metalową w postaci ekranu *E* powodujemy odbicie fal i nałożenie fali odbitej na falę bieżącą. Dobierając odpowiednio odległość ekranu od klistronu możemy wytworzyć falę stojącą (podobnie jak w przypadku drgań mechanicznych opisanych w § 11.02), w której maksima i minima pola elektrycznego wykryć możemy diodą *D2*. Fala stojąca powstaje nie tylko w powietrzu, lecz również w falowodzie. Tutaj część energii odbija się już od zakończenia falowodu i w falowodzie zawsze poza falą bieżącą istnieje pewien udział fali stojącej. Chcąc uzyskać bardzo silne maksima, musimy ekran *E* ustawić tuż za końcem tuby *T*.

Pomiary

Włączamy klistron. Po kilku minutach mikroamperomierze wychylają się.

1. Usuwamy ekran *E* i za pomocą diody *D2* mierzymy zależność wskazania mikroamperomierza od odległości. Pomiary te wykonujemy przynajmniej dla 10-ciu różnych odległości diody od końca tuby *T*, odczytując odległości x z dokładnością do 1 mm.

2. Diodę *D2* ustawiamy w niewielkiej odległości od tuby i badamy polaryzację fali elektromagnetycznej. W tym celu mierzymy zależność wskazania mikroamperomierza od kąta α w zakresie od $\alpha = 0$ do $\alpha = \pi$ ($= 180°$) wykonując pomiary co 10–20°.

3. Na drodze fali umieszczamy ekran *E* i tak dobieramy jego położenie, by przy przesuwaniu diody *D2* wystąpiły maksima, a w minimach wskazania *D2* powinny spadać

do zera. Następnie przesuwamy powoli diodę *D2* i notujemy dokładnie położenie odpowiadające maksimom i minimom fali stojącej w całym dostępnym zakresie. Podobne pomiary wykonujemy w falowodzie za pomocą miernika fali stojącej. Jeżeli w ostatnim przypadku maksima nie są dość wyraźne, zbliżamy ekran do tuby *T*.

Przestrajamy nieco klistron lub wyszukujemy inną wartość napięcia reflektora, przy której emitowana jest fala. Otrzymujemy falę o innej długości i powtarzamy dla niej pomiary punktu 3. Celem ustalenia błędu odczytu maksimów, wykonujemy wielokrotny pomiar położenia jednej z strzałek w powietrzu i jednej w falowodzie. Od wyniku tych pomiarów uzależniamy sposób obliczania długości fali.

Obliczenia

Korzystając z wyników pomiarów wykonanych w punkcie 1 wykreślamy zależność I od x oraz Ix^2 w zależności od x. Z wykresów określamy typ funkcji $I(x)$. Stałość iloczynu $I \cdot x^2$ wskazuje na rozbieżną wiązkę fali, stałość I odpowiada wiązce równoległej.

Wykreślamy w układzie biegunowym zbadaną w punkcie 2 zależność $I(\alpha)$ biorąc I jaką amplitudę, a α jako argument. Z wykresu tego wnioskujemy o stanie polaryzacji fali i kierunku płaszczyzny polaryzacji pola elektrycznego fali w falowodzie.

W przypadku pomiaru długości fali (punkt 3) postępujemy w następujący sposób: sprawdzamy, czy w granicach dokładności odczytu wzajemne odległości sąsiednich strzałek są stałe, jeżeli nie stwierdzimy żadnych nieregularności, długość fali obliczamy z wzoru $\lambda = 2(S_N - S_0)N^{-1}$, gdzie S_N oznacza numer kolejny strzałki, a N — ilość półfal dzielących N-tą strzałkę od zerowej. Obliczamy błąd położenia strzałki, a następnie błąd długości fali. Wyniki dla miernika fali stojącej opracować musimy w taki sam sposób. W wyniku otrzymamy długość fali λ' w falowodzie. Znając wymiary falowodu długość fali λ_c obliczamy teoretycznie z wzoru (27.12a).

Obliczamy błąd długości fali λ' i sprawdzamy zgodność wyników λ_c i λ. Pomiary wykonane przy innej długości fali opracowujemy w taki sam sposób.

27.4. ZAŁAMANIE MIKROFAL

Cel: pomiar kąta najmniejszego odchylenia mikrofal załamanych w pryzmacie ze szkła organicznego, badanie zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia, pomiar względnej przenikalności dielektrycznej szkła organicznego.

Przyrządy: spektrometr (§ 30.5), galwanometr (§ 18.01–03), aparatura mikrofalowa (§ 27.04).

Zagadnienia: fale elektromagnetyczne (§ 27.01–03; S3, § 115–118, 123, 126, 128 i 129; P2, rozdz. 5; J, § 22.1–5; H2, § 38 i 39), optyka geometryczna (§ 29.01), wyznaczanie współczynnika załamania metodą kąta najmniejszego odchylenia (§ 29.4), polaryzacja światła przez odbicie (§ 32.1).

Wprowadzenie

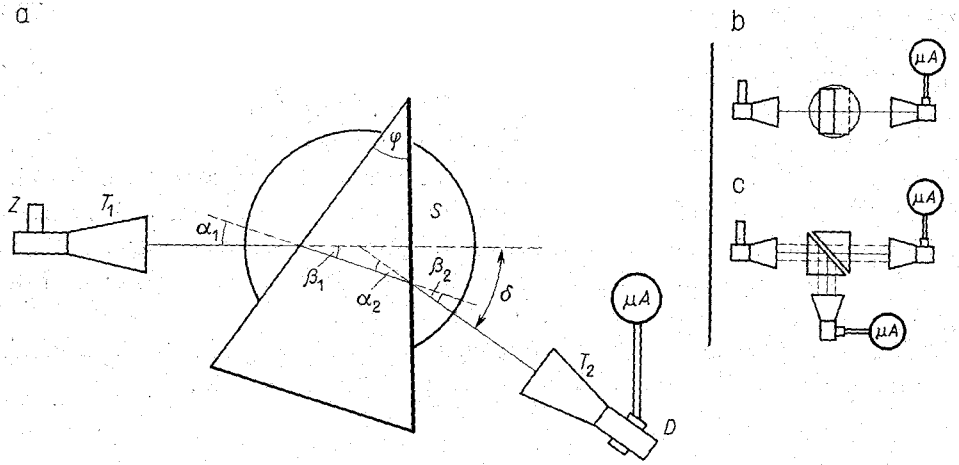
Wiązka fal elektromagnetycznych, przechodząc przez pryzmat doznaje osłabienia. Osłabienie jest spowodowane częściowym odbiciem na ścianach pryzmatu oraz pochłanianiem. Straty spowodowane odbiciem możemy w pewnych warunkach wyeliminować. Z teorii polaryzacji przez odbicie wiadomo, że jeżeli światło pada pod kątem Brewstera na powierzchnię rozgraniczającą dwa środowiska (powierzchnią taką jest również powierzchnia łamiąca pryzmatu), to wiązka odbita jest całkowicie spolaryzo-

wana w płaszczyźnie padania, a wektor odpowiedzialny za zjawiska świetlne, czyli wektor E leży w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny padania. Zatem, jeżeli wiązka padająca jest spolaryzowana w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny padania, czyli gdy wektor E leży w płaszczyźnie padania, a kąt padania α_1 jest równy kątowi Brewstera, to odbicie od powierzchni rozgraniczającej nie może zachodzić. Zgodnie z prawem załamania i prawem Brewstera zachodzi (n_{21} — współczynnik załamania pryzmatu względem powietrza)

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n_{21}, \qquad \alpha_1+\beta_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(warunek Brewstera)},$$

gdzie β_1 — kąt załamania (por. rys. 27.19). Jeżeli chcemy uniknąć również strat na drugiej powierzchni łamiącej przy wyjściu z pryzmatu, to i tam spełnione muszą być warunki Brewstera, czyli

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \frac{1}{n_{21}}, \qquad \alpha_2+\beta_2 = \frac{\pi}{2}.$$



27.19. Schemat układu do badania załamania mikrofal.

Obydwa układy równań będą spełnione tylko wtedy, gdy $\alpha_1 = \beta_2 = \alpha$, $\beta_1 = \alpha_2 = \beta$, co zachodzi tylko wtedy, gdy fala wewnątrz pryzmatu biegnie prostopadle do płaszczyzny dwusiecznej kąta łamiącego i gdy doznaje ona najmniejszego odchylenia. Z rysunku 29.11 wynika, że wtedy $2\beta = \varphi$ oraz po uwzględnieniu warunku Brewstera ($\alpha_B + \beta = \pi/2$) mamy

$$\varphi = \pi - \alpha_B.$$

Wyprowadzone tu warunki są spełnione tylko wtedy, jeżeli zgodnie z założeniem fala padająca jest spolaryzowana w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny padania, a więc wektor E leży w płaszczyźnie padania. Zgodnie z definicją względnego współczynnika załamania zachodzi $n_{21} = c_1/c_2$, a zgodnie z wzorem (27.10a)

$$n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}},$$

gdzie wskaźnik 1 oznacza powietrze, a 2 — szkło organiczne.

Przyjmując $\varepsilon_{r1} \simeq 1$, czyli $\varepsilon_1 \simeq \varepsilon_0$, $\mu_1 \simeq \mu_2$ (wykluczamy ciała ferromagnetyczne) otrzymamy

$$n_{21} \simeq \sqrt{\varepsilon_{r2}}, \tag{27.13}$$

lub po uwzględnieniu warunku Brewstera ($\operatorname{tg}\alpha_B = n_{21}$)

$$\operatorname{tg}\alpha_B = \sqrt{\varepsilon_{r2}}, \tag{27.13a}$$

a więc tangens kąta Brewstera jest równy pierwiastkowi z względnej przenikalności dielektrycznej szkła organicznego.

W przypadku, gdy fala elektromagnetyczna rozchodząca się wewnątrz pewnego środowiska pada na powierzchnię graniczną, ulega częściowo odbiciu, a częściowo przechodzi do drugiego środowiska. (W omawianym przypadku drugim środowiskiem jest powietrze.) Zarówno fala odbita, jak i załamana stosują się do praw optyki geometrycznej. Jeżeli kąt padania γ jest równy lub większy od kąta granicznego $\gamma_g (\gamma \geqslant \gamma_g)$, wtedy fala ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu. Dla kąta granicznego zachodzi

$$\sin\gamma_g = n_{12} \simeq \varepsilon_1^{1/2}. \tag{27.14}$$

Kąt załamania jest wtedy równy $\pi/2$, dla powietrza ($\varepsilon_2 \simeq 1$). Całkowite wewnętrzne odbicie zachodzi tylko wtedy, jeżeli drugie środowisko wypełnia całą przestrzeń poza granicą środowiska pierwszego. Jeżeli natomiast środowisko drugie stanowi wewnątrz środowiska pierwszego tylko płaską warstwę o grubości x mniejszej od długości fali w tym środowisku ($x < \lambda$), wtedy część fali przechodzi przez warstwę i całkowite odbicie nie zachodzi. Dla kąta padania $\varphi > \varphi_g$ natężenie fali przechodzącej wyraża się wzorem Eichenwalda

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{4\pi x}{\lambda_1}\sqrt{\sin^2\varphi - n_{21}^2}\right). \tag{27.15}$$

Fala elektromagnetyczna jest w środowisku materialnym pochłaniana. Jej natężenie I maleje zgodnie z prawem Lamberta (30.11)

$$I = I_0 \exp(-\mu d), \tag{27.16}$$

gdzie d — grubość warstwy, μ — współczynnik pochłaniania, I_0 — natężenie fali padającej. Natężenie I_1 i I_2 wiązki przechodzącej przez warstwy o grubościach d_1 i d_2 wyraża się wzorami:

$$I_1 = I_0 \exp(-\mu d_1) \quad \text{oraz} \quad I_2 = I_0 \exp(\mu d_2),$$

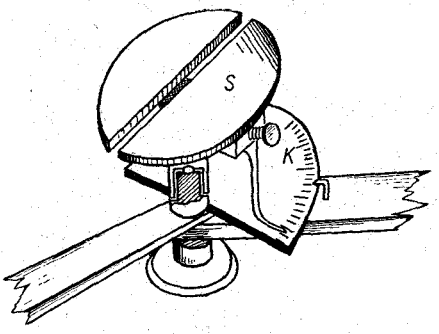
stąd obliczając μ otrzymamy

$$\mu = \frac{1}{d_2 - d_1} \ln \frac{I_1}{I_2}. \tag{27.17}$$

Aparatura

Pomiary wykonujemy za pomocą goniometru mikrofalowego przedstawionego na rys. 27.20. Jego zasada jest podobna jak jednokołowego goniometru optycznego (§ 30.5). Źródłem Z fali elektromagnetycznej jest klistron wraz z tubą T (rys. 27.19). Źródło ustawione jest w ten sposób, że dłuższy bok falowodu jest prostopadły do płaszczyzny padania, dzięki temu wektor E emitowanej fali leży w płaszczyźnie poziomej, czyli

padania. Detektorem D jest druga tuba T_2 połączona z głowicą detekcyjną G. Detektor jest umocowany na obrotowym ramieniu goniometru. W niektórych przypadkach stosuje się spektrometry z dwoma detektorami. Odległość źródło — detektor jest rzędu 800–1000 mm. Położenie ramienia detekcyjnego odczytujemy na kątomierzu K. Stolik S może obracać się wokół osi symetrii. Ma on dodatkowe urządzenie pozwalające zmieniać odległość wzajemną dwóch jego części (rys. 27.20) i mierzyć ją z dokładnością do 0,1 mm. Pryzmaty wykonane ze szkła organicznego są na tyle duże, że przesłaniają całą



27.20. Budowa goniometru do badania załamania mikrofal.

wiązkę mikrofal. Stosuje się pryzmaty o następujących rozmiarach: 1. 430×380 mm o kącie łamiącym 64° dopasowanym do warunku Brewstera, 2. pryzmat o kącie łamiący $\alpha \leqslant 50°$ i bokach rzędu 250–300 mm, 3. dwa pryzmaty o kątach 90°, 45° i 45°, które po złożeniu przeciwprostokątnymi tworzą ściankę w postaci kwadratu o boku 250 mm, 4. płytki pleksi o grubości 100 mm i szerokości 250 mm. Długość wszystkich pryzmatów i płytek jest równa i wynosi $10\lambda (\simeq 300$ mm).

Poziom drgań mierzymy mikroamperomierzem lub galwanometrem zwierciadłowym.

Pomiary

I. Ustawiamy ramię detekcyjne na przedłużeniu źródła i włączamy zasilacz klistronu. Dobieramy wartość napięcia reflektora, przy której uzyskujemy maksymalną moc w detektorze. Również głowicę detekcyjną dostrajamy do maksimum wskazania miernika. Na stoliku goniometru ustawiamy pryzmat badany omówiony w punkcie 1 lub 2, w ten sposób, by kąt padania $\alpha = 0$. Ramieniem detektora wyszukujemy taki kąt δ, dla którego występuje maksymalne wychylenie miernika. Mierzymy również wychylenie I_1. Następnie usuwamy pryzmat, ramię detekcyjne umieszczamy naprzeciw źródła, mierzymy I_0, po czym powtarzamy czynności mające na celu ustalenie kąta δ, wychylenia I_1 oraz I_0. Ustalamy właściwą metodę ustalania błędów mierzonych wielkości i jeżeli zachodzi potrzeba pomiary kąta powtarzamy wielokrotnie. W pozostałej części doświadczenia pomiary kątów wykonujemy jednokrotnie dla kątów padania $\alpha = 5°, 10°, 15°, \ldots,$ 80° dla dwóch pryzmatów.

II. Celem wyznaczenia współczynnika pochłaniania, ustawiamy źródło i detektor w jednej linii i mierzymy natężenie I_0. Następnie na stoliku, prostopadle do wiązki fal, ustawiamy płytkę szkła organicznego (rys. 27.19b) i mierzymy I_1. Do płytki pierwszej przykładamy drugą i mierzymy I_2. Pomiary powtarzamy usuwając kolejno płytki. Jeżeli odczyty różnią się znacznie pomiary, powtarzamy jeszcze raz.

III. Na stoliku umieszczamy dwa pryzmaty 90-stopniowe w ten sposób, by każdy z nich leżał na innej połówce stolika, oraz by stykały się dokładnie przeciwprostokątnymi. Jeden bok pryzmatu jest prostopadły do wiązki fal (rys. 27.19c). Detektorem mierzymy natężenie $I_{\parallel 0}$ wiązki przechodzącej oraz $I_{\perp 0}$ wiązki odbitej od przeciwprostokątnej. Za pomocą pokrętła stolika rozsuwamy pryzmaty na odległość $X_1 = 0{,}3$–$0{,}5$ mm, po czym powtarzamy te same pomiary oznaczając natężenia przez $I_{\parallel 1}$ oraz $I_{\perp 1}$. Podobne pomiary wykonujemy dla odległości $X_n = nX_1$ otrzymując wyniki $I_{\parallel n}$ oraz $I_{\perp n}$.

Obliczenia

Korzystając z wyników części I wykreślamy zależność δ od α dla obydwu pryzmatów i z wykresu tego określamy kąt najmniejszego odchylenia $\delta_{\min}$. Znając $\delta_{\min}$ z wzoru (29.8) obliczamy współczynnik załamania n szkła organicznego w zakresie mikrofal, a następnie z wzoru (27.13a) względną przenikalność dielektryczną. Dla pryzmatu, w którym spełniony jest warunek Brewstera, obliczamy współczynnik pochłaniania μ_1 fal elektromagnetycznych z wzoru (27.16) przyjmując na I_1/I_0 wartość odpowiadającą kątowi najmniejszego odchylenia, a na d przyjmujemy połowę długości podstawy pryzmatu (boku przeciwległego do kąta łamiącego).

Opierając się na wynikach części II obliczamy współczynnik pochłaniania μ_2 szkła organicznego z wzoru (27.17). Obliczamy błędy współczynnika załamania, przenikalności dielektrycznej oraz współczynnika pochłaniania. Sprawdzamy zgodność wyników μ_1 i μ_2 uzyskanych na dwa różne sposoby.

W części III wykreślamy zależność $I_{\parallel}/I_{\parallel 0}$ od X/λ oraz $I_{\perp}/I_{\perp 0}$ od X/λ, gdzie $I_{\parallel 0}$ i $I_{\perp 0}$ oznaczają wynik pomiaru uzyskanego przy $X = 0$. Dla tych samych wartości obliczamy teoretycznie natężenie wiązki przechodzącej $I_t/I_{\parallel 0}$ z wzoru (27.15) i wyniki obliczeń nanosimy również na wykres. Linią ciągłą łączymy punkty teoretyczne, a punkty doświadczalne wyraźnie zaznaczamy, nie łącząc ich żadną linią, jeżeli odstępstwa od przebiegu teoretycznego są nieznaczne. Dyskutujemy krótko zgodność wzoru (27.15) z wynikami doświadczenia.

27.5. DYFRAKCJA MIKROFAL

Cel: zbadanie rozkładu natężeń mikrofal ugiętych na dwóch szczelinach lub na układzie szczelin (siatce dyfrakcyjnej).

Przyrządy: aparatura mikrofalowa (§ 27.04), galwanometr (§ 18.01–03).

Zagadnienia: fale elektromagnetyczne (§ 27.01–03; S3, § 115–118, 123, 126, 128 i 129; P2, rozdz. 5; J, § 22.1–3; H2, § 38 i 39), dyfrakcja i interferencja (§ 31.01), doświadczenie Younga (§ 31.1).

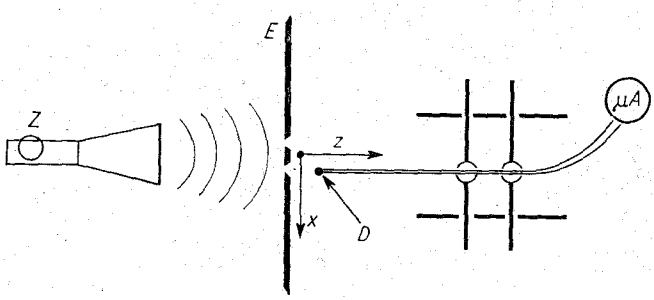
Wprowadzenie

Kiedy na układ równoległych szczelin (rys. 27.21) pada fala płaska, wtedy zgodnie z zasadą Huygensa każda szczelina staje się źródłem nowej fali walcowej. Szczeliny zachowują się jak układ oscylatorów liniowych promieniujących synchronicznie. Powstałe w ten sposób fale interferują i w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny szczelin, odległej od nich o z występują minima i maksima drgań, których położenie określają

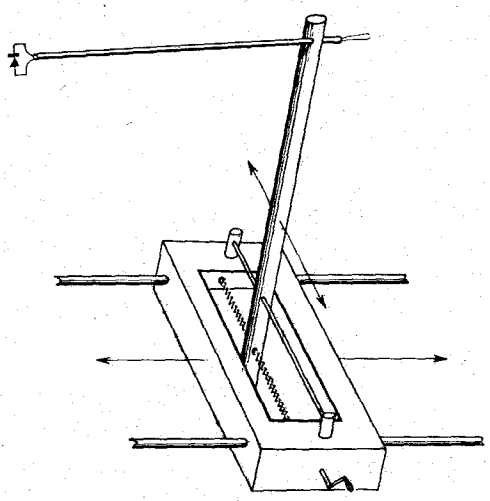
wzory (31.7) i (31.8). Jednakże musimy pamiętać o przybliżonym charakterze powyższych wzorów. Istnieją bowiem zakłócenia fali padającej spowodowane nakładaniem fali odbitej oraz wpływem krawędzi szczelin. Zakłócenia spowodowane tymi czynnikami są szczególnie wyraźne w pobliżu szczelin, a w doświadczeniach mikrofalowych stosowane odległości są małe w porównaniu z długością fali. Wzdłuż osi symetrii natężenie fal pochodzących z podwójnej szczeliny maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od ekranu. Linie równego natężenia tworzą rodzinę hiperbol.

Aparatura

Aparatura (rys. 27.21) składa się ze źródła mikrofal Z, ekranu E z podwójną szczeliną oraz detektora D — diody półprzewodnikowej. Detektor jest zamocowany w uchwycie pozwalającym zmieniać położenie w dużym obszarze prostopadłym do ekranu i szczelin. Jeden z sposobów rozwiązania powyższego układu pokazano na rys. 27.22. Ekran ma wymiary rzędu 500×500 mm, w którego środku znajdują się dwie równoległe szczeliny długości rzędu 10λ, szerokości $\lambda/2$, których odległość wzajemna jest rzędu λ. Źródło (głowica klistronu z tubą) ustawione jest w ten sposób, by pole elektryczne fali było równoległe do szczelin. Dłuższy bok falowodu leży w płaszczyźnie poziomej.



27.21. Aparatura do badania dyfrakcji mikrofal.



27.22. Statyw do przesuwania diody detekcyjnej.

Pomiary

Włączamy klistron, usuwamy ekran i dobieramy napięcie reflektora w ten sposób, by uzyskać maksymalne wskazanie prądu w obwodzie detektora. Ustawiamy ekran na dawnym miejscu, obserwujemy jeszcze chwilę stałość wskazań miernika i przystępujemy do pomiarów. Przyjmujemy, że miarą natężenia fali jest prąd w obwodzie detektora. Pomiary natężenia wykonujemy w płaszczyźnie x, z (rys. 27.21) mierząc zależność natężenia I prądu od położenia x dla następujących wartości z: 0, 10, 20, 30, 40, 50, 70, 100, 120, 150, 200 mm. W tym celu detektor ustawiamy w stałej odległości $z = 30$ mm od ekranu i wykonujemy pomiary natężenia dla x od 0 do +50 mm. Następnie współrzędną y zwiększamy do 40 mm i powtarzamy te same pomiary. Wyniki ujmujemy w tabelki, w których wiersze odpowiadają kolejnym wartościom z, a kolumny kolejnym wartościom x. Dla odległości $z = 150$ i 200 mm pomiary wykonujemy również dla ujemnych wartości x. Staramy się szczególnie dokładnie ustalić położenia minimów i maksimów natężenia wzdłuż osi x. Oddzielnie wykonujemy serię pomiarów zależności $I(z)$ dla $x = 0$. Notujemy dokładności wykonanych pomiarów.

Obliczenia

Wykonujemy wykres topografii linii równego natężenia pola w wielkości naturalnej. Na wykresie nanosimy obraz szczeliny, nanosimy i łączymy minima i maksima odpowiadające różnym wartościom z i sprawdzamy, czy linie te przedstawiają hiperbole. Wykreślamy zależność $I(z^2)$ i sprawdzamy, czy zależność jest liniowa, co dowodzi zgodności z przewidywaniami teoretycznymi. Dla odległości 150 i 200 mm określamy dokładnie odległość symetrycznych maksimów i z wzoru (31.10) obliczamy długość stosowanej fali λ. Korzystając z wykresu przedstawiającego topografię, dla kilku punktów dowodzimy graficznie, że dla maksimów różnica odległości od środków szczelin jest równa całkowitej wielokrotności długości fali. Dyskusję błędu ograniczamy do wyznaczenia błędu $\Delta\lambda$ i kilku punktów pomiarowych na wykresie $I(z^2)$. Na zakończenie krótko omawiamy wyniki pomiarów.

27.6. WNĘKA REZONANSOWA

Cel: wyznaczenie przebiegu krzywej wzorcowania wnęki rezonansowej dla pasma 3 cm oraz przebiegu krzywej rezonansu i dobroci wnęki.

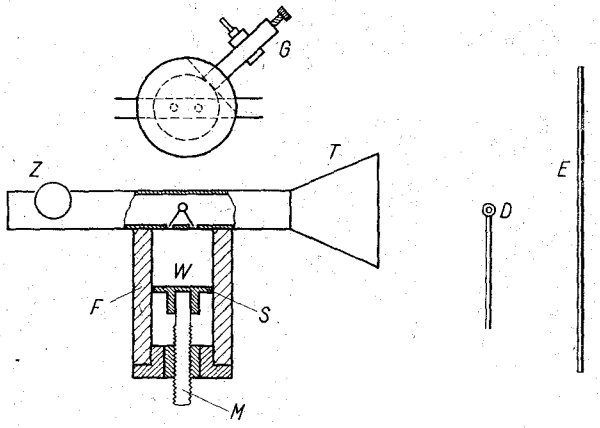
Przyrządy: aparatura mikrofalowa (§ 27.04), mikroamperomierz (§ 18.01–03).

Zagadnienia: fale elektromagnetyczne (§ 27.01–03; S3, § 115–118, 123, 126, 128 i 129; P2, rozdz. 5; J, § 22.1–3; H2, § 38 i 39), rezonans obwodów drgań (§ 26.01, 26.3).

Wprowadzenie i aparatura

Częstość drgań własnych wnęki rezonansowej zależy od jej wymiarów i od objętości. Na rys. 27.23 pokazano wnękę W, w której częstość drgań własnych można w pewnym zakresie zmieniać przesuwając ruchomą ściankę S. Położenie ścianki reguluje się mikromierzem M, dzięki czemu położeniom ścianki przypisać można ściśle określone częstości drgań własnych wnęki. Wywzorcowaną wnękę nazywamy falomierzem. Do falomierza falę wprowadzamy przez dwa otwory o średnicy rzędu 5 mm wykonane w węższej ścianie falowodu w odległości wzajemnej rzędu $\lambda/2$. Drgania we wnęce wzbudzane są

tylko wtedy, jeżeli częstość fali w falowodzie jest równa częstości drgań własnych wnęki. Obecność drgań w falomierzu wykrywamy za pomocą głowicy detekcyjnej G, połączonej z wnęką falomierza również otworem o średnicy rzędu 5 mm. Sposób umieszczenia głowicy zabezpiecza przed rejestrowaniem innych rodzajów fal harmonicznych, które



27.23. Aparatura do badania wnęki rezonansowej.

mogą przypadkowo zostać wzbudzone we wnęce. W doświadczeniu stosujemy głowicę klistronu Z z klistronem K19, w następnym odcinku falowodu znajduje się: falomierz, tuba T i ekran E stosowany do wytworzenia fali stojącej w powietrzu. Falę elektromagnetyczną w powietrzu rejestrujemy detektorem D. Poziom drgań rejestrują dwa mikroamperomierze.

Pomiary

Włączamy układ zasilający klistron i dobieramy wartość napięcia reflektora, przy której mikroamperomierz połączony z detektorem D wykazuje maksimum. Pokrętłem mikromierza dobieramy takie położenie ruchomej ścianki wnęki, przy którym mikroamperomierz połączony z głowicą G wykazuje maksimum. Krzywa rezonansu jest bardzo stroma, a poza nią w komorze drgania nie występują. Położenie ścianki zmieniamy bardzo wolno, gdyż przy szybkim ruchu możemy przejść przez rezonans nie zauważając tego. Postępując podobnie jak w doświadczeniu 27.3 punkt 3 wyznaczamy długość fali w powietrzu. Następnie dobieramy inną wartość napięcia reflektora, przy której klistron generuje falę i powtarzamy te same pomiary. Badamy przebieg krzywej rezonansu wnęki. W tym celu w pobliżu maksimum drgań komory wyznaczamy bardzo dokładnie zależność poziomu drgań od wskazania mikromierza. Krzywa rezonansu falomierza jest zazwyczaj bardzo wąska i pomiary musimy wykonać w bardzo małych odstępach, tak dobranych by na całą krzywą składało się 10 do 15-tu punktów pomiarowych.

Obliczenia

Dla każdej z badanych częstości wyznaczamy długość fali w powietrzu z pomiarów wykonanych dla fali stojącej, postępując w sposób omawiany w doświadczeniu 27.3. Obliczamy również częstości $\omega = 2\pi\lambda c^{-1}$. Wykreślamy zależność wskazania

x mikromierza M od częstości ω. Zakładając, że zależność częstości od wskazań mikromierza jest liniowa, wykreślamy krzywą wzorcowania wnęki, a więc linię prostą przez dwa punkty pomiarowe uzyskane dla poszczególnych częstości klistronu. Określamy również błąd tej krzywej.

Wyniki pomiaru krzywej rezonansu opracowujemy następująco. Z wykreślonej uprzednio krzywej wzorcowania falomierza odczytujemy częstości ω dla wszystkich punktów pomiarowych, określamy częstości rezonansowe ω_r i I_r. Obliczamy wartości stosunku $I/I_r = y$. Wykreślamy zależność y od ω i określamy szerokość krzywej rezonansu w połowie jej wysokości $y = 1/2$. Z wzoru (26.15) obliczamy dobroć wnęki oraz błąd dobroci.

28. ZJAWISKO FOTOELEKTRYCZNE

28.01. ZJAWISKO FOTOELEKTRYCZNE ZEWNĘTRZNE

W normalnych warunkach elektron nie może opuścić metalu. Musi on pokonać potencjał jonizacyjny (por. § 21.01). Energię potrzebną do pokonania tego potencjału otrzymać musi z zewnątrz w postaci: 1. energii cieplnej (wysoka temperatura), 2. silnego pola elektrycznego, 3. bombardowania, 4. energii świetlnej. Pierwsze trzy czynniki omawiano w § 25.01. Obecnie omówimy szczegółowo emisję pod wpływem światła, czyli tzw. fotoemisję lub zjawisko fotoelektryczne. Zjawisko fotoelektryczne dzielimy na: zewnętrzne i wewnętrzne. Zjawisko fotoelektryczne *zewnętrzne* polega na uwalnianiu elektronów z metali pod wpływem oświetlenia. Uwolnione elektrony nazywamy *fotoelektronami*. W wyniku długotrwałych badań ustalono następujące prawidłowości rządzące tym zjawiskiem:

1. Fotoelektrony pojawiają się natychmiast po naświetleniu metalu (po czasie $3 \cdot 10^{-9}$ s).

2. Gęstość prądu fotoelektrycznego, czyli ilość emitowanych fotoelektronów jest proporcjonalna do oświetlenia.

3. Energia fotoelektronów nie zależy od natężenia światła.

4. Energia najszybszych fotoelektronów jest proporcjonalna do częstości ν drgań fali świetlnej.

Prawa powyższe wyjaśnił A. Einstein (1905) w oparciu o korpuskularną teorię światła. Według tej teorii światło składa się z drobnych cząstek zwanych *kwantami*, o energii $h \cdot \nu$, gdzie $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s jest stałą Plancka. Kwant światła padając na metal oddaje swą energię elektronowi tylko jednemu, dzięki czemu elektron pokonać może barierę potencjału Φ oddzielającą go od otoczenia. Nadmiar energii elektron otrzymuje w postaci energii kinetycznej (nabywa prędkości). Tak więc równanie Einsteina przyjmuje postać

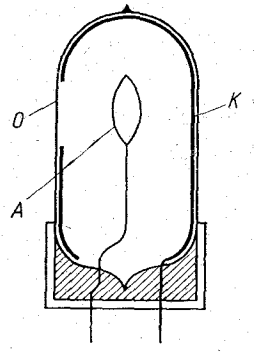
$$h\nu = \Phi + \frac{1}{2} m v^2. \tag{28.1}$$

Dodać należy, że zjawiska fotoelektrycznego nie można wyjaśnić w oparciu o falową teorię światła. Zgodnie z teorią falową wychylenie wyraża się wzorem

$$y = A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Energia kinetyczna fali jest proporcjonalna do kwadratu prędkości z jaką zachodzą drgania, czyli $(\partial y/\partial t)^2$. Ponieważ $\frac{\partial y}{\partial t} = 2\pi A\nu \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)$, energia kinetyczna jest proporcjonalna do $A^2\nu^2$. Można udowodnić, że całkowita energia fali jest również proporcjonalna do kwadratu amplitudy i kwadratu częstości. Zatem jeżeli w zjawisku fotoelektrycznym światło zachowywałoby się jak fala, prędkości najszybszych fotoelektronów powinny być proporcjonalne do kwadratu amplitudy, czyli natężenia światła, co przeczy prawidłowości 3, a także do kwadratu częstości, co z kolei pozostaje w sprzeczności z prawidłowością 4. Wreszcie trzecia sprzeczność teorii falowej światła ze zjawiskiem fotoelektrycznym polega na tym, że w czasie rzędu 10^{-8} s (patrz prawidłowość 1) fala nie zdążyłaby akumulować energii wystarczającej do wyzwolenia elektronu na powierzchni jednego elektronu, będącej rzędu 10^{-15} m^2. Tak więc zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne wyjaśnić można wyłącznie w oparciu o korpuskularną teorię światła. Zaprzecza ono falowej naturze światła. Z równania Einsteina wynika, że istnieje pewna progowa częstość ν_p, dla której energia kwantu $h\cdot\nu_p$ jest równa pracy wyjścia Φ_0. Dla częstości niższych od ν_p zjawiska fotoelektrycznego nie obserwujemy. Dla większości metali ν_p leży powyżej częstości światła widzialnego, w nadfiolecie. W świetle widzialnym zjawisko fotoelektryczne występuje tylko w metalach alkalicznych.

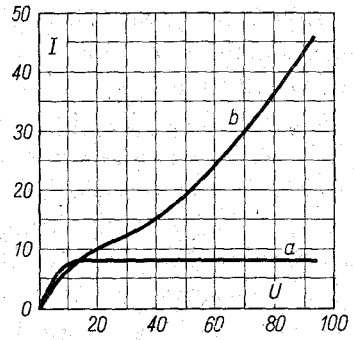
Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne znalazło praktyczne zastosowanie w komórkach fotoelektrycznych. Budowę fotokomórki pokazano na rys. 28.1. Składa się ona z bańki szklanej, której tylna ścianka pokryta jest wewnątrz warstwą metalu wykazującego zjawisko fotoelektryczne przy niskiej stosunkowo częstości światła. Mniej więcej w środku bańki znajduje się pętla z drutu stanowiąca anodę. Przednia ścianka bańki jest przezroczysta i stanowi okienko, przez które można oświetlać światłoczułą warstwę metalu — katodę. Jeżeli wewnątrz bańki panuje próżnia, to fotokomórkę nazywamy próżniową.



28.1. Budowa fotokomórki.

W fotokomórce próżniowej całkowity prąd zależy wyłącznie od ilości wyzwalanych fotoelektronów i jest proporcjonalny od oświetlenia katody. Natężenie prądu jest stosunkowo małe. Większe natężenia prądów można uzyskać w fotokomórkach gazowych wypełnionych niewielką ilością gazu szlachetnego. Ilość nośników prądu w fotokomórce takiej zwiększa się na skutek jonizacji atomów gazu, bombardowanych przez fotoelektrony przyspieszone w polu panującym pomiędzy elektrodami. Ilość zjonizowanych atomów, a tym samym i natężenie prądu fotoelektrycznego wzrasta wraz ze wzrostem przy-

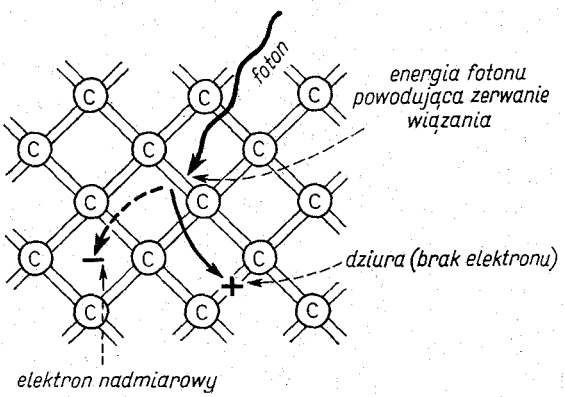
łożonego napięcia i w fotokomórce gazowej nie uzyskuje się stanu nasycenia. W przypadku gdy do fotokomórki przyłożymy za duże napięcie, może powstać jonizacja lawinowa i prąd rośnie wtedy nieograniczenie niszcząc fotokomórkę. Dla zapobieżenia temu zjawisku, w szereg z fotokomórką łączy się duży opornik. Na rysunku 28.2 pokazano przebieg charakterystyk fotokomórki próżniowej (krzywa *a*) oraz gazowej (krzywa *b*).



28.2. Przebieg charakterystyki fotokomórek: próżniowej (a) i gazowanej (b).

28.02. ZJAWISKO FOTOELEKTRYCZNE WEWNĘTRZNE (zapoznać się z § 21.01 oraz z wprowadzeniom do doświadczenia 21.3)

W przypadku zjawiska fotoelektrycznego wewnętrznego kwanty światła przenoszą elektrony z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa, wskutek czego wzrasta przewodnictwo właściwe. Zjawisko to wystąpi tylko dla częstości wyższych od pewnej granicznej ν_g, dla której energia kwantu jest równa szerokości pasma wzbronionego

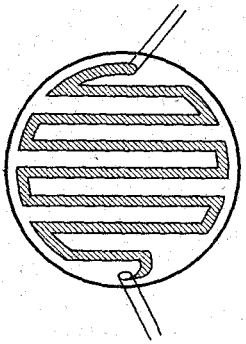


28.3. Modelowe przedstawienie zjawiska fotoelektrycznego wewnętrznego.

ΔE. Zjawisko fotoelektryczne wewnętrzne można wyjaśnić pomijając teorię pasmową. Kwanty światła padając na półprzewodnik np. german zrywają wiązania atomowe łączące atomy i uwalniają elektrony tworzące to wiązanie.

Uwolnione elektrony mogą poruszać się swobodnie w krysztale. Miejsce po uwolnionym elektronie może zająć elektron z wiązania sąsiedniego. Wtedy brak elektronu

w wiązaniu, czyli tzw. dziura przenosi się do wiązania sąsiedniego. Zatem zarówno fotoelektrony jak i dziury mogą poruszać się w ciele, a tym samym przewodzić prąd. Jeżeli jednak para elektron i dziura znajdują się w tym samym miejscu, wtedy elektron zajmuje wolne miejsce w wiązaniu i obydwa nośniki znikają. Proces taki nazywamy rekombinacją. Ilość rekombinacji jest zależna od ilości nośników i w miarę jak w czasie oświetlania wzrasta ilość nośników wzrasta również ilość rekombinacji, wskutek czego ustala się równowaga dynamiczna, w której ilość dodatkowych nośników zależy tylko od ilości powstających nośników, czyli od oświetlenia. Zjawisko fotoelektryczne wewnętrzne zachodzi tylko w cienkiej warstwie powierzchniowej, w której padające światło nie zostało jeszcze całkowicie zaabsorbowane. Celem zwiększenia efektu należy do maksimum zwiększyć powierzchnię próbki nadając jej kształt cienkiej blaszki. Ponieważ opór elektryczny próbki zależy od ilości nośników, opór próbki oświetlonej jest mniejszy od oporu próbki nieoświetlonej. Zjawisko to znalazło zastosowanie praktyczne w fotoopornikach. Fotooporník składa się z długiej i cienkiej taśmy półprzewodnika ułożonej w sposób pokazany na rys. 28.4. Przed uszkodzeniami mechanicznymi taśma jest chroniona warstwą szkła organicznego. Fotooporniki znajdują zastosowanie praktyczne m. in. w telewizorach, gdzie są stosowane w układach służących do automatycznej regulacji jasności obrazu w zależności od oświetlenia pomieszczenia.



28.4. Budowa fotoopornika.

Inne efekty wywołuje zjawisko fotoelektryczne na złączach półprzewodnik-metal. Wiązka światła padająca na styk zakłóca stan równowagi dynamicznej warstwy podwójnej. Kwanty światła przekazują swoją energię elektronom. W półprzewodniku przenoszą elektrony z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa. Zatem w półprzewodniku wzrasta ilość swobodnych elektronów, które w warunkach istniejącej równowagi dynamicznej przechodzą natychmiast do metalu ładując go ujemnie. Oświetlone złącze staje się źródłem prądu i jest nazywane fotoogniwem. Istnieją dwa typy fotoogniw: miedziowe i talowe. Budowę fotoogniwa miedziowego pokazano na rys. 28.5. Na miedzianym podłożu znajduje się warstwa tlenku miedzi, który jest półprzewodnikiem typu *p*. Na powierzchni tlenku znajduje się cienka, przezroczysta warstwa metalu: srebra, miedzi itp. Na górnym złączu CuO-metal światło przenosi pewną ilość elektronów do pasma przewodnictwa, które natychmiast przechodzą do metalu ładując go ujemnie. Na drugim złączu zjawisko to nie występuje, ponieważ światło nie przenika przez warstwę CuO. Na rysunku 28.6 pokazano przekrój fotoogniwa talowego. Tu warstwa po-

W drugiej części doświadczenia należy dowieść, że natężenie prądu fotoelektrycznego jest proporcjonalne do oświetlenia. Ponieważ oświetlenie pochodzące od punktowego źródła światła jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości, wykres zależności $I(d^{-2})$ powinien być linią prostą. Zatem wykreślamy zależność $I(d^{-2})$ i dyskutujemy uzyskane wyniki.

28.2. FOTOOPORNIK

Cel: zbadanie zależności oporu fotoopornika od odległości źródła światła i zależności natężenia prądu płynącego przez fotoopornik od przyłożonego napięcia.

Przyrządy: oporniki (§ 4.2), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

Zagadnienia: zjawisko fotoelektryczne (§ 28.01–02; S5, § 9–11; J, § 28.2–5; H2, § 47.4 i 5), półprzewodniki (§ 21.01).

Aparatura i pomiary

Źródłem światła jest okrągły otwór wykonany w metalowym ekranie, oświetlony żarówką kinową. Fotoopornik jest zamocowany wewnątrz rurki, co zabezpiecza go przed wpływem światła rozproszonego. Obwód łączymy według schematu 4.18. Na wstępie mierzymy zależność natężenia I od odległości źródła światła d przy ustalonej wartości napięcia U_s przykładanego do fotoopornika ($U_s \leqslant 2$ V). Pomiary wykonujemy dla 10 do 15-tu różnych wartości d i powtarzamy dla dwóch innych napięć U_s.

W drugiej części doświadczenia mierzymy zależność natężenia I od przyłożonego napięcia U. Pomiary wykonujemy dla opornika nieoświetlonego, gdy koniec rurki mieszczącej fotoopornik jest zakryty. Powtarzamy je dla przypadków, gdy fotoopornik jest oświetlony tylko światłem rozproszonym, a więc gdy rurka jest odkryta, lecz żarówka oświetlająca wyłączona oraz wtedy, gdy fotoopornik jest oświetlony z stałej odległości d_0.

Obliczenia

Wyniki pierwszej części doświadczenia opracowujemy następująco: dla każdego pomiaru obliczamy opór R oraz kwadrat odwrotności odległości d^{-2} i wykreślamy zależność $R(d^{-2})$ na wspólnym arkuszu dla wszystkich trzech serii pomiarów. Dla kilku punktów nanosimy błędy. Wykresy powinny przedstawiać linię prostą, lecz dla bliskich odległości źródła mogą wystąpić odstępstwa, ponieważ wtedy nie jest słuszne założenie punktowości.

Pomiary zależności prądu I od napięcia U opracowujemy następująco: obliczamy metodą najmniejszych kwadratów nachylenie R krzywych $U(I)$, które zgodnie z prawem Ohma jest równe oporowi, oraz nachylenie standardowe $S_{\bar{R}}$. Krótko omawiamy wnioski wynikające z wykonanych pomiarów.

25.3. Fotodioda

Cel: badanie fotodiody przy polaryzacji zaporowej, gdy dioda spełnia rolę fotoopornika o dużej czułości oraz w połączeniu, w którym dioda spełnia rolę fotoogniwa.

Przyrządy: termoogniwo (§ 3.6), dmuchawa (§ 3.10), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

Zagadnienia: zjawisko fotoelektryczne (§ 28.01–02; S5, § 9–11; J, § 28.2–5; H2, § 47.4 i 5), półprzewodniki (§ 21.01 i wprowadzenie do doświadczenia 21.3).

Pomiary

W pierwszej części doświadczenia łączymy układ według schematu 4.18. Zachowujemy stałą wartość napięcia U i mierzymy zależność natężenia płynącego prądu I od odległości źródła d. Ponadto dla niewielkiej odległości d mierzymy zależność natężenia prądu od przyłożonego napięcia U. Pomiary takie powtarzamy dla 2–3 odległości d. Wielkość błędu odległości ustalamy doświadczalnie. W tym celu przy stałym napięciu U mierzymy dla danej odległości d_1 natężenie I. Odsuwamy nieco źródło i na powrót przysuwamy do takiego miejsca, dla którego prąd osiągnie pierwotną wartość I, po czym odczytujemy odległość d_2. W podobny sposób ustalamy wartość d_3. Analizujemy uzyskane wyniki i określamy minimalną liczbę pomiarów d. W podobny sposób przy ustalonym $d(=\text{const})$ określamy błąd I zmieniając przyłożone napięcie U, a następnie wracając do jego pierwotnej wartości.

W drugiej części doświadczenia badamy zależność prądu fotoelektrycznego diody połączonej wprost z mikroamperomierzem od odległości d źródła światła. Dla ustalonych wartości d mierzymy zależność natężenia prądu I od temperatury T diody. Diodę podgrzewamy za pomocą suszarki do włosów (fenu), a temperaturę mierzymy za pomocą termoogniwa przytwierdzonego na stałe do fotodiody. Temperaturę odczytujemy wprost z miernika lub z załączonego wykresu.

Obliczenia

Obliczamy wielkości d^{-2} i $R(=U/I)$ dla pomiarów zależności natężenia prądu od odległości d, a następnie wykreślamy uzyskane zależności $R(d^{-2})$. Wykresy powyższe powinny przedstawiać linię prostą. Jeżeli wystąpią odstępstwa od liniowości, krótko dyskutujemy ewentualne przyczyny. Obliczamy metodą najmniejszych kwadratów nachylenie R wyznaczanej zależności $U(I)$, które zgodnie z prawem Ohma jest równe oporowi fotodiody. Obliczamy również błąd $S_{\overline{R}}$ i wykreślamy powyższą zależność $U(I)$. Wykreślamy zależność natężenia prądu od temperatury $I(T)$. Spadek prądu jest w tym przypadku związany z wzrostem ilości nośników mniejszościowych w obydwu częściach złącza. Na wykresach zaznaczamy błędy pomiarowe i krótko omawiamy wyniki.

29. OPTYKA GEOMETRYCZNA

29.01. SOCZEWKI

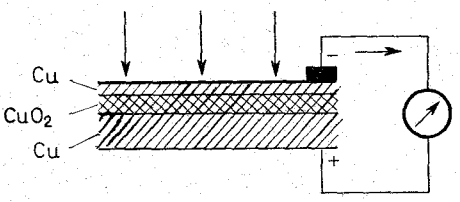
Soczewką nazywamy bryłę przezroczystego materiału ograniczoną dwoma powierzchniami sferycznymi, których środki krzywizny leżą na jednej osi. Oś łączącą środki krzywizny obydwu powierzchni nazywamy *osią optyczną soczewki*. Każdy promień świetlny ulega dwukrotnie załamaniu na powierzchniach ograniczających soczewkę. Na rysunkach załamanie dwukrotne zastępujemy jednokrotnym załamaniem na tzw. powierzchni środkowej, czyli powierzchni prostopadłej do osi optycznej przechodzącej przez punkt leżący na osi optycznej w środku grubości soczewki. Wiązka promieni biegnących równolegle do osi optycznej, po przejściu przez soczewkę skupia się w jednym punkcie zwanym *ogniskiem*. Odległość ogniska od powierzchni środkowej nazywamy *ogniskową soczewki*.

W każdej soczewce istnieje *środek optyczny*, który jest punktem wykazującym następującą właściwość: promień biegnący pod dowolnym kątem względem osi optycznej nie ulega załamaniu, jeżeli przechodzi przez środek optyczny. Istnieją soczewki zbierające i rozpraszające. W przypadku, gdy współczynnik załamania materiału soczewki jest większy od współczynnika załamania otaczającego środowiska, soczewki zbierające są grubsze w środku niż na brzegach, a soczewki rozpraszające są grubsze na brzegach. W przypadku, gdy grubość soczewki jest mała w porównaniu z promieniami krzywizny, soczewkę nazywamy *cienką*. Nasze rozważania dotyczą w pierwszym rzędzie soczewek cienkich. Ogniskową soczewki cienkiej obliczyć możemy teoretycznie z wzoru

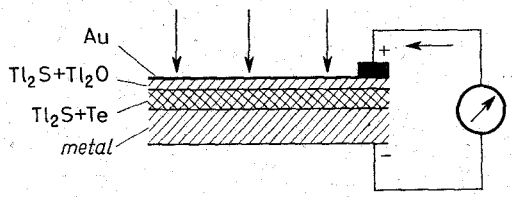
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{29.1}$$

w którym n — współczynnik załamania materiału soczewki względem otaczającego środowiska, f — ogniskowa, R_1 i R_2 — promienie krzywizn soczewki. Ognisko w soczewce rozpraszającej leży po stronie wiązki równoległej, a ogniskowa jest ujemna (rys. 29.1). Wielkość $D = 1/f$ nazywamy *zdolnością zbierającą*. Jednostką zdolności zbierającej jest dioptria o wymiarze m^{-1}.

dwójna znajduje się pomiędzy przezroczystą warstwą złota i warstwą siarczku talu Tl_2S, który jest półprzewodnikiem typu *n*. Ze względu na inny typ przewodnictwa kierunek siły fotoelektrycznej jest tu również przeciwny niż w przypadku poprzednim.



28.5. Budowa fotoogniwa miedziowego.



28.6. Budowa fotoogniwa talowego.

28.1. FOTOKOMÓRKA

Cel: zbadanie przebiegu charakterystyki fotokomórki próżniowej lub gazowej oraz zbadanie natężenia prądu fotoelektrycznego od odległości źródła światła.

Przyrządy: oporniki i potencjometry (§ 4.2), mierniki elektryczne (§ 18.01–03).

Zagadnienia: zjawisko fotoelektryczne (§ 28.01; S5, § 9–11; J, § 28.1–5, H2, § 47.4 i 5).

Aparatura

Fotokomórka odpowiednio oprawiona jest umocowana w koniku na ławie optycznej. Dla usunięcia wpływu światła rozproszonego otwór w obudowie fotokomórki jest zaopatrzony w długi tubus. Na drugim koniku znajduje się źródło światła. Źródło to powinno być punktowe. Rolę punktowego źródła spełnia otworek o średnicy kilku milimetrów, oświetlany bardzo silnym źródłem światła np. żarówką kinową. Jednakże nawet takie źródło światła można uważać za punktowe tylko dla dużych odległości rzędu 1 m.

Pomiary

Układ łączymy według schematu 4.18. Dla stałej odległości d źródła światła dobranej w ten sposób, by przy napięciu 120 V prąd fotoelektryczny nie przekraczał zakresu stosowanego mikroamperomierza, mierzymy zależność natężenia prądu fotoelektrycznego U, w zakresie od 0 do 11 V. Dla danej odległości d_1 wykonujemy najpierw jedną serię pomiarów, a następnie napięcie zmniejszamy do zera i wszystkie pomiary powtarzamy. Podobne pomiary wykonujemy dla czterech innych odległości. Wszystkie pomiary wykonujemy dla dwóch fotokomórek: próżniowej i gazowej.

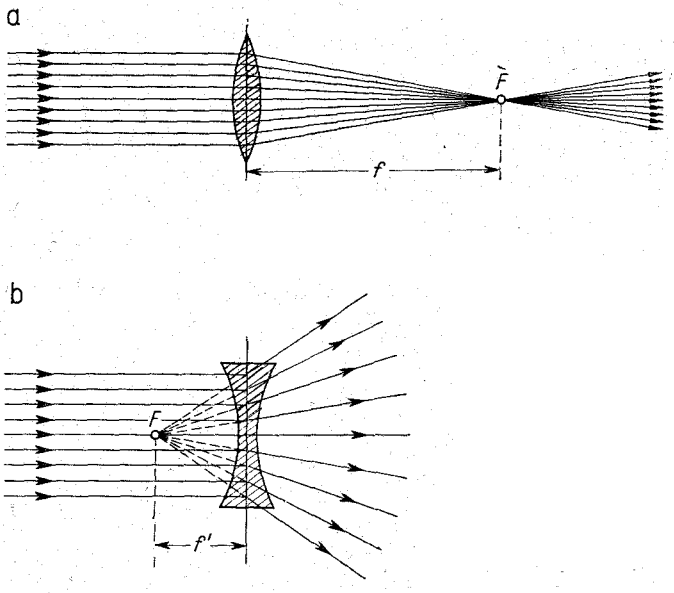
Zależność prądu fotoelektrycznego od odległości źródła światła badamy przy stałym napięciu przykładanym do fotokomórki (np. 100 V). Ze względu na to, że nie dysponujemy punktowym źródłem światła, pomiary wykonujemy przy dużych odległościach źródła od fotokomórki rzędu 50–100 cm.

Obliczenia

Obliczamy średnie natężenie prądu z pomiarów wykonanych w pierwszej części doświadczenia i wykreślamy charakterystyki fotokomórek tzn. zależność natężenia I od przyłożonego napięcia U, nanosząc dane dotyczące różnych odległości na jeden arkusz. Dla kilku punktów pomiarowych nanosimy błędy.

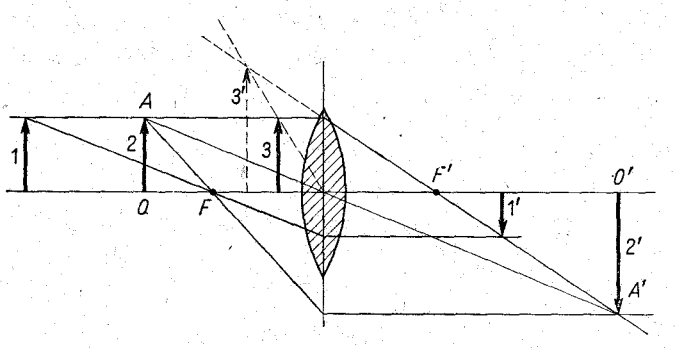
Wszystkie promienie wybiegające pod małym kątem względem osi optycznej z punktu P stanowiącego przedmiot skupiają się po przejściu przez soczewkę w punkcie O zwanym obrazem. Obraz nazywamy rzeczywistym, jeżeli przecinają się promienie, gdy natomiast przecinają się przedłużenia promieni, obraz nazywamy pozornym. Odległości a przedmiotu i b obrazu od środka optycznego soczewki oraz ogniskowa f spełniają następujący związek:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \tag{29.2}$$



29.1. Załamanie wiązki równoległej w soczewce zbierającej (a) i rozpraszającej (b).

Przyjmujemy następującą umowę dotyczącą znaków odległości: jako dodatnie przyjmujemy odległości mierzone wzdłuż promieni rzeczywistych oraz odległości w górę od osi optycznej, ujemne są odległości mierzone wzdłuż promieni pozornych (przedłużeń promieni rzeczywistych) oraz w dół od osi optycznej. Promień krzywizny jest dodatni, gdy powierzchnia ograniczająca soczewkę jest wypukła, a ujemny, gdy jest wklęsła. Obraz w soczewce wykreślić możemy stosując konstrukcję geometryczną (rys. 29.2).

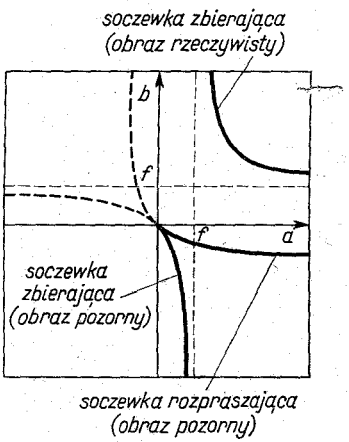


29.2. Zasady wykreślania obrazów.

W tym celu bierzemy pod uwagę następujące trzy promienie: 1. Promień biegnący przez środek optyczny soczewki, który nie zmienia kierunku biegu. 2. Promień równoległy do osi optycznej, który po załamaniu przechodzi przez ognisko F'. 3. Promień biegnący przez ognisko F, który po załamaniu biegnie równolegle do osi optycznej. W praktyce wystarczy wziąć pod uwagę dwa z tych promieni. Stosunek wielkości obrazu $O'A'$ do wielkości przedmiotu OA nazywamy powiększeniem liniowym W_l. Z rys. 29.2 wynika związek

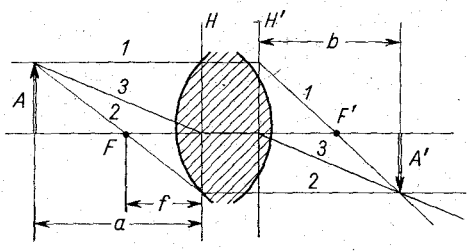
$$W_l = \frac{O'A'}{OA} = \frac{b}{a}. \tag{29.3}$$

Rysunek 29.3 przedstawia zależność b od a według równania (29.2). Są to hiperbole o asymptotach $a = f$, $b = f$ w przypadku soczewki zbierającej lub $a = -f$, $b = -f$ w przypadku soczewki rozpraszającej. Części hiperboli odpowiadające ujemnym wartościom a nie mają fizycznego znaczenia. Z wykresu 29.3 możemy odczytać jaki obraz otrzymamy przy danej odległości przedmiotu.



29.3. Przedstawienie graficzne równania (29.2) soczewki cienkiej.

W przypadku soczewek grubych i układów optycznych złożonych z kilku soczewek o wspólnej osi optycznej stosować musimy inne metody wykreślania obrazu. Poza pojęciem ognisk F i F' wprowadzamy pojęcie *płaszczyzn głównych* H i H'. Płaszczyzny główne spełniają następujący warunek: przedmiot umieszczony w płaszczyźnie H daje obraz prosty o tych samych rozmiarach w płaszczyźnie H'. Obraz dla promieni rzeczywistych wykreślamy według następujących zasad (rys. 29.4): 1. Pomiędzy płaszczyznami



29.4. Bieg promieni w soczewce grubej.

głównymi H i H' promienie biegną równolegle do osi. 2. Promień *1* biegnący od strony przedmiotu załamuje się na płaszczyźnie H' i przechodzi przez ognisko F'. 3. Promień *2* biegnący przez ognisko F załamuje się na płaszczyźnie H i biegnie dalej równolegle do osi optycznej. 4. Promień *3* biegnący przez punkt przecięcia płaszczyzny H z osią optyczną doznaje równoległego przesunięcia. Ogniskowa f układu optycznego składającego się z dwóch soczewek cienkich o ogniskowych f_1 i f_2 znajdujących się we wzajemnej odległości d wyraża się wzorem

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \tag{29.4}$$

29.1. SOCZEWKI CIENKIE

Cel: wyznaczenie ogniskowych soczewek cienkich i układu optycznego różnymi metodami, wyznaczenie współczynnika załamania.

Przyrządy: luneta (§ 4.13).

Zagadnienia: optyka geometryczna (§ 29.01; S4, § 1–15; J, § 23.1–17; H2, § 41.1–42.5), podstawowe wiadomości o świetle (§ 28.01, § 31.01, § 32.01).

Wprowadzenie i aparatura

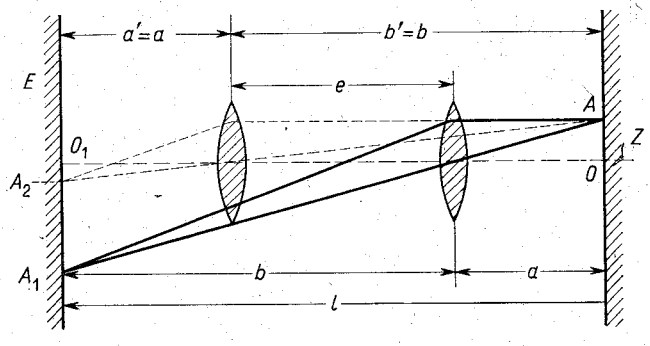
Istnieje kilka metod wyznaczania ogniskowych soczewek:

I. Pomiar ogniskowej w oparciu o równanie soczewkowe (*29.2*). W tym przypadku korzystając z ławy optycznej i świecącego przedmiotu dobieramy warunki w ten sposób, by na ekranie uzyskać obraz. Mierząc odległości przedmiotu a i obrazu b od soczewki obliczamy ogniskową z równania (29.2). Pomiar taki może być obarczony błędem systematycznym, ponieważ nie znamy dokładnie położenia środka optycznego soczewki.

II. Metoda Bessela. Występujące we wzorze (29.2) wielkości a i b można zamienić. W rzeczywistości zamianie takiej odpowiada takie przesunięcie soczewki przy stałej odległości przedmiotu i ekranu, by odległość obrazu wynosiła a, zaś odległość przedmiotu b. Z rysunku 29.5 wynika, że

$$a+b = l,$$

$$a-b = e.$$

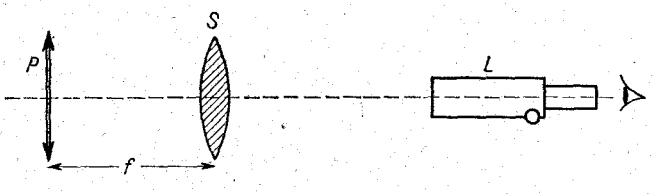


29.5. Ilustracja metody Bessela wyznaczania ogniskowych soczewek.

Obliczając stąd a i b, a następnie podstawiając do wzoru (29.2) otrzymamy

$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l}. \tag{29.5}$$

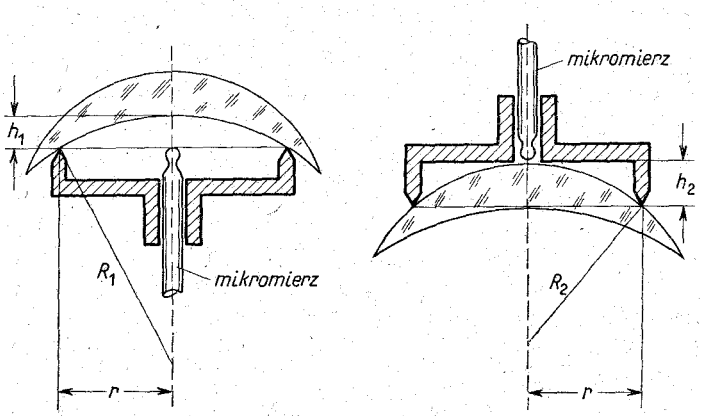
III. Zastosowanie lunety. Wiązka światła wybiegająca z ogniska po przejściu przez soczewkę jest wiązką równoległą. Ustawiając więc przedmiot w ognisku nie otrzymamy obrazu. Obraz ten uzyskać możemy za pomocą lunety nastawionej na nieskończoność. Ostry obraz w lunecie otrzymamy wtedy, gdy przedmiot znajduje się w ognisku soczewki (rys. 29.6).



29.6. Wyznaczanie ogniskowej soczewek za pomocą lunetki.

IV. Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki. Wysokość czaszy kulistej h soczewki możemy mierzyć za pomocą sferometru. Sferometr składa się z mikromierza o dokładności 0,01 mm osadzonego w środku koła o promieniu r (rys. 29.7). Wiadomo, że promień R kuli (w naszym przypadku jest to promień krzywizny), promień r podstawy czaszy kulistej i wysokość h czaszy spełniają związek

$$r^2 = (2R - h)h.$$



29.7. Wyznaczanie promieni krzywizn soczewki za pomocą głębokościomierza lub sferometru.

Zatem mierząc r i h obliczyć możemy promień krzywizny R wyrażony wzorem

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}. \tag{29.6}$$

Niektóre sferometry oparte są na trzech nóżkach, których wzajemna odległość c jest

równa bokowi trójkąta równoramiennego wpisanego w koło o promieniu r, więc $c = \sqrt{3}r$. Wtedy wzór (29.6) przyjmie postać

$$R = \frac{c^2 + 3h^2}{6h}. \tag{29.6a}$$

Wysokość czaszy kulistej jest różnicą między wskazaniem sferometru ustawionego na powierzchni płaskiej i wskazania uzyskanego dla badanej soczewki. Przyjmujemy $h > 0$ dla powierzchni wypukłej, a $h < 0$ dla powierzchni wklęsłej. Na podobnej zasadzie oparte jest działanie tzw. głębokościomierzy.

Pomiary

I i *II*. Ustawiamy źródło światła, przedmiot (nieprzezroczysty ekran z otworem w kształcie np. litery przysłonięty szkłem matowym), soczewkę badaną i ekran na ławie optycznej. Położenie soczewki dobieramy tak, aby uzyskać obraz powiększony i wykonujemy kolejno pomiary odległości: a i b według metody *I*; a' i b' według metody Bessela (*II*). Pomiary te wykonujemy oddzielnie dla dwóch soczewek, a następnie dla układu złożonego z obydwu soczewek. Liczbę każdorazowych pomiarów uzależniamy od wyników analizy serii próbnej. Podobnie postępujemy w pozostałych przypadkach.

III. Usuwamy ekran, nastawiamy lunetkę na ostrość widzenia odległego punktu, ustawiamy lunetkę na miejscu ekranu i dobieramy położenie soczewki w ten sposób, by w lunetce uzyskać ostry obraz przedmiotu lub jego fragmentu. Mierzymy odległość przedmiotu od soczewki. Podobny pomiar wykonujemy dla drugiej soczewki. Zapisujemy błąd odczytu.

IV. Za pomocą głębokościomierza lub sferometru mierzymy wysokość czaszy kulistej każdej strony obydwu soczewek.

Obliczenia

W oparciu o wyniki pomiarów wykonanych w części *I* i *II* obliczamy odpowiednio z wzoru (29.2) lub (29.5) ogniskową badanej soczewki lub układu soczewek. Ogniskowe te oznaczamy f_1, f_2 i f_u. Obliczamy błędy obydwu ogniskowych. Z pomiarów wykonanych w części *III* otrzymaliśmy wartości ogniskowych f_1' i f_2' wprost z pomiaru. Sprawdzamy zgodność wyników f_1 i f_1' oraz f_2 i f_2'. Obliczamy teoretyczną wartość ogniskowej układu f_u' z wzoru (29.4) i sprawdzamy zgodność tego wyniku z wartością f_u. Korzystając z pomiarów wykonanych w części *IV* obliczamy promienie krzywizny soczewek z wzoru (29.6) lub (29.6a), a następnie korzystając z wartości średniej $f = \frac{1}{2}(f_i + f_i')$, gdzie $i = 1, 2$ obliczamy współczynniki załamania szkła soczewek według wzoru (29.1).

W doświadczeniu wyznaczać można również doświadczalnie wykres 29.3. W tym celu odległość a soczewki od przedmiotu kolejno zwiększamy i każdorazowo mierzymy odległość obrazu, pomiary te wykonujemy dla a zmieniającego się np. co 5 cm w całym dostępnym do pomiaru przedziale.

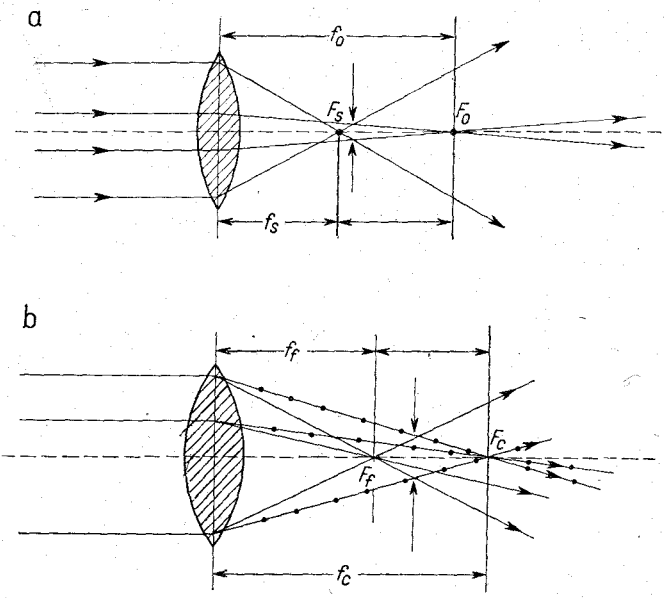
Cel: wyznaczenie podłużnej i poprzecznej aberracji sferycznej i chromatycznej.

Przyrządy: filtry optyczne (§ 4.14).

Zagadnienia: optyka geometryczna (§ 29.01; S4, § 1–15; J, § 23.1–17; H2 § 41.1–42.5), podstawowe wiadomości o świetle (§ 28.01, § 31.01, § 32.01).

Wprowadzenie

Wiązka promieni biegnących równolegle do osi optycznej nie skupia się dokładnie w jednym punkcie. Ognisko F_s promieni skrajnych leży bliżej soczewki niż ogniska F_0 promieni biegnących w pobliżu osi optycznej (rys. 29.8). Obydwom ogniskom odpowiadają ogniskowe f_s i f_0. Wielkość $f_0 - f_s$ nazywamy podłużną aberracją sferyczną.



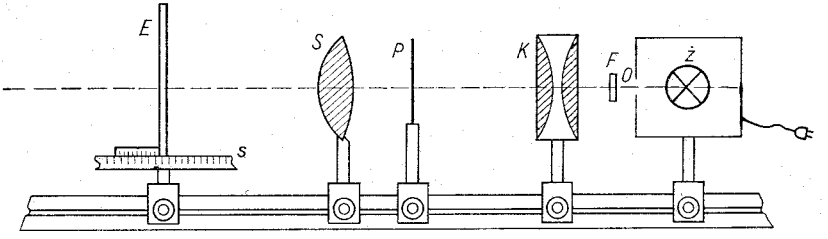
29.8. Aberracja sferyczna (a) i chromatyczna (b).

Ze względu na aberrację nie istnieje miejsce, w którym promienie skupiłyby się dokładnie w jednym punkcie. Zamiast punktu obserwujemy krążek świetlny o promieniu zależnym od odległości od soczewki. Promień najmniejszego krążka uzyskanego na ekranie jest miarą poprzecznej aberracji sferycznej. Wielkość aberracji sferycznej zależy od ustawienia soczewki, gdy jest ona ustawiona stroną o większej krzywiźnie (mniejszym promieniu krzywizny) w stronę źródła światła, aberracja jest mniejsza. W przypadku soczewki rozpraszającej ognisko promieni skrajnych leży również bliżej soczewki niż ognisko promieni bliskich osi optycznej, lecz obydwa ogniska ustawione są w przeciwnej kolejności niż w przypadku soczewki skupiającej. Z tego powodu aberracji soczewki rozpraszającej przypisujemy znak „−". Dzięki temu w układzie optycznym składającym się z soczewek skupiających i rozpraszających wykonanych z różnych gatunków szkła można tak dobrać grubości soczewek, że aberracja sferyczna zostaje wyeliminowana.

Poza aberracją sferyczną istnieje również aberracja chromatyczna. W szkle zachodzi zjawisko dyspersji polegające na tym, że współczynnik załamania zależy od długości fali. Z tego powodu w soczewce inaczej załamują się promienie czerwone, a inaczej fioletowe. Najsilniej załamują się promienie fioletowe, stąd ognisko F_f dla promieni fioletowych leży blisko soczewki. Dla promieni czerwonych ognisko F_c leży najdalej. Podłużną aberracją chromatyczną nazywamy odległość między ogniskami $f_c - f_f$. W podobny sposób jak dla aberracji sferycznej definiujemy poprzeczną aberrację chromatyczną. Jako jej miarę przyjmujemy średnicę najmniejszego krążka świetlnego (rys. 29.8b) uzyskanego na ekranie.

Aparatura

Aparatura (rys. 29.9) składa się z silnego źródła światła $Ż$ oświetlającego mały otwór O, kondensora K dającego wiązkę równoległą o średnicy ok. 20 cm, soczewki S płasko-wypukłej o dużej średnicy i krótkiej ogniskowej, ekranu E, którego położenie na ławie optycznej odczytywać można z dokładnością do 0,1 mm, kompletu przesłon P oraz filtrów F przepuszczających tylko czerwoną, lub tylko fioletową część widma. Musimy dysponować przynajmniej dwoma przesłonami, z których jedna przepuszcza tylko promienie brzegowe zasłaniając promienie przyosiowe, a druga przepuszcza wyłącznie promienie dalekie od osi. Możemy również zastosować trzecią, przepuszczającą promienie pośrednie.



29.9. Aparatura do badania wad soczewek.

Pomiary

Usuwamy badaną soczewkę z ławy optycznej, a źródło światła przesłaniamy filtrem czerwonym. Położenie kondensora dobieramy w ten sposób, by uzyskać wiązkę równoległą. Równoległość wiązki kontrolujemy przesuwając ekran wzdłuż ławy optycznej. W wiązce równoległej średnica krążka świetlnego musi być równa dla dowolnego położenia ekranu. W równoległej wiązce światła ustawiamy badaną soczewkę i przesłaniamy ją przesłoną z otworem w środku. Ekran przesuwamy w położenie, w którym krążek światła ma najmniejszą średnicę (ognisko), odczytujemy położenie ekranu a_6 i soczewki badanej b. Zmieniamy przesłonę zakładając taką, która przepuszcza wyłącznie promienie brzegowe, korygujemy i odczytujemy położenie ekranu $a_ś^c$. Gdy dysponujemy jeszcze jedną przesłoną pośrednią, w podobny sposób określamy a_p^c. Każdy pomiar powtarzamy przynajmniej 3-krotnie nastawiając każdorazowo na nowo położenie ekranu. Podobną serię pomiarów wykonujemy po zastąpieniu filtru czerwonego fil-

trem fioletowym otrzymując odpowiednio a_0^f, a_s^f i a_f^p. W czasie wykonywania tych pomiarów nie zmieniamy położenia b soczewki badanej i kondensora. Pomiary powtarzamy po odwróceniu soczewki badanej, wyniki oznaczamy tak samo ze znaczkiem prim: a_0', a_s' itp.

Celem wyznaczenia aberracji poprzecznej usuwamy filtr świetlny oraz przesłonę i ekran przesuwamy do położenia, w którym uzyskujemy najmniejszą średnicę plamki świetlnej, odczytujemy tę średnicę $2r$ na skali znajdującej się na ekranie. Następnie przez soczewkę umieszczamy przesłonę przepuszczającą wyłącznie promienie przyosiowe i powtarzamy pomiar najmniejszej średnicy wiązki ($2r_0$). Podobny pomiar wykonujemy dla promieni skrajnych ($2r_s$) stosując właściwą przesłonę. Notujemy dokładności wykonanych pomiarów.

Obliczenia

Ogniskowe dla poszczególnych przypadków wyrażają się wzorami

$$|f_s^c| = |b-a_s^c|,\ |f_s^f| = |b-a_s^f|,\ |f_0^c| = |b-a_0^c|,\ |f_0^f| = |b-a_0^f|.$$

Zgodnie z definicją, podłużna aberracja wyraża się wzorem

$$A_c = |f_0^c - f_s^c| = |a_0^c - a_s^c| \text{ lub } A_f = |f_0^f - f_s^f| = |a_0^f - a_s^f|.$$

Obliczamy aberrację A_c oraz A_f, a także błędy tych wielkości. Sprawdzamy czy istnieje różnica wartości aberracji sferycznej dla promieni czerwonych A_c i fioletowych A_f usprawiedliwiona dokładnością wykonanych pomiarów tzn. czy zachodzi nierówność

$$|A_c - A_f| \leqslant |\Delta A_c| + |\Delta A_f|.$$

Takie samo obliczenie wykonujemy dla drugiego ustawienia soczewki. Sprawdzamy, czy otrzymane aberracje $A = \frac{1}{2}(A_c + A_f)$ oraz $A' = \frac{1}{2}(A_c' + A_f')$ różnią się, czy są równe dla obydwu ustawień. W tym drugim przypadku zachodziłaby zgodność wyników A i A'. Zgodnie z definicją obliczamy podłużną aberrację chromatyczną B dla obydwu ustawień soczewki:

$$B_s = |f_s^c - f_s^f| = |a_s^c - a_s^f|$$
$$B_0 = |f_0^c - f_0^f| = |a_0^c - a_0^f|.$$

Obliczamy błąd podłużnej aberracji chromatycznej. Sprawdzamy zgodność wyników B_s i B_0 oraz obliczamy średnią wartość $B = \frac{1}{2}(B_s + B_0)$. Te same obliczenia wykonujemy dla drugiego ustawienia soczewki. Sprawdzamy czy podłużna aberracja chromatyczna jest równa dla obydwu przypadków. Równość zachodzi, gdy uzyskamy wyniki zgodne w sensie kryterium (wzór 2.42).

Miarą poprzecznej aberracji sferycznej jest średnica $2r$ uzyskana wprost z doświadczenia. Miarą poprzecznej aberracji chromatycznej jest średnica $2r_0$ lub $2r_s$. Sprawdzamy czy wyniki te są zgodne, tzn. czy poprzeczna aberracja chromatyczna dla wiązek przyosiowych oraz skrajnych jest taka sama. Ostateczne wyniki ujmujemy w tabelę.

29.3. POZORNA ZMIANA GRUBOŚCI

Cel: wyznaczenie współczynnika załamania płytek szklanych z pomiaru pozornej i rzeczywistej grubości.

Przyrządy: mikromierz i czujnik mikrometryczny (§ 3.1), mikroskop (§ 30.1).

Zagadnienia: optyka geometryczna (§ 29.01; S4, § 1–15; J, § 23.1–17; H2, § 41.1–42.5), podstawowe wiadomości o świetle (§ 28.01, § 31.01, § 32.01–03).

Wprowadzenie i aparatura

Na granicy dwóch środowisk światło ulega załamaniu. Załamaniem rządzą następujące prawa: kąt padania i kąt załamania leżą w jednej płaszczyźnie, a współczynnik załamania n jest stosunkiem sinusów kąta padania α i załamania β. Jeżeli kąt α jest bardzo mały, wtedy zachodzi $\sin\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha \simeq \alpha$ i podobnie $\sin\beta \simeq \operatorname{tg}\beta \simeq \beta$. Korzystając z tych założeń upraszczających w oparciu o rys. 29.10 możemy napisać:

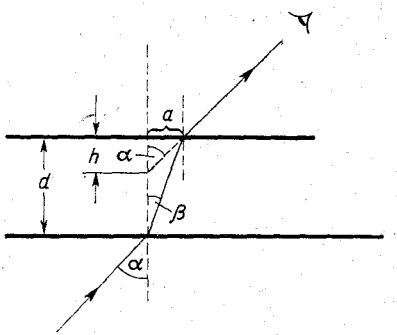
$$\sin\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{h}$$

oraz

$$\sin\beta \simeq \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b},$$

skąd

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{d}{h}. \tag{29.7}$$



29.10. Pozorne zmniejszenie grubości płytki.

Wielkość d mierzymy mikromierzem, wielkość h za pomocą mikroskopu. Na przedniej i tylnej powierzchni badanej płytki znajdują się rysy. Nastawiamy mikroskop na ostrość widzenia rysy górnej i odczytując położenie tubusa a_g, a następnie odpowiednio rysy dolnej a_d. Pozorną grubość płytki obliczymy jako różnicę $|a_d - a_g|$. Stosowany mikroskop musi dawać możliwość pomiaru przesunięcia tubusa lub stolika (przy ruchomym stoliku). Większość mikroskopów ma wzorcowane obroty pokrętła precyzyjnego przesuwu tubusa, gdzie jeden obrót tego pokrętła odpowiada przesunięciu 0,1 mm. Na pokrętle znajduje się skala pozwalająca odczytać położenie tubusa z dokładnością do 0,001 lub 0,01 mm. Gdy brak takiej skali, zastosować możemy zwykły czujnik mikrometryczny opierając stopę jego żerdzi o ruchomą część mikroskopu.

Pomiary i obliczenia

Mierzymy grubości d wszystkich przeznaczonych do badania płytek za pomocą mikromierza. Ustawiamy mikroskop to znaczy dobieramy położenie lampy mikroskopowej (lub zwykłej lampy stołowej) i ustawienie zwierciadła mikroskopu w ten sposób, by światło padało do obiektywu. Ustawiamy badaną płytkę na stoliku mikroskopu i dobieramy jej położenie oraz ostrość w ten sposób, by uzyskać ostry obraz kolejno górnej i dolnej rysy. Pokrętło precyzyjnego przesuwu ustawiamy w dolnym położeniu i za pomocą regulacji zgrubnej nastawiamy ostrość widzenia rysy dolnej, drobne różnice korygujemy regulacją precyzyjną. Odczytujeny wskazanie skali pokrętła regulacji precyzyjnej lub czujnika mikrometrycznego. Za pomocą pokrętła regulacji precyzyjnej przesuwamy tubus w górę do położenia, w którym ostro widzimy rysę górną. Liczymy przy tym ilość N pełnych obrotów pokrętła. Odczytujemy wskazanie pokrętła lub czujnika. Odczytując wskazanie pokrętła zapisujemy na pierwszym miejscu dziesiętnym ilość pełnych obrotów, a na dalszych wskazanie pokrętła. Grubość pozorna h jest równa różnicy wskazań pokrętła lub czujnika. Notujemy dokładności wykonanych pomiarów. Podobne pomiary wykonujemy dla wszystkich płytek.

Obliczamy współczynniki załamania z wzoru (29.7) oraz obliczamy błędy w sposób uzależniony od rodzaju wykonanych pomiarów.

29.4. WSPÓŁCZYNNIK ZAŁAMANIA PRYZMATU

Cel: wyznaczenie współczynnika załamania metodą kąta najmniejszego odchylenia za pomocą spektrometru.

Przyrządy: spektrometr (§ 30.5), lampa sodowa lub filtr optyczny (§ 4.14).

Zagadnienia: optyka geometryczna (§ 29.01; S4, § 1–15; J, § 23.1–17; H2, § 41.1–42.5). Podstawowe wiadomości o świetle (§ 28.01, § 31.01, § 32.01).

Wprowadzenie

Współczynnik załamania światła wyznaczyć możemy z kątów padania i załamania światła na granicy środowisk. Najwygodniej w tym celu posługiwać się ciałem o specjalnie dobranym kształcie. Najczęściej stosujemy pryzmat, który jest bryłą ograniczoną dwoma płaszczyznami tworzącymi ze sobą kąt φ zwany kątem łamiącym. Kształt pozostałych ścian pryzmatu nie odgrywa istotnej roli. Promień świetlny padający na pryzmat zostaje odchylony o pewien kąt δ, zależny od kąta padania α i od kąta łamiącego φ. Kąt δ jest najmniejszy, gdy wewnątrz pryzmatu promień biegnie prostopadle do dwusiecznej kąta łamiącego. W tym przypadku kąt δ (rys. 29.11) jest równy sumie kątów nieprzyległych w trójkącie ABC, czyli

$$\delta = 2(\alpha - \beta),$$

gdzie $\beta = \varphi/2$, ponieważ kąty β i $\varphi/2$ mają ramiona zgodnie prostopadłe, zatem z ostatniego równania otrzymamy

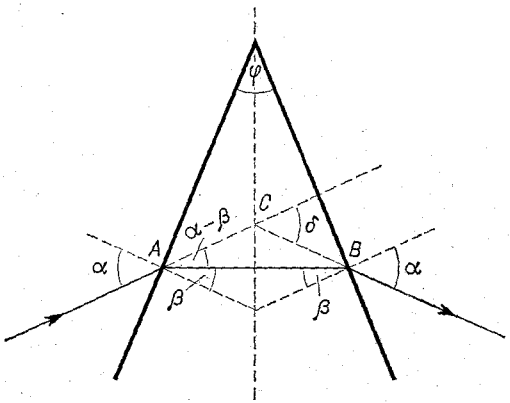
$$\alpha = \frac{1}{2}(\delta + \varphi).$$

Podstawiając wyrażenia na kąt padania α i załamania β do prawa załamania

$$n = \sin\alpha/\sin\beta$$

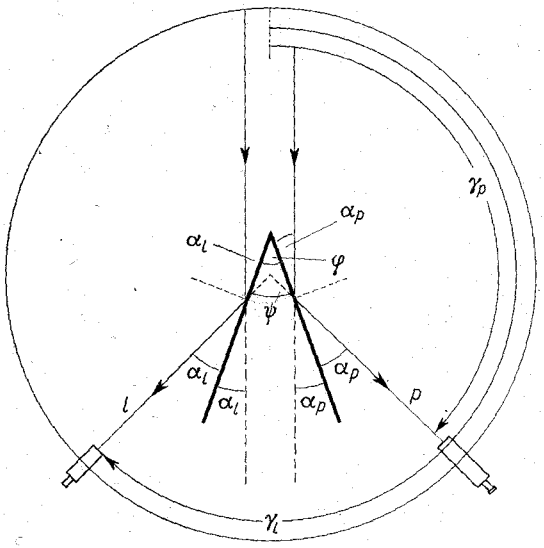
otrzymamy

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi}. \tag{29.8}$$



29.11. Załamanie promienia w pryzmacie.

Kąt łamiący φ określamy precyzyjnie za pomocą spektrometru. Wiązka światła padająca na pryzmat równolegle do dwusiecznej kąta łamiącego rozdziela się na dwie wiązki tworzące ze sobą kąt $\psi = 2(\alpha_l + \alpha_p)$ (rys. 29.12). Kierunki promieni l i p mierzymy



29.12. Wyznaczanie kąta łamiącego pryzmatu za pomocą spektrometru.

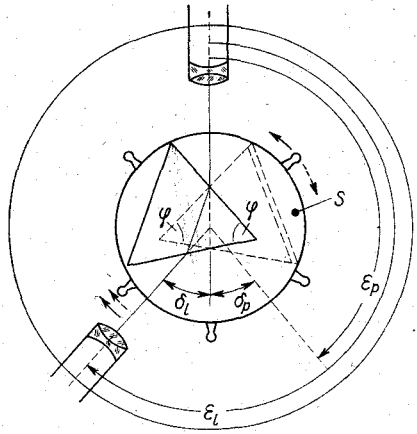
przez naprowadzenie lunety na kierunek promienia l i p oraz odczyt jej położeń γ_l i γ_p na podziałce spektrometru. Zgodnie z zasadami geometrii kąt łamiący jest równy

$$\varphi = \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}|\gamma_l - \gamma_p|. \tag{29.9}$$

Wzór powyższy jest słuszny przy założeniu, że kąty γ mierzymy od kierunku promienia padającego (w prawo lub lewo).

Pomiary

Pomiar kąta łamiącego pryzmatu. Celem wyznaczenia kąta łamiącego pryzmat ustawiamy w taki sposób, by światło z kolimatora biegło w przybliżeniu równolegle do dwusiecznej kąta łamiącego (porównaj rys. 29.12). Mierzymy spektrometrem kąty γ_l i γ_p odpowiadające promieniom l i p odbitym od obydwu powierzchni ścian pryzmatu. W tym celu lunetę naprowadzamy na kierunek badanego promienia i doprowadzamy ją w położenie, w którym obraz szczeliny pokryje się z przecięciem nici pajęczych lunetki. Naprowadzenie lunetki i odczyty kątów powtarzamy 3-krotnie.



29.13. Ustawienie pryzmatu do pomiaru kąta najmniejszego odchylenia.

Pomiar kąta najmniejszego odchylenia. Na stoliku ustawiamy pryzmat w sposób pokazany na rysunku 29.13 i odnajdujemy w lunecie promień załamany. Obracamy powoli stolik wokół osi i obserwujemy kierunek przesuwania obrazu szczeliny. Obracamy stolik S w ten sposób, by odchylenie było jak najmniejsze, jeżeli obraz szczeliny wychodzi poza pole widzenia lunetki, przesuwamy lunetkę w kierunku ruchu obrazu. Dochodzimy do sytuacji, w której przy dalszym obrocie stolika obraz szczeliny w lunecie zatrzymuje się i zmienia kierunek ruchu. Musimy dokładnie ustalić położenie stolika w punkcie, odpowiadającym zmianie kierunku ruchu obrazu, a następnie na obraz naprowadzić krzyż z nici pajęczych. Odczytujemy kąt ε_l. Nastawienie minimum odchylenia i odczyt kąta powtarzamy kilkakrotnie. Takie same pomiary wykonujemy, gdy pryzmat ustawiony jest symetrycznie względem osi kolimatora (linie przerywane na

rys. 29.13). Po usunięciu pryzmatu mierzymy położenie lunetki dla promienia nieodchylonego ε_0. Podobne pomiary wykonujemy dla wszystkich wskazanych w instrukcji pryzmatów, a także dla pryzmatu cieczowego, wypełnionego wodą.

Obliczenia

Obliczamy wartości średnie kątów γ i ε. Dla każdego pryzmatu obliczamy kąt łamiący φ z wzoru (29.9). Jak wynika z rysunku, kąt najmniejszego odchylenia δ obliczamy z wzoru

$$\delta = \frac{1}{2}|\varepsilon_l - \varepsilon_p|.$$

Kąt δ obliczyć możemy również znając kąt ε_0 odpowiadający promieniowi nieodchylonemu i ε_l lub ε_p, wtedy

$$\delta = |\varepsilon_l - \varepsilon_0| \text{ lub } \delta = |\varepsilon_p - \varepsilon_0|.$$

Z wzoru (29.8) obliczamy wartości współczynników załamania poszczególnych pryzmatów i cieczy. Obliczamy błędy poszczególnych pomiarów, a wyniki ujmujemy w tabelę. Sprawdzamy zgodność wyników z danymi z tablic fizycznych.

29.5. WYZNACZANIE PROMIENIA KRZYWIZNY METODĄ ODBICIA

Cel: wyznaczenie promienia krzywizny zwierciadła lub soczewki metodą odbicia.

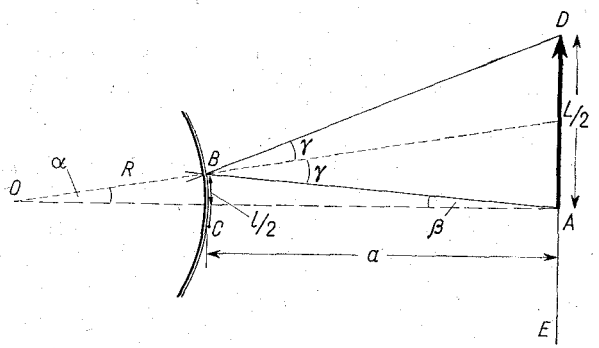
Przyrządy: zwierciadła i soczewki (§ 29.1), luneta (§ 4.13).

Zagadnienia: optyka geometryczna (§ 29.01; S4, § 1–15; J, § 23.1–17; H2, § 41.1–42.5), podstawowe wiadomości o świetle (§ 28.01, § 31.01, § 32.01).

Wprowadzenie

W przypadku zwierciadła wypukłego (rys. 29.14) obraz przedmiotu $L = DE$ oglądany w punkcie A będzie miał na powierzchni zwierciadła długość $l = BC$. Kąt γ zawarty między normalną OB i promieniem BA jest zewnętrznym kątem trójkąta OAB, skąd

$$\gamma = \alpha + \beta. \tag{29.10}$$



29.14. Odbicie światła w zwierciadle wypukłym.

Zakładając, że kąty α, β i γ są niewielkie otrzymamy

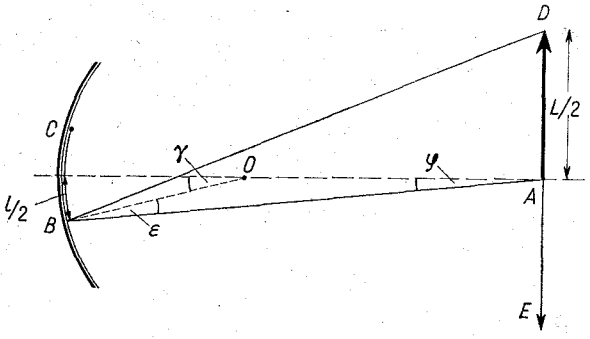
$$\alpha = \frac{l}{2R}, \quad \beta = \frac{l}{2a}, \quad 2\gamma = \frac{L}{2a}.$$

Podstawiając te wartości do wzoru (29.10) otrzymamy po prostych przekształceniach

$$R = \frac{2al}{L-2l}.$$

W przypadku zwierciadła wklęsłego podobne rozumowanie dla trójkąta OAB (rys. 29.15) prowadzi do wzoru

$$R = \frac{2al}{L+2l}.$$



29.15. Odbicie światła w zwierciadle wklęsłym.

W ogólnym przypadku wzór na promień R krzywizny zwierciadła sferycznego przyjmuje postać:

$$R = \frac{2al}{L \mp 2l}, \tag{29.11}$$

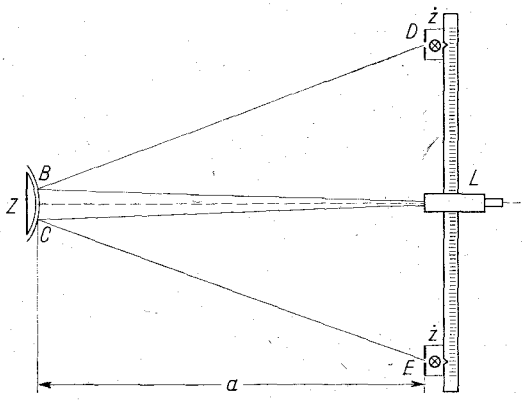
gdzie znak „$-$" dotyczy zwierciadła wypukłego, a znak „$+$" dotyczy zwierciadła wklęsłego.

Aparatura

Rolę przedmiotu DE spełniają dwie szczeliny oświetlone od tyłu żarówkami (rys. 29.16). Odległość szczelin tzn. wielkość przedmiotu można dowolnie zmieniać. Bezpośrednio na badanym zwierciadle naklejona jest skala milimetrowa, na której odczytujemy wielkość obrazu BC. Odległość a mierzymy przymiarem. Do obserwacji obrazu służy lunetka L. Układ ustawiamy w ten sposób, by w lunetce zobaczyć równocześnie obraz jednej z szczelin i skalę BC na zwierciadle. Chcąc ujrzeć ostro drugą szczelinę musimy obrócić lunetę wokół osi pionowej o niewielki kąt. Metoda nadaje się również do pomiaru promienia krzywizny soczewek. Otrzymujemy tu podwójne odbicie, od ściany przedniej silniejsze, a od ściany tylnej słabsze. Tego drugiego nie bierzemy pod uwagę.

Pomiary

Dla ustalonej odległości zwierciadła od przedmiotu ustawiamy układ w ten sposób, by uzyskać obraz szczeliny w lunecie. Wielkość przedmiotu dobieramy dowolnie. Luneta nie pozwala uzyskać równocześnie ostrego obrazu skali BC i szczeliny. Musimy najpierw obiektyw nastawić na ostrość widzenia szczeliny i ustawić lunetę w ten sposób, by obraz szczeliny znalazł się w środku krzyża lunetki, a następnie nie zmieniając kierunku



29.16. Aparatura do pomiaru promienia krzywizny metodą odbicia.

lunetki nastawić obiektyw na ostrość widzenia skali i odczytać wskazanie. Pomiary wykonujemy jednorazowo dla każdej pary a i L. Przy tej samej odległości a powtarzamy pomiary dla dwóch innych odległości L. Podobne serie pomiarów wykonujemy przy dwóch innych wartościach a dla tego samego zwierciadła. Wszystkie pomiary powtarzamy dla drugiej soczewki lub zwierciadła.

Obliczenia

Obliczamy wartości promienia krzywizny R dla każdego pomiaru oddzielnie z wzoru (29.11). Jako wynik ostateczny przyjmujemy średnią arytmetyczną wyników uzyskanych dla jednego zwierciadła.

Obliczamy błędy ΔR dla jednego pomiaru każdego zwierciadła wyprowadzając wzór na ΔR z (29.11). Sprawdzamy zgodność wyników wykazujących największą rozbieżność w serii wykonanej dla jednego zwierciadła. Wyniki uznajemy jako zgodne w przypadku, gdy spełniają (patrz § 2.8) nierówność

$$|R_n - R_k| \leqslant 2|\Delta R|.$$

Przyjmujemy, że $\overline{R}$ obarczone jest takim samym błędem jaki uzyskaliśmy dla jednego z pomiarów.

30. PRZYRZĄDY OPTYCZNE

30.1. MIKROSKOP

Cel: wyznaczenie powiększenia obiektywu i mikroskopu, wzorcowanie skali okularowej, pomiary małych przedmiotów, wyznaczenie apertury liczbowej.

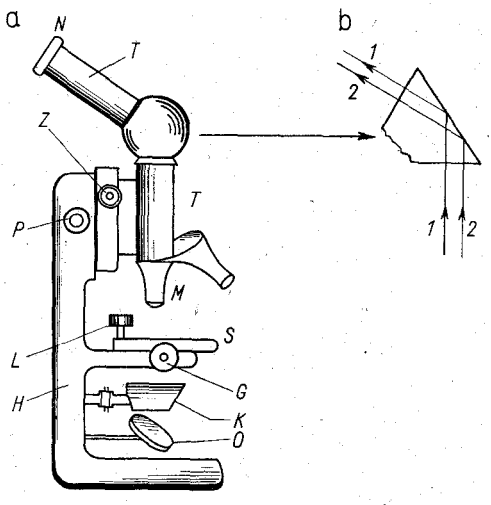
Przyrządy: mikromierz (§ 3.1), lupa (§ 4.12).

Zagadnienia: optyka geometryczna (S4, rozdz. I i § 29; J, § 23.7–23; H2, § 41 i 42), oko (S4, § 26; J, § 23.20), dyfrakcja i interferencja (§ 31.01).

Wprowadzenie

O rozróżnialności dwóch punktów decyduje kąt jaki tworzą linie łączące te punkty z okiem. Istnieje pewien minimalny kąt rozróżniania punktów. Kąt, pod którym widzimy przedmiot, możemy powiększyć zbliżając przedmiot do oka. Jednak zdolność akomodacyjna oka jest ograniczona i nie widzimy ostro przedmiotów w odległości mniejszej niż 15 cm. Odległość δ, z której możemy oglądać przedmiot dowolnie długo nie odczuwając zmęczenia, nazywamy odległością dobrego widzenia. Dla normalnego oka $\delta = 25$ cm. Zadaniem takich przyrządów jak lupa i mikroskop jest zwiększenie kąta widzenia. Powiększeniem kątowym nazywamy wielkość

$$W = \frac{\text{Kąt widzenia przy pomocy przyrządu}}{\text{Kąt widzenia bez przyrządu}}, \tag{30.1}$$

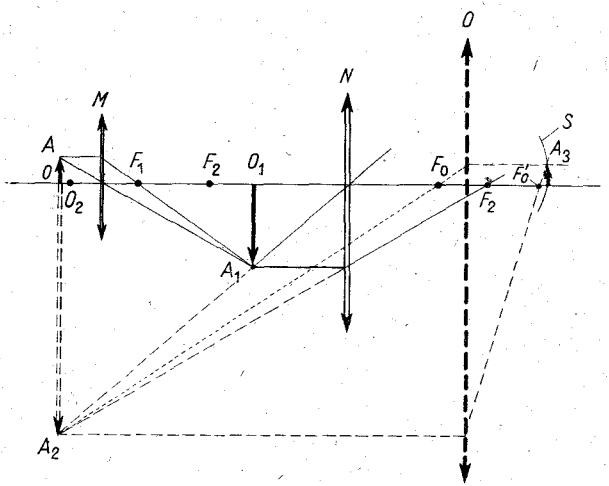


30.1. Budowa mikroskopu (a) i pryzmatu kierującego (b).

Mikroskop składa się z dwóch układów soczewek (rys. 30.1) obiektywu i okularu. Dodatkowy układ — kondensator służy do oświetlenia przedmiotu. Okular i obiektyw znajdują się na dwóch końcach metalowej rury zwanej tubusem T. Sam tubus zamocowany jest na statywie H i za pomocą układu kół zębatych może być przesuwany w kierunku pionowym. Istnieją dwa układy do przesuwania tubusa: zgrubny Z powodujący szybki przesuw oraz precyzyjny P przesuwający tubus bardzo precyzyjnie. Zazwyczaj

jeden obrót pokrętła P przesuwa tubus o 0,1 mm. Dodatkowo na pokrętle P znajduje się skala dzieląca cały obrót na 100 części. Poniżej tubusa znajduje się stolik S na stałe połączony ze statywem. W niektórych mikroskopach stolik ma pokrętła L, G pozwalające przesuwać preparat w dwóch prostopadłych kierunkach leżących w płaszczyźnie stolika. W środkowej części stolika znajduje się otwór. Znajdujący się poniżej stolika kondensator K zaopatrzony jest w układ przesłon. Zwierciadło O kieruje światło z lampy mikroskopowej w kierunku tubusa. Mikroskop z prostym tubusem jest bardzo niewygodny. W większości przypadków przedmiot musi spoczywać na poziomo ustawionym stoliku i patrzeć trzeba pionowo w dół. Celem ułatwienia pracy z pomocą mikroskopu bieg promieni zmienia się za pomocą pryzmatu wielokątnego (rys. 30.1b), dzięki czemu część tubusu zawierająca okular jest nachylona o pewien kąt względem pionu. (Równocześnie musimy pamiętać, że pryzmat odwraca obraz, dzięki czemu w mikroskopie z pryzmatem otrzymujemy obraz prosty, a nie odwrócony.)

Obiektyw i okular są złożonym układem optycznym, w którym do maksimum skompensowano wpływ wad soczewek, a więc w pierwszym rzędzie aberracji sferycznej i chromatycznej. Stosując mikroskop musimy pamiętać, że istotną rolę w tworzeniu obrazu odgrywa również samo oko. Przedmiot OA znajduje się w niewielkiej odległości za ogniskiem obiektywu, stąd obiektyw daje obraz powiększony rzeczywisty i odwrócony O_1A_1 zwany obrazem pośrednim (rys. 30.2). Obraz ten stanowi przedmiot dla okularu i znajduje się między ogniskiem i okularem. Okular daje więc obraz pozorny prosty i powiększony mniej więcej w odległości dobrego widzenia od okularu. Obraz ten stanowi przedmiot O_2A_2 dla soczewki oka. Na siatkówce S powstaje więc obraz



30.2. Bieg promieni w mikroskopie.

O_3A_3 rzeczywisty i odwrócony względem przedmiotu. Okular może równocześnie służyć do oglądania dodatkowego przedmiotu umieszczonego w przybliżeniu w miejscu, w którym znajduje się obraz O_1A_1. Przedmiotem tym może być nić pajęcza lub też naniesiona na przeźroczystym szkle skala zwana skalą okularową, która może służyć do pomiaru wymiarów liniowych małych przedmiotów. Okular zaopatrzony w mikromierz przesuwający krzyż z nici pajęczych nazywamy okularem mikrometrycznym.

W mikroskopie zarówno przedmiot jak i obraz leżą mniej więcej w odległości dobrego widzenia δ. Przedmiot znajduje się tuż przed ogniskiem obiektywu stąd w przybliżeniu możemy założyć, że $a = f$. Obraz pośredni O_1A_1 znajduje się blisko soczewki okularu i założyć możemy, że $b = l$, gdzie l jest długością tubusu. Dla omawianego przypadku powiększenie obiektywu zdefiniowane stosunkiem wielkości obrazu O_1A_1 do wielkości przedmiotu OA wyniesie więc

$$W_1 = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{b}{a} \simeq \frac{l}{f_1}. \tag{30.2}$$

Odległości obrazu O_2A_2 uzyskanego w okularze wynosi w przybliżeniu $b' = \delta$, a odległość przedmiotu O_1A_1 wynosi $a' \simeq f_2$. Stąd powiększenie okularu

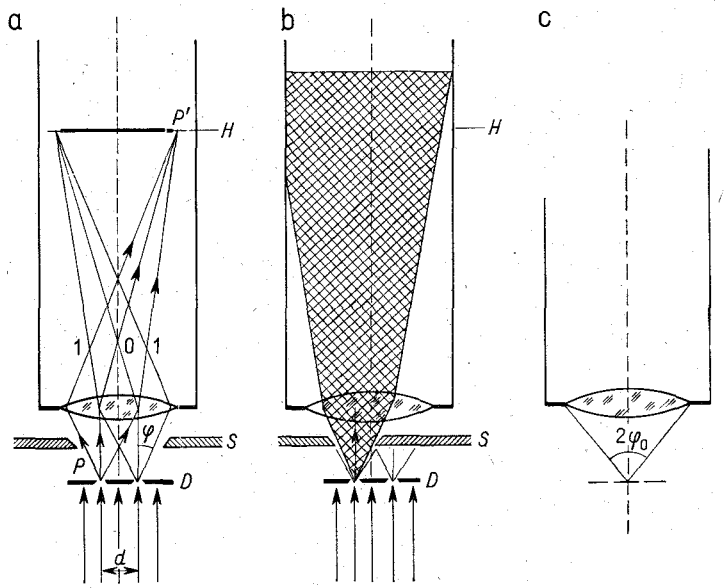
$$W_2 = \frac{O_2A_2}{O_1A_1} = \frac{b'}{a'} \simeq \frac{\delta}{f_2}. \tag{30.3}$$

Powiększenie całego mikroskopu wyrazi się wzorem

$$W = \frac{O_2A_2}{OA} = \frac{O_2A_2}{O_1A_1}\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{l\delta}{f_1f_2}. \tag{30.4}$$

Z wzoru (30.4) wynika, że powiększenie mikroskopu jest iloczynem powiększenia obiektywu W_1 i okularu W_2

$$W = W_1 \cdot W_2. \tag{30.5}$$



30.3. Obserwacja obrazu siatki dyfrakcyjnej w mikroskopie.

Wzór (30.4) sugeruje, że powiększenie mikroskopu można zwiększać nieograniczenie. W praktyce istnieje pewne ograniczenie wynikające z falowej natury światła. Wyobraźmy sobie następujące doświadczenie: przedmiotem obserwowanym jest siatka dyfrakcyjna

(rys. 30.3). Oświetlając siatkę wiązką równoległą uzyskaną za pomocą kondensora uzyskamy ugięcie światła (§ 31.01). Wtedy wiązki ugięte zerowego rzędu, 1-ego rzędu itd. zostają skupione w płaszczyźnie ogniskowej obiektywu dając maksima podobnie jak w siatce dyfrakcyjnej. Wszystkie inne wiązki wygaszają się wzajemnie na skutek interferencji. Promienie, które wychodzą z tego samego punktu przedmiotu — szczeliny P, ugięte pod różnymi kątami wchodzą do obiektywu, a następnie przecinają się pod różnymi kątami, wchodząc do obiektywu dają obraz rzeczywisty w płaszczyźnie H. Obraz szczeliny P uzyskujemy w punkcie P'. Obraz punktu P powstać może wyłącznie w przypadku, gdy przynajmniej dwa promienie ugięte pod różnym kątem wejdą do obiektywu (por. rys. 30.3a). Jeżeli teraz zmniejszymy otwór, przez który światło wpada do obiektywu tak dalece, że do obiektywu wpada wyłącznie wiązka nieugięta (rys. 30.3b), nie może powstać obraz. Pole widzenia mikroskopu wygląda wtedy tak samo, jak gdyby nie było w ogóle przedmiotu. Mimo, iż siatka dyfrakcyjna nadal znajduje się pod mikroskopem, całe pole mikroskopu jest równo oświetlone i nie otrzymamy żadnego obrazu. Stąd wyciągnąć możemy wniosek ogólny: obraz w mikroskopie uzyskać możemy tylko wtedy, jeżeli dwa promienie ugięte pod różnymi kątami wchodzą do obiektywu. W praktyce nie stosujemy przesłony S, lecz wiązka jest i tak ograniczona wymiarami obiektywu. Promień ugięty rzędu 1-ego nie może uginać się o kąt większy od φ_0. Kąt $2\varphi_0$ (rys. 30.3c) nazywamy kątem otwarcia mikroskopu. Kąt ugięcia wiązki 1-ego rzędu w siatce dyfrakcyjnej w środowisku o współczynniku załamania n wyraża się (por. wzór 31.7) następująco:

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{nd}.$$

Podstawiając zamiast φ połowę kąta otwarcia φ_0 otrzymamy warunek rozróżniania w mikroskopie dwóch odległych o d szczelin siatki dyfrakcyjnej

$$d = \frac{\lambda}{n\sin\varphi_0}. \tag{30.6}$$

Ten sam wzór obowiązuje nie tylko dla siatki, lecz również dla dowolnych dwóch punktów przedmiotu. Odwrotność d nazywamy zdolnością rozdzielczą mikroskopu, a wielkość $n\sin\varphi_0 = A$ aparaturą liczbową obiektywu. Dla światła widzialnego przyjmujemy na $\lambda = 550$ nm, tzn. długość fali odpowiadającą największej czułości oka. Dla zwiększenia zdolności rozdzielczej, przestrzeń między przedmiotem i obiektywem wypełnia się cieczą o dużym współczynniku załamania, np. olejkiem cedrowym, dla którego $n = 1{,}5$. Mikroskopy dostosowane do takiej pracy nazywamy imersyjnymi.

Celem uzyskania obrazu w mikroskopie postępujemy następująco:

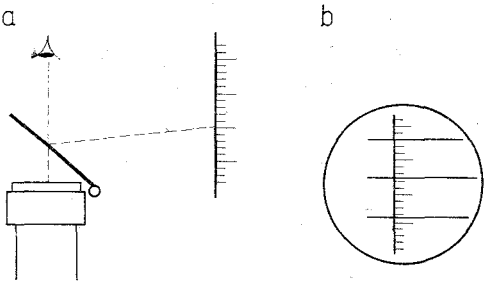
1. Ustawiamy zwierciadło i lampę oświetlającą w taki sposób, by uzyskać równomierne oświetlenie całego pola widzenia.

2. Przedmiot ustawiamy na stoliku w przybliżeniu na osi optycznej przyrządu. Często przedmiot lub preparat ustawiamy na szkiełku zwanym podstawowym szkiełkiem mikroskopowym, a w niektórych przypadkach możemy jeszcze nakryć preparat drugim szkiełkiem, zwanym szkiełkiem nakrywkowym, którego grubość jest rzędu 0,1 mm.

3. Przesuwamy tubus w dół do miejsca, w którym odległość przedmiotu od obiektywu jest bardzo mała i doprowadzamy niemal do zetknięcia, w następnie patrząc w obiektyw powoli przesuwamy tubus w górę za pomocą pokrętła zgrubnego do chwili uzyskania obrazu. Stosując regulację precyzyjną nastawiamy maksymalną ostrość.

Zasada pomiaru i aparatura

Powiększenie mikroskopu zmierzyć możemy przez porównanie działek skali stanowiącej przedmiot obserwacji, zwanej skalą przedmiotową z działkami skali znajdującej się poza mikroskopem, zwaną skalą porównawczą. Obydwie porównywane skale znajdują się w odległości dobrego widzenia $\delta = 25$ cm. Zadanie powyższe można wykonać stosując półprzezroczystą płytkę nachyloną pod kątem $\pi/4$ względem osi mikroskopu (rys. 30.4). Przez płytkę widzimy obraz skali przedmiotowej i równocześnie skalę



30.4. Płytka do obserwacji powiększenia mikroskopu.

porównawczą, gdyż światło biegnące od strony skali częściowo odbija się. Skala ma zazwyczaj długość 1 cm i jest podzielona na 100 części, tzn. najmniejsza podziałka odpowiada 0,1 mm. Odczytujemy ilu a milimetrom skali porównawczej odpowiada b milimetrów skali przedmiotowej. Powiększenie wyraża się wtedy wzorem

$$W = \frac{a[\mathrm{mm}]}{b[\mathrm{mm}]}. \tag{30.7}$$

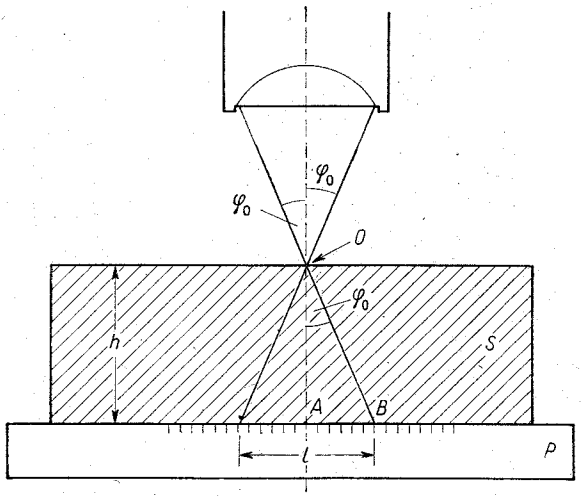
Często do bezpośredniego pomiaru wymiarów preparatu stosuje się skalę okularową. Skalę tę umieszczamy między soczewkami okularu. Widzimy ją zawsze ostro. Celem wywzorcowania skali okularowej porównujemy jej wskazania ze wskazaniami skali przedmiotowej; jeżeli stwierdzimy, że c działkom skali okularowej odpowiada d milimetrów skali przedmiotowej, to jednej działce skali okularowej odpowiada

$$x = \frac{c}{d} \tag{30.8}$$

milimetrów. Skalę należy wzorcować oddzielnie dla każdego obiektywu. W mikroskopie wyznaczyć możemy również powiększenie samego obiektywu. W tym celu usuwamy okular, a na tubusie ustawiamy matówkę (szkiełko zmatowione) zmatowioną stroną w dół. Jeżeli przedmiotem jest skala przedmiotowa, to na matówce możemy otrzymać

obraz rzeczywisty skali. Porównując obraz ze skalą milimetrową linijką określamy powiększenie ze wzoru (30.7).

Celem wyznaczenia apertury liczbowej mikroskopu $n\sin\varphi_0$, wyznaczyć musimy współczynnik załamania n środowiska wypełniającego przestrzeń między obiektywem i przedmiotem oraz kąt rozwarcia φ_0. W przypadku mikroskopu przeznaczonego do pracy w powietrzu $n \simeq 1$, kąt φ_0 wyznaczamy następująco: mikroskop nastawiamy na ostrość widzenia punktu O (rys. 30.5), a następnie musimy zmierzyć długość ra-



30.5. Wyjaśnienie sposobu pomiaru apertury liczbowej mikroskopu.

mion $\frac{l}{2}$ i h trójkąta prostokątnego OAB utworzonego przez skrajne promienie wpadające do obiektywu. Celem otrzymania ostrego obrazu podziałki P usuwamy okular i zastępujemy go małym otworem zapobiegającym błędowi paralaksy. Otwór ten powinien znajdować się w miejscu, w którym powstaje ostry obraz pośredni. Zgodnie z rysunkiem 30.5 zachodzi

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{l}{2h}.$$

Chcąc uzyskać sinus kąta φ_0 korzystamy z związku trygonometrycznego

$$\sin\varphi_0 = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\varphi_0}{1+\operatorname{tg}^2\varphi_0}} = \frac{l}{\sqrt{4h^2-l^2}}. \tag{30.9}$$

Dla zwykłego mikroskopu, gdy $n = 1$ wzór (30.9) określa równocześnie aparaturę liczbową.

Pomiary

1. Zapalamy lampę mikroskopową, a zwierciadło ustawiamy w taki sposób, by uzyskać równomierne oświetlenie całego pola widzenia. Kondensorem ustawiamy równoległość wiązki oświetlającej. Na stoliku ustawiamy skalę przedmiotową w ten sposób,

by skala znajdowała się po stronie obiektywu i uzyskujemy ostry jej obraz. Usuwamy obiektyw i na jego miejsce zakładamy matówkę. Regulujemy ostrość i odczytujemy ilość a milimetrów skali milimetrowej przypadającą na b podziałek obrazu.

2. W podobny sposób mierzymy powiększenie całego mikroskopu ustawiając uprzednio aparaturę w sposób pokazany na rys. 30.4.

3. Celem wyznaczenia apertury na stoliku mikroskopu umieszczamy przeźroczystą podziałkę P, np. podziałkę przedmiotową, a na podziałce płasko-równoległą płytkę szklaną S (rys. 29.5). Mikroskop nastawiamy na ostrość widzenia górnej powierzchni płytki S (np. przypadkowej rysy). Następnie usuwamy płytkę S i okular, a na miejsce okularu zakładamy przesłonę z małym otworkiem pośrodku. Mniej więcej w płaszczyźnie otworu przypada ostry obraz rzeczywisty podziałki P. Odczytujemy ile działek skali przedmiotowej widać przez otwór przesłony bez okularu i obliczamy ilu milimetrom to odpowiada. Mikromierzem mierzymy grubość płytki szklanej. Pomiary powtarzamy przy dwóch innych płytkach szklanych.

4. W następnym etapie wzorcujemy skalę okularową mikroskopu. W tym celu do mikroskopu wkładamy okular ze skalą (przedmiotem jest w dalszym ciągu skala przedmiotowa). Nastawiamy mikroskop na ostrość widzenia skali przedmiotowej, obracamy okular w ten sposób, by kreski obydwu skal były równoległe. Odczytujemy ilość d podziałek skali przedmiotowej odpowiadających c podziałkom skali okularowej.

5. W końcowym etapie mierzymy grubość włosa w 10-ciu różnych miejscach. W tym celu usuwamy skalę przedmiotową, badany włos wkładamy pomiędzy dwa szkiełka mikroskopowe i wkładamy na stolik i regulujemy ostrość widzenia mikroskopu. Ustawiamy okular w ten sposób, by kreski jego skali były równoległe do włosa i odczytujemy ilość kresek odpowiadających grubości włosa.

Obliczenia

Powiększenia mierzone w punktach 1 i 2 obliczamy z wzoru (30.7). W oparciu o wyniki punktu 3 obliczamy sinus kąta rozwarcia z wzoru (30.9) dla wszystkich pomiarów oddzielnie, a następnie obliczamy wartość średnią $\overline{\sin \varphi_0}$. Korzystając z wyników punktu 4 obliczamy długość x odpowiadającą jednej działce skali okularowej z wzoru (30.8). Znając wartości x w oparciu o wyniki punktu 5 obliczamy grubość włosa.

Obliczamy błędy wszystkich wyznaczonych wielkości, a wyniki ostateczne ujmujemy w jedną tabelę.

30.2. REFRAKTOMETR ABBÉGO

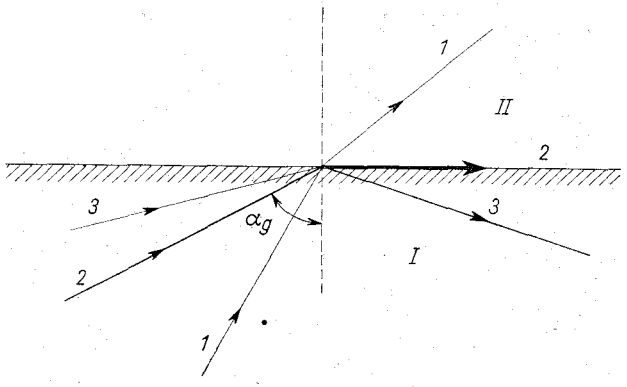
Cel: badanie zależności współczynnika załamania wody od temperatury w zakresie od 15° do 95°C.
Przyrządy: lunetka (§ 4.13), ultratermostat (§ 3.7) lub waga laboratoryjna (§ 3.4).
Zagadnienia: optyka geometryczna (S4, rozdz. I; J, § 23.7–17; H2, § 41 i 42).

Aparatura

W refraktometrze do wyznaczania współczynnika załamania wykorzystuje się zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia. Promień biegnący ze środowiska optycznie gęstszego do rzadszego odchyla się od prostopadłej (rys. 30.6). Zgodnie z prawem za-

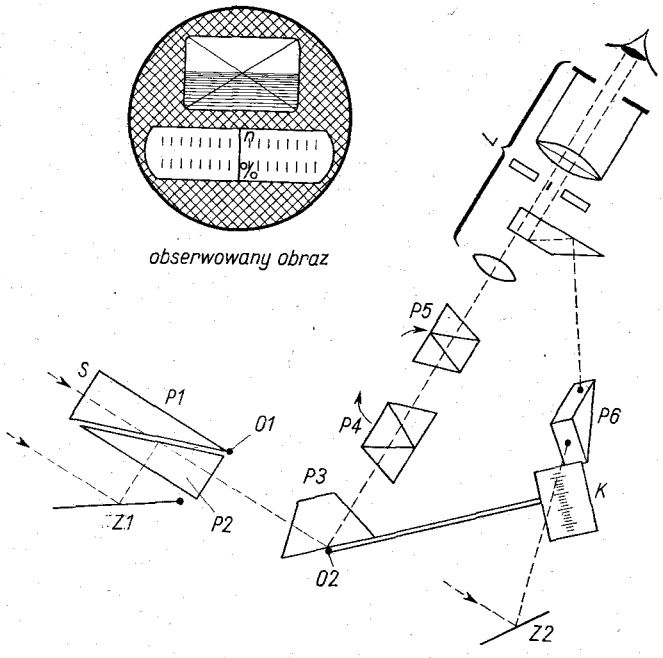
łamania $n_{II}/n_I = \sin\alpha/\sin\beta$ istnieje pewien kąt graniczny α_g, dla którego $\beta = \pi/2$. Wtedy zachodzi

$$\frac{n_{II}}{n_I} = \frac{\sin\alpha_g}{\sin\pi/2} = \sin\alpha_g. \tag{30.10}$$



30.6. Załamanie promieni świetlnych na granicy środowisk (całkowite wewnętrzne odbicie).

Znając współczynnik załamania n_I środowiska gęstszego oraz kąt graniczny α_g, z wzoru (30.10) możemy obliczyć współczynnik załamania n_{II} środowiska rzadszego. Kąt graniczny wyznaczamy za pomocą refraktometru. Istnieje wiele typów refraktometrów różniących się budową. Najczęściej spotykamy obecnie refraktometry Abbégo (rys. 30.7). Zasadniczą częścią są dwa prostokątne pryzmaty, oświetlający P_1 i pomiarowy P_2.



30.7. Budowa refraktometru Abbego i pole widzenia refraktometru *RL1*.

Pryzmat P_1 może obracać się wokół osi $O1$. Kilka kropel cieczy badanej umieszcza się między pryzmatami P_1 i P_2. Do oświetlenia ścianki S pryzmatu P_1 stosuje się białe światło rozproszone. Pada ono na powierzchnię graniczną przeciwprostokątną w P_1, pod wszystkimi kątami. Do cieczy przechodzą tylko promienie padające pod kątem mniejszym od granicznego. Promienie, które przejdą do cieczy, przechodzą następnie przez pryzmat P_2 doznając w warstwie cieczy niewielkiego przesunięcia równoległego. Pryzmat wielokątny P_3 zwany kierującym zmienia kierunek promieni przechodzących, które następnie przez układ dwóch pryzmatów kompensujących Amiciego P_4 i P_5 biegnącą do lunetki L. Na skutek zjawiska wewnętrznego odbicia, część pola widzenia jest oświetlona, a część pozostaje ciemna. Linię odgraniczającą część oświetloną od nieoświetlonej możemy przesuwać w górę i w dół obracając pryzmat P_3 wokół osi $O2$. Mierząc, sprawdzamy ją do linii przecięcia nici pajęczych okularu lunety L. Z pryzmatem P_3 związana jest podziałka K, na której odczytujemy wprost współczynnik załamania cieczy. W niektórych typach refraktometrów podziałkę tę można oglądać za pomocą dodatkowej lunetki lub na skali kątowej, w innych widzimy ją również w polu widzenia lunetki L.

W pryzmatach refraktometru, jak również i w badanej cieczy występuje zjawisko dyspersji i światło białe zostaje rozszczepione (§ 30.5). Na skutek tego zjawiska linia rozgraniczająca pole widzenia nie jest ostra, lecz barwna i rozmyta. W refraktometrze Abbego rozszczepienie jest skompensowane za pomocą dwóch układów pryzmatów Amiciego P_4 i P_5. Każdy z pryzmatów P_4 lub P_5 składa się z kilku, najczęściej z trzech pryzmatów pojedynczych wykonanych z różnych gatunków szkła, różniących się współczynnikiem załamania. Kąty łamiące poszczególnych pryzmatów są tak dobrane, że światło żółtej linii sodu nie doznaje żadnego odchylenia. Odchylenia w przeciwnych kierunkach doznają światło czerwone i fioletowe. Stąd pryzmat daje widmo widziane na wprost i nazywany jest *a vision direct*. Rozszczepienie światła spowodowane dwoma identycznymi układami pryzmatów zależy od ich wzajemnego ustawienia. Jeżeli ustawione są one równolegle, jeden za drugim, wtedy rozszczepienie jest dwukrotnie większe. Jeżeli jeden z nich obrócimy wokół osi o kąt $\delta = \pi$, wtedy rozszczepienie zostanie skompensowane i światło pozostaje białe. Dla innych kątów δ wystąpią przypadki pośrednie. Tak więc układ pozwala uzyskać dowolne rozszczepienie zależne od kąta δ. W refraktometrze układ ten służy do skompensowania dyspersji wywołanej przez badaną ciecz. Względny obrót pryzmatów kompensujących odczytujemy na podziałce związanej z pokrętłem obracającym pryzmaty Amiciego. Każdy refraktometr zaopatrzony jest w tabele pozwalające przeliczyć wskazania na dyspersję zdefiniowaną wzorem

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C},$$

gdzie wskaźnik D przy n oznacza żółtą linię sodu, F i C odpowiednio fioletowy i czerwony kraniec widma.

W refraktometrze $RL1$ pokrętła obracające pryzmat P_3 znajdują się po lewej stronie obudowy, a pokrętło kompensacji rozszczepienia po stronie prawej i jest zaopatrzone w skalę. Pryzmaty P_1 i P_2 zamocowane są w metalowych oprawkach, przez które można przepuszczać ciecz termostatującą z ultratermostatu i badać zależność współczynnika załamania i dyspersji od temperatury.

Refraktometr może również służyć do wykonywania pomiarów w świetle odbitym dla substancji nieprzezroczystych lub ciał stałych. W tym celu pod pryzmatem pomiarowym znajduje się wahadłowo zamocowane lustro *Z1* kierujące światło na pryzmat pomiarowy P_2. Gdy wykonujemy pomiary w świetle przechodzącym, zwierciadło *Z1* musi przylegać do pryzmatu zakrywając otwór w dolnej części obudowy pryzmatu. Do oświetlania podziałki *K* służy okienko w bocznej ścianie przyrządu zaopatrzone w zwierciadełko *Z2*, które można kierować w dowolną stronę celem uzyskania najkorzystniejszego oświetlenia.

Pomiary

W doświadczeniu posługujemy się białym światłem rozproszonym, naturalnym lub sztucznym. Otwieramy okienko *Z2* podziałki i nastawiamy lunetkę *L* na ostrość widzenia podziałki i krzyża z nici pajęczych. Podnosimy pryzmat P_1 i sprawdzamy stan powierzchni pryzmatów P_1 i P_2. Jeżeli są one zabrudzone, przecieramy watką zwilżoną w wodzie destylowanej i osuszamy suszarką elektryczną. Celem wykonania pomiaru, za pomocą pipety na powierzchnię pryzmatu P_2 wprowadzamy kilka kropel badanej cieczy i pryzmat P_1 dociskamy do P_2. Oświetlamy pryzmat P_1 oraz *Z2*, a za pomocą pokręteł doprowadzamy do przecięcia linii podziału pola widzenia z punktem skrzyżowania nici pajęczych i kompensujemy zabarwienie linii podziału. Odczytujemy współczynnik załamania i dyspersję.

Błędy pomiaru zależą nie tylko od dokładności skali, lecz również od wprawy obserwatora. Celem określenia błędu wykonujemy 10 pomiarów dla tej samej cieczy badanej. Przed każdym pomiarem musimy rozregulować poprzednie ustawienie i wykonać wszystkie regulacje na nowo.

Za pomocą refraktometru wykonać możemy dwa rodzaje badań zależności współczynnika załamania i dyspersji: 1. od temperatury, 2. od stężenia roztworu badanego. W pierwszym przypadku łączymy układ termostatujący refraktometru z układem pompującym ultratermostatu i pomiary wykonujemy dla temperatur w granicach od pokojowej do 95°C, co 5°C. W przypadku drugim pomiary wykonujemy dla wodnego roztworu cukru lub gliceryny. Przygotowujemy kilka roztworów o stężeniach od 0,5 do 10 g/100 ml. Pomiar wykonujemy również dla roztworu o nieznanym stężeniu.

Obliczenia

Wykonujemy na wspólnym arkuszu wykresy zależności współczynnika załamania i dyspersji od temperatury lub stężenia (zależnie od pomiarów). Na wykresie tym nanosimy błędy kilku punktów pomiarowych. Porównujemy jeden z wyników z wartością z tablic fizycznych.

30.3. KOLORYMETR

Cel: wyznaczenie stężenia roztworu $CuSO_4$ lub $K_2Cr_2O_7$ za pomocą kolorymetru wizualnego lub fotoelektrycznego.

Przyrządy: waga (§ 3.4), luneta (§ 4.13), fotoogniwa i fotodiody (§ 28.01–02).

Zagadnienia: optyka geometryczna (S4, rozdz. I; J, § 23.7–17; H2, § 41 i 42), zjawisko fotoelektryczne (§ 28.01–02; J, § 28.3; H2, § 47.4), roztwory (S2, § 16).

Wprowadzenie

Wiązka światła o natężeniu I_0 przechodząc przez warstwę roztworu o grubości d zostaje osłabiona; jej natężenie I po przejściu określone jest prawem Lamberta

$$I = I_0 \exp(-Kd), \tag{30.11}$$

gdzie K jest współczynnikiem pochłaniania zależnym od długości fali λ. Zgodnie z prawem Beera dla małych stężeń, współczynnik pochłaniania jest proporcjonalny do stężenia c i wyraża się wzorem

$$K = Ec,$$

gdzie E jest stałą zależną od rodzaju roztworu. Podstawiając powyższą zależność do prawa Lamberta, otrzymamy prawo Lamberta–Beera

$$I = I_0 \exp(-Ecd). \tag{30.12}$$

W praktyce często mierzymy absorpcję procentową zdefiniowaną jako

$$A = \frac{I_0 - I}{I_0} 100. \tag{30.13}$$

Łącząc ostatnie dwa wzory otrzymamy

$$A = [1 - \exp(-Ecd)] \cdot 100. \tag{30.14}$$

Stąd obliczyć możemy stałą E, czyli

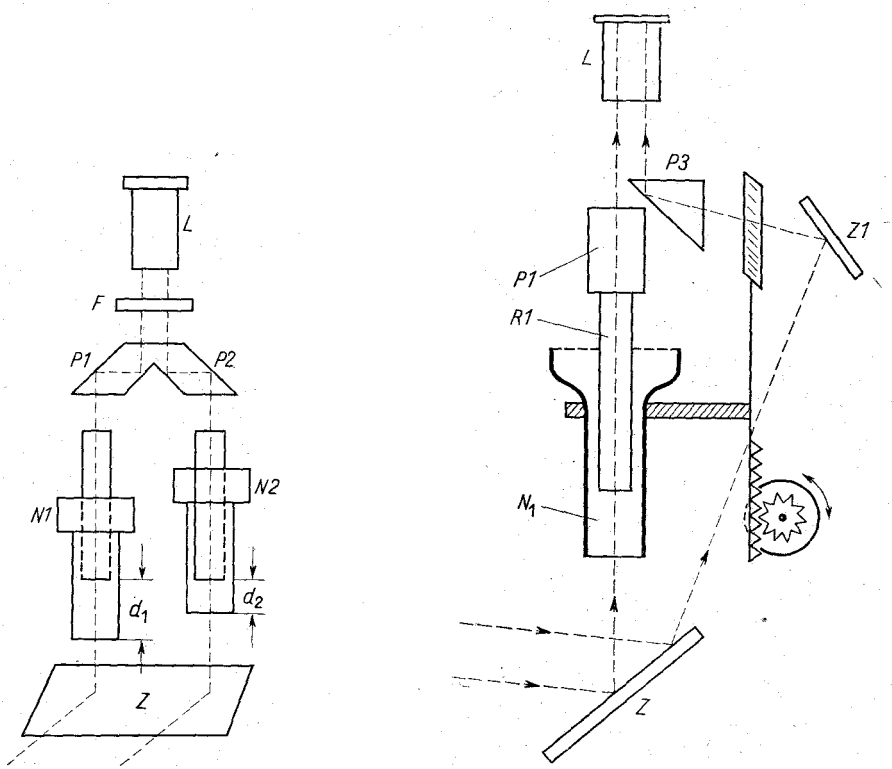
$$E = \frac{1}{cd} \ln\left(1 - \frac{A}{100}\right). \tag{30.15}$$

Bardzo często występuje zjawisko selektywnej absorpcji, w której różne długości fali nie są absorbowane w równym stopniu. Współczynnik pochłaniania K oraz stała E są funkcją długości fali, a wprowadzone tu wzory obowiązują dla jednej barwy. Z tego powodu światło przechodzące przez ciało jest zabarwione, a stopień nasycenia barwy (S4, § 48) zależy od grubości d warstwy pochłaniającej. Stopień nasycenia barwy jest więc w ostatecznym rozrachunku proporcjonalny do grubości warstwy lub do stężenia substancji pochłaniającej. Zjawisko powyższe wykorzystujemy do określenia stężenia roztworów. W tym celu stopień nasycenia barwy światła przechodzącego przez określonej grubości warstwę roztworu badanego porównać musimy ze stopniem nasycenia roztworu wzorcowego o takiej samej barwie. Zazwyczaj wzorcem jest ten sam roztwór o znanym stężeniu. Przyrząd służący do oznaczania zawartości substancji rozpuszczonej na podstawie stopnia nasycenia barwy światła przechodzącego nazywamy kolorymetrem. Rozróżniamy kolorymetry wizualne, w których oceny dokonujemy w sposób subiektywny oraz kolorymetry fotoelektryczne, w których do oceny stosuje się fotoogniwa. Wykorzystuje się tu fakt, że w fotoogniwie zwartym małym opornikiem, natężenie prądu fotoelektrycznego jest proporcjonalne do oświetlenia.

Aparatura

1. *Kolorymetr wizualny* (rys. 30.8) składa się z dwóch cylindrycznych naczyń *N1* i *N2*, dwóch rurek lub prętów szklanych *R1* i *R2*, dwóch pryzmatów *P1* i *P2* kierujących wiązki przechodzące przez obydwa naczyńka do lunetki *L*. Światło biegnące

przez każde naczynie oświetla połowę pola widzenia. Zwierciadło Z kieruje światło ze źródła do naczyń $N1$ i $N2$. Specjalne, dwa niezależne układy mechaniczne służą do przesuwania naczyń $N1$ i $N2$. Regulację wykonujemy za pomocą pokręteł połączonych dokładnymi podziałkami (często optycznymi jak na rys. 30.8b), na których można z dużą precyzją odczytać grubość warstwy cieczy. Kolorymetr przystosowany jest do



30.8. Kolorymetr wizualny: budowa części pomiarowej (a), układ optyczny do pomiaru grubości warstwy roztworu (b).

pomiarów względnych. Jedno z naczyń wypełnia się roztworem o znanym stężeniu, a drugie roztworem badanym. Wykonując pomiar dobieramy tak stosunek grubości warstw d_1 i d_2, by otrzymać równą intensywność zabarwienia całego pola widzenia. Wtedy zgodnie z równaniem (30.12) przy równym natężeniu I_0 światła wchodzącego do obydwu rurek otrzymamy

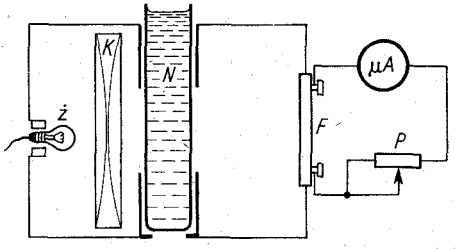
$$I_1 = I_0 \exp(-Ec_1x_1), \quad I_2 = I_0 \exp(-Ec_2x_2),$$

skąd dla $I_1 = I_2$ otrzymamy

$$c_2 = c_1 \frac{x_1}{x_2}. \tag{30.16}$$

2. *Najprostszy kolorymetr fotoelektryczny* (rys. 30.9) składa się z fotoogniwa F lub fotodiody, połączonej przez potencjometr P względnie układ potencjometrów P z mikroamperomierzem μA, płasko-równoległego naczynia szklanego N, źródła światła $Ż$ i kondensatora K.

Wykonując pomiar naczynie napełniamy czystym rozpuszczalnikiem. Za pomocą potencjometrów regulujemy wychylenie mikroamperomierza ustalając je na maksimum, lub w sposób określony w instrukcji. W drugim pomiarze, nie regulując już potencjometrów odczytujemy wychylenie z naczyniem wypełnionym roztworem wzorcowym o stężeniu c_1. Po wykonaniu tego pomiaru ponownie naczynie wypełniamy rozpuszczalnikiem. Jeżeli miernik wychylił się dokładnie tak samo jak w przypadku pierwszym,



30.9. Budowa prostego kolorymetru fotoelektrycznego.

pomiar był prawidłowy. W przypadku przeciwnym pomiar powtarzamy. Podobny pomiar wykonujemy dla roztworu nieznanego c_2. W tym przypadku natężenia prądów są proporcjonalne do natężenia światła i wielkości I we wzorach od (30.12) do (30.15) możemy interpretować jako natężenia prądu. Współczynniki proporcjonalności wystąpią po obydwu stronach równań i uproszczą się. Dla obydwu przypadków otrzymamy

$$I_1 = I_0 \exp(Ec_1 d) \quad \text{oraz} \quad I_2 = I_0 \exp(-Ec_2 d),$$

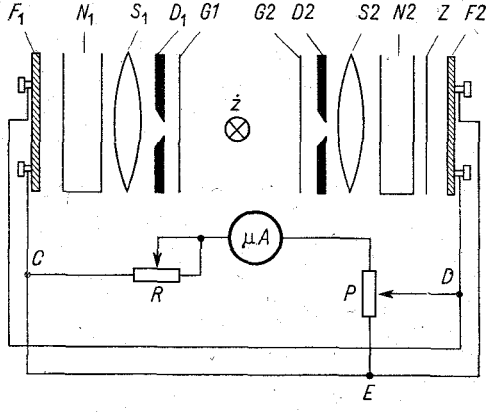
skąd

$$\ln \frac{I_1}{I_0} = -Ec_1 d \quad \text{oraz} \quad \ln \frac{I_2}{I_0} = -Ec_2 d.$$

Dzieląc ostatnie dwa równania stronami otrzymamy

$$c_2 = c_1 \left[\ln \frac{I_2}{I_0}\right]\left[\ln \frac{I_1}{I_0}\right]^{-1} \quad \text{lub} \quad c_2 = c_1 \left[\log \frac{I_2}{I_0}\right]\left[\log \frac{I_1}{I_0}\right]^{-1}. \qquad (30.17)$$

3. Bardziej złożony jest *kolorymetr fotoelektryczny Langego* (rys. 30.10). Światło biegnące w dwóch przeciwnych kierunkach przechodzi przez filtry żółte G, przesłony



30.10. Kolorymetr fotoelektryczny Langego.

D, soczewki skupiające *S*, płasko-równoległe naczynia *N* i pada na fotoogniwa *F*. Fotoogniwo *F2* można przesłonić dodatkową zasłoną *Z*. Przesłonę *D1* regulować można pokrętłem znajdującym się na lewej ściance przyrządu. Przesłonę *D2* w zasadzie nie regulujemy, jednak możemy regulować dźwignią znajdującą się wewnątrz obudowy przyrządu. Na prawej ściance przyrządu znajduje się pokrętło połączone z zasłoną *Z*.

Natężenie fotoprądu jest proporcjonalne do oświetlenia tylko wtedy, gdy fotoogniwo zwarte jest opornikiem o małym oporze. Warunek ten jest spełniony w układzie 30.10, w którym obydwa ogniwa połączone są szeregowo i krótkozwarte, a ponadto każde z nich zwarte częścią potencjometru *P*, między punktami *ED*. Gdy siły elektromotoryczne obydwu ogniw są równe, przez mikroamperomierz włączony pomiędzy punkty *CD* nie płynie prąd. Różnica potencjałów punktów *CD* oraz prąd w mikroamperomierzu jest proporcjonalny do różnicy oświetleń fotoogniw. Mikroamperomierz ma podziałkę od 0 do 100% i odpowiednio wywzorcowany przyrząd wskazuje wprost absorpcję procentową (wzór 30.13). Zauważymy, że zasłonięcie prawego fotoogniwa jest równoważne absorpcji 100%. Musimy więc tak uregulować przyrząd za pomocą potencjometru *P* i opornika *R* (odpowiednie pokrętła znajdują się na górnej ściance przyrządu), by pokazywał wtedy 100%. Natomiast przy odsłoniętym fotoogniwie musi pokazywać 0%, w tym przypadku poprawki kompensacji wykonujemy przesłoną *D1* (pokrętłem na lewej ściance).

Wykonując pomiary postępujemy następująco: napełniamy obydwa naczynia rozpuszczalnikiem, wkładamy do kolorymetru i włączamy oświetlenie. Regulując wielkości przesłony *D1* sprowadzamy wychylenie wskazówki do „0%" przy odsłoniętej przesłonie *Z*. Następnie zasłaniamy prawe fotoogniwo i potencjometrem *P* oraz opornikiem *R* ustalamy wychylenie na 100%. Sprawdzamy kilkakrotnie prawidłowość ustawienia. Naczynie *N2* napełniamy badanym roztworem, *N1* pozostaje wypełnione rozpuszczalnikiem, i wtedy odczytujemy absorpcję. Po wykonaniu pomiaru ponownie sprawdzamy ustawienie przyrządu, gdy obydwa naczynia wypełnione są rozpuszczalnikiem. Pomiar jest poprawny, jeżeli obydwa wyniki wzorcowania: przed pomiarem i po pomiarze są identyczne. Kolorymetr stosować możemy również w taki sposób jak kolorymetr uproszczony. Wtedy zasłaniamy prawe fotoogniwo na cały czas pomiaru i ustalamy wychylenie 100%, gdy lewe naczynie wypełnione jest rozpuszczalnikiem. Następne pomiary są identyczne jak w przypadku poprzednim.

Pomiary

Niezależnie od rodzaju stosowanego przyrządu wykonujemy następujące pomiary: wzorcowanie przyrządu, względnie regulujemy wskazanie zerowe z naczyniami wypełnionymi czystym rozpuszczalnikiem — wodą destylowaną. Pomiary wykonujemy dla roztworów o stężeniach 0,5; 1; 2,5; 5 g/100 cm^3 roztworu. Pomiar wykonujemy również dla roztworu o nieznanym stężeniu. Liczbę pomiarów ustalamy każdorazowo w sposób zapewniający optymalny wynik.

W przypadku fotokolorymetru 1. pomiary roztworu nieznanego wykonujemy kolejno względem wszystkich roztworów znanych. W przypadku 2. pomiary natężenia prądu wykonujemy dla wszystkich badanych stężeń roztworu o nieznanym stężeniu, a pomiar

I_0 dla rozpuszczalnika powtarzamy po każdym pomiarze. Zawsze wynik I_0 powinien być identyczny. W przypadku 3. pomiary wykonujemy również dla wszystkich roztworów. Mierzymy ponadto grubość wewnętrzną naczynia lewego.

Obliczenia

W przypadku 1. obliczamy każdorazowo stężenie nieznane z wzoru (30.16). Obliczamy błąd stężenia 1 lub 2,5 g/cm^3 i przyjmujemy, że inne wyniki obarczone są takim samym błędem. Obliczamy błąd stężenia nieznanego. Sprawdzamy zgodność najbardziej rozbieżnych wyników. Jeżeli wyniki te są zgodne, obliczamy średnią wartość $\overline{c_2}$. W przypadku braku zgodności odrzucamy wyniki nie spełniające kryterium zgodności z innymi, przyjmując, że obarczone są błędem grubym.

W przypadku 2. stężenie obliczamy każdorazowo z wzoru (30.17), a dalszą analizę wyników wykonujemy w taki sam sposób jak w przypadku 1. Ponadto wykreślamy zależność natężenia prądu od stężenia roztworu.

W przypadku 3. obliczamy dla każdego stężenia współczynnik E z równania (30.15), a jako wynik ostateczny przyjmujemy wartość średnią. Wykreślamy zależność absorpcji od stężenia. Stężenie roztworu nieznanego obliczamy z wzoru (30.14) lub odczytujemy z wykresu. Obliczamy błąd stężenia roztworu znanego o stężeniu 1 względnie 2,5 g/100 cm^3. Błąd stałej E obliczamy dla jednego z pomiarów i przyjmujemy, że wartość średnia obarczona jest takim samym błędem. Sprawdzamy zgodność wykonanej serii pomiarów.

30.4. FOTOMETR

Cel: wyznaczenie wykładnika potęgowego w równaniu określającym zależność światłości od temperatury, wyznaczenie sprawności świetlnej żarówki i przebiegu charakterystyki kierunkowej.

Przyrządy: luneta (§ 4.13), watomierz (§ 18.01–03), autotransformator (§ 4.5).

Zagadnienia: fotometria wizualna (S4, § 40–43; J, § 25.1–3), promieniowanie (S4, § 33–36; H2, § 47.1–3), optyka geometryczna (S4, rozdz. I; J, § 23.7–17; H2, § 41 i 42).

Wprowadzenie

Oświetlenie dowolnej powierzchni znajdującej się w odległości r od źródła punktowego o światłości, czyli natężeniu I i nachylonej pod kątem ϑ do kierunku padania światła, wyraża się wzorem

$$\eta = \frac{I}{r^2} \cos \vartheta.$$

W oparciu o powyższy wzór skonstruowano przyrządy zwane fotometrami, przeznaczone do względnych pomiarów światłości. Zasada pomiaru polega na takim dobraniu odległości źródła mierzonego i wzorcowego, by obydwa dawały równe oświetlenie pewnej powierzchni przy $\vartheta = 0$. Oznaczając wielkości źródła wzorcowego wskaźnikiem w, a mierzonego x otrzymamy dwa następujące równania:

$$\eta_w = \frac{I_w}{r_w^2} \quad \text{oraz} \quad \eta_x = \frac{I_x}{r_x^2}.$$

Gdy oświetlenie jest równe $\eta_w = \eta_x$, otrzymamy

$$I_g \overset{df}{=} \frac{I_x}{I_w} = \frac{r_x^2}{r_w^2}, \tag{30.18}$$

a wzór powyższy może służyć do wyznaczania I_g względnej światłości źródeł.

Sprawnością świetlną źródła nazywamy stosunek jego światłości I do pobieranej mocy P np. prądu*, wtedy

$$\eta = \frac{I}{P}. \tag{30.19}$$

W przeciwieństwie do sprawności energetycznych, sprawność świetlna jest liczbą mianowaną i ma wymiar cd/W. Światłość żarówek elektrycznych zależy od temperatury włókna. Dla pewnego przedziału temperatur przyjąć możemy, że światłość jest proporcjonalna do x-tej potęgi temperatury bezwzględnej włókna

$$I = CT^x.$$

Z drugiej strony zgodnie z prawem Stefana–Boltzmanna (§ 15.03) moc wypromieniowana jest proporcjonalna do 4-tej potęgi temperatury

$$P = \sigma T^4.$$

Eliminując temperaturę z ostatnich dwóch równań otrzymamy

$$I = \text{const}\, P^{x/4}$$

lub po zlogarytmowaniu

$$\log I = \text{const} + \frac{x}{4} \log P. \tag{30.20}$$

Podstawiając ponadto na I światłość względną z równania (30.18) otrzymamy

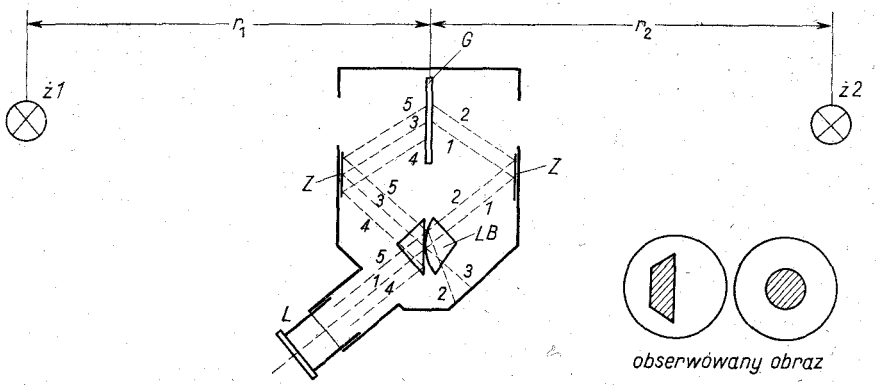
$$\log \frac{r_x^2}{r_w^2} = \text{const} + \frac{x}{4} \log P. \tag{30.21}$$

Światłość hipotetycznego punktowego źródła nie zależy od kierunku; mówimy, że źródło takie jest izotropowe. W rzeczywistych żarówkach elektrycznych światłość zależy od kierunku, a zjawisko to nazywamy anizotropią źródła. Dokładną charakterystykę kierunkową źródła anizotropowego przedstawiamy we współrzędnych biegunowych, gdzie modułem jest światłość, natomiast argumentem kąt płaski mierzony od umownie przyjętego kierunku leżącego w płaszczyźnie badania (por. rys. 30.12).

Aparatura

Do porównywania oświetlenia służą fotometry. Najbardziej rozpowszechniony jest fotometr Lummera–Brodhuna (rys. 30.11). Powierzchnią oświetlaną jest idealnie matowa płytka G wykonana np. z gipsu i ustawiona pomiędzy badanymi źródłami. Promienie rozproszone na płytce gipsowej odbijają się od dwóch zwierciadeł Z i padają na kostkę fotometryczną Lummera–Brodhuna. Kostka fotometryczna wykonana jest z dwóch pryzmatów, które w niektórych miejscach ściśle do siebie przylegają; w pozostałych miejscach między pryzmatami znajduje się warstwa powietrza. W miejscach

* Często sprawność świetlną definiujemy jako stosunek strumienia do mocy.



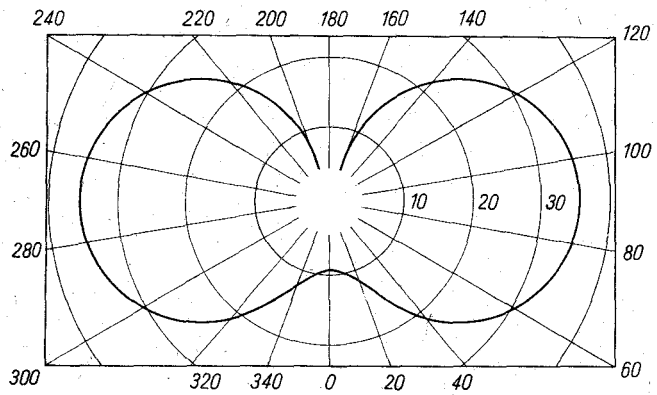
30.11. Budowa fotometru Lummera–Brodhuna oraz obrazy w polu widzenia dla różnego typu pryzmatów.

w których pryzmaty ściśle przylegają, światło przechodzi bez przeszkód (promienie *1* i *3*) natomiast odbija się od części pryzmatów graniczących z powietrzem (promienie *2*, *4*, *5*). Stąd część pola widzenia oświetlona jest przez źródło Z_1, a część przez Z_2. Pomiar polega na przesunięciu fotometru wzdłuż linii Z_1Z_2 w miejsce, w którym oświetlenie całego pola widzenia jest dokładnie równe. Zarówno źródła jak i sam fotometr ustawione są na ławie optycznej.

Pomiary

Żarówkę wzorcową włączamy bezpośrednio do sieci prądu przemiennego 220 V, a żarówkę badaną zasilamy przez autotransformator i watomierz według schematu 18.6. Watomierz możemy zastąpić woltomierzem i amperomierzem (rys. 4.19).

W pierwszym etapie wykonujemy pomiary mające na celu ustalenie zależności światłości od mocy prądu. W tym celu mierzymy odległości r_w i r_x źródeł przy równo oświetlonej powierzchni pola widzenia fotometru dla przynajmniej 10-ciu różnych wartości mocy P czerpanej przez żarówkę.



30.12. Zależność światłości od ustawienia żarówki.

W drugim etapie badamy charakterystykę kierunkową źródła w płaszczyźnie prostopadłej do osi konika, na którym ustawiona jest żarówka. W tym celu badaną żarówkę zasilamy mocą nominalną np. 60 W, a następnie wykonujemy pomiary światłości względnej dla ustawień różniących się o 10° do 15° w zakresie kątów od 0 do 360°, czyli 2π. Szkicujemy sposób ustawiania włókna żarówki względem podziałki kątomierza.

Obliczenia

Z pierwszej części doświadczenia obliczamy $I_g = r_x^2/r_w^2$, i $\log I_g$ od P oraz η, a następnie wykreślamy zależność $\log I_g$ od $\log P$. Wykres ten możemy wykonać na arkuszu o skalach logarytmicznych nie obliczając uprzednio logarytmów. Obliczamy metodą najmniejszych kwadratów nachylenie a prostoliniowego odcinka krzywej i obliczamy x z wzoru $x = 2a$ (por. wzór 30.21). Obliczamy odchylenie standardowe wyznaczonej wielkości. Wykreślamy zależność względnej światłości I_g żarówki oraz jej sprawność η w zależności od mocy P zasilającej żarówkę.

W oparciu o wyniki części drugiej, wykreślamy w układzie biegunowym kątową zależność światłości względnej, rysując w centrum wykresu sposób ustawienia włókna badanej żarówki.

30.5. SPEKTROSKOP

Cel: badanie widm emisyjnych gazów, absorpcyjnych cieczy i badanie fluorescencji.

Przyrządy: luneta (§ 4.13), lampy widmowe (§ 4.14), induktor Ruhmkorffa (§ 4.5).

Zagadnienia: budowa atomu i serie widmowe (S5, § 13–19; J, § 29.1–6; H2, § 47.7 i 8), luminescencja (S4, § 45), rozszczepienie światła (S4, § 16–19; J, § 23.24–26).

Wprowadzenie

Zjawisko dyspersji światła w szkle znajduje zastosowanie praktyczne do rozszczepienia światła. Światło białe przechodząc przez pryzmat (bryła ograniczona dwoma płaszczyznami tworzącymi kąt γ, inne płaszczyzny dowolne) ulega rozszczepieniu na barwy: czerwoną, pomarańczową, żółtą, zieloną, niebieską, indygo i fioletową. Światło o poszczególnych barwach różni się długością fali. Cały zakres światła widzialnego mieści się w przedziale 0,63–0,40 μm. Obraz otrzymany na skutek rozszczepienia światła białego nazywamy widmem. W przypadku, gdy poszczególne barwy widma przechodzą w sposób ciągły jedna w drugą, widmo nazywamy ciągłym. Widmo ciągłe otrzymujemy rozszczepiając światło wysyłane przez ciała stałe i ciekłe podgrzane do wysokiej temperatury.

W przypadku, gdy źródłem światła są gazy jednoatomowe, widmo składa się z pojedynczych prążków barwnych, których ilość i położenie jest inne dla każdego gazu. Zatem widmo pozwala zidentyfikować atomy wysyłające światło. Z tego powodu sposób identyfikacji atomów oparty o analizę widma nazywamy analizą widmową. Chcąc wykonać analizę widmową musimy znać dokładnie długości fal poszczególnych linii. Długość fal określić możemy z położenia poszczególnych linii znając dla danego spektrometru tzw. krzywą dyspersji, czyli zależność długości fali od położenia linii mierzonego

w sposób umowny. Celem wyznaczenia przebiegu krzywej dyspersji określamy położenie linii pierwiastka o znanym widmie.

Gazy o cząsteczkach dwu- i wieloatomowych dają widma pasmowe, w których nie występują pojedyncze linie o określonej jednej tylko długości fali, lecz pasma na przemian jasne i ciemne. Widma pasmowe otrzymujemy również w przypadku fotoluminescencji, czyli świecenia wzbudzonego innym światłem np. żarówką oświetlającą z boku ciało, którego widmo badamy.

Światło białe przechodząc przez pary doznaje pochłaniania. Okazuje się, że pochłaniane są dokładnie te same długości fal, które dane ciało emituje świecąc. Stąd światło białe po przejściu przez pary jakiegoś pierwiastka nie daje już widma ciągłego; w miejscach, w których występują linie emisyjne pierwiastka tworzącego pary, w widmie ciągłym istnieją przerwy. Widmo wtedy nazywamy widmem absorpcyjnym. Widmo absorpcyjne może również posłużyć do identyfikacji pierwiastków.

W przypadku widm luminescencyjnych często widmo absorpcyjne nie pokrywa się z widmem emisyjnym, pasma emisyjne są bardziej długofalowe. Dzieje się tak dlatego, że energia kwantu absorbowanego $h\nu_a$ musi być większa lub równa energii kwantu emitowanego $h\nu_e$, czyli

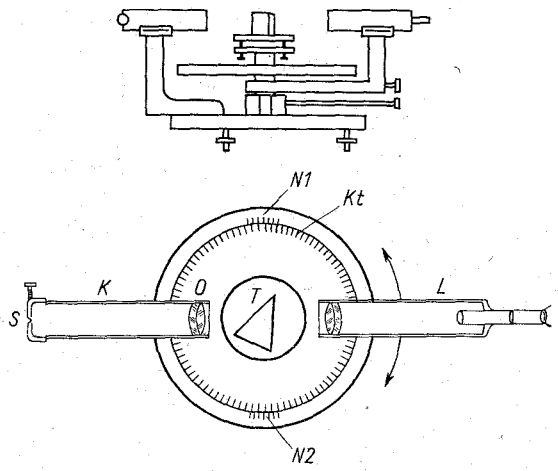
$$h\nu_a \geqslant h\nu_e,$$

ponieważ $\nu = 1/\lambda$ otrzymujemy $\lambda_a \leqslant \lambda_e$.

Aparatura

Do pomiaru załamania i dyspersji światła stosujemy trzy rodzaje przyrządów: 1. spektrometry lub goniometry jednokołowe, 2. spektroskopy, 3. spektrografy.

1. *Spektrometry zwane również goniometrami jednokołowymi* służą do dokładnego pomiaru kąta załamania światła w pryzmatach lub kąta ugięcia promieni ugiętych na siatce dyfrakcyjnej. Spektrometr (rys. 30.13) składa się z następujących części: kolimatora K, stolika T, lunetki L i kątomierza Kt. Całość zamocowana jest na silnej podstawce. Kolimator składa się z regulowanej szczeliny S i soczewki O. Długość kolima-



30.13. Budowa spektrometru (goniometru).

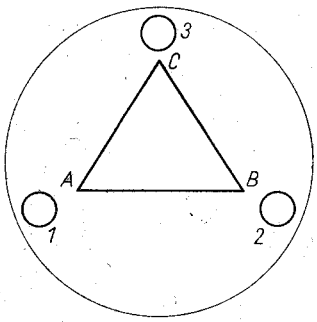
tora jest tak dobrana, że szczelina leży w ognisku soczewki, dzięki czemu otrzymujemy wiązkę równoległą. Kolimator jest nieruchomo związany z podstawą. Lunetka L połączona jest na stałe z kątomierzem Kt i może obracać się wokół osi spektrometru, a jej położenie odczytuje się na kątomierzu Kt z dokładnością równą niekiedy jednej minucie stopniowej. Tak dokładny odczyt umożliwiają noniusze $N1$ i $N2$ znajdujące się w odległości wzajemnej π. Lunetka zbiera równoległą wiązkę światła, dając tym samym ostry obraz szczeliny. W nowszych goniometrach kąty odczytuje się metodą optyczną, a precyzja tego odczytu jest bardzo duża. Położenie kątowe lunetki jest równe średniej arytmetycznej wskazań l, p obydwu noniuszy

$$\varphi = \frac{l+p}{2}. \tag{30.22}$$

Stolik może obracać się wokół osi przyrządu niezależnie od lunetki i niekiedy ma śruby służące do regulowania ustawienia poziomego. Precyzyjne spektrometry zaopatrzone są ponadto w układ pokręteł służących do unieruchomiania lunetki i stolika, do precyzyjnego przesuwania tych części; mają także poziomicę. Pokrętła rozmieszczone są inaczej w każdym przyrządzie. Lunetka i kolimator są często ruchome i przed każdym pomiarem trzeba dokładnie wyregulować ich ustawienie postępując następująco: wyjmujemy lunetkę z spektrometru (lub zabieramy cały spektrometr) i ostrość widzenia regulujemy na odległy przedmiot, np. fragment architektury widzianej z okna pracowni. Regulujemy również ostrość widzenia krzyża z nici pajęczych. Przy prawidłowym ustawieniu nie występuje paralaksa, czyli nie zauważamy przesuwania się krzyżyka na tle obrazu przy ruchu oka względem lunety. Tak ustawioną lunetę zakładamy na powrót do spektrometru i ustawiamy w jednej osi z kolimatorem (bez pryzmatu). Szczelinę oświetlamy silnym źródłem światła, najlepiej monochromatycznego, po czym regulujemy odległość między szczeliną a soczewką O do chwili uzyskania ostrego obrazu szczeliny w lunetce. Ze względu na to, że lunetka nastawiona była na nieskończoność, kolimator musi wtedy dawać wiązkę równoległą. Przy prawidłowym ustawieniu przyrządu również obraz szczeliny nie wykazuje paralaksy. Następnie ustawiamy równolegle oś kolimatora i lunetki w ten sposób, by obraz szczeliny znajdował się dokładnie na przecięciu nici pajęczych, był dokładnie pionowy i znajdował się dokładnie w środku pola widzenia. Od tego momentu nie wykonujemy już żadnych regulacji lunety, a w kolimatorze zmieniać możemy tylko szerokość szczeliny. Regulujemy ją w ten sposób, by obraz był ostry i wąski, lecz nie wykazywał jeszcze dyfrakcyjnego rozmycia krawędzi.

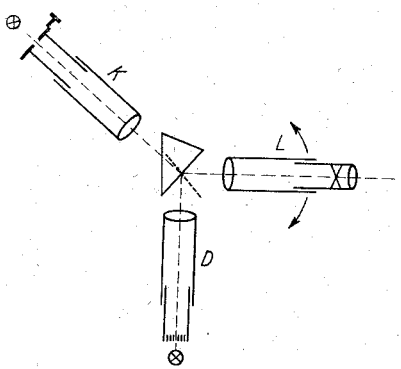
W spektrometrach starszej konstrukcji trzeba regulować ustawienie stolika. Posiada on trzy śruby podobnie jak statyw katetometru (§ 3.2). Na stoliku ustawiamy pryzmat w ten sposób, by jedna z jego krawędzi AB była równoległa do linii łączącej śruby *1* i *2* (rys. 30.14). Szczelinę kolimatora oświetlamy światłem białym lub monochromatycznym, a lunetkę ustawiamy pod kątem 60° do 90° względem kolimatora. Obracamy stolik w ten sposób, by uzyskać w lunetce obraz szczeliny powstały przez odbicie od ścianki AB. Śrubą *3* regulujemy ustawienie stolika w ten sposób, by obraz był symetryczny względem punktu przecięcia nici pajęczych. Po osiągnięciu tego obracamy stolik w ten sposób, by otrzymać odbicie od drugiej powierzchni łamiącej np. AC i znowu doprowadzamy obraz do położenia środkowego pokręcając śruby *1* i *2* o ten sam kąt w przeciwnych kierunkach.

Opisany tu spektrometr jest przyrządem bardzo złożonym, istnieje szereg spektrometrów o prostszej budowie, w których nie zachodzi potrzeba tylu regulacji. W szczególności żadnej regulacji nie wymaga ustawienie stolika, a kolimator i lunetka zamocowane są na stałe. Mogą one być natomiast zaopatrzone w filtry, polaryzatory itp.



30.14. Objaśnienie sposobu ustawiania stolika spektrometru.

2. *i* 3. *Spektroskopy i spektrografy* służą do wyznaczania długości fali poszczególnych linii widmowych. Schemat budowy typowego spektroskopu szkolnego, którym posługujemy się również w pracowniach fizycznych, przedstawiono na rys. 30.15. Poza kolimatorem K i lunetką L działającymi tak samo jak w spektrometrze, spektroskop posiada dodatkowy kolimator, w którym w miejscu szczeliny znajduje się skala. Działki i cyfry



30.15. Spektroskop z dodatkowym kolimatorem.

tej skali są przezroczyste, a tło nieprzezroczyste. Dodatkowy kolimator ustawiony jest w ten sposób, że jego światło odbija się od ścianki pryzmatu bliższej lunetki i nakłada się na wiązkę przechodzącą przez pryzmat. Dzięki temu w lunetce, na tle widma widzimy skalę, która pozwala określić położenie poszczególnych linii widmowych. Pryzmat spektroskopu jest najczęściej nieruchomy i osłonięty zewnętrzną osłoną chroniącą przed ujemnym wpływem światła rozproszonego.

Przed przystąpieniem do pomiarów lunetkę spektroskopu regulujemy tak samo jak w spektrometrze. Celem ustawienia kolimatora przed szczeliną ustawiamy dowolne źródło dające widmo liniowe i kolimatorem regulujemy ostrość linii widmowych. Po-

zerowy ε_0. Czynności związane z naprowadzeniem lunetki i odczytem kąta zerowego powtarzamy 6-krotnie.

Naprowadzamy lunetkę na kierunek promieni załamanych i doprowadzamy do pokrycia skrzyżowania nici z górną granicą oddzielającą jasną część pola widzenia (dość szerokiego prążka) od ciemnej. Odczytujemy kąt ugięcia ε_1. Również w tym przypadku naprowadzenie lunetki i pomiary powtarzamy wielokrotnie.

Temperaturę w ultratermostacie podwyższamy o 5 do 10 stopni (zgodnie z instrukcją) i po ustaleniu się nowej temperatury powtarzamy wszystkie pomiary kąta ε_0 i kąta odchylenia ε_1. Podobne pomiary wykonujemy dla kilku temperatur wskazanych w instrukcji lub dla kilku różnych cieczy.

Obliczenia

Dla każdej temperatury obliczamy wartości średnie ε_0 i ε_1 oraz odchylenia standardowe tych wielkości. Obliczamy rzeczywisty kąt odchylenia w poszczególnej temperaturze jako różnicę $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$. Współczynniki załamania obliczamy z wzoru (30.25). Odchylenia standardowe średniej arytmetycznej $S_{\bar{\varepsilon}_0}$ oraz $S_{\bar{n}}$ obliczamy dla dwóch skrajnych temperatur. Wykreślamy zależność współczynnika załamania od temperatury. Jeżeli pomiary wykonaliśmy dla różnych cieczy, błędy obliczamy dla każdej cieczy oddzielnie.

31. DYFRAKCJA I INTERFERENCJA

31.01. INTERFERENCJA I SPÓJNOŚĆ ŚWIATŁA (uprzednio zapoznać się z § 27.01–02)

Światło jest falą elektromagnetyczną. Zjawiska świetlne wywołuje wektor pola elektrycznego. Natężenie pola elektrycznego fali określone jest równaniem (27.11), które dla potrzeb optyki napisać możemy w postaci

$$A = A_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \delta\right]. \tag{31.1}$$

Z falowej natury światła wynika możliwość *dyfrakcji*, *interferencji* i *polaryzacji*. Zgodnie z *zasadą Huyghensa* każdy punkt, do którego dochodzi fala, staje się źródłem nowej fali kulistej. *Interferencją* nazywamy dodawanie się wychyleń A_i dwóch lub większej liczby fal. Zakładając, że interferują ze sobą dwie fale o równych amplitudach i długościach $\lambda = cT$ otrzymamy

$$A = A_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \delta_1\right] + A_0\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) + \delta_2\right] =$$

$$= 2A_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right) + \frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right]\cos\left(2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda} + \frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right). \tag{31.2}$$

Rolę wypadkowej amplitudy drgań odgrywa tu wyrażenie

$$A_0' = 2A_0\cos\left(\pi\frac{r_1-r_2}{\lambda} + \frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right). \tag{31.3}$$

Wzmocnienie interferujących wiązek uzyskamy, gdy $A_0' = 2A_0$, co zachodzi w przypadku, gdy $\cos\left(\pi\frac{r_1-r_2}{\lambda} + \frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right) = 1$, czyli

$$\pi\frac{r_1-r_2}{\lambda} + \frac{\delta_1-\delta_2}{2} = k\pi. \tag{31.4}$$

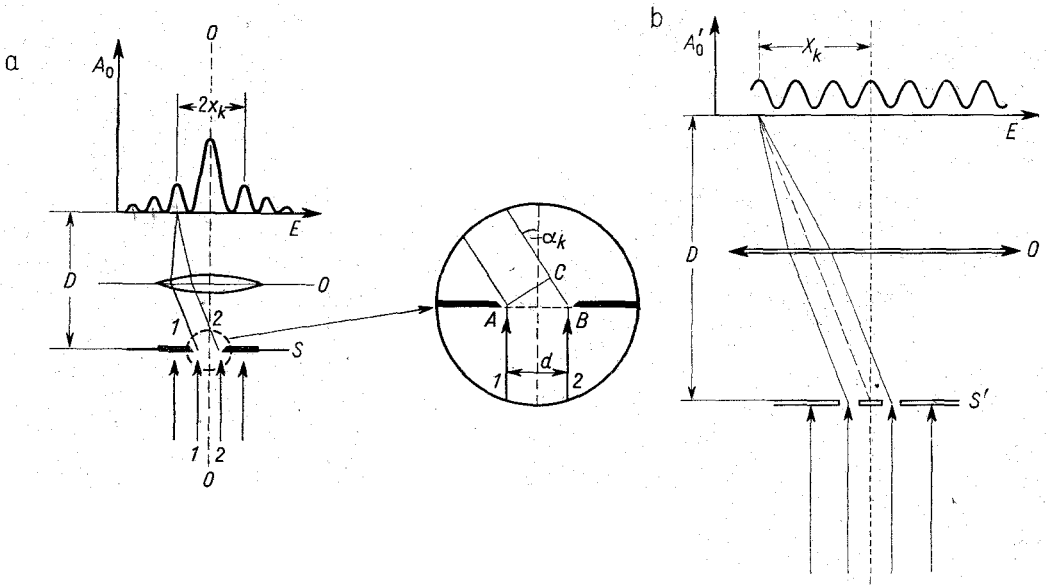
Zakładając przypadek równych faz początkowych $\delta_1 = \delta_2$, tzn. światła spójnego otrzymamy

$$r_1 - r_2 = k\lambda. \tag{31.5}$$

Dla miejsc, w których drgania nie zachodzą $A_0' = 0$, otrzymamy

$$r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{31.6}$$

Najprostszy sposób otrzymywania tzw. obrazu dyfrakcyjnego pokazano na rysunku 31.1a. Równoległa wiązka spójnych promieni świetlnych pada na szczelinę S, na której zgodnie z zasadą Huygensa ulega ugięciu, dalej jest ona skupiona na ekranie E za pomocą soczewki O. Powyżej ekranu przedstawiono wykres rozmieszczenia amplitud A_0'. Najwięk-



31.1. Dyfrakcja światła na pojedynczej szczelinie (a) i interferencja światła ugiętego na podwójnej szczelinie (b).

szą amplitudę posiada tzw. prążek zerowy, czyli nieodchylony, a następnie amplitudy szybko maleją wraz z kolejnym numerem k prążka odchylonego. Różnica dróg $r_1 - r_2$ między skrajnymi promieniami *1* i *2* jest równa BC. Wzmocnienie następuje dla kąta ugięcia α_k spełniającego warunek: $r_1 - r_2 = BC = d\sin\alpha_k$, gdzie d — szerokość szczeliny, skąd zgodnie z (31.5) otzymamy

$$d\sin\alpha_k = k\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{31.7}$$

Dla prążków ciemnych, tzn. miejsc, w których wypadkowa amplituda $A_0' = 0$, otrzymamy

$$d\sin\alpha_l = (2l+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{31.8}$$

Oznaczając przez D odległość ekranu od szczeliny, a przez x_k odległość k-tego prążka jasnego od osi symetrii OO otrzymamy

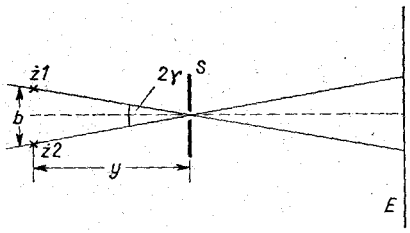
$$\sin\alpha_k \simeq \operatorname{tg}\alpha_k = \frac{x_k}{D}. \tag{31.9}$$

Założenie $\sin\alpha_k \simeq \operatorname{tg}\alpha_k$ jest uzasadnione dużą odległością ekranu. Łącząc wzory (31.7) i (31.9) otrzymamy dla jasnych prążków

$$x_k = \frac{Dk\lambda}{d}. \tag{31.10}$$

Omawiany tu obraz dyfrakcyjny uda nam się zaobserwować tylko wtedy, gdy szerokość szczeliny d jest zbliżona do długości fali λ stosowanego światła monochromatycznego, czyli o jednej tylko długości fali.

W inny sposób tzw. *obraz interferencyjny* możemy uzyskać za pomocą dwóch szczelin (rys. 31.1b). Nazwę obraz interferencyjny przyjęto dla odróżnienia od obrazu otrzymanego na pojedynczej szczelinie. Do przypadku dwóch szczelin znajdujących się w odległości wzajemnej d rzędu długości fali λ stosują się takie same wzory jak do szczeliny pojedynczej. W szczególności dla prążków jasnych stosuje się wzór (31.10). Jednakże obraz interferencyjny różni się od obrazu otrzymanego na pojedynczej szczelinie. Otrzymujemy tu szereg równoległych, równooddalonych prążków o równym natężeniu. W rzeczywistości obraz ten jest nieco rozmyty i w pewnych obszarach nieostry na skutek tego, że nakłada się on na tło obrazu dyfrakcyjnego każdej ze szczelin.



31.2. Rysunek pomocniczy do wyprowadzenia warunku spójności światła.

W obydwu przypadkach zakładaliśmy, że światło było monochromatyczne, czyli o jednej tylko długości fali, oraz *spójne* tzn. takie, w którym różnice faz pozostają stałe w czasie. Światło monochromatyczne potrafimy wytwarzać za pomocą lamp widmowych w szczególnści (sodowej) lub filtrów interferencyjnych (por. § 4.14). Światłem spójnym jest światło laseroowe (§ 31.2). Inne źródła światła dają światło niespójne. Składają się one z atomów emitujących niezależnie (niesynchronicznie) swoje ciągi fal, stąd fazy drgań ulegają ciągłym zmianom. Obecnie omówimy warunki, w których obraz dyfrakcyjny lub interferencyjny uzyskać możemy ze źródła *niespójnego*. W tym celu wyobraźmy sobie następujące doświadczenie (rys. 31.2). W znacznej odległości y od szczeliny znajdują się dwa źródła światła $Z1$ i $Z2$, z których każde niezależnie wysyła światło spójne. Odległość między źródłami wynosi b, a kąt między promieniami wpadającymi do szczeliny 2γ. Światło nie jest wtedy spójne i na ekranie E powstają dwa niezależne obrazy

interferencyjne przesunięte względem siebie również o kąt 2γ. Zródła znajdują się daleko od szczeliny, stąd

$$2\gamma \simeq \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{b}{y}. \tag{31.11}$$

Obraz interferencyjny wystąpi wtedy, gdy pokrywają się linie jasne obrazów pochodzących od obydwu źródeł, co zachodzi dla bardzo małych kątów γ. Jeżeli jednak γ jest tak duże, że linie jasne obrazu interferencyjnego jednego źródła pokrywają się z liniami ciemnymi źródła drugiego, oświetlenie ekranu jest równomierne. Przypadek taki zajdzie wtedy, gdy $2\gamma = \alpha_1$ z równania (31.7). Stąd warunkiem istnienia obrazu interferencyjnego jest, by $2\gamma \ll \alpha_1$ lub $\sin 2\gamma \ll \sin \alpha_1$. Korzystając ponadto z równań (31.11) i (31.7) dla $k = 1$ oraz przyjmując $\sin 2\gamma = b/y$ możemy napisać warunek powstania obrazu interferencyjnego źródeł *Z1* i *Z2* w postaci

$$\frac{b}{y} \ll \frac{\lambda}{d}. \tag{31.12}$$

Możemy przyjąć, że rozciągłe źródła światła składają się z bardzo wielu źródeł punktowych. Jeżeli wtedy b oznacza odległość wzajemną skrajnych punktów, to *równanie* (31.12) stanowi warunek powstania obrazu interferencyjnego dla źródeł światła niespójnego i *nazywa się warunkiem spójności źródła światła*. Chcąc uzyskać obraz interferencyjny przy rozciągłym źródle światła, musimy stosować duże odległości y. Często rolę źródła światła spójnego spełnia szczelina wydzielająca wąską wiązkę światła. Szczelinę tę nazywamy szczeliną oświetlającą.

31.1. DYFRAKCJA NA SZCZELINACH

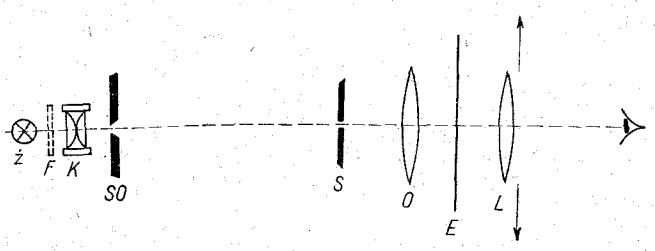
Cel: wyznaczanie długości fali z obrazu interferencyjnego w doświadczeniu Younga oraz z obrazu dyfrakcyjnego otrzymanego na jednej szczelinie, sprawdzenie warunku spójności światła.

Przyrządy: lampa sodowa lub filtry optyczne (§ 4.14), luneta (§ 4.13), okular mikrometryczny (§ 30.1).

Zagadnienia: fale elektromagnetyczne świetlne (§ 27.01–02), dyfrakcja i interferencja (S4, § 53–55, 65–69; J, § 24.3 i 4; H2, § 43.1–3, 44.1–6).

Aparatura

Aparatura (rys. 31.3) składa się ze źródła światła *ż*, którym jest żarówka z filtrem optycznym *F* najlepiej interferencyjnym, kondensora *K*, szczeliny oświetlającej *SO*, szczeliny *S* tzw. ugięciowej soczewki *O* ogniskującej wiązkę na ekranie *E* oraz okularu



31.3. Układ do badania dyfrakcji i interferencji.

mikrometrycznego L. Układ OEL można zastąpić lunetką z okularem mikrometrycznym, a żarówkę z filtrem przez lampę sodową. Jeżeli w doświadczeniu stosujemy lunetkę z okularem mikrometrycznym, wtedy musimy mieć możliwość oddzielenia obiektywu tej lunetki celem zmierzenia szerokości szczelin. W doświadczeniu stosujemy okular mikrometryczny, w którym krzyż z nici pajęczych możemy przesuwać i odczytywać za pomocą mikromierza, dzięki czemu położenie prążków czy wielkość obrazu odczytać możemy bardzo dokładnie.

Wszystkie elementy układu są ustawione na silnej ławie optycznej, każdy z tych elementów jest osadzony na własnym koniku przesuwalnym wzdłuż ławy. Same koniki i uchwyty zbudowane są w ten sposób, że za ich pomocą można zmieniać położenie elementów w poprzek osi optycznej układu.

Pomiary

1. *Pomiar obrazu dyfrakcyjnego lub interferencyjnego*. Zapalamy źródło światła i tuż za źródłem umieszczamy kondensor. Szczelinę oświetlającą umieszczamy w takiej odległości, by jej oświetlenie było optymalne. Usuwamy szczelinę pomiarową, a okular mikrometryczny umieszczamy w odległości większej niż 50 cm od szczeliny oświetlającej. Położenie soczewki O dobieramy w ten sposób, by uzyskać ostry obraz w okularze mikrometrycznym. Jeżeli zachodzi potrzeba, korygujemy położenie poszczególnych elementów na osi optycznej w ten sposób, by szczeliny i środek soczewek znajdowały się na jednej osi optycznej. Między szczeliną oświetleniową i soczewką O umieszczamy szczelinę pomiarową w ten sposób, by środek szczeliny znalazł się na osi optycznej. W okularze pomiarowym ujrzymy obraz dyfrakcyjny w przypadku pojedynczej szczeliny lub interferencyjny w przypadku, gdy szczeliną pomiarową jest szczelina podwójna. Krzyż z nici pajęczych kierujemy na kolejne maksima i odczytujemy ich położenia na mikromierzu.

2. *Pomiar szerokości szczeliny*. Szerokość szczelin lub odległość między szczelinami w przypadku podwójnej szczeliny mierzymy metodą Bessela (§ 29.1, metoda 2) stosując przyrządy stosowane do badania obrazów interferencyjnych lub dyfrakcyjnych. Mierzoną szczelinę umieszczamy w miejscu szczeliny oświetleniowej SO, a szczelinę S usuwamy. Położenie I soczewki O dobieramy w ten sposób, by na ekranie uzyskać powiększony obraz szczeliny i okularem pomiarowym mierzymy jego szerokość O_1A_1. Następnie soczewkę O przesuwamy do położenia II, przy którym w okularze pomiarowym otrzymamy ostry obraz pomniejszony i mierzymy jego szerokość O_1A_2. Zgodnie z rysunkiem 29.5 występują dwie następujące proporcje

$$\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{l-a}{a} \quad \text{oraz} \quad \frac{O_1A_2}{OA} = \frac{a}{l-a},$$

z których wynika związek

$$d = OA = \sqrt{(O_1A_1)\cdot(O_1A_2)}, \tag{31.13}$$

a z którego obliczyć można szerokość mierzonej szczeliny. Szerokości szczelin możemy również wyznaczyć mierząc wprost wielkość obrazu powiększonego i odległość soczewki O od szczeliny (a — odległość przedmiotu) oraz odległość soczewki O od płaszczyzny

ogniskowej okularu pomiarowego (b — odległość obrazu). Wtedy szerokość **szczelin** wyraża się (por. rys. 29.5) wzorem

$$d = OA = \frac{a}{b} O_1 A_1. \tag{31.14}$$

3. *Przebieg pomiarów interferencyjnych i dyfrakcyjnych.* Doświadczenie rozpoczynamy od pomiarów obrazu interferencyjnego, umieszczając w miejsce S podwójną szczelinę. Odczytujemy na mikromierzu położenie wszystkich widocznych prążków interferencyjnych. Mierzymy odległość D płaszczyzny ogniskowej okularu od podwójnej szczeliny, która powinna być rzędu 20–30 cm. Pomiary wykonujemy dla 2–3 odległości D lub dla 2–3 różnych długości fali uzyskanych za pomocą filtrów. Następnie wykonujemy pomiary obrazu dyfrakcyjnego uzyskanego za pomocą pojedynczej szczeliny ustawionej w miejscu S. Mierzymy położenie prążka zerowego oraz prążków ugiętych pierwszego i drugiego rzędu, wyniki ujmujemy w tabelę. Pomiary wykonujemy dla 2–3 różnych odległości D lub dla 2–3 różnych długości fal.

Badamy warunek spójności dla jednej długości fali. W tym celu w miejsce szczeliny oświetlającej SO o stałej szerokości ustawiamy pojedynczą szczelinę S o szerokości zmiennej, a wszystkie inne wielkości dobieramy w ten sposób, by uzyskać obraz dyfrakcyjny; w szczególności szerokość szczeliny oświetlającej tak dobieramy, by miała szerokość tego samego rzędu co szczelina stała. Powoli poszerzamy szczelinę SO i obserwując obraz dyfrakcyjny dochodzimy do takiej szerokości b szczeliny, przy której znika obraz dyfrakcyjny, tzn. tak się rozmywa, że nie potrafimy określić położenia maksimów lub minimów. Dalej szerokości szczeliny już nie zmieniamy. Mierzymy odległość y między obydwoma szczelinami. Mierzymy jedną z metod podanych w p. 2 szerokości wszystkich stosowanych szczelin, oraz odległość między środkami szczelin w szczelinie podwójnej, odczytując w tym celu wskazania mikromierza okularowego, w przypadku gdy krzyż z nici pajęczych pokrywa się z lewą (x_l) i prawą (x_p) krawędzią obrazu szczeliny, stąd dla szczeliny podwójnej odczytujemy niezależnie położenia prawej x_{p1}, x_{p2} i lewej krawędzi x_{l1}, x_{l2} każdej szczeliny.

Obliczenia

Obliczamy szerokości stosowanych szczelin. Dla szczelin pojedynczych wielkość obrazu O_1A_1 lub O_1A_2 wyrazi się wzorem $O_1A_2 = |x_l - x_p|$, a dla szczeliny podwójnej $O_1A_1 = |x_{l1} - x_{p1}|$ lub $O_1A_1 = |x_{l2} - x_{p2}|$, stąd przyjmujemy ostatecznie średnią tych dwóch wartości $O_1A = 1/2\,(|x_{l1} - x_{p1}| + |x_{l2} - x_{p2}|)$. Znając wielkość obrazów szczelin obliczamy same szerokości z wzorów (31.13) lub (31.14), zależnie od stosowanej metody pomiaru.

Dla obrazu interferencyjnego sprawdzamy zgodność odległości poszczególnych prążków jasnych, a następnie obliczamy odległość x_k dwóch skrajnych prążków — zerowego i k-tego. Następnie z wzoru (31.10) obliczamy długości fali. Obliczenia wykonujemy oddzielnie dla każdego z wykonanych pomiarów. Jeżeli pomiary wykonaliśmy przy różnych odległościach D, wynik końcowy uśredniamy.

Dla obrazu dyfrakcyjnego obliczamy odległości x_k przeciwległych prążków tego samego rzędu, a następnie długości fali obliczamy również z wzoru (31.10). Znając

z poprzednich obliczeń szerokości szczelin: b — oświetlającej, przy której znika obraz dyfrakcyjny i d — dyfrakcyjnej oraz odległość y między szczelinami i długości fali λ sprawdzamy, czy spełnione jest równanie (31.12), czyli warunek spójności światła z źródła rozciągłego.

Obliczamy błędy wyznaczonej szerokości d lub b wszystkich badanych szczelin, błędy długości fali $\Delta\lambda$ dla jednego pomiaru interferencyjnego każdej ze stosowanych w doświadczeniu długości fali światła. Przyjmujemy, że wartości średnie obarczone są takim samym błędem.

31.2. DYFRAKCJA ŚWIATŁA LASEROWEGO

Cel: wyznaczenie odległości szczelin z obrazu interferencyjnego w doświadczeniu Younga oraz szerokości pojedynczej szczeliny z obrazu dyfrakcyjnego uzyskanego na jednej szczelinie.

Przyrządy: luneta (§ 4.13), okular mikrometryczny (§ 30.1).

Zagadnienia: fale elektromagnetyczne świetlne (§ 27.01–02), dyfrakcja i interferencja (§ 31.01; S4, § 53–55, 65–67; J, § 24.3 i 4, H2, § 43.1–3, 44.1–6), laser gazowy (A. Piekara: Nowe oblicze optyki, Warszawa 1968, § 2.11–13, 3.5).

Wprowadzenie i aparatura

Zgodnie z modelem Bohra, elektrony zajmują ściśle określone poziomy energetyczne w atomie i każdemu poziomowi odpowiada ściśle określona wartość energii W*. Elektron może zmieniać poziomy energetyczne, przy czym przechodząc z poziomu o wyższej energii W_2 na poziom o energii niższej W_1 emituje kwant światła o energii $h\nu$, gdzie h — stała Plancka, ν — częstość. Na wyższy poziom energetyczny elektron przejść może tylko wtedy, gdy dostarczymy mu energii w postaci kwantu $h\nu$, zatem

$$W_2 - W_1 = h\nu. \tag{31.15}$$

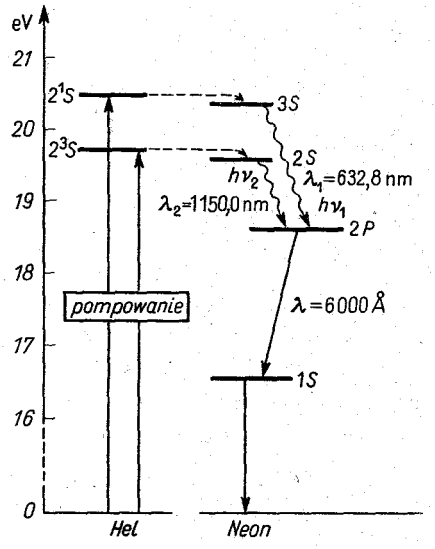
Stan atomu, w którym wszystkie elektrony zajmują najniższe poziomy energetyczne, nazywamy stanem podstawowym. Jeżeli jeden z elektronów zajmuje poziom wyższy od najniższego wolnego poziomu energetycznego, mówimy, że atom jest wzbudzony. Zatem, jeżeli atom przechodzi ze stanu wzbudzonego do podstawowego, to emituje, czyli promieniuje kwant światła $h\nu$. Zazwyczaj każdy atom emituje niezależnie i w wyniku otrzymujemy światło niespójne, tzn. takie, w którym fazy drgań są dowolne. Światło spójne otrzymalibyśmy wtedy, gdyby udało się „zsynchronizować" emisję.

Urządzeniem, w którym atomy promieniują synchronicznie, jest laser. Mechanizm działania lasera oparty jest na teorii Einsteina dotyczącej promieniowania wymuszonego. Zgodnie z tą teorią, jeżeli kwant o energii $h\nu$ pada na atom, w którym istnieją poziomy W_1 i W_2 spełniające warunek Bohra (31.15), wtedy: 1. kwant ten zostaje pochłonięty, jeżeli elektron w atomie zajmował poziom niższy W_1 lub 2. zostaje wyemitowany dodatkowy kwant, jeżeli elektron zajmował poziom wyższy W_2. Dodatkowy kwant światła $h\nu$ wyzwolony w przypadku drugim jest spójny z kwantem, który go wyzwolił, a pro-

* Model atomu Bohra nie jest zgodny z obrazem jakiego dostarcza współczesna mechanika falowa. Jednak idea pewnych stałych wartości energii elektronów jest słuszna również z punktu widzenia mechaniki falowej.

mieniowanie wywołane mechanizmem 2. nazywamy promieniowaniem wymuszonym. Promieniowanie wymuszone o dużym natężeniu otrzymać możemy tylko w przypadku, gdy istnieje duża, przeważająca liczba atomów w stanie wzbudzonym. W większości przypadków stany wzbudzone są bardzo nietrwałe. W krótkim czasie następuje emisja spontaniczna i nie możemy uzyskać stanu, w którym większość atomów znajdowałaby się w stanie wzbudzonym, czyli tzw. stanie odwróconym (bo jest przeciwny normalnemu). Stan odwrócony osiągnąć możemy, jeżeli spełnione są dwa warunki: 1. stan wzbudzony jest tzw. stanem metatrwałym, tzn. takim, w którym atomy pozostają przez dłuższy czas, 2. będziemy w sposób ciągły wzbogacać ilość atomów wzbudzonych, czyli zastosujemy tzw. pompowanie optyczne.

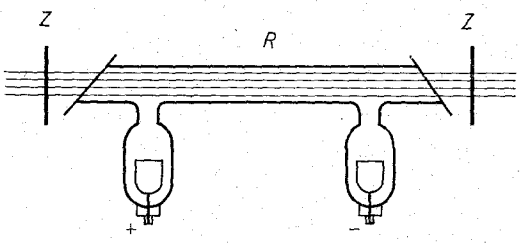
Stan odwrócony możemy uzyskać w laserze gazowym. Podstawową częścią lasera jest rura szklana wypełniona mieszaniną dwóch gazów, helu pod ciśnieniem 1 mm Hg oraz neonu pod ciśnieniem 0,1 mm Hg, w której mogą zachodzić wyładowania elektryczne.



31.4. Schemat poziomów energetycznych lasera helowo-neonowego.

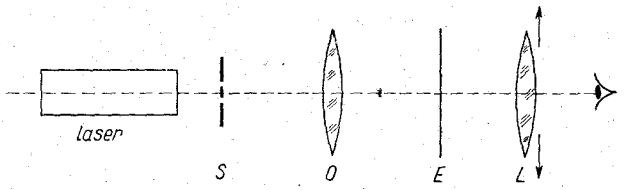
Schemat poziomów energetycznych tego układu pokazano na rysunku 31.4. W czasie wyładowań rozpędzone elektrony wzbudzają atomy helu do stanu 2^1S i 2^3S. Stany te są metatrwałe i wzbudzone atomy helu biorąc udział w ruchu cieplnym zderzają się również z atomami neonu. W zderzeniach takich poza wymianą pędów atom helu przekazuje atomowi neonu stan wzbudzenia, wzbudzając go do poziomów $3S$ lub $2S$, które są również stanami metatrwałymi. Jeżeli wyładowania są wystarczająco intensywne, możemy uzyskać odwrócenie obsadzeń poziomów $3S$ i $2P$ względnie $2S$ i $2P$ tzn. stan, w którym większość atomów znajduje się w stanach $3S$ i $2S$, dzięki czemu emisja wymuszona kwantów $h\nu_1$ i $h\nu_2$ może nastąpić w sposób lawinowy. Przypadkowo wyemitowane kwanty $h\nu_1$ lub $h\nu_2$ nie mogą spowodować wypromieniowania synchronicznego przez bardzo dużą liczbę atomów. Efekt taki można uzyskać wtedy, gdy cała objętość rurki do wyładowań jest w obszarze fali stojącej o częstości ν_1 lub ν_2 wytworzonej między dwoma płasko-równoległymi płytkami półprzepuszczalnymi ZZ (rys. 31.5),

między którymi powstaje fala stojąca. Po akcji laserowej następują spontaniczne przejścia atomów neonu do poziomu $1S$ (zwanego stanem końcowym), którym odpowiada czerwone świecenie neonu, a następnie przejścia do stanu podstawowego na skutek zderzeń z ścianami rurki. Laser gazowy działa w sposób ciągły dostarczając nieprzerwanie równoległej, monochromatycznej i spójnej wiązki światła o długości fali $\lambda_1 = 632{,}8$ nm oraz $\lambda_2 = 1150{,}0$ nm. Stosując odpowiednio skonstruowane zwierciadła, można uzyskać falę jednej tylko długości fali np. λ_1. Fala λ_2 odpowiada podczerwieni i nie interesuje nas.



31.5. Budowa lasera gazowego.

Lasery, a w szczególności laser gazowy bardzo dobrze spełnia wszystkie warunki jakie spełniać musi źródło światła służące do badania interferencji i dyfrakcji. Wykonując doświadczenia interferencyjno-dyfrakcyjne nie musimy wtedy stosować szczeliny oświetlającej i obraz interferencyjny ma znacznie większą jasność.



31.6. Układ do badania dyfrakcji i interferencji światła laserowego.

Schemat aparatury przedstawiono na rysunku 31.6. Nie ma tu szczeliny oświetlającej. Światło lasera pada wprost na szczelinę dyfrakcyjną lub na podwójną szczelinę S. Soczewka O służy do zogniskowania wiązki na ekranie E. Obraz ten możemy oglądać za pomocą okularu pomiarowego L, którego położenie zmieniać możemy mikromierzem. Okular jest zaopatrzony w krzyż z nici pajęczych, który pomaga w dokładnym odczytywaniu położenia prążków. Szczeliny są rysami wykonanymi na zwierciadle.

Pomiary

Ustawiamy aparaturę w sposób przedstawiony na rys. 31.6. Szczelinę S ustawiamy w ten sposób, by światło odbite od zwierciadła kierowało się na powrót do wyjścia lasera. Zapewnia to prostopadłe ustawienie zwierciadła do wiązki. Położenie soczewki O dobieramy w ten sposób, by na ekranie lub w okularze pomiarowym uzyskać ostry obraz prążków dyfrakcyjnych lub interferencyjnych. Odczytujemy położenia kolejnych prążków z największą dokładnością. Pomiary wykonujemy dla pojedynczej szczeliny

przy trzech różnych odległościach D. Podobne pomiary wykonujemy dla podwójnej szczeliny lub dla kilku podwójnych szczelin o różnych odległościach wzajemnych. Mierzymy odległości D dla każdej ze szczelin oddzielnie. Odległość D mierzymy od soczewki O do miejsca, w którym znajdują się nici pajęcze w okularze. Notujemy dokładności pomiarów.

Obliczenia

W oparciu o wyniki pomiarów dyfrakcyjnych obliczamy odległości x_k przeciwległych, leżących symetrycznie po przeciwnych stronach prążka zerowego, prążków i z wzoru (31.10) obliczamy szerokość szczeliny. Jako wynik końcowy przyjmujemy wartość średnią, uśrednioną na wszystkie rzędy prążków i wszystkie odległości D.

Dla obrazu interferencyjnego sprawdzamy zgodność odległości kolejnych prążków jasnych, a następnie obliczamy odległość x_k dwóch skrajnych prążków, zerowego i k-tego, których położenie określono w sposób pewny. Odległość szczelin obliczamy z wzoru (31.10). Uśredniamy oddzielnie wyniki pomiarów wykonanych dla każdej ze szczelin podwójnych.

Obliczamy błędy dla jednego z pomiarów dyfrakcyjnych oraz jednego z pomiarów interferencyjnych dla każdej szczeliny podwójnej. Przyjmujemy, że wartości średnie obarczone są takim samym błędem.

31.3. SIATKA DYFRAKCYJNA

Cel: wyznaczenie stałej siatki dyfrakcyjnej oraz wyznaczenie długości fali linii widmowych rtęci lub innego pierwiastka.

Przyrządy: lampy widmowe (§ 4.14).

Zagadnienia: dyfrakcja i interferencja (§ 31.01; S4, § 53–55; J, § 24.3 i 4; H2 § 43.1–3, 44.1–6), siatka dyfrakcyjna (S4, § 65–68; J, § 24.7; H2 § 45.1–4), teoria widma (S4, § 16–19; J, § 23.24–26; H2, § 45.3 i 4).

Wprowadzenie

Siatką dyfrakcyjną nazywamy szereg wzajemnie równoległych i leżących w równych odstępach szczelin. Odległości między sąsiednimi szczelinami nazywamy stałą siatki. Zazwyczaj siatkę dyfrakcyjną stanowi szereg rys na szkle, przestrzenie między rysami spełniają rolę szczelin. Siatki dyfrakcyjne przeznaczone do celów dydaktycznych wykonane są techniką fotograficzną (repliki).

Światło padające na siatkę doznaje ugięcia na każdej szczelinie i w płaszczyźnie ogniskowej soczewki zbierającej daje maksima podobne jak w przypadku pojedynczej lub podwójnej szczeliny. Maksima promieni ugiętych są szczególnie wyraźne, gdy wzmacniają się promienie wychodzące ze wszystkich szczelin. Następuje to wtedy, gdy między promieniami wychodzącymi z dwóch sąsiednich szczelin różnica dróg wynosi $k\lambda$ (rys. 31.7), czyli dla kąta α_M określonego wzorem

$$d \sin \alpha_M = k\lambda, \tag{31.15}$$

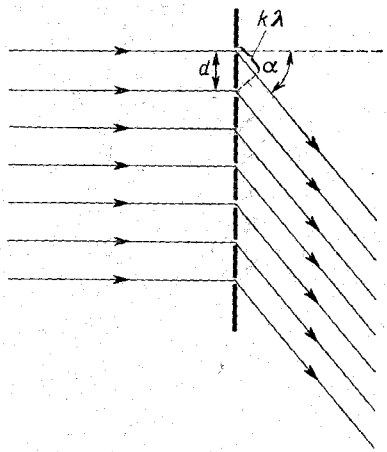
identycznym z wzorem (31.7). Różnica dróg skrajnych promieni wynosi wtedy $Nd\sin\alpha_M = Nk\lambda$, gdzie N oznacza liczbę szczelin. Pierwsze minimum boczne otrzy-

mamy wtedy, gdy wygaszają się promienie pochodzące od pierwszej skrajnej i środkowej szczeliny, wtedy promienie z kolejnych par liczonych od jednej z krawędzi siatki i od środka zawsze się wygaszają. Odległość tych szczelin wynosi $(1/2)Nd$, a różnica dróg: $(1/2)Nd \cdot \sin\alpha_m$. Warunek na minimum przyjmuje postać

$$(1/2)Nd \sin\alpha_m = (1/2)\lambda,$$

skąd

$$\sin\alpha_m = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{31.16}$$



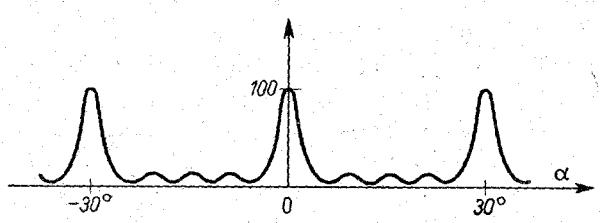
31.7. Ugięcie na siatce dyfrakcyjnej.

Dla następnych kolejnych minimów otrzymamy

$$\sin\alpha_{mi} = \frac{i\lambda}{Nd}.$$

Dla $i = N$, zgodnie z (31.15) otrzymamy pierwsze maksimum. Zatem pomiędzy kolejnymi maksimami występuje $N-1$ minimów oraz $N-2$ maksimów wtórnych, w których natężenie jest bardzo małe (rys. 31.8, dla $N = 5$). Sinus kąta odchylenia α_m dla najbliższego minimum otrzymamy dodając do wyrażenia (31.15) wyrażenie (31.16), wtedy

$$\sin\alpha_{m1} = \frac{k\lambda}{d} - \frac{\lambda}{Nd}.$$



31.8. Maksima i minima siatki dyfrakcyjnej o 5-ciu szczelinach.

Dwie linie widmowe $\lambda+\delta\lambda$ i λ możemy rozróżnić wtedy, gdy ich rozsunięcie kątowe (różnica sinusów kąta ugięcia) będzie przynajmniej takie, że maksimum jednej linii przypadnie na minimum drugiej, czyli

$$\frac{k}{d}(\lambda+\delta\lambda)=\frac{k\lambda}{d}-\frac{\lambda}{Nd},$$

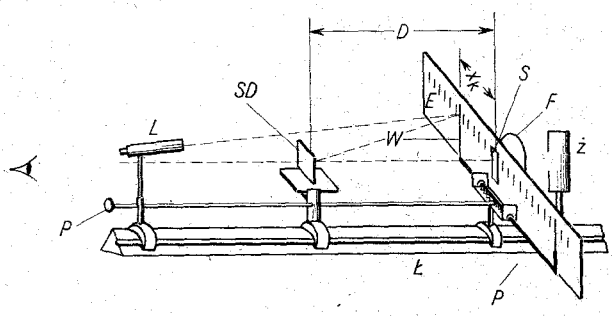
skąd

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda}=kN. \tag{31.17}$$

Wielkość $\lambda/\delta\lambda$ nazywa się zdolnością rozdzielczą siatki. Jak wynika z (31.17), zdolność rozdzielcza jest proporcjonalna do całkowitej liczby rys N i do rzędu ugięcia k.

Aparatura

Prosta aparatura (rys. 31.9) do badania siatki dyfrakcyjnej składa się z ławy optycznej $Ł$, źródła światła $ż$, ekranu E z szczeliną S, siatki dyfrakcyjnej SD. Źródłem jest lampa widmowa lub zwykła lampa z kompletem filtrów optycznych F. Na ekranie E znajduje się podziałka milimetrowa. Przyrząd może być zaopatrzony w układ P do zdalnego



31.9. Prosta aparatura do pomiaru stałej siatki dyfrakcyjnej.

przesuwania wskazówki ułatwiającej dokładny odczyt położenia linii na skali. Dodatkowa lunetka L służy do zdalnego odczytywania wskazań. Za pomocą omawianej aparatury wyznaczamy sinus kąta ugięcia α dowolnego maksimum interferencyjnego, jako stosunek odległości prążka x_k do odległości $\sqrt{D^2+x_k^2}$ (por. rys. 31.2). Wzór (31.10) przyjmuje wtedy postać

$$d\frac{x_k}{\sqrt{D^2+x_k^2}}=k\lambda. \tag{31.18}$$

Pomiary

Włączamy źródło światła — lampę sodową. Patrząc na ekran przez siatkę dyfrakcyjną w sposób zaznaczony na rys. 31.9, po prawej i lewej stronie szczeliny widzimy szereg jej obrazów. Pokrętłem P przesuwamy wskazówkę na kolejny obraz i odczytujemy jego położenie z maksymalną dokładnością. Pomiary wykonujemy dla wszystkich prążków znajdujących się na tle ekranu i powtarzamy dla 2–3 odległości D siatki od

ekranu. Takie same pomiary wykonujemy dla wszystkich linii otrzymanych w przypadku, gdy lampę sodową zastąpimy inną lampą widmową (np. rtęciową, kadmową) lub zastosujemy inne filtry.

Obliczenia

Korzystając z wzoru (31.18) obliczamy stałą siatki z pomiarów wykonanych dla światła sodu lub znanego filtru. Jako wynik ostateczny przyjmujemy średnią arytmetyczną. Błąd Δd obliczamy dla jednego z pomiarów. Jeżeli łączna liczba pomiarów jest równa 10, obliczamy błąd średni kwadratowy średniej arytmetycznej. Dla widma badanego wyznaczamy długości fali każdej linii z wzoru (31.18) przyjmując d z pierwszej części doświadczenia. Wyprowadzamy wzór na błąd $\Delta\lambda$ i obliczamy ten błąd dla jednego z pomiarów. Przyjmujemy, że inne obarczone są takim samym błędem.

31.4. SPEKTROMETR SIATKOWY

Cel: wyznaczenie stałej siatki dyfrakcyjnej oraz wyznaczenie długości fal linii widmowych nieznanego widma, identyfikacja pierwiastka.

Przyrządy: siatka dyfrakcyjna (§ 31.3), spektrometr (§ 30.5), lampa sodowa i lampa widmowa (§ 4.14).

Zagadnienia: dyfrakcja i interferencja (§ 31.01; S4, § 53–55; J, § 24.3 i 4; H2, § 43.1–3; 44.1–6), siatka dyfrakcyjna (S4, § 65–67; J, § 24.7; H2, § 45.1–4), widmo optyczne (S4, § 16–19; J, § 23.24–26; H2, § 45.3 i 4).

Pomiary

Włączamy lampę sodową i ustawiamy spektrometr (por. § 30.5). Lunetkę spektrometru naprowadzamy na prążek ugięty pierwszego rzędu w lewo (przesunięcie krzyża z nici pajęczych musi być dokładnie zgrane z środkiem linii) i odczytujemy z możliwie największą dokładnością kąt położenia lunetki. Taki sam odczyt wykonujemy dla linii pierwszego rzędu odchylonej w prawo. Gdy spektrometr zaopatrzony jest w dwa noniusze, odczytujemy każdorazowo obydwa wskazania. Odsuwamy lunetkę o niewielki kąt, ponownie naprowadzamy na prążek i powtarzamy odczyty. Analizujemy wpływ błędów na wynik końcowy i planujemy właściwą liczbę odczytów kąta. Podobne pomiary wykonujemy dla prążków ugiętych 2-ego i 3-ego rzędu. Mierzymy kąty ugięcia kolejnych linii widmowych światła pochodzącego z badanej lampy widmowej.

Obliczenia

W oparciu o wyniki uzyskane dla światła sodowego, obliczamy stałą d siatki dyfrakcyjnej z wzoru (31.7). Wchodzący do wzoru kąt α_k jest równy połowie różnicy odczytów dla k-tego rzędu prążka w lewo i w prawo w przypadku, gdy odczyty wykonaliśmy na dwóch noniuszach, kąt położenia lunetki obliczamy z wzoru (30.22). Długość fali światła sodowego przyjmujemy z tablic fizycznych. Obliczamy błąd stałej d. Przy dużej liczbie pomiarów obliczamy odchylenie standardowe wyniku końcowego.

Obliczamy długości fal poszczególnych linii widmowych światła badanego również z wzoru (31.7) przyjmując na stałą siatki średnią wartość z pierwszej części doświadczenia. Obliczamy błąd długości fali dla jednej linii. Przyjmujemy, że pozostałe obar-

czone są takim samym błędem. Znając długości fal poszczególnych linii i korzystając z tablic, identyfikujemy widmo. Długości fal otrzymane z doświadczenia oraz podane w tablicach muszą spełniać kryterium zgodności wyników (2.42).

31.5. PIERŚCIENIE NEWTONA

Cel: wyznaczenie promienia krzywizny soczewki płasko-wypukłej.

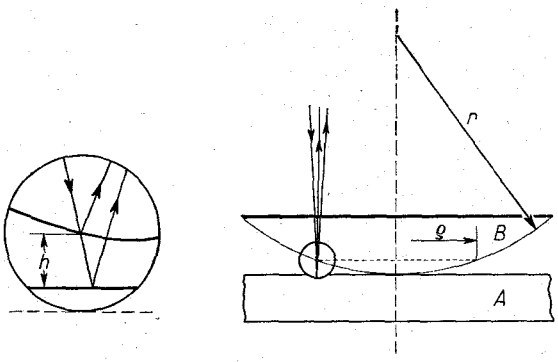
Przyrządy: mikroskop (§ 30.1), lampa sodowa (§ 4.14).

Zagadnienia: interferencja światła (§ 31.01; S4, § 53–57; J, § 24.2 i 3; H2, § 43.1–6), fale świetlne (§ 27,01–02).

Wprowadzenie

Światło padając na układ składający się z płytki płasko-równoległej A oraz płasko-wypukłej B (rys. 31.10) na każdej powierzchni granicznej ulega częściowo odbiciu. Promienie odbite mogą ze sobą interferować. W szczególności interferują: promień odbity od górnej powierzchni płytki A, z promieniem odbitym od dolnej, sferycznej powierzchni płytki B. Między tymi promieniami istnieje różnica dróg optycznych

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2}, \tag{31.19}$$



31.10. Odbicie światła od soczewki płasko-wypukłej.

gdzie $\lambda/2$ pochodzi od zmiany fazy zachodzącej przy odbiciu od środowiska o większym współczynniku załamania. Grubość h warstwy powietrza jest zmienna, stąd i obraz zmienia się wraz ze wzrostem promienia podstawy ϱ. Wzmocnienie następuje wtedy, gdy

$$\Delta_{Mk} = k\lambda, \tag{31.20}$$

a osłabienie, czyli minimum, gdy

$$\Delta_{mk} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{31.21}$$

Różnica dróg Δ jest stała dla tej samej wartości h, a równocześnie dla stałej wartości promienia podstawy czaszy ϱ, stąd też otrzymujemy obraz w postaci na przemian jasnych i ciemnych pierścieni. Promień podstawy ϱ czaszy kulistej spełnia związek

$$\varrho^2 = 2rh - h^2,$$

w którym $r \gg h$ i $2rh \gg h^2$, zaniedbując h^2 otrzymamy

$$\varrho^2 = 2rh. \tag{31.22}$$

Łącząc wzory (31.19), (31.20) i (31.22) promień ϱ_{Mk} prążków jasnych wyrazimy wzorem

$$\varrho_{Mk}^2 = r\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda, \tag{31.23}$$

a z wzorów (31.19), (31.22) otrzymamy dla prążków ciemnych

$$\varrho_{mk}^2 = rk\lambda. \tag{31.24}$$

Odejmując promienie k-tego i l-tego pierścienia jasnego: $\varrho_{Mk}^2 - \varrho_{Ml}^2$, otrzymamy

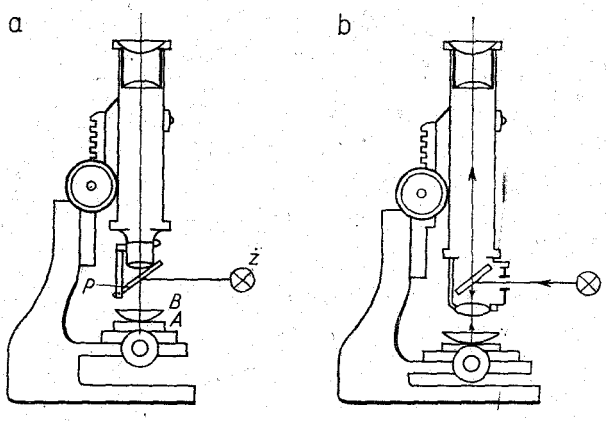
$$r = \frac{\varrho_{Mk}^2 - \varrho_{Ml}^2}{(k-l)\lambda}. \tag{31.25}$$

Podobny związek obowiązuje dla prążków ciemnych

$$r = \frac{\varrho_{mk}^2 - \varrho_{ml}^2}{(k-l)\lambda}. \tag{31.26}$$

Aparatura

Na stoliku mikroskopu (rys. 31.11) umieszczamy układ płytek A i B, między obiektywem i płytkami ustawiamy płytkę szklaną nachyloną pod kątem 45° względem osi optycznej mikroskopu. Zamiast tego stosować możemy mikroskop metalograficzny (rys. 31.11b), w którym preparat oświetlany jest z góry. Światło z lampy sodowej



31.11. Aparatura do obserwacji pierścieni Newtona z mikroskopem transmisyjnym (a) i metalograficznym (b).

padające na płytkę częściowo odbija się i biegnąc równolegle do osi optycznej mikroskopu pada na płytki, odbija się i wpada do mikroskopu. W mikroskopie widzimy układ pierścieni względnie szerokich w pobliżu prążka zerowego i zwężających się w miarę oddalania od centrum, w dalszej odległości pierścienie nie są już widoczne. Odczyty

położenia prążków możemy wykonać przesuwając stolik mikroskopu za pomocą pokrętła zaopatrzonego w skalę mikrometryczną, albo za pomocą mikromierza okularowego (§ 30.1), jednak wtedy znać musimy wartość podziałki skali okularowej.

Pomiary

Pod mikroskopem musimy odszukać pierścienie Newtona. W tym celu ustawiamy płytki i lampę sodową $\dot{Z}$ w sposób pokazany na rys. 31.11 i przesuwamy tubus mikroskopu w dół do zetknięcia płytki P z powierzchnią płytek A, B. Układ płytek przesuwamy w położenie, w którym ich środek przypada w osi optycznej mikroskopu. Patrząc w mikroskop za pomocą pokrętła do zgrubnego przesuwania, powoli przesuwamy tubus w górę do chwili, gdy ujrzymy prążki. Regulujemy ich ostrość stosując przesuw precyzyjny. Za pomocą pokręteł do przesuwania stolika naprowadzamy krzyż z nici pajęczych mikroskopu na środek układu pierścieni, przesuwamy układ o np. $k = 15$ pierścieni w prawo. Powoli przesuwamy płytki w lewo i odczytujemy położenie kolejnych maksimów na mikromierzu wprowadzając je kolejno na krzyż nici pajęczych. Odczytujemy położenia wszystkich maksimów aż do $k = 15$ w lewo. Pomiar powtarzamy dwukrotnie.

Obliczenia

Obliczamy promienie kolejnych pierścieni z wzoru $\varrho = \frac{1}{2}|p-l|$. W przypadku skali okularowej wynik ten musimy podzielić przez powiększenie mikroskopu. Wybieramy przynajmniej 10 par pomiarów dla różnych k i l, z których obliczamy promień krzywizny płytki B, lub znając promień krzywizny stosowaną długość fali, z wzoru (31.25). Jako wynik ostateczny przyjmujemy średnią arytmetyczną. Obliczamy odchylenie standardowe wyniku końcowego, a dla jednego z pomiarów obliczamy błąd maksymalny. Zgodność obydwu wyników jest dowodem prawidłowości wykonania pomiarów. Jeżeli mierzyliśmy długość fali, to porównujemy zgodność uzyskanego wyniku z tablicami.

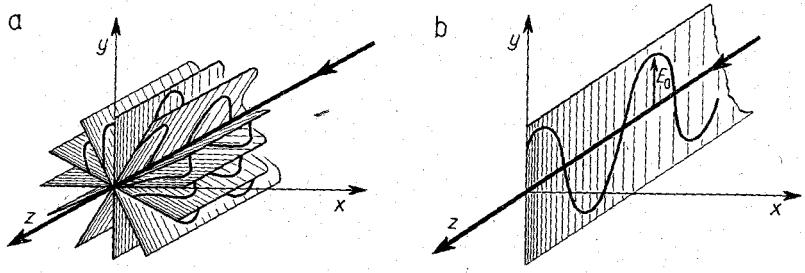
32. POLARYZACJA ŚWIATŁA

32.01. POLARYZACJA ŚWIATŁA

Światło jest poprzeczną falą elektromagnetyczną (§ 27.01–02). Oko ludzkie i wiele urządzeń optycznych reaguje wyłącznie na pole elektryczne tej fali. Tak więc drgania świetlne możemy uważać za drgania elektryczne i opisywać je równaniem falowym drgań elektrycznych. Zazwyczaj światło jest falą bardzo złożoną, ponieważ występują równocześnie fale o różnych długościach, a drgania zachodzą we wszystkich płaszczyznach przechodzących przez kierunek rozchodzenia się (rys. 32.1a). Celem uproszczenia sytuacji w wielu doświadczeniach stosuje się światło o długościach fal zawartych w bardzo małym przedziale od λ do $\lambda+\Delta\lambda$. Zakładamy wtedy, że jest to światło o jednej tylko długości fali, czyli *monochromatyczne*. W niektórych doświadczeniach ograni-

czamy drgania fali świetlnej do jednej tylko płaszczyzny (rys. 32.1b. Mówimy wtedy, że światło jest liniowo spolaryzowane. *Płaszczyzną polaryzacji* nazywamy płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny, w której zachodzą drgania. Równanie fali światła monochromatycznego o długości fali λ, spolaryzowanego liniowo w płaszczyźnie wyznaczonej kierunkami z, y przyjmuje szczególnie prostą postać

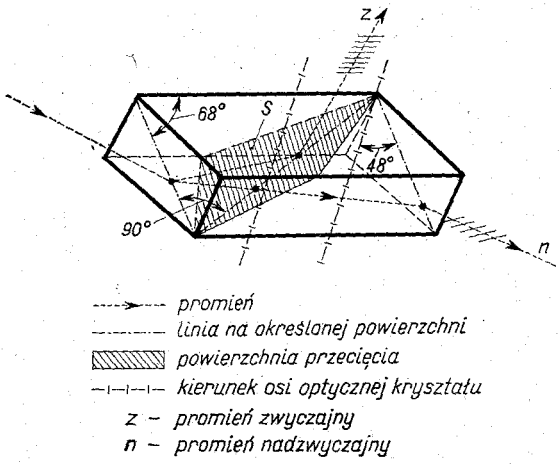
$$E_y = E_0 \cos 2\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right). \tag{32.1}$$



32.1. Fala niespolaryzowana (a) i spolaryzowana (b).

Istnieje kilka metod polaryzowania światła: 1. przez podwójne załamanie, 2. przez odbicie lub wielokrotne załamanie, 3. przez dichroizm.

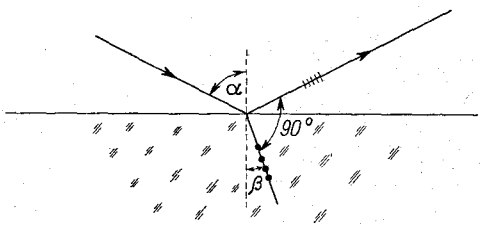
1. Na skutek zjawiska *podwójnego załamania* (S4, § 78 i 79) światło ulega rozszczepieniu na dwie wiązki, zwyczajną i nadzwyczajną. W interesujących nas kryształach, tzw. jednoosiowych istnieje jeden kierunek zwany *osią główną*, w którym nie występuje podwójne załamanie. Oś główna wyznacza jedynie kierunek w krysztale, stąd każda linia równoległa jest również osią główną. Każdą płaszczyznę równoległą do osi głównej nazywamy *przecięciem głównym*. *Przekrojem głównym* nazywamy płaszczyznę wyznaczoną przez promień padający i oś główną. Promień zwyczajny jest spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny przekroju głównego. Kąt jaki tworzą wiązki zwy-



32.2. Budowa nikola (pryzmatu Nicola).

czajna i nadzwyczajna jest zazwyczaj niewielki. Chcąc uzyskać światło spolaryzowane, jedną z tych wiązek musimy wyeliminować. Stosujemy w tym celu pryzmat Nicola (*nikol*) usuwający jedną z wiązek. Nikol (rys. 32.2) jest pryzmatem ze szpatu islandzkiego ($CaCO_3$ — minerał występujący w formie kryształów) składającym się z dwóch części. Powierzchnie przecięcia S sklejone są na powrót balsamem kanadyjskim o współczynniku załamania $n = 1{,}55$. Tymczasem współczynniki załamania szpatu wynoszą: dla promienia zwyczajnego $n_z = 1{,}66$, a dla nadzwyczajnego $n_n = 1{,}49$. Tak więc dla promienia zwyczajnego warstwa balsamu kanadyjskiego stanowi środowisko optycznie rzadsze, a dla nadzwyczajnego optycznie gęstsze. Kąty w pryzmacie dobrane są w ten sposób, że promień zwyczajny pada na warstwę balsamu kanadyjskiego pod kątem większym od granicznego, wobec czego ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu. Promień zwyczajny wychodzi przez boczne ścianki pryzmatu i zostaje pochłonięty przez czarną powierzchnię obudowy. Promień nadzwyczajny przechodzi doznając tylko niewielkiego przesunięcia równoległego. Ponieważ każdy z promieni jest polaryzowany liniowo, światło przechodzące przez nikol jest spolaryzowane liniowo w płaszczyźnie prostopadłej do przecięcia głównego.

2. Do wytworzenia światła spolaryzowanego wykorzystuje się również zjawisko polaryzacji światła *przez odbicie*. Jeżeli kąt padania dobrany jest tak, by kąt między promieniem odbitym i załamanym wynosił 90°, wtedy promień odbity jest całkowicie liniowo spolaryzowany w płaszczyźnie padania, a promień załamany spolaryzowany jest częściowo w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny padania (por. rys. 32.3).

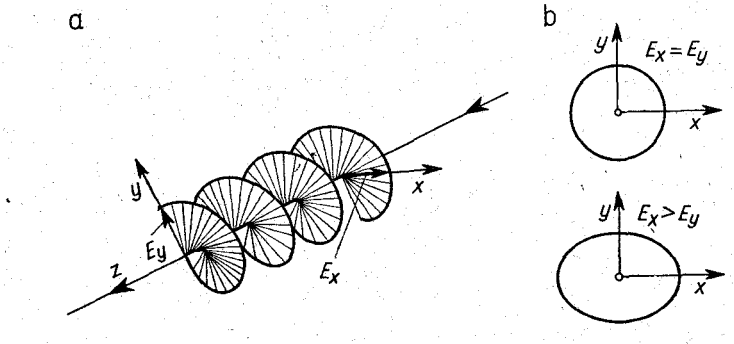


32.3. Sposób polaryzacji światła odbitego i załamanego.

Zjawisko powyższe można również wykorzystać do polaryzowania światła. Chcąc uzyskać całkowitą polaryzację światła załamanego musimy przepuścić je przez wiele równoległych płytek załamujących.

3. Obecnie do uzyskania światła spolaryzowanego najczęściej wykorzystuje się tzw. *zjawisko dichroizmu kryształów*. Światło przechodzące przez kryształy jest częściowo pochłaniane. Kryształy dichroiczne wykazują różnicę współczynników pochłaniania promieni zwyczajnego i nadzwyczajnego. W szczególności należy do nich *turmalin* pochłaniający silnie promienie zwyczajne biegnące wzdłuż osi optycznej. Turmalin nie jest jednak wygodny, ponieważ silnie osłabia światło, a współczynniki załamania zależą od długości fali. Lepiej do tego celu nadają się kryształy *heparytu* (sól siarczana jodochininy), które już przy grubości rzędu 0,3 mm pochłaniają całkowicie jeden z promieni. Płytki heparytowe nazywamy polaroidami; wytwarzać je można na szkle lub przezroczystej błonie.

Sprowadzenie drgań świetlnych do jednej płaszczyzny, czyli tzw. polaryzacja liniowa światła, nie jest jedynym sposobem uporządkowania drgań świetlnych. Może również istnieć światło, w którym koniec wektora natężenia pola elektrycznego zakreśla linię śrubową wokół kierunku rozchodzenia się (rys. 32.4). Mówimy wtedy o *polaryzacji kołowej* (gdy $E_y = E_x$) lub *eliptycznej* ($E_y \neq E_x$). Światło spolaryzowane kołowo lub eliptycznie otrzymać możemy przepuszczając światło spolaryzowane liniowo przez cienką płytkę wykonaną z kryształu optycznie czynnego. Światło w płytce rozpada się na wiązkę zwyczajną i nadzwyczajną. Drgania obydwu wiązek zachodzą w wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Jest to zjawisko przeciwne niż nakładanie fal omawiane w § 10.04. Jeżeli obydwa promienie rozchodzą się z tą samą prędkością, to po wyjściu z płytki pozostają nadal spójne, nakładają się dając taki sam wynik jak przed wejściem do płytki drgania spolaryzowane w tej samej płaszczyźnie polaryzacji. Jeżeli jednak prędkości rozchodzenia są różne dla obydwu wiązek, powstaje różnica faz i zgodnie z rysunkiem 10.5 dla $\omega_1 = \omega_2$ wypadkowe drganie będzie drganiem eliptycznym, a ze względu na równoczesny ruch fali świetlnej w kierunku osi z falą spolaryzowaną kołowo lub eliptycznie (por. rys. 32.4).

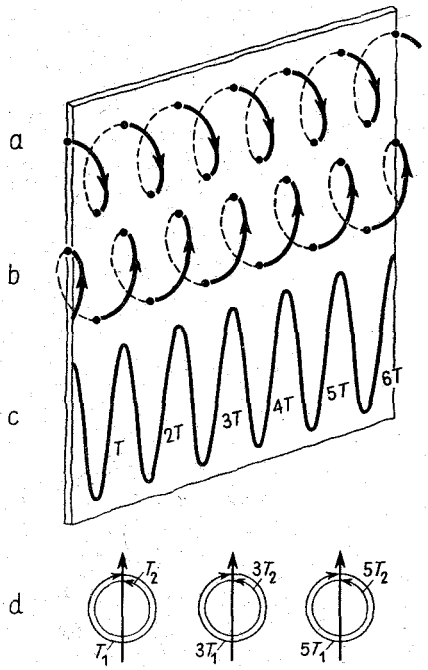


32.4. Drgania wektora elektrycznego w świetle spolaryzowanym kołowo (rys. a i rys. b) lub eliptycznie (rys. c).

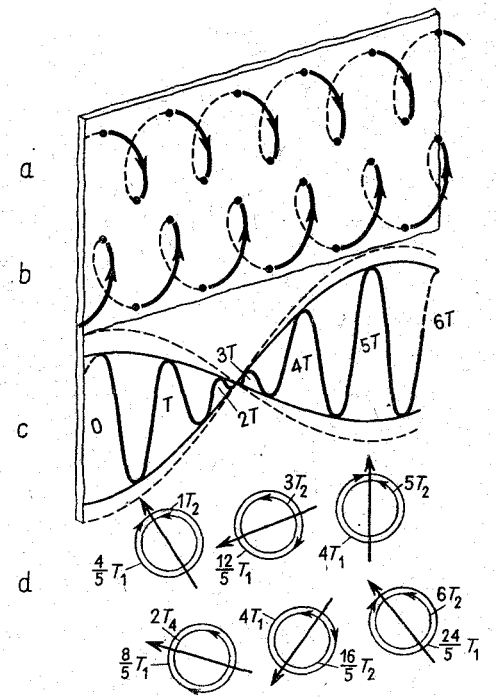
Do wytwarzania światła spolaryzowanego eliptycznie służy *ćwierćfalówka*. Jest to płytka krystaliczna (najczęściej mika) o grubości tak dobranej, że pomiędzy promieniem zwyczajnym i nadzwyczajnym światła przechodzącego wytwarza się różnica faz równa $\pi/4$ lub $3\pi/4$, co odpowiada różnicy dróg optycznych $\lambda/4$ lub $3\lambda/4$. Na oprawce ćwierćfalówki zaznaczone są kierunki promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego zwane *azymutami* (lub zaznaczony jest tylko jeden azymut). Jeżeli płaszczyzna polaryzacji światła padającego na ćwierćfalówkę jest równoległa do jednego z azymutów, wtedy światło przechodzące jest nadal spolaryzowane liniowo. W przypadku, gdy płaszczyzna polaryzacji światła padającego tworzy pewien kąt $\alpha \neq 0$ z azymutami, wtedy drganie światła rozkłada się na dwa składowe promienie: zwyczajny i nadzwyczajny. Każdy z nich rozchodzi się z inną prędkością i po przejściu przez płytkę powstaje różnica faz $\lambda/4$ lub $3\lambda/4$. Stąd też obydwie fale nakładając się dają w wyniku światło spolaryzowane eliptycznie (por. rys. 32.4b). W szczególnym przypadku, gdy płaszczyzna polaryzacji

światła padającego tworzy z azymutami kąt $\alpha = 45°$ otrzymujemy światło spolaryzowane kołowo.

Światło spolaryzowane liniowo przechodzące przez niektóre kryształy zwane *optycznie czynnymi* doznaje *skręcenia płaszczyzny polaryzacji*. Dzieje się to w kryształach jednoosiowych w przypadku, gdy światło biegnie równolegle do osi optycznej. Kierunek skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest różny dla różnych kryształów, a w przypadku kwarcu znamy dwa rodzaje kryształów, z których jedne skręcają płaszczyznę polaryzacji w prawo, a inne w lewo. Zgodnie z teorią Fresnela, skręcenie płaszczyzny polaryzacji tłumaczymy następująco. Światło spolaryzowane liniowo uważać możemy za nałożenie dwóch spójnych kołowo spolaryzowanych drgań, o równych okresach i amplitudach, lecz przeciwnych zwrotach. Ilustruje to rysunek 32.5. Składowe drgania



32.5. Rozłożenie fali płaskiej na dwie składowe spolaryzowane kołowo w przeciwnych kierunkach (rys. a i rys. b) oraz wynik nakładania dwu fal płaskich (rys. c i rys. d).



32.6. Wyjaśnienie skręcenia płaszczyzny polaryzacji w ciałach optycznie czynnych; (fale składowe (rys. a i rys. b) oraz wynik nakładania (rys. c i rys. d).

spolaryzowane kołowo pokazano na rysunkach a i b, a wynik ich nałożenia na rysunku c, co dodatkowo zilustrowano na rysunku d przedstawiającym ilość wykonanych obrotów przez wektory elektryczne fal składowych. Na zewnętrznym kole zaznaczono ilości obrotów fali spolaryzowanej w prawo, a na wewnętrznym fali lewej. Widzimy, że w omawianym przypadku, w wyniku sumowania drgania zachodzą tylko w jednej płaszczyźnie zaznaczonej na każdym rysunku 32.5d strzałką. Drgania składowe prostopadłe do tego kierunku wzajemnie się znoszą. W krysztale prędkości obydwu kołowo

spolaryzowanych fal stają się różne. Zakładając, że fala spolaryzowana w prawo porusza się prędzej od fali spolaryzowanej w lewo, otrzymamy sytuację pokazaną na rysunku 32.6, gdzie a i b oznacza drgania składowe oraz c i d wynik nałożenia tych drgań. Jak ilustrują to wyniki c i d, aktualna płaszczyzna drgań wypadkowych ulega tu ciągłym zmianom czyli skręcaniu. Po wyjściu z kryształu obydwa drgania składowe poruszają się już z równą prędkością i płaszczyzna drgań nie zmienia się już więcej. Jednak jest ona skręcona względem płaszczyzny drgań światła wchodzącego do kryształu.

32.03. ANALIZA STANU POLARYZACJI ŚWIATŁA

Światło spolaryzowane liniowo możemy zbadać za pomocą polaryzatora, zwanego w tym przypadku *analizatorem*. Obracając analizator wokół osi biegu wiązki światła spolaryzowanego, stwierdzimy rozjaśnienia pola widzenia względnie całkowite zaciemnienia. W przypadku zaciemnienia mamy pewność, że płaszczyzna polaryzacji analizatora jest prostopadła do płaszczyzny polaryzacji światła analizowanego. Do analizy światła spolaryzowanego eliptycznie poza analizatorem zastosować musimy również ćwierćfalówkę. Zmienia ona światło spolaryzowane eliptycznie na światło spolaryzowane liniowo. Jednak w tym przypadku ćwierfalówkę ustawić musimy w ten sposób, by główne półosie elipsy spolaryzowanego światła były równoległe do jej azymutów. Stąd przed zastosowaniem ćwierćfalówki musimy ustalić kierunki półosi elipsy. W tym celu badamy światło za pomocą analizatora. Kierunek płaszczyzny polaryzacji analizatora wtedy, gdy przepuszcza on maksimum lub minimum światła, jest równoległy do odpowiedniej elipsy. Gdy azymuty ćwierćfalówki są równoległe do półosi, wtedy światło przechodzące zyskuje dodatkową różnicę faz równą $(1/2)\pi$ lub $(3/2)\pi$, co łącznie z różnicą istniejącą w świetle spolaryzowanym eliptycznie daje całkowitą wielokrotność π i daje w wyniku drgania spolaryzowane liniowo.

32.1. POLARYZACJA ŚWIATŁA

Cel: zbadanie stanu polaryzacji światła załamanego i odbitego od różnych środowisk, badanie stanu polaryzacji światła przechodzącego przez przeźroczyste kryształy.

Zagadnienia: polaryzacja światła (§ 32.01–03; S4, § 79–91; J, § 24.9–12; H2, § 46.1–5).

Wprowadzenie

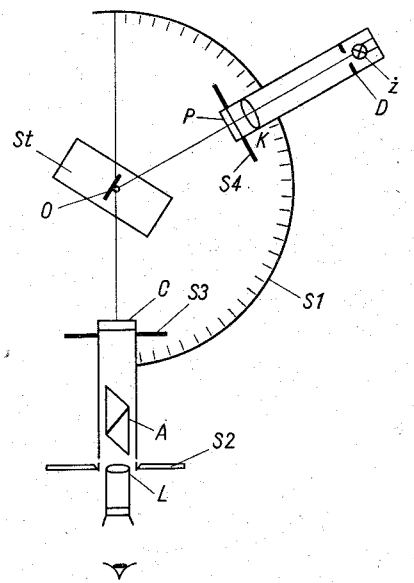
Światło odbite od dielektryka ulega polaryzacji w przypadku, gdy kąt padania jest równy kątowi Brewstera. Jeżeli płytkę oświetlamy światłem spolaryzowanym liniowo, to stan polaryzacji wiązki odbitej zależy od kąta β między płaszczyzną polaryzacji światła padającego i płaszczyzną padania. Gdy kąt $\beta = 0$, światło odbite jest całkowicie spolaryzowane, gdy kąt $\beta = 90°$, światło padające pod kątem Brewstera nie odbija się. W przypadkach pośrednich obserwujemy skręcenie płaszczyzny polaryzacji. Stan polaryzacji światła ulega również zmianie przy całkowitym wewnętrznym odbiciu. Jeżeli odbije się światło spolaryzowane liniowo, to stan polaryzacji nie ulega zmianie tylko w przypadkach $\beta = 0$ lub $\beta = 90°$. W innych przypadkach powstaje polaryzacja eliptyczna. Zjawisko to tłumaczymy następująco: światło spolaryzowane liniowo rozłożyć musimy

na składowe, równoległą i prostopadłą do płaszczyzny padania. Każda z tych składowych doznaje innego skoku fazy przy odbiciu. Stąd zmienia się faza między składowymi i w wyniku nałożenia się po odbiciu stan polaryzacji zmienia się na eliptyczny. Zjawiska zmiany stanu polaryzacji występują w przypadku, gdy światło odbija się od polerowanej powierzchni metalu. Zgodnie z wzorem definicyjnym współczynnika załamania dla kąta Brewstera otrzymamy

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{32.2}$$

Aparatura

Układ optyczny (rys. 32.7) składa się z źródła światła z żarówką $Ż$, przesłony D, kondensora K, polaryzatora P, ćwierćfalówki C, analizatora A i lunetki L. Kolimator, na który składają się elementy: D, K i P, może obracać się wokół osi. Stolik St obraca się również, przy czym przyrząd jest tak zbudowany, że obrotowi stolika o kąt α odpowiada obrót kolimatora o kąt 2α, dzięki czemu promień odbity od przedmiotu ustawionego na stoliku trafia zawsze do lunetki. Ciała odbijające światło umieszczamy na stoliku St; może to być szyba lub nawet metal.



32.7. Analiza światła za pomocą analizatora A z bikwarcem Soleila.

Za pomocą przyrządu badać możemy również światło przechodzące przez ciała przeźroczyste. W tym celu kolimator ustawiamy naprzeciw lunetki, a badane ciało ustawiamy na stoliku na drodze biegu wiązki światła. Przyrząd ponadto zaopatrzony jest w cztery kątomierze $S1$–$S4$, z których $S1$ służy do odczytu kąta między kolimatorem i lunetką, $S2$ do odczytu ustawienia lunetki, $S3$ — ćwierćfalówki oraz $S4$ — polaryzatora. Na kątomierzu $S2$ odczytujemy kąt ustawienia całej lunetki, z którą związane są

analizator oraz kątomierz *S3*. Kątomierz *S3* służy wyłącznie do odczytania kąta między płaszczyzną polaryzacji analizatora i azymutem ćwierfalówki. Ćwierćfalówkę można usunąć z biegu wiązki lub niezależnie od lunetki obracać wokół osi wiązki.

Pomiary

Dysponując analizatorem i ćwierćfalówką możemy zanalizować stan polaryzacji dowolnej wiązki światła postępując następująco. Obracając analizator wokół osi wiązki zaobserwować możemy trzy przypadki (ćwierćfalówka usunięta z biegu wiązki):

1. dla pewnych położeń analizatora światło ulega wygaszeniu, skąd wniosek, że światło jest spolaryzowane liniowo,

2. przy obrocie analizatora natężenie nie zmienia się, skąd wniosek, że światło: 2.1. jest niespolaryzowane, 2.2. jest spolaryzowane kołowo lub 2.3. jest spolaryzowane częściowo kołowo,

3. dla pewnych położeń analizatora światło ulega osłabieniu, skąd wniosek, że światło jest spolaryzowane: 3.1. częściowo liniowo, 3.2. eliptycznie lub 3.3. częściowo eliptycznie.

W przypadkach 2. i 3. dalszą analizę wykonujemy za pomocą ćwierćfalówki ustawionej przed analizatorem.

Dla przypadku 2. przy dowolnym ustawieniu ćwierćfalówki mamy następujące możliwości:

2.1. światło w dalszym ciągu przy obrocie analizatora nie ulega zmianom, skąd wynika wniosek, że światło jest niespolaryzowane,

2.2. przy obrocie analizatora występuje maksimum I_{max} i minimum I_{min} natężenia światła, skąd wynikają wnioski: jeżeli $I_{min} = 0$, światło jest spolaryzowane kołowo; jeżeli $I_{min} > 0$, światło jest częściowo spolaryzowane kołowo.

W przypadku 3. ustawiamy ćwierćfalówkę jednym azymutem równolegle do płaszczyzny polaryzacji analizatora ustawionego w ten sposób, że przepuszcza minimum światła, wtedy nie zmieniając ustawienia ćwierćfalówki obracamy analizator i jeżeli:

3.1. rozkład mimimów i maksimów jest taki sam jak bez ćwierćfalówki, to światło jest częściowo spolaryzowane liniowo,

3.2. istnieje położenie analizatora odpowiadające wygaszeniu światła, to światło jest spolaryzowane eliptycznie.

3.3. istnieją minima i maksima, które nie pokrywają się z położeniami minimów i maksimów bez ćwierćfalówki, to wtedy światło jest częściowo spolaryzowane eliptycznie. Schemat postępowania przy badaniu stanu polaryzacji światła przedstawiono w tablicy 32.1.

W doświadczeniu wykonujemy następujące pomiary:

1. Wyznaczamy kąt Brewstera dla dwóch różnych płytek oświetlając je światłem spolaryzowanym w płaszczyźnie padania (ćwierćfalówkę usuwamy wtedy z biegu wiązki światła).

Tabela 32.1

Sposób ustalania stanu polaryzacji światła

lp.	Natężenie światła przy obrocie analizatora	Sposób ustawienia ćwierćfalówki C	Natężenie światła przy obrocie analizatora po przejściu przez C	Rodzaj polaryzacji światła
1	$I \neq \text{const}$ $I_{\min} = 0$	—	—	liniowa
2.1	$I = \text{const}$	dowolny	$I = \text{const}$	światło naturalne
2.2			$I \neq \text{const}$ $I_{\min} = 0$	kołowa
2.3			$I \neq \text{const}$ $I_{\min} > 0$	kołowa + światło naturalne
3.1	$I \neq \text{const}$ $I_{\min} > 0$ dla kąta α	azymut w kierunku α	$I \neq \text{const}$ $I_{\min} > 0$ dla $\beta = \alpha$	liniowa + światło naturalne
3.2			$I \neq \text{const}$ $I_{\min} = 0$ dla $\beta \neq \alpha$	eliptyczna
3.3			$I \neq \text{const}$ $I_{\min} > 0$ dla $\beta \neq \alpha$	eliptyczna + światło naturalne

2. Dla jednej z płytek badamy stan polaryzacji światła odbitego pod kątem Brewstera w zależności od płaszczyzny polaryzacji wiązki padającej dla kątów $\beta = 90°$ oraz $\beta = 45°$.

3. Zamiast płytki odbijającej na stoliku umieszczamy pryzmat całkowicie odbijający. Przyjmujemy kąt padania ok. 50° i badamy stan polaryzacji światła odbitego przy następujących wartościach kąta β między płaszczyzną polaryzacji światła padającego i płaszczyzną padania: $\beta = 90°$ i $\beta = 45°$.

4. Na miejsce płytki odbijającej wstawiamy płytkę z polerowanego metalu (zwierciadło) dobierając kąt padania $\alpha = 75°$. Stan polaryzacji światła odbitego badamy przy takich samych wartościach kąta β jak w p. 3.

5. Kolimator ustawiamy na przedłużeniu lunetki i badamy stan polaryzacji światła po przejściu przez przezroczyste płytki wykonane z nieznanych nam materiałów. Na podstawie wyników tych analiz musimy stwierdzić, które z płytek były płytkami krystalicznymi i w jaki sposób zorientowana była oś optyczna kryształu.

Obliczenia

W oparciu o wyniki punktu 1. obliczamy współczynniki załamania płytek odbijających z wzoru (32.2). Obliczamy błąd tych wielkości. Krótko omawiamy wyniki wszystkich wykonanych badań i w kilku zdaniach omawiamy wynikające stąd wnioski.

32.2. POLARYMETR

Cel: wyznaczenie skręcenia właściwego roztworu cukru oraz stężenia nieznanego roztworu.

Przyrządy: filtry optyczne (§ 4.14), waga (§ 3.4).

Zagadnienia: polaryzacja światła (§ 32.01–03; S4, § 79–84; J, § 24.9–12; H2, § 46.1–5), skręcenie płaszczyzny polaryzacji (S4, § 95–99; J, § 24.16).

Wprowadzenie

Liniowo spolaryzowane światło, przy przejściu przez niektóre kryształy oraz roztwory tzw. substancji optycznie czynnych, doznaje skręcenia płaszczyzny polaryzacji. Dla substancji tych wprowadza się tzw. właściwą zdolność skręcającą $[\alpha]$ zdefiniowaną wzorem Biota:

$$\alpha = [\alpha]cl,$$

gdzie c — stężenie roztworu, a l — długość drogi promienia w roztworze. W praktyce kąt α mierzymy jako różnicę wskazań α_c i α_0 analizatora w przypadkach: gdy roztwór o stężeniu c skręca płaszczyznę polaryzacji o kąt α_c oraz gdy zamiast roztworu na drodze promienia znajduje się czysty rozpuszczalnik, wtedy obserwowany kąt wynosi α_0. Skręcenie płaszczyzny polaryzacji jest więc równocześnie miarą stężenia roztworu. Jeżeli przez α_x oznaczymy skręcenie wywołane przez roztwór o nieznanym stężeniu, to otrzymamy

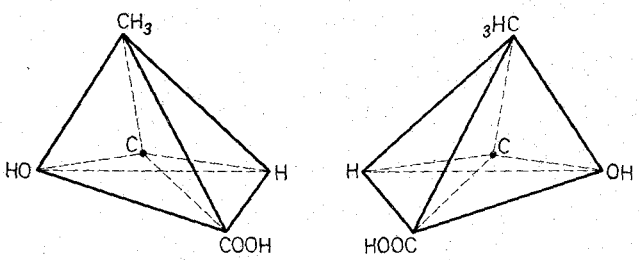
$$\alpha_c - \alpha_0 = [\alpha]cl_c,$$

$$\alpha_x - \alpha_0 = [\alpha]c_x l_x.$$

Zakładając dodatkowo, że pomiary wykonujemy w tym samym naczyniu $l_c = l_x = l$, to otrzymamy

$$c_x = c\frac{\alpha_x - \alpha_0}{\alpha_c - \alpha_0}. \tag{32.3}$$

Substancje optycznie czynne występują w dwóch postaciach, wykazujących taką samą właściwą zdolność skręcającą $[\alpha]$, lecz skręcających w przeciwnych kierunkach. Stąd substancje optycznie czynne dzielimy na prawo- i lewoskrętne. Kryształy prawo-



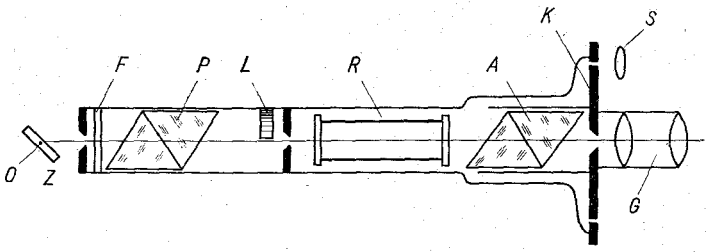
32.8. Enancjomorficzne kryształy kwasu mlekowego.

i lewoskrętne różnią się budową podobnie jak przedmiot i jego obraz w zwierciadle płaskim, są to tzw. *odmiany enancjomorficzne*. W substancjach optycznie czynnych występuje tzw. węgiel asymetryczny tzn. taki, w którym każda z wartościowości wysycona jest przez inny atom lub grupę atomów. Przykładem takiej substancji może być

kwas mlekowy $CH_3 \cdot CHOH \cdot COOH$, którego drobiny przyjmować mogą dwie postaci stereosymetryczne pokazane na rys. 32.8. Każda z odmian skręca płaszczyznę polaryzacji w innym kierunku. W podobny sposób zachowują się takie substancje jak alkohol amylowy, cukier sacharoza i glukoza, kwas winny itp., jak również niektóre związki azotu, krzemu i fosforu.

Aparatura

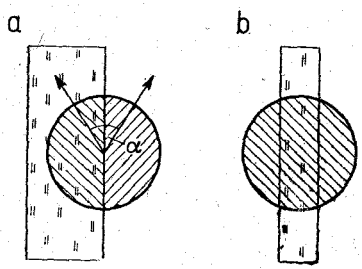
Polarymetr służy do pomiaru skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła w substancjach optycznie czynnych. Polarymetry przeznaczone do pomiaru stężenia cukru nazywamy sacharymetrami. Polarymetr (rys. 32.9) składa się ze zwierciadła Z kierującego światło do przyrządu, filtru F przepuszczającego wyłącznie światło żółte, polaryzatora



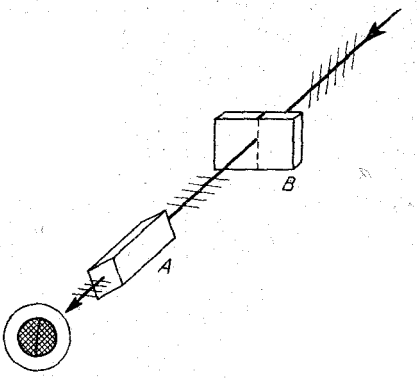
32.9. Aparatura do analizy stanu polaryzacji światła.

P, przyrządu półcieniowego L zmieniającego płaszczyznę polaryzacji części pola widzenia o niewielki kąt, rurki R zawierającej badaną ciecz lub roztwór, analizatora A połączonego z kątomierzem K oraz lunetki G. Przyrząd zaopatrzony jest ponadto w dodatkową lupę S zwiększającą dokładność odczytu kąta. Lunetka i lupa mają możliwość dopasowania do ostrości widzenia. Analizator i zwierciadło mogą obrócić się wokół osi optycznej przyrządu, a zwierciadło również wokół osi O. Jeżeli przyrząd nie jest zaopatrzony w filtr, trzeba stosować żółte światło sodowe. Funkcja większości części przyrządu jest oczywista. Bliższego wyjaśnienia wymaga przyrząd półcieniowy. Oko ludzkie jest mało wrażliwe na zmiany oświetlenia całego pola widzenia. Stąd dokładne ustalenie płaszczyzny polaryzacji za pomocą analizatora powoduje duże trudności. Celem zwiększenia precyzji odczytu wykorzystuje się dużą wrażliwość oka na niewielkie nawet różnice oświetlenia poszczególnych części pola widzenia. Przyrząd półcieniowy dzieli pole widzenia na części zmieniając nieco płaszczyznę polaryzacji światła w jednej z nich lub w obydwu. Za przyrządem półcieniowym płaszczyzny polaryzacji poszczególnych części wiązki światła tworzą ze sobą niewielki kąt α. Dla uzyskania równego oświetlenia całego pola widzenia przy nieobecności roztworu, analizator ustawiamy w ten sposób, by jego płaszczyzna polaryzacji dzieliła kąt α (rys. 32.10a) na dwie równe części (w rzeczywistości położenie analizatora może nieco odbiegać od tego położenia, jeżeli przyrząd półcieniowy absorbuje nierównomiernie światło w różnych częściach pola widzenia). Po wprowadzeniu ciała optycznie czynnego płaszczyzna polaryzacji ulega skręceniu w tym samym kierunku o taki sam kąt w obydwu częściach pola widzenia. Stąd celem ponownego uzyskania równości oświetlenia całego pola widzenia, analizator

skręcić musimy o kąt, równy kątowi skręcenia płaszczyzny polaryzacji. Przyrząd półcieniowy pozwala odczytać położenia płaszczyzny polaryzacji z dokładnością do 0,1° lub większą. Rurka zawierająca roztwór badany jest zakończona płaskimi usuwalnymi szkiełkami. Różne typy polarymetrów różnią się najczęściej tylko rozwiązaniem praktycznym przyrządu półcieniowego. W niektórych przyrządach część o zmienionej płaszczyźnie polaryzacji stanowi pasek biegnący przez środek pola widzenia. Takie rozwiązanie znajdujemy w produkowanym w Polsce polarymetrze Pl1. Rolę przyrządu półcieniowego spełniać może również tzw. bikwarc Soleila złożony z dwóch kawałków



31.10. Budowa polarymetru (sacharymetru).



32.11. Działanie przyrządu półcieniowego (widok w kierunku osi przyrządu).

kwarcu: jednego lewo-, a drugiego prawoskrętnego (rys. 32.11). Obydwa kawałki tworzą jedną płytkę, w której linia podziału przypada w środku pola widzenia, a grubość jest tak dobrana, by żółta linia sodu uległa skręceniu o 90°. Inne skręcają się o inny kąt. Jeżeli płaszczyzna polaryzacji światła padającego na bikwarc była równoległa do linii podziału, to po przejściu przez bikwarc jest ona prostopadła do tej linii dla światła żółtego, a dla innych barw tworzy różne kąty. Jeżeli analizator ustawimy tak, by jego płaszczyzna polaryzacji była prostopadła do linii podziału bikwarcu, to światło przechodzące jest zabarwione fioletowo. Mała zmiana płaszczyzny polaryzacji światła padającego powoduje silną zmianę zabarwienia każdej połówki pola widzenia: jedna przyjmuje odcień niebieski, a druga czerwony.

Pomiary

Mierzymy długość rurki l z dokładnością do 1 mm, myjemy i wypełniamy ją wodą destylowaną w ten sposób, by wewnątrz nie powstał pęcherzyk powietrza, osuszamy i wkładamy do polarymetru. Przyrząd ustawiamy na stole w pobliżu źródła światła i patrząc w lunetkę nastawiamy zwierciadło w taki sposób, by kierowało ono światło wprost do przyrządu. Lunetkę regulujemy na ostrość widzenia linii rozgraniczającej części pola widzenia. Regulujemy również ustawienie lupy odczytowej na maksymalną ostrość widzenia skali. Obracając analizatorem za pomocą odpowiedniego pokrętła ustalamy równe oświetlenie całego pola widzenia. Obracając analizator możemy zauważyć równe oświetlenie w kilku położeniach. W niektórych bardzo małe obroty kąto-

mierza prowadzą do raptownych zmian oświetlenia, a w innych wraz ze zmianą kąta zmiany oświetlenia przebiegają łagodnie. Do pomiaru wybieramy ustawienie pierwsze, znajdujące się zazwyczaj w pobliżu zera skali kątomierza. Odczytujemy wskazanie kątomierza. Następnie obracamy analizator o pewien kąt i powtarzamy ustawienie i pomiar. Po wykonaniu trzech pomiarów planujemy właściwą ich liczbę. Jeżeli rozrzut wyników jest bardzo duży w stosunku do błędu systematycznego, przed rozpoczęciem właściwych pomiarów drogą treningu musimy zmniejszyć błąd ustawienia.

Przygotowujemy roztwór o znanym stężeniu od $c = 1$ g do 5 g na 100 cm^3 roztworu i wykonujemy pomiary dla tego roztworu. Podobne pomiary wykonujemy dla roztworu nieznanego. Oznaczamy odczyty dla wody destylowanej przez α_0, dla znanego roztworu przez α_c i dla nieznanego przez α_x.

Obliczenia

Dla każdej serii pomiarów kąta α obliczamy wartości średnie $\overline{\alpha_0}$, $\overline{\alpha_c}$, $\overline{\alpha_x}$ i odchylenie standardowe średniej arytmetycznej. Obliczamy skręcenie właściwe $[\alpha] = (\overline{\alpha_c} - \overline{\alpha_0})\,(cl)^{-1}$. Stężenie roztworu nieznanego obliczamy z wzoru (32.3). Jeżeli pomiary wykonaliśmy dla kilku znanych stężeń, to obliczenia wykonujemy dla każdego stężenia znanego oddzielnie i obliczamy wartości średnie. Obliczamy błąd stężenia znanego, a następnie błędy skręcenia właściwego oraz stężenia nieznanego c_x.

32.3. ZJAWISKO FARADAYA

Cel: wyznaczenie stałej Verdeta kilku substancji.

Przyrządy: polarymetr (§ 32.2), solenoid (§ 4.9), opornik suwakowy (§ 4.2), amperomierz (§ 18.01–03).

Zagadnienia: polaryzacja światła (§ 32.01–03; S4, § 79–84; J, § 24.9–12; H2, § 46.1–5), skręcenie płaszczyzny polaryzacji (S4, § 95–99; J, § 24.16), pole magnetyczne (§ 1.2–1.5).

Wprowadzenie i aparatura

Ciała przezroczyste umieszczone w polu magnetycznym skręcają płaszczyznę polaryzacji światła, biegnącego równolegle do linii sił pola magnetycznego. Zjawisko to nazywamy zjawiskiem Faradaya. Większość ciał skręca płaszczyznę polaryzacji w kierunku, w którym płynie prąd w uzwojeniach solenoidu. Są jednak i takie ciała, które skręcają płaszczyznę polaryzacji w kierunku przeciwnym. Przy zmianie zwrotu natężenia pola magnetycznego, a więc i kierunku prądu w uzwojeniach solenoidu, zmienia się również kierunek skręcenia płaszczyzny polaryzacji. Zgodnie z prawem Verdeta, kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest proporcjonalny do długości drogi d przebytej w środowisku oraz do indukcji magnetycznej B:

$$\alpha = \varrho B d.$$

Współczynnik proporcjonalności ϱ nazywa się stałą Verdeta. Indukcję magnetyczną B wytwarzamy za pomocą cewki. Przyjmujemy, że wyraża się ona takim samym wzorem jak dla solenoidu (1.20) oraz

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l}.$$

Tak więc ostatecznie skręcenie płaszczyzny polaryzacji wyrazi się wzorem

$$\alpha = \varrho \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l} d. \tag{32.4}$$

Do pomiarów stosujemy polarymetr omawiany w doświadczeniu 32.2, uzupełniony cewką wytwarzającą pole magnetyczne. Jest to cewka wielowarstwowa, lecz dla uproszczenia przyjmujemy, że pole przez nią wytwarzane wyraża się takim samym wzorem jak dla solenoidu.

Pomiary

Łączymy obwód cewki według schematu 4.15. Mierzymy długość próbki i cewki oraz zapisujemy liczbę zwojów N. Wewnątrz polarymetru umieszczamy próbkę (rurkę z cieczą lub pręt z badanego materiału), a sam polarymetr wsuwamy do wnętrza cewki, następnie wyznaczamy kilkakrotnie zerowe położenie analizatora α_0, przy którym całe pole widzenia jest równo oświetlone i planujemy właściwą liczbę pomiarów. Po każdym pomiarze analizator obracamy o niewielki kąt i nie patrząc na podziałkę na nowo regulujemy równość oświetleń. W przypadku gdy seria pomiarów wykazuje duże rozbieżności α_0, musimy najpierw drogą treningu nabyć wprawy w poprawnym kompensowaniu wychyleń. Włączamy prąd w cewce. W polarymetrze pojawiają się różnice oświetlenia obydwu części pola widzenia. Obracamy analizator do takiego położenia α_p, przy którym znowu uzyskamy równe oświetlenie całego pola widzenia. Takie same pomiary wykonujemy po zmianie kierunku przepływu prądu przez cewkę, wtedy otrzymujemy kąt α_l. Kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest równy różnicy $\alpha = |\alpha_0 - \alpha_l|$ lub $\alpha = |\alpha_0 - \alpha_p|$. Jako ostateczną wartość kąta α przyjmujemy wartość średnią. Pomiary wykonujemy przy trzech różnych natężeniach prądu I oraz dla kilku próbek, np. wody destylowanej, dwusiarczku węgla, benzyny, szkła itp.

Obliczenia

Dla każdej serii pomiarów kąta α obliczamy wartość średnią $\bar{\alpha}$ oraz odchylenie standardowe średniej arytmetycznej $S_{\bar{\alpha}}$. Dla każdej wartości natężenia prądu I obliczamy wartość stałej Verdeta ϱ z wzoru (32.4), przyjmując wartość μ_r z tablic fizycznych. Obliczamy wartości średnie $\bar{\varrho}$. Dla jednego z pomiarów każdej próbki obliczamy błąd S_ϱ i przyjmujemy, że wartość średnia $\bar{\varrho}$ jest obarczona takim samym błędem. Sprawdzamy zgodność uzyskanych wyników z tablicami fizycznymi.

32.4. FOTOMETR POLARYZACYJNY

Cel: sprawdzenie prawa Malusa, zbadanie zależności względnej sprawności żarówki od czerpanej przez nią mocy.

Przyrządy: autotransformator (§ 4.5), galwanometr i watomierz (§ 18.01–03).

Zagadnienia: polaryzacja światła (§ 32.01–03; S4, § 76–83; J, § 24.9–12; H2, § 46.1–5), fotometria wizualna (§ 30.4; S4, § 40–43; J, § 25.1–3).

Wprowadzenie

Natężenie I_e światła spolaryzowanego przechodzącego przez analizator zależy od kąta α, jaki płaszczyzna polaryzacji analizatora tworzy z płaszczyzną polaryzacji polaryzatora. Zależność powyższą określa prawo Malusa:

$$I_e = I_{e0} \cos^2 \alpha, \tag{32.5}$$

gdzie I_{e0} oznacza natężenie wiązki przechodzącej przez analizator wtedy, gdy $\alpha = 0$. Jeżeli zaniedbamy pochłanianie energii w analizatorze, to I_{e0} jest równe natężeniu światła spolaryzowanego liniowo. Dla kąta $\alpha = 90°$ otrzymujemy całkowite wygaszenie wiązki przechodzącej.

Źródło światła przetwarza energię elektryczną na energię świetlną. Sprawnością źródła światła nazywamy stosunek natężenia światła wysyłanego przez źródło światła I_e do mocy przez nie pobieranej P, czyli

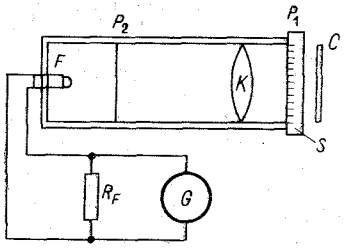
$$\eta = \frac{I_e}{P}.$$

W przypadku gdy nie dysponujemy wzorcowym źródłem, mierzyć możemy względne natężenie światła I_e/I_{e0} odniesione do natężenia innego źródła przyjętego jako umowny wzorzec. Definiujemy wtedy względną sprawność źródła jako stosunek względnego natężenia do mocy pobieranej, czyli

$$\eta_w = \frac{I_e}{I_{e0} P}. \tag{32.6}$$

Aparatura

Fotometr (rys. 32.12) składa się z fotodiody F, dwóch polaryzatorów P_1 i P_2, filtru cieplnego C oraz kondensora K. Jeden z polaryzatorów może obracać się wokół osi, dzięki czemu zmieniać można natężenie światła padającego na diodę, zgodnie z prawem Malusa. Odchylenie płaszczyzny polaryzacji polaryzatora ruchomego od płasz-



32.12. Fotometr polaryzacyjny.

czyzny polaryzacji polaryzatora nieruchomego odczytujemy na skali kątowej S. W omawianym doświadczeniu natężenie światła przechodzącego przez układ polaryzatorów mierzymy za pomocą fotodiody (por. § 28.3), w której na skutek zjawiska fotoelektrycznego energia świetlna zamienia się na energię prądu elektrycznego. Natężenie I prądu fotoelektrycznego jest w przybliżeniu proporcjonalne do natężenia światła. Przybliżenie

jest tym lepsze, im mniejszy jest opór elektryczny obwodu diody. Część przyrządu zawierająca polaryzatory, kondensator i fotodiodę umieszczona jest w nieprzezroczystej rurce, dzięki czemu słabe światło rozproszone nie wpływa na wyniki pomiarów.

Pomiary

Łączymy obwód fotodiody według schematu 32.12, a żarówkę według schematu 18.6. W doświadczeniu przyjmujemy jako wzorcowe natężenie I_{e0} żarówki zasilanej nominalną mocą prądu, np. 60-cioma watami dla żarówki 60-watowej. Wyznaczamy zależność wskazania galwanometru od kąta α, jaki tworzą płaszczyzny polaryzacji polaryzatora i analizatora. Pomiary wykonujemy dla kątów $\alpha = 0°, 10°, 20°, \ldots, 90°$. W drugiej części doświadczenia polaryzatory ustawiamy równolegle, wtedy $\alpha = 0°$ i mierzymy zależność wskazań galwanometru od mocy prądu P.

Obliczenia

Dla wszystkich wartości kąta α, dla których wykonaliśmy pomiar w pierwszej części doświadczenia, obliczamy z prawa Malusa (32.5) względne natężenie światła I_e/I_{e0}, a następnie wykreślamy zależność wskazań galwanometru od względnego natężenia światła. Z wykresu tego odczytujemy względne natężenie światła odpowiadające różnym wartościom mocy zasilającej żarówkę. Korzystając z wyników uzyskanych w części drugiej doświadczenia, obliczamy względną sprawność żarówki z wzoru (32.6), a następnie wykreślamy zależność względnej sprawności od mocy prądu czerpanego przez żarówkę. Omawiamy krótko otrzymane wyniki i przebiegi wykresów.

33. PROMIENIOWANIE

33.01. PROMIENIOWANIE JONIZUJĄCE

Promieniowaniem jonizującym nazywamy każde promieniowanie wywołujące jonizacje środowiska materialnego, w którym się rozchodzi. Do promieniowania jonizującego zaliczamy więc promieniowanie cząsteczkowe α, β oraz neutrony i także krótkofalowe promieniowanie elektromagnetyczne, a więc rentgenowskie i różnego typu promieniowanie γ.

Energię jaką niesie promieniowanie mierzymy w *dżulach*. Dżul jest jednostką bardzo dużą i zarazem w fizyce jądrowej niewygodną, stąd w praktyce najczęściej stosujemy jednostkę elektronowolt (eV). Jest to energia, jaką zyskuje elektron przyspieszony różnicą potencjałów 1 V.

Wielkością charakteryzującą źródło promieniotwórcze jest jego *aktywność promieniotwórcza*, która jest równa liczbie przemian promieniotwórczych w sekundzie. Z historycznych względów, obecnie najczęściej stosuje się jednostkę aktywności promieniotwórczej *kiur*, która nie jest jednostką układu SI. Obecnie definiujemy ją jako 1 kiur = $= 3{,}71 \cdot 10^{10}$ rozpadów na sekundę. Źródło promieniotwórcze najlepiej można charakteryzować tzw. aktywnością właściwą, czyli aktywnością jednostki masy.

Stopień napromieniowania ciał charakteryzujemy dawką zaabsorbowaną mierzoną w dżulach na kilogram lub w radach (patrz tablica 33.1), względnie mocą dawki absorbowanej w sposób ciągły mierzoną w watach na kilogram.

Miarą *dawki ekspozycyjnej promieniowania* γ jest ładunek jonów obydwu znaków wytworzonych przez to promieniowanie w jednostce masy absorbenta, a jednostką kulomb na kilogram (C/kg). Obecnie najczęściej stosuje się jednostkę rentgen (R). Rentgen jest dawką, która w centymetrze sześciennym powietrza suchego znajdującego się w warunkach normalnych wytwarza jony każdego znaku o ładunku jednej jednostki elektrostatycznej. Związek obydwu jednostek podano w tablicy 33.1.

W medycynie i biologii dawki promieniowania określa się jednostką rep (roentgen equivalent physical), jest to dawka, która w 1 g tkanki żywej wytwarza $1{,}6 \cdot 10^{12}$ par jonów, a więc tyle ile jeden rentgen wytwarza ich w cm^3 powietrza. Wszystkie jednostki promieniowania jonizującego zebrano w tabelce 33.1.

Tabela 33.1

Jednostki promieniowania jonizującego

Nazwa wielkości	Jednostka SI	Jednostka tradycyjna	Związek między jednostkami
energia promieniowania	J (dżul)	eV (elektronowolt)	$1\ eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ J$
aktywność preparatu	s^{-1} (rozpad na sekundę)	kiur	$1\ kiur = 3{,}71 \cdot 10^{10}\ s^{-1}$
dawka ekspozycyjna promieniowania	C/kg (kulomb na kilogram)	R (rentgen)	$1\ R = 2{,}58 \cdot 10^{-4}\ C/kg$
moc dawki ekspozycyjnej promieniowania	A/kg (amper na kilogram)	R/s (rentgen na sekundę)	$1\ R/s = 2{,}58 \cdot 10^{-4}\ A/kg$
dawka zaabsorbowanego promieniowania	J/kg (dżul na kilogram)	rad	$1\ rad = 0{,}01\ J/kg$
moc dawki zaabsorbowanego promieniowania	A/kg (amper na kilogram)	rad na sekundę	$1\ rad/s = 0{,}01\ W/kg$
natężenie promieniowania jonizującego	W/m^2 (wat na metr kwadrat)	—	—
strumień cząstek	m^{-2} (cząstka na metr kwadrat)	—	—

Wiązka promieniowania przechodząc przez materię doznaje osłabienia. Osłabienie następuje na skutek utraty energii na jonizację materii. Przez I_0 oznaczymy natężenie wiązki padającej. Po przejściu warstwy o grubości d natężenie I maleje wykładniczo według prawa:

$$I = I_0 e^{-\mu d}. \tag{33.1}$$

Współczynnik μ, zwany *współczynnikiem osłabienia*, zależy od materiału absorbującego jak również od rodzaju promieniowania. Logarytmując powyższe wyrażenie otrzymamy

$$\ln I = \ln I_0 - \mu d \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\lg e} \lg \frac{I_0}{I} = \mu d,$$

skąd

$$\mu = \frac{1}{d \lg e} \lg \frac{I_0}{I}. \tag{33.2}$$

Często stosuje się pojęcie tzw. *grubości połówkowej* $d_{1/2}$, po przejściu której natężenie promieniowania spada do połowy wartości pierwotnej $\left(I = \frac{1}{2} I_0\right)$. Podstawiając powyższy warunek do ostatniego wzoru otrzymamy

$$d_{1/2} = \frac{1}{\mu \lg e} \lg 2 \quad \text{lub} \quad d_{1/2} = \frac{1}{\mu} \ln 2,$$

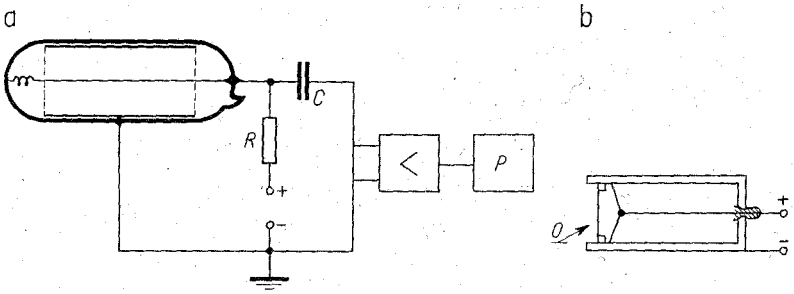
skąd

$$d_{1/2} \simeq \frac{0{,}69}{\mu}. \tag{33.3}$$

33.02. DETEKCJA PROMIENIOWANIA JONIZUJĄCEGO

Promieniowanie wykrywamy za pomocą różnego typu liczników, komór jonizujących, komory Wilsona, komory dyfuzyjnej, detektorów półprzewodnikowych itp. W paragrafie niniejszym zajmiemy się wyłącznie licznikiem Geigera–Müllera i komorą jonizacyjną.

Licznik Geigera–Müllera (rys. 33.1) składa się z metalowego cylindra spełniającego rolę katody oraz cienkiego drutu rozciągniętego wzdłuż osi cylindra, który spełnia rolę anody. Przestrzeń między elektrodami wypełniona jest gazem (najczęściej argonem) pod zmniejszonym ciśnieniem. Znajduje się tam również pewna domieszka par alkoholu. Ciśnienie jest tak dobrane, by droga swobodna elektronów była mała w stosunku do wymiarów licznika.



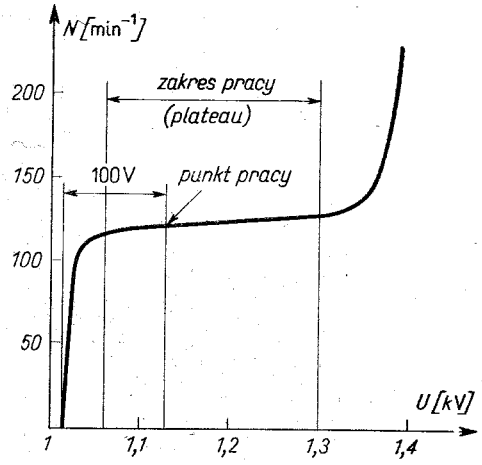
33.1. Licznik Geigera–Müllera i schemat połączeń zasilania i układu rejestrującego (a) oraz licznik z okienkiem O (b).

Przebiegające przez obszar licznika promienie α, β, γ lub neutrony jonizują na swej drodze cząsteczki gazu. Jony przyspieszane polem elektrycznym rozpędzają się i zderzając się z atomami obojętnymi, jonizują je, następuje jonizacja lawinowa i w obwodzie 33.1 płynie prąd. Prąd ten maleje bardzo szybko, ponieważ w czasie jego przepływu gwałtownie spada napięcie na oporniku R. Tym samym spada natężenie pola wewnątrz licznika, na skutek czego przerwany zostaje proces jonizacji lawinowej. Po przerwaniu procesu jonizacji potencjał szybko wzrasta i licznik jest gotowy do zarejestrowania następnego impulsu. Impuls prądowy powstały po przejściu promienia przez licznik jest trudny do zarejestrowania. Znacznie łatwiej można zarejestrować spadek napięcia na liczniku. Powstaje wtedy sygnał, który po wzmocnieniu rejestrujemy jako trzask w słuchawkach, lub który może pobudzić numerator rejestrujący liczbę impulsów.

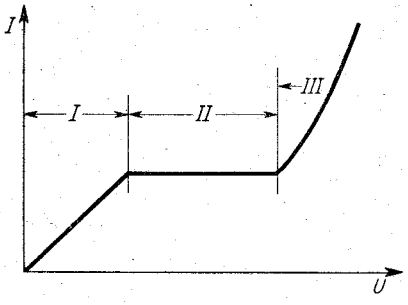
Najczęściej rolę numeratora spełnia przelicznik elektroniczny, który wprost wskazuje nam liczbę impulsów.

Promieniowanie jest bardzo silnie absorbowane w metalowych ściankach licznika. Z tego powodu ścianki liczników wykonane są z bardzo cienkiej folii, a do zliczania cząstek materialnych α, β i neutronów stosujemy liczniki z okienkami przesłoniętymi cienką warstwą miki. Często okienko to stanowi jedną ze ścian licznika jak to ma miejsce w przypadku przedstawionym na rys. 33.1b.

Prawidłowość pracy licznika zależy od wartości przyłożonego napięcia; przy zbyt niskim napięciu nie rozwija się jonizacja lawinowa i licznik nie działa. W miarę wzrostu napięcia, licznik zaczyna rejestrować cząstki tworzące największą liczbę jonów, czyli te o dużej energii. Poczynając od pewnego napięcia progowego, licznik zaczyna zliczać praktycznie wszystkie padające nań cząstki. Jego charakterystyka (rys. 33.2) przebiega niemal równolegle do osi odciętych (napięcia). Jest to obszar prawidłowej pracy licznika zwany plateau (czyt. plato). Nachylenie tego odcinka charakterystyki jest bardzo małe. Po przekroczeniu pewnego napięcia granicznego liczba rejestrowanych impulsów wzrasta bardzo szybko, lecz są to impulsy zdublowane lub nawet uwielokrotnione. Każda z cząsteczek wywołuje kilka impulsów. W tym zakresie napięć licznik pracować nie może.



33.2. Przebieg charakterystyki licznika.

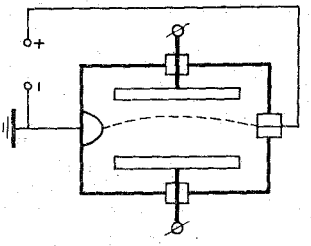


33.3. Charakterystyka komory jonizacyjnej.

Zasada działania *komory jonizacyjnej* jest bardzo podobna do licznika Geigera–Müllera. Poza szczegółami konstrukcyjnymi, zasadnicza różnica polega na innym dobraniu punktu pracy komory. Komora jonizacyjna stosowana jest do pracy ze źródłami jonizującymi powietrze w sposób ciągły. Stąd po przyłożeniu napięcia przez komorę płynie słaby prąd. Prąd ten wzrasta wraz z przyłożonym napięciem i począwszy od pewnej jego wartości osiąga nasycenie czyli stan, w którym wszystkie jony biorą udział w przewodzeniu (rys. 33.3). Przy napięciach bardzo dużych prąd znowu zaczyna wzrastać na skutek jonizacji lawinowej. Najczęściej jako punkt pracy komory przyjmujemy napięcie z odcinka prostoliniowego *II*. Wtedy wszystkie jony biorą udział w przewodzeniu prądu i jego natężenie jest miarą liczby wytworzonych jonów. W pewnych

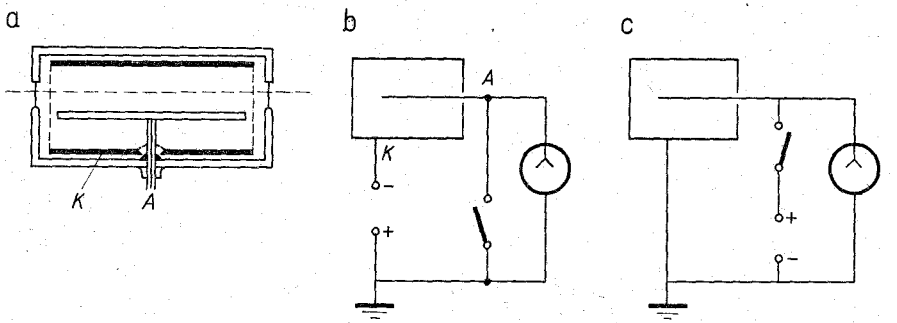
przypadkach stosujemy odcinek *I* charakterystyki, lecz nigdy nie stosujemy odcinka *III*.

Prąd płynący przez komorę jonizacyjną jest zazwyczaj bardzo mały, rzędu 10^{-9}–10^{-15} A. Do jego pomiaru nie nadają się więc najczulsze galwanometry mierzące prądy rzędu 10^{-9}–10^{-10} A. Prądy takie mierzymy elektrometrem niklowym lub wzmacniaczem elektronicznym zbudowanym na specjalnych tzw. lampach elektrometrycznych*. Zasadę działania elektrometru nitkowego przedstawiono na rys. 33.4. Między



33.4. Budowa elektrometru nitkowego.

płytkami kondensatora płaskiego rozciągnięta jest bardzo cienka nić platynowa, której jeden koniec przytwierdzony jest do sprężynującej nici kwarcowej. W czasie pomiaru nić ładujemy z dodatkowego źródła prądu, np. z baterii anodowej. W czasie ładowania kondensatora nić wychyla się, a wychylenie jest proporcjonalne do ładunku zgromadzonego na okładkach. Wychylenie nici jest niewielkie, stąd mierzymy je za pomocą mikroskopu ze skalą okularową (§ 30.1). Elektrometr stosować możemy również w układzie przedstawionym na rys. 33.5, w którym mierzymy szybkość ładowania lub rozładowania elektrometru.



33.5. Budowa komory jonizacyjnej przystosowanej do pracy z promieniami rentgenowskimi (a) oraz łączenie elektrometru przy obserwacji ładowania (b) lub rozładowania (c).

33.1. PROMIENIOWANIE RENTGENOWSKIE

Cel: pomiar względnego natężenia promieniowania rentgenowskiego w zależności od napięcia anody przy stałym prądzie anodowym oraz w zależności od prądu anody przy jej stałym napięciu, ustalenie grubości połówkowej absorbujących promieniowanie próbek metalu.

* Wzmacniacze elektrometryczne są produkowane przez Unipan, nazwa firmowa — elektrometr typ. 219.

Przyrządy: komora jonizacyjna i elektrometr lub wzmacniacz elektrometryczny (§ 33.02).

Zagadnienia: promieniowanie rentgenowskie (S5, § 1–8; J, § 26.8, 29.14–16), przewodnictwo elektryczne gazów (J, § 26.1; S3 § 63–67), podstawowe wiadomości dotyczące budowy atomu (S5, § 14–22; J § 29.1–7), absorpcja i detekcja promieniowania (§ 33.01–02).

Wprowadzenie i aparatura

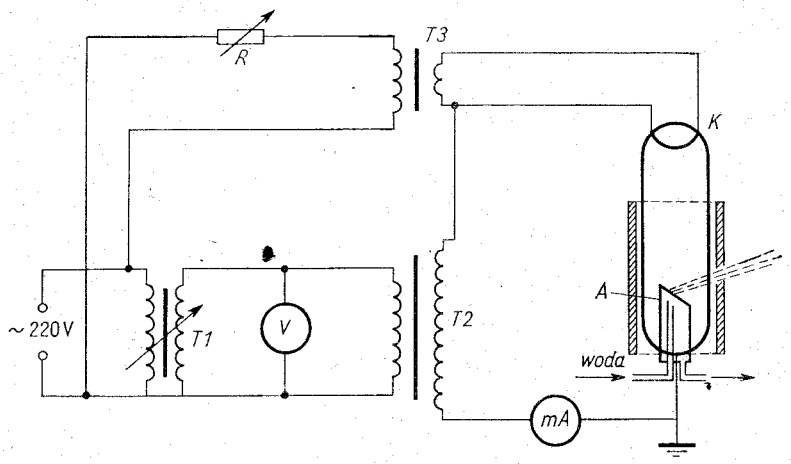
W lampie rentgenowskiej elektrony o bardzo dużej prędkości zderzają się z anodą, która na skutek tego wysyła promieniowanie elektromagnetyczne. W czasie zderzenia elektronu z atomem materiału anody, atom zostaje wzbudzony, przy czym wzbudzenie następuje na jednej z wewnętrznych powłok elektronowych. Przy powrocie do stanu podstawowego nadmiar energii zostaje wypromieniowany w postaci kwantu $h\nu$, gdzie h — stała Plancka, ν — częstość. Energia elektronu bombardującego wyraża się wzorem eU, gdzie e — ładunek elektronu, U — napięcie przyspieszające. Stąd też długość najkrótszych fal rentgenowskich $\lambda_{\min} = c(\nu_{\max})^{-1}$ jest określona wzorem

$$eU = h\nu_{\max} = h\frac{c}{\lambda_{\min}},$$

skąd

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}. \tag{33.4}$$

Sposób zasilania lampy rentgenowskiej przedstawiono na rys. 33.6. Do zasilania lamp stosuje się napięcia anodowe rzędu kilkudziesięciu do 100 kV. Napięcia takie uzyskuje się za pomocą transformatorów łączonych kaskadowo. Transformator zmienny lub autotransformator *T1* służy do zasilania właściwego transformatora wysokiego napięcia



33.6. Schemat układu zasilającego lampę rentgenowską.

T2 i równocześnie pozwala zmieniać napięcie w szerokich granicach. Ponieważ przekładnia transformatora *T2* jest stała, woltomierz *V* może być wyskalowany wprost w jednostkach napięcia panującego na wyjściu transformatora wysokiego napięcia. W lampach rentgenowskich uziemia się anodę, stąd katoda znajduje się na wysokim potencjale ujemnym. Z tego powodu transformator żarzeniowy *T3* musi mieć doskonałą izolację

niskiego napięcia, wytrzymującą napięcie zasilające. Prąd żarzenia można regulować opornikiem R. Od prądu żarzenia zależy temperatura katody, a tym samym ilość emitowanych elektronów, stąd opornikiem R regulujemy natężenie prądu płynącego przez lampę, mierzonego miliamperomierzem mA. Prąd anody jest miarą natężenia emitowanego promieniowania. Na anodzie lampy, na skutek bombardowania elektronami, wyzwala się bardzo duża energia i anoda silnie się nagrzewa. Przed stopieniem zabezpiecza chłodzenie wodne wbudowane do wnętrza anody. Zazwyczaj aparatura rentgenowska zaopatrzona jest w wyłącznik automatyczny, który nie pozwala włączyć zasilania, gdy nie jest włączona woda chłodząca.

Promieniowanie rentgenowskie jest szkodliwe dla organizmów żywych. Z tego powodu lampa osłonięta jest osłoną z ołowiu, a promieniowanie wydostaje się tylko przez małe otwory, czyli tzw. okienka. W czasie, gdy nie wykonujemy pomiarów, okienka muszą być również zasłonięte przesłoną z ołowiu.

Pomiary

Za pomocą przesłony zbudowanej w postaci długiej rurki mosiężnej umieszczonej w jednym z okienek, wydzielamy bardzo wąską wiązkę promieni. Wiązka musi być tak wąska, by przechodząc przez komorę jonizacyjną nie padała na żadną ze ścianek. Promienie rentgenowskie padające na powierzchnię ścianek komory powodują emisję fotoelektronów fałszując wyniki pomiarów.

Do pomiaru natężenia wiązki stosujemy jeden z układów elektrometrycznych z rys. 33.5 lub mierzymy wprost natężenie prądu za pomocą wzmacniacza elektromagnetycznego. Za komorą jonizacyjną umieszczamy przesłonę z ołowiu pochłaniającą pozostałą część promieniowania, a tym samym zabezpieczającą przed napromieniowaniem. Pomiar natężenia wiązki polega na wyznaczaniu czasu, w którym elektrometr ładuje się lub rozładowuje o określoną liczbę podziałek. Wykonujemy próbną serię pomiarów i planujemy właściwy sposób ich wykonania. Wykonujemy pomiary prądu lub czasu ładowania albo rozładowania w zależności od prądu anody przy stałym napięciu anody, a następnie w zależności od napięcia anody przy stałym prądzie.

Między źródłem i komorą jonizacyjną ustawiamy płytkę materiału absorbującego, czyli tzw. absorbent i przy stałym napięciu oraz prądzie anodowym mierzymy prąd lub czas rozładowania elektrometru w obecności absorbenta i po jego usunięciu. Pomiary powtarzamy przy innej wartości napięcia anody. Mierzymy grubość warstwy absorbenta.

Obliczenia

Natężenie wiązki określamy w jednostkach umownych natężenia prądu lub jako odwrotność czasu ładowania względnie rozładowania elektrometru $\left(I \sim \frac{1}{t}\right)$. Obliczenia takie wykonujemy dla wszystkich badanych przypadków. Wykreślamy zależności natężenia promieniowania w zależności od napięcia anody oraz od prądu anodowego.

Z pomiarów pochłaniania obliczamy współczynnik osłabienia μ z wzoru (33.2), a następnie grubość połówkową z wzoru (33.3). Obliczamy również błędy tych wielkości. Dyskutujemy krótko uzyskane wyniki.

33.2. ABSORPCJA PROMIENIOWANIA JONIZUJĄCEGO

Cel: wyznaczenie współczynnika absorpcji promieniowania γ lub korpuskularnego.

Przyrządy: licznik Geigera–Müllera z prostym wzmacniaczem i słuchawkami albo licznik Geigera–Müllera z przelicznikiem elektronicznym, preparat promieniotwórczy, osłona z ołowiu, materiał pochłaniający promieniowanie.

Zagadnienia: promieniotwórczość naturalna i sztuczna (J, § 31.1–8), promienie kosmiczne (J, 32.3; S6, § 140), prąd elektryczny w gazach (S3, § 63–67; J, § 26.1), absorpcja promieniowania (§ 33.01–02).

Wprowadzenie

Ilościowy opis absorpcji promieniowania jonizującego omówiony w § 33.01, nie mówi nic o mechanizmie wymiany energii pomiędzy promieniowaniem i ciałem. W ciałach stałych istnieją trzy zasadnicze mechanizmy wymiany energii: 1. zderzenia sprężyste, 2. zderzenia niesprężyste i 3. wzbudzenie elektronowe. Na skutek zderzeń sprężystych następują translokacje całych atomów; zmieniają one swoje miejsca w sieci krystalicznej ciała stałego, wtedy powstają tzw. defekty, czyli nieregularności sieci krystalicznej. Z niektórych węzłów sieci zostają atomy usunięte, czyli powstają luki, a w innych miejscach pojawiają się atomy w tzw. położeniach międzywęzłowych, w których być nie powinny. W zderzeniach niesprężystych zostaje pochłonięta cząstka α, β lub neutron i mamy wtedy do czynienia z transmutacją jądra oraz promieniotwórczością sztuczną. Atomy ciała napromieniowanego stają się promieniotwórcze. Wzbudzenie elektronowe następuje przy absorpcji kwantu γ, jak również w zderzeniach. Sposób oddziaływania promieni z ciałem zależy od energii promieniowania. Cząstki o dużej energii w kolejnych zderzeniach sprężystych tracą część swej energii i w końcu są pochłaniane w zderzeniu niesprężystym, natomiast promienie γ jonizują lub wzbudzają atom obojętny. Część energii wniesiona przez wiązkę promieni padających zostaje w ciele zmagazynowana w postaci promieniotwórczości sztucznej, część w postaci wzbudzenia atomów, a pewna część promieniowania przechodzi przez ciało.

Ze względu na szkodliwość promieniowania jonizującego dla organizmów żywych, źródła promieniowania musimy osłaniać ciałem całkowicie je absorbującym. Najlepiej do tego celu nadaje się ołów. Źródło promieniowania osłaniamy warstwą ołowiu (umieszczamy w tzw. domku ołowianym). Z osłony wyprowadzamy wiązkę promieniowania w kierunku zapewniającym całkowite nasze bezpieczeństwo.

Licznik rejestruje impulsy nawet w nieobecności źródła promieniotwórczego. Impulsy te pochodzą od promieniowania kosmicznego oraz izotopów promieniotwórczych rozproszonych w przyrodzie. Stanowią one tzw. tło, którego obecność musimy uwzględnić mierząc aktywność dowolnego źródła. Zwrócimy jeszcze uwagę na fakt występowania dwóch składowych promieniowania kosmicznego: składowej miękkiej absorbowanej przez cienką warstwę ołowiu oraz składowej twardej przechodzącej nawet przez bardzo grubą warstwę ołowiu.

Aparatura i pomiary

Pomiary zależą od aktywności stosowanego źródła i stosowanej aparatury. Dysponując słabym źródłem, pomiary wykonać możemy najprostszą aparaturą, tj. licznikiem z wzmacniaczem zliczając ilość impulsów za pomocą słuchawek. Pomiary takie są bardzo

czasochłonne i niedokładne. Stosując źródło o nieco większej aktywności i przelicznik elektroniczny możemy w krótkim czasie zarejestrować bardzo dużo impulsów i wykonać pomiary z dowolną dokładnością. Badane zjawisko promieniowania ma charakter statystyczny, stąd prawdopodobieństwo uzyskania dwóch identycznych wyników w podobnych warunkach jest znikome.

Przystępując do właściwych pomiarów mierzymy tło wykonując pomiary w warunkach wskazanych w instrukcji. Najczęściej mierzymy wielokrotnie liczbę impulsów w dość długim czasie w nieobecności źródła. Następnie zbliżamy źródło i wyznaczamy jego aktywność wykonując również pomiary wielokrotnie. Planując pomiary staramy się osiągnąć największą dokładność. W tym celu musimy zliczać wielokrotnie dużą liczbę impulsów. Faktycznie dokładność ogranicza czas, który możemy przeznaczyć na pomiary. Dokładność jest mała przy źródłach o małej aktywności, natomiast może być dowolnie duża przy źródłach o dużej aktywności promieniotwórczej. Celem wyznaczenia współczynnika pochłaniania pomiary wykonujemy dla różnych grubości warstwy pochłaniającej (3 do 5-ciu pomiarów).

Obliczenia

Dla każdej serii pomiarów wykonanych w takich samych warunkach obliczamy wartości średnie aktywności oraz ich odchylenie standardowe. Obliczamy współczynnik osłabienia μ z wzoru (33.2) dla każdej zbadanej grubości warstwy pochłaniającej. Obliczamy wartość średnią $\bar{d}$ oraz jej błąd. Z wzoru (33.3) obliczamy grubość połówkową $d_{1/2}$. Wykreślamy zależność $\log I$ od d i wyznaczamy nachylenie uzyskanej linii, które zgodnie z równaniem (33.2a) jest równe $\mu \lg e$. Obliczamy stąd wartość μ' oraz błąd tej wielkości i sprawdzamy zgodność wyników $\bar{\mu}$ i μ'.

33.3. WIDMO ATOMU WODORU

Cel: wyznaczenie krzywej dyspersji spektrometru, stałej Rydberga dla atomu wodoru oraz stałej Plancka.

Przyrządy: spektrometr (§ 30.5), lampy widmowe (§ 4.14).

Zagadnienia: widma emisyjne (§ 30.5; S4, § 16–19; J, § 23.24–26), teoria Bohra budowy atomu (S5, § 16–23; J, § 29.1–6).

Wprowadzenie

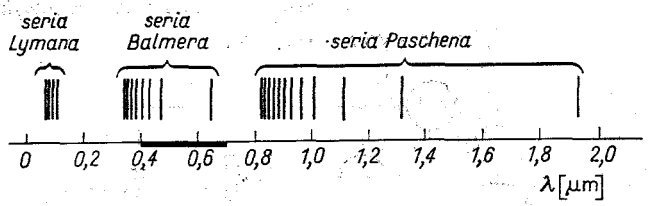
Zgodnie z teorią Bohra elektron może zajmować w atomie ściśle określone stany (poziomy) energetyczne. Przy przejściu z jednego poziomu na inny musi zaabsorbować względnie wyemitować różnicę energii w postaci kwantu światła $h\nu = E_n - E_m$. Stosując model Bohra można wyprowadzić wzór określający energię E_n, a tym samym częstość ν emitowanej fali elektromagnetycznej

$$\nu = cR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{33.5}$$

gdzie c — prędkość światła, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $m = n+1, n+2, n+3, \ldots$, a R jest uniwersalną stałą zależną tylko od rodzaju jądra zwaną stałą Rydberga. Dla każdej wartości n otrzymujemy układ linii widmowych, z których każda odpowiada innej wartości m, tworzących jedną serię widmową. Serie widmowe posiadają następujące nazwy:

$n = 1$ — seria P. Lymana,
$n = 2$ — seria J. J. Balmera,
$n = 3$ — seria F. Paschena,
$n = 4$ — seria F. S. Bracketta,
$n = 5$ — seria A. H. Pfunda,
$n = 6$ — seria C. Humphreysa.

Dla przykładu na rys. 33.7 przedstawiono pierwsze trzy serie widmowe atomu wodoru. Tylko niektóre linie należące do różnych serii widmowych leżą w zakresie widzialnym. Wiele linii leży w ultrafiolecie lub w dalekiej podczerwieni. Szczególnie dogodna do



33.7. Serie widmowe atomu wodoru.

badań jest seria Balmera dla atomu wodoru, bowiem jej trzy najbardziej intensywne linie: $H_\alpha(m = 3)$, $H_\beta(m = 4)$ i $H_\gamma(m = 5)$ leżą w obszarze widzialnym. Znając długości fal tych linii, dla każdej oddzielnie obliczyć możemy stałą Rydberga R_H. Stała Rydberga atomu wodoru wyraża się wzorem

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0 h^3 c\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right)}, \tag{33.6}$$

gdzie m_e oznacza masę elektronu, a m_p — masę protonu (jądra atomu), pozostałe wielkości są również stałymi uniwersalnymi.

Pomiary i obliczenia

W doświadczeniu posługujemy się spektrometrem i wykonujemy takie same pomiary jak w doświadczeniu 30.5, a więc ustawiamy (justujemy) spektrometr, wyznaczamy przebieg krzywej dyspresji dla widma wzorcowego (np. rtęci), a następnie wyznaczamy długości poszczególnych linii widma wodoru. Dla linii H_α, H_β, H_γ obliczamy stałą Rydberga R_H z wzoru (33.5). Obliczamy wartość średnią $\overline{R_H}$, odchylenie standardowe $S_{\overline{RH}}$ metodą Studenta–Fishera i również błąd maksymalny jednego z wyników. Obliczamy stałą Plancka h z wzoru (33.6) oraz jej odchylenie standardowe lub błąd maksymalny zależnie od wartości tych błędów uzyskanych dla stałej R_H.

33.4. DOŚWIADCZENIE FRANCKA–HERTZA

Cel: wyznaczenie potencjału wzbudzenia atomów rtęci na skutek zderzeń z elektronami i obliczenie częstości emitowanej fali świetlnej.

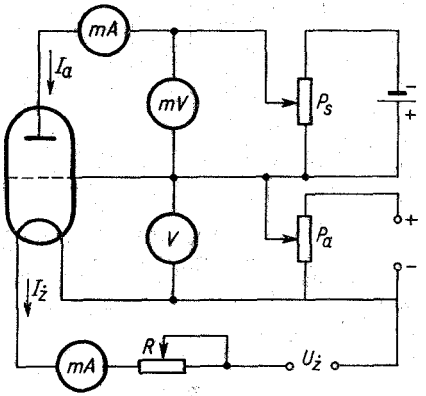
Przyrządy: oporniki i potencjometry (4.2), mierniki elektryczne (§ 18.01–03), trioda i tyratron (§ 25.02, 25.2).

Zagadnienia: budowa atomu według teorii Bohra (§ 33.3; S5, § 18–24; J, § 29.1–5).

Wprowadzenie i aparatura

Atomy przyjmować mogą tylko określone stany energetyczne, stąd mogą przyjmować lub oddawać energię tylko tzw. kwantami, czyli porcjami równymi różnicy energii między dwoma stanami. Fakt ten został udowodniony doświadczalnie przez Francka–Hertza.

Schemat aparatury przedstawiono na rys. 33.8. Podstawową jej częścią jest tzw. tyratron, czyli trioda wypełniona gazem, w naszym przypadku parami rtęci. Lampa jest żarzona ze stabilizowanego źródła prądu. Między katodą i siatką przykładamy dodatnie, regulowane potencjometrycznie napięcie U. Między siatką i anodą przykładamy napięcie hamujące U_h o stałej wartości, która wynosi $-0{,}5$ V.



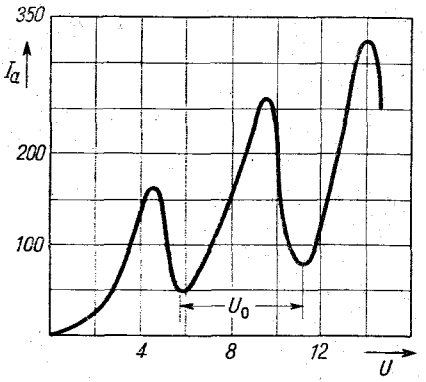
33.8. Obwód elektryczny doświadczenia Francka–Hertza.

Badając zależność prądu anody I_a od napięcia U obserwuje się początkowo jego wzrost podobny jak w zwykłej triodzie. Elektrony w czasie swej wędrówki do anody zderzają się z atomami rtęci, lecz zderzenia są sprężyste, zachodzą bez strat energii. Po osiągnięciu pewnej wartości prąd I_a zaczyna gwałtownie maleć ze wzrostem napięcia. Dzieje się tak na skutek zmiany charakteru zderzeń. Zaczynają one być niesprężyste. Elektrony oddają przy tym swą energię atomom, które przechodzą do wyższego stanu energetycznego. Po zderzeniu elektrony muszą być na nowo przyspieszane. Z dalszym wzrostem potencjału przyspieszającego U, prąd anody znowu wzrasta; zilustrowano to rysunkiem 33.9. Prąd zaczyna znowu maleć, gdy energia elektronu wzrośnie na tyle, że może nastąpić drugie zderzenie niesprężyste itd. W zderzeniach atomy rtęci przechodzą do wyższego stanu energetycznego, czyli ulegają wzbudzeniu. Stan wzbudzony nie jest stanem trwałym i wkrótce atomy wracają do stanu podstawowego (pierwotnego) wypromieniowując nadmiar energii w postaci kwantu światła $h\nu$. Energia ta musi być równa energii eU_0 pochłoniętej przez atom w czasie zderzenia. Wartość U_0 określamy

jako różnicę napięcia U dla dwóch kolejnych minimów. Ze względu na prędkość wyjściową elektronów, wartość bezwzględna napięcia pierwszego minimum nie określa jednoznacznie energii jaką elektron przekazuje atomowi. Tak więc z równości kwantu światła i energii traconej przez elektron wynika związek

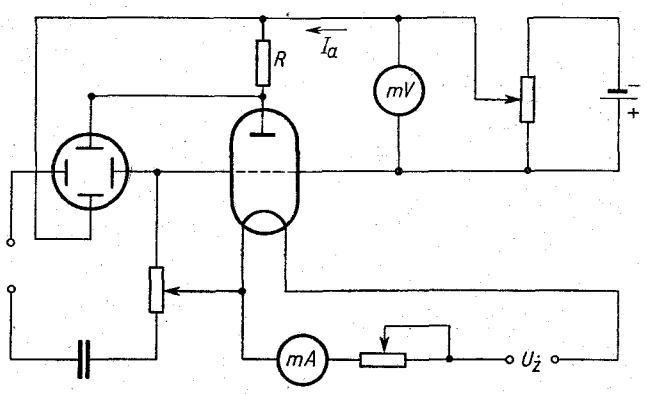
$$h\nu = eU_0, \tag{33.7}$$

z którego obliczyć możemy częstość ν emitowanej fali świetlnej jak również jej długość $\lambda = \frac{c}{\nu}$.



33.9. Przebieg charakterystyki tyratronu w doświadczeniu Francka–Hertza.

Krzywą przedstawioną na rysunku 33.9 możemy uwidocznić również na ekranie lampy oscylograficznej, stosując układ przedstawiony na rys. 33.10. Musimy w tym celu dysponować oscylografem, który ma wyprowadzone na zewnątrz napięcie o przebiegu piłowym przykładanym do płytek odchylających poziomo.



33.10. Układ Francka–Hertza z oscylografem katodowym.

Pomiary i obliczenia

Pomiar zależności $I_a(U)$ wykonujemy kilkakrotnie w różnych warunkach, tzn. przy różnych wartościach prądu żarzenia, który decyduje o temperaturze katody i w konsekwencji o temperaturze par rtęci. Celem zapewniania stałości temperatury całą

lampę możemy umieścić również w piecyku elektrycznym. Szczególnie dokładne pomiary wykonujemy w pobliżu kolejnych minimów. W oparciu o uzyskane wyniki sporządzamy wykresy zależności $I_a(U)$ i z wykresów tych odczytujemy dokładnie różnice potencjałów U_0 (tzw. potencjały wzbudzenia). Dla każdego pomiaru obliczamy oddzielnie częstość ν, po czym wynik uśredniamy. Obliczamy odchylenie standardowe tej wielkości. Obliczamy długość fali emitowanego światła. W krótkim omówieniu wyników uwzględniamy w pierwszej kolejności sprawy związane z promieniowaniem emitowanym przez lampę, czy promieniowanie to zauważyliśmy w czasie pomiarów?

TABLICE FIZYCZNE

Tablica I

Stałe fizyczne

(Według zaleceń Międzynarodowej Unii Fizyki Czystej i Stosowanej, przyjętych na posiedzeniu w Warszawie we wrześniu 1963 r. Cyfry pod liczbą oznaczają błąd maksymalny równy trzykrotnemu odchyleniu standardowemu.)

Prędkość światła	$c = 2{,}997925 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (3)
Stała Boltzmanna	$k = 1{,}38054 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$ (18)
Masa atomu wodoru	$m_{\mathrm{H}} = 1{,}67343 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ (8)
Masa protonu	$m_p = 1{,}67252 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ (8)
Masa neutronu	$m_n = 1{,}67482 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ (8)
Masa elektronu	$m_e = 9{,}1091 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$ (4)
Ładunek elektronu	$e = 1{,}60210 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$ (7)
Ładunek właściwy	$e/m = 1{,}758796 \cdot 10^{11}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}}$ (19)
Promień elektronu	$r_e = 2{,}81777 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}$ (11)
Stała Plancka	$h = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ (5)
	$h/2\pi = 1{,}05450 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ (7)
Promień pierwszej orbity Bohra	$a_0 = 5{,}29167 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}$ (7)
Stała Rydberga	$R_\infty = 1{,}0973731 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$ (3)
Magneton Bohra	$\mu_{\mathrm{B}} = 9{,}2732 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{A \cdot m^2}\ (= \mathrm{J \cdot T^{-1}})$ (6)

Moment elektromagnetyczny elektronu	$\mu_e = 9{,}2840 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{A \cdot m^2}$
	6
Magneton jądrowy	$\mu_N = 5{,}0505 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{A \cdot m^2}$
	4
Moment elektromagnetyczny protonu	$\mu_p = 1{,}41049 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{A \cdot m^2}$
	13
Stała Avogadra	$N_A = 6{,}02252 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
	28
Objętość molarna gazu doskonałego w warunkach normalnych	$V_m = 2{,}24136 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}$
	30
Stała gazowa (molarna)	$R = 8{,}3143\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$
	12
Stała Faradaya	$F = 9{,}64870 \cdot 10^{4}\ \mathrm{C \cdot mol^{-1}}$
	16
* Stała ciążenia powszechnego	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
* Przenikalność dielektryczna próżni	$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}}$
* Przenikalność magnetyczna próżni	$\mu_0 = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V \cdot s \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}}$
* Przyspieszenie ziemskie	$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
w tym:	
Gdańsk — 21 m n. p. m.	9,81450 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Kraków — 212 ,, ,,	9,81054 ,,
Lublin — 147 ,, ,,	9,81222 ,,
Łódź — 210 ,, ,,	9,81192 ,,
Poznań — 86 ,, ,,	9,81334 ,,
Warszawa — 100 ,, ,,	9,8123 ,,
Wrocław — 130 ,, ,,	9,8115 ,,
Toruń — 65 ,, ,,	9,81334 ,,

Tablica II

Momenty bezwładności jednorodnych brył

Kształt bryły	Określenie osi	Moment bezwładności
Cienki pręt o długości l	Przechodzi przez koniec pręta prostopadle do osi	$\frac{1}{3}ml^2$
,, ,, ,,	Przechodzi przez środek prostopadle do pręta	$\frac{1}{12}ml^2$
Walec o promieniu r i długości l	Osią jest oś walca	$\frac{1}{2}mr^2$
,, ,, ,,	Przechodzi przez środek walca prostopadle do jego osi	$m\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{12}l^2\right)$
Wydrążony walec o długości l i promieniach $r_1 > r_2$	Osią jest oś walca	$\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)$
,, ,, ,,	Oś przechodzi przez środek i jest prostopadła do osi walca	$m\left[\frac{1}{4}\left(r_1^2+r_2^2\right)+\frac{1}{12}l^2\right]$

* Stałe nie ujęte zaleceniem MUFCiS

Tablica II c. d.

Kształt bryły	Określenie osi	Moment bezwładności
Kula o promieniu r	Osią jest średnica	$\frac{2}{5}mr^2$
Koło o promieniu r	Przechodzi przez środek prostopadle do powierzchni	$\frac{1}{2}mr^2$
,, ,,	Osią jest średnica	$\frac{1}{4}mr^2$
Prostopadłościan o krawędziach a, b, c	Przechodzi przez środek równolegle do krawędzi c	$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

Tablica III

Zależność niektórych własności wody i rtęci od temperatury

Temperatura °C	Gęstość wody 10^3 kg m^{-3}	Współcz. załamania wody	Lepkość wody 10^{-3} kg/ms	Napięcie pow. wody 10^{-3} Nm^{-1}	Prężność pary nad H_2O w mm Hg	Gęstość rtęci 10^3 kg m^{-3}	Gęstość nasyconej pary wodnej 10^{-3} kg m^{-3}
0	0,99984		1,778	75,6	4,579	13,5951	4,84
5	0,99996		1,510	74,9	6,543	13,5827	6,86
10	0,99970		1,303	74,22	9,209	13,5704	9,4
15	0,99910	1,33348	1,134	73,49	12,788	13,5580	12,8
18	0,99877	1,33317		73,05	15,477	13,5507	15,4
20	0,99820	1,33299	1,002	72,75	17,535	13,5457	17,3
22	0,99777	1,33281			19,827	13,5408	19,4
25	0,99704	1,33251	0,891	71,97	23,756	13,5335	23,0
30	0,99564	1,33192	0,798	71,18	31,824	13,5212	30,3
35	0,99403	1,33121	0,720		42,175	13,5090	39,6
40	0,99221	1,33051	0,654	69,56	55,324	13,4967	51,2
45	0,99022	1,32976	0,597		71,88	13,4845	65,4
50	0,98804	1,32894	0,548	67,91	92,51	13,4723	83,0
60	0,98321	1,32718	0,468	66,18	149,38	13,4480	130
70	0,97778	1,32511	0,406	64,4	233,7	13,4237	198
80	0,97180	1,32287	0,356	62,6	355,1	13,3995	293
90	0,96531	1,32050	0,316		525,76	13,3753	429
95	0,96189	1,31923	0,299		633,90	13,3633	505
100	0,95835	1,31783	0,283	58,9	760,00	13,3514	598
				nad lodem	nad wodą		
−5				3,013	3,163	13,6074	3,24
−10				1,950	2,149	13,6198	2,14
−15				1,241	1,436		1,38

Tablica IV

Gęstość wodnych roztworów niektórych kwasów i innych ciał 10^3 kg · m^{-3}
(p — liczba gramów ciała bezwodnego w 100 g roztworu.)

p	HCl 18°C	H_2SO_4 18°C	Alkohol etylowy 20°C	Alkohol metylowy 20°C	Cukier 18°C
0	0,998	0,9982	0,99823	0,9982	0,998
1		1,0051	0,99636	0,9965	
2		1,0118	0,99453	0,9948	
3		1,0184	0,99275	0,9931	
4		1,0250	0,99103	0,9914	
5	1,024	1,0317		0,989	1,018
6		1,0385	0,98780	0,9880	
8		1,0522	0,98478	0,9847	
10	1,048	1,0661	0,98187	0,9815	1,039
15	1,073	1,1020	0,97514	0,97401	1,060
20	1,099	1,1394	0,96864	0,9666	1,082
25	1,125	1,1783	0,96168	0,9592	1,104
30	1,151	1,2185	0,95382	0,9515	1,128
35	1,176	1,2599	0,94494	0,9433	1,152
40	1,199	1,3028	0,93518	0,9345	1,177
45		1,3476	0,92472	0,9252	1,203
50		1,3951	0,91384	0,9156	1,230
60		1,4983	0,89113	0,8946	1,287
70		1,6105	0,86766	0,8715	1,348
80		1,7272	0,84344	0,8469	
90		1,8144	0,81797	0,8202	
95		1,8337	0,80424	0,8062	
100		1,8305	0,78934	0,7917	

Tablica V

Gęstość wodnych roztworów niektórych soli

(m — liczba gramów soli bezwodnej w 100 g wodnego roztworu.)

m	$AgNO_3$ 20°C	$CdCl_2$ 20°C	$CuSO_4$ 18°C	$MnSO_4$ 20°C	NaCl 20°C	KCl 18°C	KJ 18°C
2	1,0154	1,0159		1,0178			
4	1,0327	1,0339		1,0378			
6	1,0506	1,0524		1,0583	1,0414		
8	1,0690	1,0715		1,0624	1,0560		
10	1,0882	1,0912	1,108	1,1012	1,0707	1,064	1,077
12	1,1080	1,1115		1,1236	1,0856		
14	1,1284	1,1324		1,1467	1,1007		
16	1,1495	1,1540		1,1705	1,1160		
18	1,1715	1,1762		1,1950	1,1315		
20	1,1942	1,1992	1,23		1,1473	1,134	1,167
25	1,2545	1,2604					
30	1,3205	1,3273					1,272
40	1,4743	1,4833					1,397
50	1,668	1,6762					1,547

Tablica VI

Niektóre własności ciał stałych w temperaturze 20°C (293 K)

Nazwa materiału	Gęstość 10^3 kg m^{-3}	Moduł Younga 10^{10} Nm^{-2}	Moduł sztywności 10^{10} $Nm^{-1}rad^{-1}$	Współczynnik Poissona	Ciepło właściwe 10^3 $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$
Bakelit	1,3	—	—	—	—
Bizmut	9,80	3,1	1,2	0,33	0,123
Cyna	7,30	3,9–5,4	1,8	0,33	0,226
Cynk	7,04–7,19	3,4–13	2,6–4,6	0,2–0,3	0,384
Duraluminium	2,79	6,9–7,4	2,6–2,7	0,34	—
Drewno $\parallel$ do włókien	—	0,9–1,3	1–1,6	—	—
Drewno $\perp$ do włókien	—	0,03–0,11	—	—	—
Glin	2,70	6,2–7,3	2,2–2,7	0,34	0,896
Guma miękka	—	0,01	0,00016	0,46–0,49	—
Kadm	8,66	5	2,3	0,3	0,231
Konstantan	8,9	17	6,1	0,33	0,41
Kwarc topiony	—	5,9	—	0,2	—
Miedź	8,89	7,9–13	4,0–4,8	0,35	0,385
Mosiądz (30%Zn)	8,44	10,3	4,2	0,35	0,388
Nikiel	8,6–8,9	20	7,8	0,3	0,439
Ołów	11,34	1,4–1,7	0,64	0,45	0,128
Platyna	21,37	16,7	6,1	0,39	0,136
Rtęć	13,55	—	—	—	0,136
Sól kamienna	2,14–2,22	—	—	—	0,854
Srebro	10,49	6,9–7,9	2,4–2,9	0,38	0,234
Szkło	2,6–5,9	4,9–7,9	1,7–3	0,2–0,3	0,832
Stal		21,5	8,15	0,29	—
Tal	16,6	—	—	—	0,137
Wolfram	18,6–19,3	35,4	13,2	0,17	0,144
Żelazo czyste	—	—	—	—	—
Żelazo lane	—	9,8	4,9	0,26	—
Żelazo kute	7,8–7,9	21,3	8,1	0,28	—

Temperatura topnienia		Temperatura wrzenia		Ciepło topnienia 10^3 J kg^{-1}	Przewodnictwo cieplne $\frac{J}{m\,s\,K}$	Prędkość dźwięku 10^3 m s^{-1}	Współczynnik rozszerzalności liniowej 10^{-6} K^{-1}
°C	K	°C	K				
—	—	—	—	—	2,2	—	22
271,3	544,5	1560	1833	67	—	—	13,45
231,9	505,1	2260	2533	58	—	2,500	26,92
419	692	907	1180	118	64,8	3,700	26,28
650	923	—	—	—	—	—	21–27
—	—	—	—	—	0,11–0,30	—	2–9
—	—	—	—	—	0,11–0,18	—	32–61
659,7	933,9	2057	2330	322	226	5,104	25,5
—	—	—	—	—	0,25	~0,05	—
320,9	594,1	767	1040	57,2	—	2,307	—
~1290	~1560	—	—	—	—	—	17,0
1710	1983	—	—	—	12–67	—	8–13
1083	1356	2336	2609	176	384	3,560	16–17,8
~910	~1180	—	—	—	85–109	3,500	18,9
1455	1728	2900	3173	309	58,0	4,973	12,8
327,4	600,6	1620	1893	24,5	34,7	1,227	29,40
1773,5	2046,7	4300	4573	117	69,0	2,690	—
−38,87	234,28	356,9	630,1	11,8	8,25	—	—
801	1074	—	—	519	—	—	—
960,8	1234,0	1950	2223	88,4	825	2,610	18,8
800–1400	1070–1670	—	—	—	0,8–1,1	5–6	9
1400	1673	—	—	—	—	4,990	6–13
303,5	576,7	~1460	~1720	—	—	—	30,21
3370	3643	5900	6173	192	199	—	4,5
1535	1808	3000	3273	—	67,2	5,130	—
—	—	—	—	23	—	—	10,61
—	—	—	—	—	—	—	11,40

Tablica VII

Niektóre własności cieczy w temperaturze 20°C(= 293,2 K)

Nazwa cieczy	Symbol chemiczny	Masa drobinowa	Gęstość bezwzgl. 10^3 kg m^{-3}	Lepkość (współcz. powierzchn) 10^{-3} kg m^{-2} s^{-1}	Napięcie (współcz. liniowy) 10^{-3} Nm^{-1}	Ciepło właściwe 10^3 J kg^{-1} K^{-1}
Aceton	C_3H_6O	58,08	0,792	0,30	23,7	~1,96
Alkohol etylowy	C_2H_6O	46,07	0,791	1,200	22,8	2,38
Alkohol metylowy	CH_4O	32,04	0,788	0,597	22,6	2,51
Benzen	C_6H_6	78,11	0,878	0,652	28,89	1,72
Benzyna	—	—	0,68–0,8	—	—	—
Chloroform	$CHCl_2$	83,93	1,480	0,564	27,1	0,98
Eter etylowy	$(C_2H_5)_2O$	74,08	0,714	0,234	17,1	2,30
Gliceryna	$C_3H_8O_3$	92,06	1,260	494	63	2,43
Nafta	—	—	0,68–0,72	—	—	2,13
Woda	H_2O	18,02	0,998	1,002	72,75	4,186
Rtęć	Hg	200,61	13,55	1,554	465	0,136

Temperatura topnienia (krzepnięcia)		Temperatura wrzenia		Ciepło topnienia 10^3 J kg^{-1}	Ciepło parowania 10^3 J kg^{-1}	Współcz. przew. ciepln. $\frac{J}{m \cdot s \cdot K}$	Prędkość dźwięku c km · s^{-1}
°C	K	°C	K				
−95	178,2	57	330,2	98,0	518	—	—
−117,3	155,9	78,3	351,5	104	854	0,177	—
−97,8	175,4	64,7	337,9	64,7	1100	0,277	—
5,48	278,63	80,2	353,4	127	392	0,139	—
—	—	—	—	—	—	—	—
−63,5	209,7	61,2	334,4	65	247	0,120	—
−117,6	155,6	34,6	307,8	98,5	351	0,124	1,032
−17	256,2	291	564,2	199	—	0,266	—
—	—	—	—	—	—	—	—
0,0	273,2	100,0	373,2	332	2260	0,598	1,461
−38,87	234,28	356,9	630,1	11,8	65,7	8,25	—

Tablica VIII

Niektóre własności gazów pod normalnym ciśnieniem

Materiał	Symbol chem.	Masa drobin.	Gęstość 0°C w kg m^{-3}	Gęstość wzgl. pow.	Prędkość dźwięku m s^{-1}	Przewodn. cieplne J / m s K	Temperatura topnienia (krzepnięcia) °C	Temperatura topnienia (krzepnięcia) K
Argon	A	39,95	1,7837	1,3796	—	0,0163	−189,2	84,0
Azot	N_2	28,016	1,25055	0,96724	—	0,0219	−209,86	63,25
Chlor	Cl_2	35,46	3,214	2,486	205,3	—	−103	170,2
Dwutlenek węgla	CO_2	44,011	1,9769	1,5290	258,0	0,0128	−56,6 (5,2 atm)	216,6
Gaz świetlny	—	—	0,6	0,46	490,4	—	—	—
Hel	He	4,003	0,17847	0,13804	—	0,142	−272,2	1,0
Neon	Ne	20,18	0,90035	0,69638	—	—	−248,67	24,48
Powietrze suche bez CO_2	—	—	1,2928	1,00000	331,8	0,0238	—	—
Tlen	O_2	32,00	1,42904	1,10527	317,2	0,0235	−218,4	54,8
Wodór	H_2	2,016	0,08988	0,06952	1269,5	0,137	−259,14	14,01
Para wodna	H_2O	18,016	—	—	—	—	—	—

Temperatura wrzenia (skraplania)		Ciepło właściwe $c_p = 10^3$	$\varkappa = c_p/c_v$	Rozprężliwość		Rozszerz. objętość.	Lepkość w 20°C
°C	K	$J\,kg^{-1}K^{-1}$		β K^{-1}	p cmHg	K^{-1} w 76 cm Hg	$\eta = 10^{-7}$ $kg\,m^{-1}\,s^{-1}$
−185,7	87,5	0,483	1,668	0,003668	51,7	—	220
−195,8	77,4	1,04	1,404	0,003672	76	0,003671	284
−34	239,2	0,482	1,355	—	—	0,003830	133
−78,5 (sublimacja)	194,7	0,834	1,304	0,003714	76	0,003751	93
—	—	—	—	—	—	—	—
−268,9	4,3	—	1,6660 (−180°C)	0,003665	56,7	—	197
−245,9	27,3	—	1,64 (19°C)	—	—	—	312
—	—	1,0	1,40	0,003665	76	0,003670	178
−182,97	90,18	0,911	1,401	0,003672	76	—	206
−252,8	20,4	14,2	1,404 (100°C)	—	—	—	89
—	—	2,02	1,324 w 100°C	—	—	—	132
		1,99	1,310 w 120 „				
		1,97	1,304 w 140 „				

Tablica IX

Punkty eutektyczne niektórych stopów

Nazwa	Skład	Temp. eutektyczna	
Antymon–tal	20% Sb, 80% Tl	195°C	468 K
Antymon–ołów	13% Sb, 87% Pb	246	519
Cyna–tal	≃36,2% Sn, ≃43,8% Tl	170,2	443,4
Cyna–bizmut	42% Sn, 58% Bi	136,5	409,7
Cyna–cynk	90% Sn, 10% Zn	198	471
Cyna–ołów	64,03% Sn, 35,97% Pb	181	454
Kadm–bizmut	39% Cd, 61% Bi	146	419
Kadm–tal	12,3% Cd, 81,7% Tl	203,5	476,7
Ołów–bizmut	≃42% Pb, ≃58% Bi	~120	~393

Tablica X

Tablice psychrometryczne

(τ_1 oznacza temperaturę odczytaną na termometrze suchym, τ_2 — na termometrze zwilżonym wodą przy szybkości przepływu powietrza wokół termometru ok. 3 m s^{-1}. Tablica podaje wilgotność względną w % dla danej różnicy temperatur $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ w zależności od τ_1.)

τ_1	$\Delta\tau$ w °C																
w °C	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
3	92	84	76	69	62	54	46	40	32	25	12						
6	94	87	80	73	66	60	54	47	41	35	23	11					
9	94	88	82	76	70	65	59	53	48	42	32	22	12	3			
12	94	89	84	78	73	68	63	58	53	48	38	30	21	12	4		
15	95	90	85	80	76	71	66	62	58	53	44	36	28	20	13	4	
18	95	90	86	82	78	73	69	65	61	57	49	42	35	27	20	13	6
21	96	91	87	83	79	75	71	67	64	60	53	46	39	32	26	19	13
24	96	92	88	85	81	77	74	70	66	63	56	49	43	37	31	26	21
27	96	93	90	86	82	79	76	72	68	65	59	53	47	41	36	31	26
30	96	93	90	86	82	79	76	73	70	67	61	55	50	44	39	35	30
33	96	93	90	86	83	80	77	74	71	68	63	57	52	47	42	37	33
36	97	93	90	87	84	81	78	75	72	70	64	57	54	50	45	41	36
39	97	94	91	88	85	82	79	76	74	71	66	61	56	52	47	43	39

Tablica XI

Opór właściwy i współczynnik temperaturowy oporu niektórych metali i stopów

Materiał	Opór właściwy w 0°C $10^{-8}\ \Omega \cdot m$	Współczynnik temperaturowy $10^{-3}\ (K)^{-1}$
Cynk	5,65	4,17
Glin	2,5	4,60
Konstantan (53% Cu; 45% Ni; 2% Mn)	45	−0,05
Manganin (86% Cu; 2% Ni; 12% Mn)	43	0,02
Miedź	1,55	4,33
Mosiądz (65,8% Cu; 34,2% Zn)	6,3	1,53
Nikiel	6,14	6,92
Nikielin (54% Cu; 26% Ni; 20% Zn)	43	0,23
Nowosrebro (nikielin 60% Cu; 17% Ni, 23% Zn)	30	0,35
Ołów	19,2	4,28
Platyna	9,81	3,96
Rtęć	94,07	0,99
Srebro	1,49	4,30
Wolfram	4,89	5,10
Żelazo	8,6	6,51

Tablica XII

Zależność oporu właściwego roztworów wodnych od stężenia

(Opór właściwy podano w Ω cm, w temperaturze 18°C. *S* oznacza stężenie w gramach na 100 g wody.)

S	$AgNO_3$	NaCl	KJ	H_2SO_4	HCl	$ZnSO_4$	$CuSO_4$	NaOH
5	39,0	14,94	29,5	4,79	2,54	52,3	52,9	5,08
10	21,0	8,33	14,7	2,55	1,59	31,2	31,2	3,20
15	14,64	6,10		1,84	1,34	24,1	23,7	2,89
20	11,46	5,11	6,88	1,53	1,31	21,4		3,06
25	9,45	4,69		1,39	1,38	20,8		3,68
30	8,07		4,34	1,35	1,51	21,5		4,95
40	6,39		3,16	1,47	1,94			8,61
50	5,39		2,55	1,85				

Tablica XIII

Równoważniki chemiczne i elektrochemiczne

(*W* — wartościowość, *M*/*W* — równoważnik chemiczny, *k* — równoważnik elektrochemiczny.)

Ciało	*W*	*M*/*W*	*k*(mg C^{-1})
Chlor Cl	1	35,46	0,36743
Glin Al	3	8,99	0,09316
Grupa NO_3	1	38,008	0,642
Grupa OH	1	9,008	0,1762
Grupa SO_4	2	64,066	0,4975
Mangan Mn	2	27,47	0,28461
Miedź Cu	2	31,78	0,32938
Platyna Pt	2	97,61	1,0104
Rtęć Hg	2	100,30	1,03943
Sód Na	1	22,997	0,23831
Srebro Ag	1	107,88	1,11793
Tlen O	2	8,00	0,0829
Wodór H	1	1,008	0,010446
Żelazo Fe	2	27,92	0,28938
,,	3	18,61	0,19291

Tablica XIV

Siła elektromotoryczna niektórych ogniw i akumulatorów

Nazwa	Układ	Siła elektromotoryczna w V	Opór wewnętrzny w Ω
Ogniwo Leclanchégo	$Zn\text{-}NH_4Cl\text{-}C$	1,5	1
Ogniwo normalne Westona	$Cd+Hg\text{-}CdSO_4\text{-}Hg$	1,01885 (14°C) 1,01879 (16°C) 1,01872 (18°C) 1,01864 (20°C) 1,01856 (22°C)	
Akumulator ołowiowy	$Pb\text{-}H_2SO_4+H_2O\text{-}PbO_2$	2,2	0,03
,, Edisona	$Fe\text{-}KOH+H_2O\text{-}Ni(OH)_2$	1,1	

Tablica XV

Zależność siły termoelektrycznej termoogniwa Pt-PtRh od różnicy temperatur liczonej względem 0°C

Różnica temp.	Siła termoelektryczna w mV									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0	0,06	0,11	0,17	0,24	0,30	0,36	0,43	0,50	0,57
100	0,64	0,72	0,79	0,87	0,95	1,02	1,10	1,18	1,26	1,35
200	1,43	1,52	1,60	1,69	1,78	1,86	1,95	2,04	2,13	2,22
300	2,31	2,40	2,50	2,59	2,68	2,77	2,87	2,96	3,05	3,15
400	3,24	3,34	3,44	3,54	3,63	3,73	3,82	3,92	4,02	4,12
500	4,22	4,31	4,41	4,51	4,61	4,71	4,82	4,92	5,02	5,12
600	5,22	5,32	5,43	5,53	5,63	5,74	5,84	5,94	6,05	6,16
700	6,26	6,37	6,47	6,58	6,68	6,79	6,89	7,01	7,11	7,22
800	7,33	7,44	7,55	7,66	7,77	7,88	7,99	8,10	8,21	8,32
900	8,43	8,54	8,66	8,77	8,89	9,00	9,11	9,22	9,34	9,46
1000	9,57	9,68	9,80	9,92	10,03	10,15	10,27	10,38	10,50	10,62
1100	10,74	10,86	10,98	11,10	11,21	11,33	11,45	11,57	11,69	11,81
1200	11,93	12,05	12,17	12,29	12,41	12,53	12,65	12,77	12,89	13,01
1300	13,13	13,25	13,37	13,49	13,61	13,73	13,85	13,97	14,09	14,21
1400	14,33	14,45	14,58	14,70	14,82	14,94	15,06	15,19	15,31	15,43

Tablica XVI

Zależność siły termoelektrycznej termoogniwa miedź-konstantan od różnicy temperatur mierzonej względem 0°C

Różnica temp.	Siła termoelektryczna w mV									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
−300										−5,69
−200	−5,54	−5,38	−5,20	−5,02	−4,82	−4,60	−4,38	−4,14	−3,89	−3,62
−100	−3,35	−3,06	−2,77	−2,46	−2,14	−1,85	−1,47	−1,11	−0,75	−0,38
0	0	0,40	0,80	1,20	1,67	2,03	2,47	3,91	3,36	3,81
100	4,28	4,70	5,23	5,71	6,20	6,70	7,21	7,72	8,23	8,76
200	9,29	9,82	10,44	10,90	11,46	12,01	12,57	13,14	13,71	14,28
300	14,86	15,44	16,03	16,62	17,22	17,82	18,42	19,02	19,63	—

Tablica XVII

Zależność siły termoelektrycznej termoogniwa żelazo-konstantan od różnicy temperatur

Temp. °C	E mV	Temp. °C	E mV	Temp. °C	E mV
0	0,0	350	19,32	700	39,30
50	2,66	400	22,07	750	42,48
100	5,40	450	24,82	800	45,72
150	8,19	500	27,58	850	49,00
200	10,99	550	30,39	900	52,29
250	13,97	600	33,27	950	55,25
300	16,56	650	36,24	1000	58,22

Tablica XVIII

Podatność magnetyczna właściwa $\chi = \varkappa/\varrho$

($\varkappa$ — podatność magnetyczna, ϱ — gęstość w temperaturze pokojowej.)

Ciała paramagnetyczne		Ciała diamagnetyczne	
Ciało	$\chi \cdot 10^6$	Ciało	$\chi \cdot 10^6$
Glin	0,65	Antymon	−0,87
Cyna	0,025	Argon	−0,45
Magnez	0,55	Azot	−0,34
Mangan	9,9	Bizmut	−1,35
Platyna	1,10	Cynk	−0,16
Potas	0,52	Hel	−0,47
Wolfram	0,28	Miedź	−0,086
$CuSO_4$	8,6	Ołów	−0,12
$FeCl_2$	101,2	Rtęć	−0,19
$FeCl_2 \cdot 4H_2O$	60,1	Siarka	−0,49
$FeCl_3$	86,2	Wodór	−1,97
$Fe(OH)_3$	157	Aceton	−0,58
Fe_2O_3	20,6	Alkohol etylowy	−0,744
MnO	75,9	,, metylowy	−0,65
MnO_2	38,4	Benzen	−0,712
$MnSO_4$	88,5	Chloroform	−0,488
Mn_2O_3	69,0	Eter etylowy	−0,766
NiO	53,7	Drewno	−0,3 ÷ −0,7
Powietrze	24,16	Nafta	−0,83
$FeSO_4$	74,2	Szkło crown	−0,9
$FeSO_4 \cdot 7H_2O$	41,5	Szkło flint	−1,2
		Woda (−120 ÷ 0°C)	−0,70

Tablica XIX

Niektóre własności ciał ferro- i ferrimagnetycznych

(μ_p — przenikalność względna początkowa, μ_{max} — przenikalność względna maksymalna, H_c — koercja, $\mathcal{J}_s$ — polaryzacja nasycenia, T_C — temperatura Curie, ϱ — gęstość.)

Materiał	Skład chem.	μ_p	μ_{max}	H_c A m^{-1}	$\mathcal{J}_s$ T	T_C K	Gęstość 10^3 kg m^{-3}
Stal miękka	0,2% C	120	$2 \cdot 10^3$	143	2,12	1043	7,8
Żelazo techn.	0,2% zaniecz.	150	$5 \cdot 10^3$	80	2,15	1053	7,88
,, czyste	0,05% ,,	10^4	$2 \cdot 10^5$	4	2,15	1053	7,88
Stal krzemowa	4% Si	500	$7 \cdot 10^3$	40	1,97	963	7,65
,, ,, teksturowana	3% Si	1500	$4 \cdot 10^4$	8	2,00	1013	7,67
Ferrokobalt	35% Co	10^3	$27 \cdot 10^3$	16–60	2,46	1253	
78 permalloy	78,5% Ni	8000	10^5	4	1,08	473	8,60
Supermalloy	5% Mo, 79% Ni	10^5	10^6	0,16	0,79	673	8,77
Kobalt	99% Co	70	250	800	1,79	1393	8,9
Nikiel	99% Ni	110	600	55	0,61	631	8,90
Stal węglowa	0,9% C, 1% Mn			4000	1,0		7,9
Stal kobaltowa	0,85%C, 4% W 35% Co, 6% Cr			19900	0,95		8,15
Alnico 5	24% Co, 8% Al 14%Ni, 3% Cu			45700	1,25		7,3
Fe_3O_4		70	70		0,60	858	5,24
$CoFe_2O_4$		1	1	51700	0,55	768	5,29
MnBi	20% Mn, 80% Bi			263000	0,78	633	

Tablica XX

Współczynniki załamania względem powietrza

(W temperaturze 15°C dla linii *D* sodu 589,3 nm.)

Ciało	n	Ciało	n
Alkohol etylowy	1,362	Fuksyna	2,70
Alkohol metylowy	1,33	Kwarc topiony	1,45843
Balsam kanadyjski	1,530	Olej parafinowy	1,44
Benzen	1,504	Szkło zwykłe	1,518
Bursztyn	1,546	,, crown	1,525
Dwusiarczek węgla	1,629	,, flint	1,569
Czterochlorek węgla	1,464	Woda	1,333
Eter etylowy	1,354	Żelatyna	1,530

Tablica XXI

Długości fal linii widmowych niektórych pierwiastków w nm

(*g* — widmo wyładowań elektrycznych, *ł* — łuku elektrycznego, *i* — iskry elektrycznej. Dla niektórych pierwiastków określono natężenia linii: *b* — bardzo silna, *s* — silna, *m* — słaba, brak znaku oznacza linię bardzo słabą.)

Pierwiastek			Barwy i długości linii			
Symbol	Nazwa	Źródło	ciemnoczerwona 0,7	czerwona 0,63	pomarańczowa 0,60	żółta 0,57
Al	Glin	*i, ł*			624,3 *i*	
Cd	Kadm	*g*	783,5 738,4	*s*643,8		
Cu	Miedź	*ł*		692,0		578,2
Fe	Żelazo	*ł*	718,7	649,5		
H	Wodór	*g*		*s*656,3 H_α		
He	Hel	*g*		*s*667,8		*b*587,6
Hg	Rtęć	*g*			623,4	*b*579,1 *b*577,0
K	Potas	*g*	*s*769,9 *s*766,5			
Li	Lit	*g*		*s*670,8	610,4	
N	Azot	*g*	746,8	672,3 648,5 648,2	600,8	
Na	Sód	*g*			616,1 615,4	*b*589,6 *b*589,0
Ne	Neon	*g*	724,5	*s*640,2	*s*614,3	594,5 *b*585,2
O	Tlen	*g*	777,2	645,6	615,8	
Zn	Cynk	*g*		*s*636,2		
Linie Fraunhofera		λ Oznaczenie Pierwiastki emitujące	759,38 A O	686,72 646,28 B C O H		589,59 D_1 Na

Barwy i długości linii

żółto--zielona	zielona	zielono--niebieska	niebieska	indygo	fioletowa		
0,56	0,50	0,49	0,47	0,44			μm
					396,2*l*		
	*m*515,5 *m*508,5		*s*480,0	467,8 466,2			
					406,3		
561,6	527,0 523,3 516,7			440,5	438,4 432,6 430,8		
			*m*486,1 H*β*		434,5 410,2	H*γ* H*δ*	
	504,8 *m*501,6	*m*492,2	471,3	*m*447,1	439,0		
	*s*546,0	496,0 *m*491,0			*b*435,8 *m*434,8 *m*407,8 *b*404,7	433,9 410,8	
					*m*404,7		
		493,5			435,8 415,1 411,0		
568,8							
	540,0 534,1		482,7				
	533,1				436,0		
	*s*518,2		*s*481,1 *s*472,2	*s*468,0 *s*463,0			
	527,0 *E* Fe		486,13 *F* *H*		430,77 *G* Ca	396,85 *H* Ca	393,37 *K* Ca

SKOROWIDZ ALFABETYCZNY ZAGADNIEŃ TEORETYCZNYCH

Aberracja 528 - 529
absorpcja promieniowania jonizującego 594 - 596
– – świetlnego 547 - 548
akustyczne zjawiska 236 - 237
analiza pomiarów próbnych 67 - 70
– – wielkości liniowo zależnych 54 - 58
Avogadra stała 607

Bernoulliego równanie 191
bilans ciepla 255 - 257
błąd pomiarowy 39 - 70
– – bezwzględny 39 - 41
– –; dokładność przyrządu 39 - 41
– –; geometryczna interpretacja 50 - 52
– – gruby 39 - 41
– – krzywej na wykresie 61 - 67
– – maksymalny 50 - 52, 58 - 59
– – nachylenia; metoda analityczna 54 - 58
– – –; – graficzna 61 - 67
– –; odchylenie standardowe 41 - 50
– –; poziom i przedział ufności 50 - 52
– – prawdopodobny 52 - 54
– – procentowy 39 - 41
– – przeciętny 50 - 52
– –; przedział błędu 59 - 61
– – przypadkowy 39 - 41
– – rzeczywisty 39 - 41
– – Studenta-Fishera 52 - 54
– – systematyczny 39 - 41, 58 - 59
– –; teoria Gaussa 41 - 46
– – względny 39 - 41
Bohra magneton 401 - 406, 607
– orbity 607
Boltzmanna stała 607
Brillouina strefy 379 - 384

ciepło parowania 614 - 615
– topnienia 612 - 613, 614 - 615
– właściwe 254 - 255, 612 - 617

Clapeyrona-Clausiusa wzór 286 - 289
Curie temperatura 401 - 406, 623
czas krytyczny w ruchu tłumionym 208 - 212
– relaksacji 208 - 212

diamagnetyzm 401 - 412
dioda (lampa elektroniczna) 453 - 454
– półprzewodnikowa 391 - 395
długości fali niektórych linii widmowych 624 - 625
dobroć 212 - 213
– obwodów rezonansowych 476 - 480
domenowa struktura 401 - 412
drgania elektryczne 476 - 480
– harmoniczne 206 - 208, 213 - 216
– relaksacyjne 461 - 463
– sprężyny 169 - 172
– tłumione 208 - 213
– wahadeł sprzężonych 223 - 226
– wymuszone 227 - 230
dyfrakcja światła 564 - 566
dysocjacja elektrolityczna 374 - 375
efekt magnetronowy 465 - 467
elektron, ładunek, promień 607
emisja elektronów 451 - 453
eutektyczny punkt 282 - 284, 618

fale elektromagnetyczne 489 - 500
– głosowe 232 - 238
– –; prędkość 612 - 617
falowody 497 - 500
Faradaya prawa elektrolizy 374 - 375
– stała 607
Fermiego energia 379 - 384
ferromagnetyzm i ferrimagnetyzm 401 - 406
fotoelektryczne zjawisko 515 - 519

galwanometr; teoria ruchu ramki 352 - 355
gęstość ciał 122, 609 - 617, 623
giroskopu teoria 183 - 186

graficzna analiza wyników 54 - 58, 61 - 67

Hagena-Poiseuille'a równanie 188 - 191
histereza magnetyczna 406 - 408
Hooke'a prawo 153 - 156

interferencja światła 566 - 567
izotermy gazów rzeczywistych 274 - 277

jednostki miary 21 - 22
– – promieniowania jonizującego 587, 594 - 595
– –; przedrostki 30
– – układu SI 22 - 32
– –; układy jednostek cieplnych 34 - 36
– –; – – magnetycznych układu CGSEM 36 - 38
– –; – – mechanicznych 32 - 34

kalorymetrii zasady 254 - 255
Kirchhoffa prawa przepływu prądu 325 - 327, 435 - 439
– prawo promieniowania 296 - 298
koercja 406 - 408, 623
kryterium zgodności wyników 50 - 52
krzepnięcie i topnienie roztworów 282 - 284, 286 - 289
krzywa Gaussa, *patrz* prawo rozkładu normalnego
– ładowania kondensatora 367 - 368

Larmora teoria 401 - 406
lepkość 188 - 191
lepkości współczynnik 609, 614 - 617
Lissajous krzywe 213 - 216
literatura 15, 16 - 17, 38, 70
logarytmiczny dekrement tłumienia 208 - 212
Lorentza siła 455

ładunek elektronu 607
łuk elektryczny 372 - 374

magneton Bohra, jądrowy 607
– jądrowy 607
magnetooptyczne zjawisko 591 - 592
magnetyczny moment elektronu i atomu 401 - 406, 607
Malusa prawo 592
masa atomu, protonu, neutronu, elektronu 607
– drobinowa 614 - 617
– –; związek z gęstością 122
Maxwella równania 491
– teoria fal elektromagnetycznych 489 - 492
mechaniczny równoważnik ciepła 267 - 269
metoda wyrównawcza (najmniejszych kwadratów) 41 - 46, 54 - 58
międzynarodowy układ jednostek miar, *patrz* jednostki
moc prądu przemiennego 439
moduły sztywności 153 - 156, 612
– Younga 153 - 156, 612
moment elektromagnetyczny 27
– – elektronu i protonu, *patrz* magnetyczny moment
– kierujący 206 - 208, 216 - 218
momenty bezwładności brył 608
monochromatyczne światło 119 - 120, 579

nachylenie krzywej; wyznaczanie 54 - 58, 61 - 67
napięcie elektryczne 362, 431 - 432
– powierzchniowe 313 - 315, 609, 614 - 615
natężenie pola elektrycznego 24 - 25, 360 - 362
Newtona pierścienie 577 - 578
– prawo ostygania 295 - 296

objętość molarna 607
obliczanie wyników doświadczeń 16 - 20
odchylenie standardowe, *patrz* błędy pomiarów
Ohma prawo 325 - 326, 435 - 439
opór właściwy 619
oznaczenia mierników elektrycznych 345
– silników i prądnic 426

papier funkcyjny 61 - 64
paramagnetyzm 401 - 412
Peltiera zjawisko 386 - 390
Plancka rozkład energii w widmie 296 - 298
podatność magnetyczna 400 - 401, 622
Poissona współczynnik 153 - 156, 612 - 613
polaryzacja magnetyczna 27, 623
– światła 579 - 584
pomiary; zasady planowania 16 - 20, 53, 67 - 70
potencjał elektryczny 360 - 362
– wzbudzenia 604 - 605
– względny 360 - 362
poziom ufności 51
półprzewodniki; teoria pasmowa 379 - 384
praca doświadczalna 16 - 20
prąd przemienny 431 - 432
precesja 183 - 186
– momentu magnetycznego 401 - 412
prędkość dźwięku 612 - 617
– końcowa ciała o zmiennej masie 137 - 139
– światła 607
prężność pary wodnej 609
promieniowanie cieplne 296 - 298
– jonizujące 594 - 598
przedrostki do tworzenia jednostek wielokrotnych 30
przenikalność dielektryczna 25

przenikalność dielektryczna próżni 607
– magnetyczna 26, 406 - 408, 623
– – próżni 607
przepływ płynów 188 - 191
przewodzenie ciepła 296, 612 - 617
przyspieszenie ziemskie 607 - 608
psychrometryczne tablice 618

Richardsona zjawisko 451 - 453
rozkładu normalnego prawo 41 - 46
rozprężliwość termiczna gazów 616 - 617
rozszczepienie światła 555 - 556
rozszerzalność liniowa i objętościowa 254
równania Maxwella 489 - 492
– fali 232 - 233, 492 - 494
– ruchu drgań mechanicznych 206 - 216
– – – elektrycznych 476 - 480
równoważniki chemiczne i elektrochemiczne 374 - 375, 620
ruch elektronu w polu elektrycznym i magnetycznym 455
– precesyjny 183 - 185
Rydberga stała 602 - 603, 607

Seebecka zjawisko 386 - 390
SI, *patrz* jednostki
siła Coriolisa 143 - 144
– kierująca 206
– termoelektryczna termoogniw 621 - 622
skręcenie płaszczyzny polaryzacji 582 - 584, 588 - 589, 591 - 592
soczewki 522 - 525, 528 - 529
spójność światła 566 - 567
sprężyste własności ciał stałych 153 - 156
stalagmometryczne pomiary; poprawki 321
stałe fizyczne 607 - 608
Stefana-Boltzmanna wzór 298 - 299
Steinera twierdzenie 176
stopy metali i ich własności 282 - 284, 618
strumień energii cieplnej 295
Studenta-Fishera metoda obliczania błędów 52 - 54
stygnięcie ciał 295 - 296
symboliczne przedstawienie wielkości elektrycznych 432 - 435, 438

tablice psychrometryczne 618
temperatura Curie 401 - 412, 623
temperatura topnienia i wrzenia 612 - 617
teoria błędów, *patrz* błędy pomiarów
termoemisja 451 - 453, 458
Thomsona zjawisko 387 - 390
topnienie roztworów 282 - 284, 286 - 289
transformator 442 - 447
tranzystor warstwowy 396 - 398

układy jednostek, *patrz* jednostki

wartość średnia 41 - 47
wektorowe przedstawienie wielkości elektrycznych 432 - 435, 438
wielkości fizyczne 21 - 22
– –; oznaczenia 31
– – proste i złożone 39 - 41
Wiena prawo przesunięć 296 - 298
współczynnik giromagnetyczny 401
– napięcia powierzchniowego 313 - 315, 609, 614
– Poissona 612 - 613
– przewodnictwa cieplnego 296, 612 - 613
– rozprężliwości termicznej gazów 616 - 617
– rozszerzalności liniowej 612 - 613
– – objętościowej gazów 616 - 617
– temperaturowy oporu 619
– załamania 609, 623
wykresy 61 - 67
– wektorowe wielkości elektrycznych 432 - 439

Younga moduł 153 - 156, 612 - 613

zaokrąglanie wyników 59 - 61
zasady opracowania wyników doświadczeń 17 - 20
zasady pomiaru wielkości zależnych 67 - 70
zderzenia 147 - 153
– kul 150 - 152
zespolone wielkości elektryczne 432 - 435

źródła promieniotwórcze 594 - 596

SKOROWIDZ APARATURY I DOŚWIADCZEŃ

Abbégo refraktometr 544 - 547
aberracja chromatyczna i sferyczna 528 - 530
akumulator 97 - 98
amperomierz 338 - 342, 347 - 348
analiza drgań struny 238 - 240
– stanu polaryzacji światła 584 - 587
– widmowa 555 - 559, 602 - 603
aneroid 87 - 88
Atwooda spadkownica 140 - 143
autotransformator 103 - 104

barometr rtęciowy 88 - 90
Bessela metoda wyznaczania ogniskowych 525 - 528, 568 - 569
Boyle'a-Mariotte'a doświadczenie 272 - 274
Brewstera kąt 584 - 587
Browna ruchy 322 - 324
Bunsena pompa wodna 91
– metoda wyznaczania gęstości gazu 131 - 133

cewki Helmholtza-Gaugaina 113 - 114
charakterystyka diody (lampy) 455 - 458
– – półprzewodnikowej 391 - 396
– fotokomórki 519 - 520
– fotoogniwa 520 - 521
– fotoopornika 520
– lampy neonowej 461 - 465
– – oscylograficznej 468 - 473
– łuku elektrycznego 372 - 374
– prądnicy 424 - 428
– silnika 428 - 430
– transformatora 442 - 448
– tranzystora 396 - 399
– triody 458 - 461
ciepło Joule'a-Lenza 334 - 335
– parowania wody 279 - 281
– przemiany 290 - 291
– topnienia lodu 281 - 282
– właściwe ciał stałych 261 - 263, 265 - 267
ciepło właściwe cieczy 261 - 263
– – gazów 263 - 265, 278 - 279
ciśnienia pomiary 87 - 90
Clementa-Desormesa doświadczenie 278 - 279
Colpittsa generator 480 - 482
Coriolisa siły 143 - 145
czas trwania zderzenia 150 - 153
czasu pomiar 81 - 83
częstości pomiar 90
częstościomierz językowy 90
czujnik mikrometryczny 72
czułość galwanometru 348 - 355
– lampy oscylograficznej 468 - 473
– wagi 76 - 81

ćwierćfalówka 582 - 587

dioda (lampa) 455 - 458
diody półprzewodnikowe (ostrzowa, warstwowa, tunelowa, Zenera), 391 - 396
dipol magnetyczny 414 - 418
dławik 100
długość fali mikrofal 505 - 507
– – świetlnej 567 - 577
długości pomiar 70 - 72
dmuchawa 92
dobroć elektrycznych obwodów rezonansowych 482 - 489
– wnęki rezonansowej 513 - 515
– układu mechanicznego 227 - 232
drgania elektryczne 482 - 489
– relaksacyjne 461 - 465
– struny 238 - 240
druty Lechera 502 - 505
dyfrakcja mikrofal 511 - 513
– i interferencja światła 567 - 573
dyspersja światła, wyznaczanie za pomocą refraktometru 544 - 547
działanie przyrządu półcieniowego 588 - 591

efekt fotoelektryczny 519 - 522
– magnetronowy 465 - 468
elektroliza 374 - 379
elektromagnes 114 - 115
elektrometr nitkowy i elektroniczny 598 - 600

fala elektromagnetyczna, detekcja 500 - 505
– –; struktura 500 - 502
– głosowa bieżąca 243 - 245
– –; pomiar prędkości w powietrzu 243 - 249
– –; – – w prętach 240 - 243, 249 - 251
Faradaya stała 374 - 376
– zjawisko 591 - 592
ferrograf 418 - 422
filtr absorpcyjny 120
– elektryczny 105
– interferencyjny 120
fotodioda 520 - 521
fotokomórka 519 - 520
fotometr Lummera-Brodhuna 552 - 555
– polaryzacyjny 592 - 594
fotooporník 520
Francka-Hertza doświadczenie 604 - 606

Galileusza luneta 118 - 119
galwanometr 348 - 355
Gaussa metoda pomiaru namagnesowania 414 - 418
generator akustyczny 116
gęstość bezwzględna gazu 135 - 137
– ciał stałych 122 - 128
– pary 128 - 130
– względna gazu 131 - 135
Geigera-Müllera licznik 596 - 598, 601 - 602
giroskop 183 - 188
głośnik 115 - 116
głowica detekcyjna 499 - 500
główne momenty bezwładności bryły 173 - 179
gniazdo antenowe 106
goniometr (spektrometr) 555 - 559
grubości zmiana pozorna 531 - 532

Hartleya generator 480 - 482
higrometr Lambrechta 291 - 295
Höpplera ultratermostat 84 - 87
– wiskozymetr 198 - 200

indukcja własna 439 - 442, 448 - 500
indukcjomierz 422 - 424
induktor Ruhmkorffa 104
interferencja światła 567 - 570
– – laserowego 570 - 573
– mikrofal 511 - 513
interferometr Quinckego 247 - 249
– ultradźwiękowy 251 - 253

interpolacja temperatury w kalorymetrze 255 - 257
izotermiczne rozprężanie gazów 259 - 261
izotermy gazów rzeczywistych 263 - 265

Joule'a-Lenza ciepło 334 - 335

kalorymetr 245 - 257, 261 - 265
kapilary 317 - 319
katetometr 73 - 74
kąt łamiący pryzmatu 532 - 535
kątów pomiar 72 - 75
Keplera luneta 118 - 119
klistron 496 - 497
kolorymetr fotoelektryczny 547 - 552
komora jonizacyjna 596 - 600
komora rezonansowa 495 - 497, 513 - 515
kompensacyjna metoda pomiaru SEM 332 - 334
kompensator prądu stałego 335 - 338
kondensator 102 - 103, 360 - 372
końcówka widełkowa 106
krioskopia 286 - 289
krzywa dyspersji spektrometru 555 - 559, 602 - 603
– Gaussa 272 - 274
– pierwotnego namagnesowania 411 - 418, 422 - 424
– rezonansu elektrycznego 482 - 486
– – mechanicznego 227 - 232
– – obwodów drgań 487 - 489
– – wnęki rezonansowej 513 - 515
Kundta rura 249 - 251
kurek, *patrz* zawór

Lambrechta higrometr 291 - 295
lampa neonowa 268 - 273
– oscylograficzna 461 - 465
– rentgenowska 598 - 600
– rtęciowa, sodowa 119 - 120
– widmowa 119 - 120
lampy elektroniczne 453 - 455, 455 - 461
laser gazowy 570 - 573
Lechera druty 502 - 505
lepkości współczynnik cieczy 195 - 203
– – gazu 203 - 205
licznik Geigera-Müllera 596 - 598, 601 - 602
Lissajous krzywe 221 - 223, 243 - 245, 448 - 450
logarytmiczny dekrement tłumienia 227 - 232, 352 - 355
Lummera-Brodhuna fotometr 552 - 555
luneta 118 - 119
lupa 116 - 118

ładunek kondensatora 367 - 370
– właściwy elektronu; pomiar 465 - 476
łuk elektryczny 372 - 374

Malusa prawo 592 - 594
manometr cieczowy 87 - 88
– skrócony 87 - 88
mechaniczny rezonans 227 - 232
– równoważnik ciepła 267 - 272
Meissnera generator 480 - 482
Meyera metoda wyznaczania gęstości 128 - 130
mierniki elektryczne 338 - 346, 355 - 356
mikrofale; badanie wnęki rezonansowej 513 - 515
–; długość fali 505 - 507
–; dyfrakcja i interferencja 511 - 513
–; pochłanianie 507 - 511
–; wyznaczanie przenikalności dielektrycznej 507 - 511
–; załamanie 507 - 511
mikrofon 115 - 116
mikromierz 71 - 72
mikroskop 531 - 532, 538 - 544
moduł sztywności 156 - 158, 164 - 173
– Younga 150 - 153, 156 - 164, 169 - 173, 249 - 251
moment bezwładności 173 - 186
– giroskopowy 186 - 188
mostek Wheatstone'a 100 - 102, 327 - 330
– Thomsona 330 - 332

nabój właściwy (*e*/*m*) 465 - 476
namagnesowania pomiar 414 - 418
napięcia pomiar metodą ciepła Joule'a-Lenza 334 - 335
– – za pomocą kompensatora 335 - 338
napięcie kontaktowe w lampie elektronicznej 455 - 458
– powierzchniowe 313 - 322
Newtona pierścienie 577 - 579
nikol, *patrz* pryzmat Nicola
noniusz 70 - 71, 561

obwód rezonansowy 482 - 486
odważniki 77 - 78
ogniwa galwaniczne 96 - 97
ogniwo normalne Westona 96 - 97
okular Gaussa 559 - 562
– rysowniczy 323
omomierz 100 - 102
op..niki 98 - 100
opór elektryczny; pomiar 100 - 102, 327 - 332
– wewnętrzny mierników 346 - 357
– zespolony 439 - 442
oscylograf katodowy 468 - 473
– –; zastosowanie 221 - 223, 243 - 245, 448 - 450
ostyganie 298 - 300

pasmo wzbronione 384 - 286
pętla histerezy; pomiar 222 - 224, 414 - 422
pierścienie Newtona 577 - 579
piknometr 125 - 128
Pitota rurka 191 - 194
Plancka stała 602 - 603
podatność magnetyczna 408 - 411
Poissone'a współczynnik 156 - 158, 169 - 173
pojemność cieplna kalorymetru 254 - 257
– elektryczna; pomiar 370 - 372, 440 - 442, 448 - 450, 484 - 486
polarymetr 588 - 591
polaryzacja światła 584 - 587
pole magnetyczne 113 - 115
pompy próżniowe 91
potencjał elektryczny 362 - 364
– wzbudzenia rtęci 604 - 606
potencjometr 98 - 100
Prandtla rurka 191 - 194
prądnice 94 - 95, 424 - 428
prądów badanie 448 - 450
prędkość fali głosowej w metalu 238 - 243, 249 - 251
– – – w powietrzu 243 - 251
– – – w cieczy 251 - 253
– przepływu gazu 191 - 194
– – cieczy 191 - 194
prężność pary 290 - 291
promieniowanie cieplne 308 - 310
– jonizujące 596 - 598, 601 - 602
– rentgenowskie 598 - 600
promień drobiny zawiesiny 322 - 324
– krzywizny soczewki; pomiar 525 - 527, 535-537, 577 - 579
prostowanie prądu 105, 448 - 450
pryzmat; wyznaczanie kąta łamiącego 532 - 535
– Nicola 579 - 581
przenikalność dielektryczna próżni 365 - 367
– – szkła organicznego 370 - 372
przesunięcie elektryczne 365 - 367
– fazowe 439 - 442, 448 - 450
przetwornica 428 - 431
przewodnictwo cieplne metalu 300 - 304
– – płytki 306 - 308
– – powietrza 310 - 311
– – rurki 304 - 306
– elektryczne 384 - 386
przyspieszenie Coriolisa 143 - 145
– ziemskie 216 - 221
psychrometr 291 - 295
Pulfricha refraktometr 559 - 563

Quinckego interferometr 247 - 249

redukcja wskazań barometru 88 - 90
refraktometr Abbégo 544 - 547

refraktometr Pulfricha 559 - 563
rejestrator temperatury 284
relaksacyjne drgania 461 - 465
rentgenowskie promieniowanie 598 - 600
Reynoldsa liczba 194 - 195
rezonans akustyczny 245 - 247
– elektryczny 482 - 486
– mechaniczny 227 - 232
– obwodów drgań 487 - 489
rozmagnesowanie próbki 411 - 416
równoważnik chemiczny i elektrochemiczny 374 - 379
ruch obrotowy bryły 179 - 182
– ciała o zmiennej masie 137 - 141
– w układzie wirującym 143 - 145
rura Kundta 249 - 251
rurki geisslerowskie 119 - 120
Rydberga stała 602 - 603

schematy elektryczne; odczytywanie i łączenie 106 - 112, 341 - 344
sekundomierz 81 - 83
siatka dyfrakcyjna 573 - 577
silniki elektryczne 112 - 113, 428 - 430
siła elektromotoryczna 332 - 338
siły termoelektryczne 386 - 391
skręcenie płaszczyzny polaryzacji 588 - 592
soczewki cienkie 525 - 527
– grube 528 - 530
solenoid 113 - 114
spadkownica Atwooda 140 - 143
– dla ciał o zmiennej masie 137 - 141
spektrometr, goniometr 555 - 559, 576 - 577
spektroskop, spektrograf 555 - 559
spójność światła 567 - 573
sprawność świetlna żarówki 552 - 555, 592 - 594
sprężyna 169 - 173
sprężyste własności gumy 156 - 158
– – miedzi 158 - 160
sprężystości granica proporcjonalności 158 - 160
stalagmometr 320 - 322
Steinera twierdzenie 173 - 182
Stokesa doświadczenie 195 - 198
stroboskop 90
strumieniomierz 357 - 360, 411 - 414
sztywności moduł 156 - 158, 164 - 173

śruba mikrometryczna, *patrz* mikromierz

tachometr elektryczny 90, 429
temperatura katody lampy elektronowej 455 - 458
– krzepnięcia 282 - 285, 286 - 289
– wrzenia 285 - 286
temperaturowa zależność oporu 384 - 386
termoergometr 267 - 270
termometr bimetaliczny 84 - 85
– gazowy 259 - 261
– kontaktowy 84 - 85
– rtęciowy 83 - 84
termoogniwo 83 - 84, 386 - 391
Thomsona metoda wyznaczania e/m 473 - 476
– mostek 330 - 332
tłumik mikrofalowy 497 - 500
torsyjna waga 80 - 81, 313 - 317, 320 - 322
transformator; budowa 103 - 104
–; badanie 442 - 448
tranzystor 396 - 399
trioda 458 - 461
tuba mikrofalowa 499

ugięcie prętów 160 - 164
układy elektryczne do badania charakterystyk 107 - 109
– – ; potencjometryczne 109
– –; watomierza 341 - 344
– optyczne 525 - 527
– prostownicze 105
ultradźwięki 251 - 253
ultratermostat 84 - 87

Verdeta stała 591 - 592

waga analityczna 76 - 80
– – automatyczna 79 - 80
– magnetyczna 408 - 411
– torsyjna 80 - 81
wahadło balansowe 227 - 232
– boczne 408 - 411
– fizyczne 216 - 219
– matematyczne 216 - 219
– podwójne 221 - 223
– rewersyjne 219 - 221
warunek spójności światła 566 - 570
watomierz 341 - 344, 440 - 442
ważenie; poprawki na wypór powietrza 121 - 122
Westona ogniwo 96 - 97
Wheatstone'a mostek 327 - 330, 100 - 102
wilgotność powietrza 291 - 295
wiskozymetry 198 - 203
wnęka rezonansowa 495 - 497, 513 - 515
woltametr 374 - 379
woltomierz 341 - 344, 346 - 347
współczynnik indukcji własnej 248 - 250, 439 - 442, 482 - 486
– napięcia powierzchniowego 313 - 322
– pochłaniania mikrofal 507 - 511
– – powierzchni metalu 308 - 310

współczynnik rozprężliwości termicznej 259 - 261
– rozszerzalności liniowej 257 - 259
– – objętościowej 270 - 272
– tarcia 145 - 147
– temperaturowy oporu 265 - 267, 384 - 386
– wzmocnienia triody 458 - 461
– załamania, pomiary 507 - 511, 525 - 527, 532 - 535, 544 - 547, 559 - 563
wtyczka bananowa 106
wydłużenia pomiar metodą optyczną 74 - 75
wyłącznik rtęciowy 84 - 87
wytrzymałości granica proporcjonalności 158 - 160
wytwarzanie drgań niegasnących 480 - 482
– mikrofal 495 - 497
względna przenikalność dielektryczna 370 - 372, 507 - 511
wzmacniacz lampowy 116
wzorcowanie amperomierza 347 - 348
– woltomierza 346 - 347

Younga doświadczenie 511 - 513, 567 - 573
– moduł 150 - 153, 156 - 173

zacisk tablicowy 106
załamanie mikrofal 507 - 511
– światła 525 - 527, 531 - 535, 544 - 547, 559 - 563
zasady bezpieczeństwa przy łączeniu obwodów 106 - 112
zasilacz 105, 116
zawory: kurkowy, redukcyjny i inne 92 - 94
zderzenia kul 147 - 153
zwierciadło; pomiar promienia krzywizny 535 - 537

źródła prądu elektrycznego 94 - 98

Biblioteka Główna UMK



300002211137

