

TOM 2.1

R.P. FEYNMAN, R.B. LEIGHTON, M. SANDS

Feynmana

wykłady z fizyki

Elektryczność i magnetyzm

Elektrodynamika

Wydawnictwo Naukowe PWN

FEYNMAN

Feynmana

wyklady z fizyki

R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, M. SANDS

Feynmana

wykłady z fizyki

TOM 2.1

Elektryczność i magnetyzm

Elektrodynamika

Wydanie piąte



Warszawa 2004

Wydawnictwo Naukowe PWN

Dane oryginału

Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands
The Feynman Lectures on Physics, vol. 2

Copyright © 1964, California Institute of Technology

All rights reserved
Commemorative issue published by arrangement with the original publisher,
Addison Wesley Longman, a Pearson Education Company

Przekład z języka angielskiego
Stanisław Bażański (słowo wstępne)
Barbara Wojtowicz-Natanson (rozdziały 1–11)
Grzegorz Białkowski (rozdziały 12–21)
Zofia Białyńska-Birula (zadania)

Redakcja naukowa
Stanisław Bażański

Projekt okładki i stron tytułowych
Joanna Sobieraj

Copyright © for the Polish edition
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1968

Copyright © for the Polish edition
by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2001

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10
tel. (0 22) 69 54 321
faks (0 22) 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl



ISBN 83-01-13487-9 t. 2.1
ISBN 83-01-13484-4 t. 1-3

535816

W. 14/05

spis rzeczy

Spis rzeczy części 2 tomu II	9
Słowo wstępne	11
Rozdział 1. Elektromagnetyzm	13
1-1. Siły elektryczne	13
1-2. Pola elektryczne i magnetyczne	16
1-3. Wielkości charakteryzujące pola wektorowe	18
1-4. Prawa elektromagnetyzmu	20
1-5. Czym są pola?	26
1-6. Elektromagnetyzm w nauce i technice	28
Rozdział 2. Rachunek różniczkowy pól wektorowych	29
2-1. Co to znaczy „rozumieć” w fizyce	29
2-2. Pola skalarne i wektorowe — T i h	31
2-3. Pochodne pól — gradient	35
2-4. Operator ∇	37
2-5. Operacje algebraiczne z operatorem ∇	39
2-6. Równanie różniczkowe przepływu ciepła	41
2-7. Drugie pochodne pól wektorowych	42
2-8. Pułapki	45
Rozdział 3. Rachunek całkowy wektorów	47
3-1. Całki wektorowe; całka krzywoliniowa z $\nabla\Psi$	47
3-2. Strumień pola wektorowego	49
3-3. Strumień wypływający z kostki; twierdzenie Gaussa	52
3-4. Przewodnictwo cieplne; równanie dyfuzji	54
3-5. Krążenie pola wektorowego	57
3-6. Krążenie po obwodzie kwadratu; twierdzenie Stokesa	59
3-7. Pola bezwirowe i bezźródłowe	61
3-8. Streszczenie	63

Rozdział 4. Elektrostatyka	64
4-1. Statyka	64
4-2. Prawo Coulomba; zasada superpozycji	66
4-3. Potencjał elektryczny	68
4-4. $E = -\nabla\varphi$	72
4-5. Strumień wektora E	73
4-6. Prawo Gaussa; dywergencja pola E	77
4-7. Pole ładunku kulistego	79
4-8. Linie sił pola; powierzchnie ekwipotencjalne	80
Rozdział 5. Zastosowanie prawa Gaussa	83
5-1. Elektrostatyka — to prawo Gaussa plus...	83
5-2. Równowaga w polu elektrostatycznym	83
5-3. Równowaga przewodników	85
5-4. Trwałość atomów	86
5-5. Pole ładunku liniowego	87
5-6. Warstwa naładowana; pole pomiędzy dwiema warstwami	88
5-7. Kula naładowana; warstwa kulista	89
5-8. Czy pole ładunku punktowego jest dokładnie opisane przez funkcję $1/r^2$?	90
5-9. Pola przewodnika	94
5-10. Pole we wnęce przewodnika	96
Rozdział 6. Pole elektryczne w różnych warunkach (I)	98
6-1. Równania potencjału elektrostatycznego	98
6-2. Dipol elektryczny	99
6-3. Uwagi dotyczące równań wektorowych	103
6-4. Potencjał dipolowy jako gradient	104
6-5. Przybliżenie dipolowe dla dowolnego rozkładu ładunków	106
6-6. Pola przewodników naładowanych	109
6-7. Metoda obrazów	109
6-8. Ładunek punktowy w pobliżu płaszczyzny przewodzącej	111
6-9. Ładunek punktowy w pobliżu kuli przewodzącej	112
6-10. Kondensatory; płyty równoległe	114
6-11. Wyładowania wysokiego napięcia	116
6-12. Jonowy mikroskop polowy	118
Rozdział 7. Pole elektryczne w różnych warunkach (II)	120
7-1. Metody znajdowania pola elektrostatycznego	120
7-2. Pola dwuwymiarowe; funkcja zmiennej zespolonej	122
7-3. Oscylacje plazmy	126
7-4. Cząstki koloidalne w elektrolicie	129
7-5. Pole elektrostatyczne siatki przewodzącej	132
Rozdział 8. Energia elektrostatyczna	134
8-1. Energia elektrostatyczna ładunków. Kula jednorodna	134
8-2. Energia kondensatora. Siły działające na naładowane przewodniki	136
8-3. Energia elektrostatyczna kryształu jonowego	139
8-4. Energia elektrostatyczna w jądrze atomowym	142
8-5. Energia w polu elektrostatycznym	146
8-6. Energia ładunku punktowego	150

Rozdział 9. <i>Elektryczność w atmosferze</i>	151
9-1. Gradient potencjału elektrycznego atmosfery	151
9-2. Prądy elektryczne w atmosferze	153
9-3. Pochodzenie prądów elektrycznych w atmosferze	156
9-4. Burze	157
9-5. Mechanizm separacji ładunku	162
9-6. Błyskawica	166
Rozdział 10. <i>Dielektryki</i>	170
10-1. Stała dielektryczna	170
10-2. Wektor polaryzacji P	172
10-3. Ładunki polaryzacyjne	174
10-4. Równania elektrostatyki dla pól z dielektrykami	177
10-5. Pola i siły w dielektrykach	179
Rozdział 11. <i>Wewnątrz dielektryków</i>	183
11-1. Dipole cząsteczkowe	183
11-2. Polaryzacja elektronowa	184
11-3. Cząsteczki polarne; orientacja polaryzacji	187
11-4. Pola elektryczne we wnękach dielektryka	190
11-5. Stała dielektryczna cieczy; równanie Clausiusa–Mossottiego	192
11-6. Dielektryki stałe	194
11-7. Ferroelektryczność; $BaTiO_3$	195
Rozdział 12. <i>Analogie do elektrostatyki</i>	201
12-1. Takie same równania mają takie same rozwiązania	201
12-2. Przepływ ciepła; ładunek punktowy w pobliżu nieskończonej płaszczyzny ograniczającej	202
12-3. Napięta membrana	207
12-4. Dyfuzja neutronów; jednorodne źródło kuliste w jednorodnym ośrodku	209
12-5. Bezwirowy przepływ cieczy; opływanie kuli	212
12-6. Jednorodne oświetlenie płaszczyzny	216
12-7. „Podstawowa jedność” przyrody	218
Rozdział 13. <i>Magnetostatyka</i>	220
13-1. Pole magnetyczne	220
13-2. Prąd elektryczny; zasada zachowania ładunku	221
13-3. Siła magnetyczna działająca na prąd	223
13-4. Pole magnetyczne prądu stałego; prawo Ampère'a	224
13-5. Pole magnetyczne przewodu prostoliniowego oraz solenoidu; prądy atomowe	226
13-6. Względność pól magnetycznego i elektrycznego	229
13-7. Przekształcenie prądów i ładunków	235
13-8. Zasada superpozycji; reguła prawej ręki	236
Rozdział 14. <i>Różne przykłady pola magnetycznego</i>	238
14-1. Potencjał wektorowy	238
14-2. Potencjał wektorowy znanych prądów	242
14-3. Przewód prostoliniowy	243
14-4. Długi solenoid	244
14-5. Pole małej pętli; dipol magnetyczny	247
14-6. Potencjał wektorowy obwodu	249
14-7. Prawo Biota-Savarta	250

Rozdział 15. <i>Potencjał wektorowy</i>	253
15-1. Siły działające na pętlę z prądem; energia dipola	253
15-2. Energia mechaniczna i elektryczna	256
15-3. Energia prądów stałych	260
15-4. Pole B a pole A	261
15-5. Potencjał wektorowy a mechanika kwantowa	263
15-6. To, co jest słuszne w statyce, nie jest słuszne w dynamice	271
Rozdział 16. <i>Prądy indukowane</i>	275
16-1. Silniki i prądnice	275
16-2. Transformatory i indukcyjności	280
16-3. Siły działające na prądy indukowane	282
16-4. Elektrotechnika	287
Rozdział 17. <i>Prawa indukcji</i>	291
17-1. Fizyka indukcji	291
17-2. Wyjątki od „reguły strumienia”	293
17-3. Przyspieszanie cząstek w indukowanym polu elektrycznym; betatron	295
17-4. Pewien paradoks	298
17-5. Prądnica prądu zmiennego	299
17-6. Indukcja wzajemna	303
17-7. Samoindukcja	306
17-8. Indukcyjność a energia magnetyczna	307
Rozdział 18. <i>Równania Maxwella</i>	313
18-1. Równania Maxwella	313
18-2. Jaki sens ma nowy wyraz	316
18-3. Całość fizyki klasycznej	318
18-4. Podróżujące pole	319
18-5. Prędkość światła	324
18-6. Rozwiązywanie równań Maxwella; potencjały i równanie falowe	325
Rozdział 19. <i>Zasada najmniejszego działania</i>	330
Rozdział 20. <i>Rozwiązania równań Maxwella w próżni</i>	353
20-1. Fale w próżni; fale płaskie	353
20-2. Fale trójwymiarowe	363
20-3. Wyobrażenia naukowa	365
20-4. Fale kuliste	368
Rozdział 21. <i>Rozwiązanie równań Maxwella z ładunkami i prądami</i>	374
21-1. Światło a fale elektromagnetyczne	374
21-2. Fale kuliste pochodzące ze źródła punktowego	376
21-3. Ogólne rozwiązanie równań Maxwella	379
21-4. Pola oscylującego dipola	381
21-5. Potencjały poruszającego się ładunku; ogólne rozwiązanie Liénarda i Wiecharta	386
21-6. Potencjały dla ładunku poruszającego się ze stałą prędkością. Wzór Lorentza	390
Zadania	394
Skorowidz	419

spis rzeczy części 2 tomu II

- Rozdział 22. *Obwody prądu zmiennego*
- Rozdział 23. *Rezonatory wnękowe*
- Rozdział 24. *Falowody*
- Rozdział 25. *Elektrodynamika w zapisie relatywistycznym*
- Rozdział 26. *Lorentzowskie transformacje pól*
- Rozdział 27. *Energia i pęd pola*
- Rozdział 28. *Masa elektromagnetyczna*
- Rozdział 29. *Ruch ładunków w polach elektrycznych i magnetycznych*
- Rozdział 30. *Wewnętrzna geometria kryształów*
- Rozdział 31. *Tensory*
- Rozdział 32. *Współczynnik załamania substancji gęstych*
- Rozdział 33. *Odbicie od powierzchni*
- Rozdział 34. *Magnetyzm materii*
- Rozdział 35. *Paramagnetyzm i rezonans magnetyczny*
- Rozdział 36. *Ferromagnetyzm*
- Rozdział 37. *Substancje magnetyczne*
- Rozdział 38. *Sprężystość*
- Rozdział 39. *Ośrodki sprężyste*
- Rozdział 40. *Przepływ „suchej wody”*
- Rozdział 41. *Przepływ „mokrej wody”*
- Rozdział 42. *Przestrzeń zakrzywiona*

słowo wstępne

Przez blisko czterdzieści lat Richard P. Feynman ogniskował swą ciekawość na tajemniczych sprawach świata fizyki i nagiął swój intelekt do wyszukiwania porządku w jego chaosie. W okresie ostatnich dwóch lat poświęcał swoje zdolności i swą energię wykładom z fizyki dla początkujących studentów. Im to przedstawił istotę swej wiedzy i w odpowiednim dla nich ujęciu stworzył obraz świata fizyki. Do wykładów tych wniósł błyskotliwość i jasność swej myśli, oryginalność i żarliwość swego podejścia oraz zaraźliwy entuzjazm przy ich wygłaszaniu. Współpraca z nim była prawdziwą przyjemnością.

Wykłady prowadzone w ciągu pierwszego roku stanowiły podstawę dla pierwszego tomu tego zbioru książek. W tym oto drugim tomie próbujemy zdać swego rodzaju relację z części drugiego roku wykładów, których słuchaczami byli studenci drugiego roku studiów w roku akademickim 1962/63.

Dwie trzecie materiału wykładów drugiego roku poświęcono pełnemu, jak na ten poziom, omówieniu fizyki elektryczności i magnetyzmu. Wykład ten miał służyć dwóm celom. Spodziewaliśmy się, po pierwsze, że damy studentom pełny obraz jednego z wielkich działów fizyki — począwszy od wczesnych poszukiwań Franklina, poprzez wielką syntezę Maxwella i poprzez elektronową teorię Lorentza własności ośrodków materialnych, aż do wciąż jeszcze nierozwiązanych zagadnień elektromagnetycznej energii własnej. Po wtóre, spodziewaliśmy się również, że wprowadzając od samego początku metody analizy pola wektorowego damy solidne podstawy matematycznych metod teorii pola. Aby podkreślić uniwersalność metod matematyki, podawaliśmy niekiedy analizę pokrewnych zagadnień z innych działów fizyki wraz z ich odpowiednikami z dziedziny elektryczności. Cały czas staraliśmy się unaoczniać ogólną stosowalność matematyki. („Takie same równania mają takie same rozwiązania”). Podkreślaliśmy to również przez odpowiedni dobór ćwiczeń i materiałów z egzaminów, które towarzyszyły wykładom.

Z kolejnych czterech rozdziałów następujących po części omawiającej elektromagne-

tyżm dwa poświęcono teorii sprężystości, a dwa przepływowi cieczy*). Pierwszy rozdział każdej z tych par ogranicza się do spraw elementarnych i praktycznych, drugi zaś usiłuje podać przegląd całego skomplikowanego zakresu zjawisk, z którymi oba przedmioty się łączą.

W niniejszej relacji z wykładów Feynmana pragnęliśmy dać więcej niż tylko transkrypcję tego, co zostało powiedziane. Spodziewaliśmy się, że wersja pisemna będzie tak jasnym, jak tylko możliwe, przedstawieniem koncepcji leżących u podstaw oryginalnych wykładów. Dla niektórych wykładów można to było osiągnąć łatwo wprowadzając zaledwie nieznaczne poprawki w sformułowaniach oryginalnej transkrypcji. Inne natomiast wykłady wymagały poważnych zmian i nowego uporządkowania materiału. Czasami zdecydowaliśmy się na dodanie nowego materiału, aby uzyskać jaśniejsze lub lepiej wyważone przedstawienie całości. W trakcie tego procesu stale korzystaliśmy z pomocy i rad prof. Feynmana.

Praca nad przekształceniem ponad miliona wypowiedzianych słów w spójny tekst w tak krótkim terminie jest zajęciem wymagającym dużego wysiłku, szczególnie jeżeli towarzyszą temu inne kłopotliwe obciążenia, zwykle związane z wprowadzaniem w życie nowych wykładów — przygotowywanie repetytoriów, spotkania ze studentami, układanie zadań i przygotowywanie egzaminów, ich ocena oraz wiele innych spraw. Wymagało to wysiłku wielu rąk — a raczej głów. W niektórych przypadkach udało nam się, jak sądzę, dostarczyć wierny obraz — lub raczej starannie retuszowany portret — oryginału danego przez Feynmana. W innych znowu przypadkach od tego ideału odbiegliśmy daleko. Sukcesy zawdzięczamy wszystkim, którzy nam pomagali. Za niedociągnięcia przepraszamy.

Przedstawiona tu opowieść o fizyce nie mogłaby się nigdy ukazać, gdyby nie ogromne zdolności i przedsiębiorczość Richarda P. Feynmana.

Marzec, 1964

Matthew Sands

*) W przekładzie polskim rozdziały te wejdą do 2 części tomu II *Wykładów*. (Przyp. red. wyd. polskiego).

elektromagnetyzm

1-1. Siły elektryczne*)

Wyobraźmy sobie, że istnieje siła, która podobnie jak siła grawitacji zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości, ale która jest około *miliarda miliardów miliardów miliardów* razy większa od siły grawitacji i która czymś jeszcze się od niej różni. Istnieją tu bowiem dwa rodzaje „materii”, które możemy nazwać „materią” dodatnią i „materią” ujemną. Takie same rodzaje „materii” odpychają się, a przeciwnie — przyciągają się, inaczej niż w przypadku grawitacji, gdzie występuje tylko przyciąganie. Co się będzie wtedy działo?

Otóż cząstki dodatnie, tworzące skupisko, będą się odpychać z ogromną siłą i rozprzestrzeniać się we wszystkich kierunkach. Tak samo będzie się zachowywać skupisko cząstek ujemnych. Ale ze skupiskiem równomiernie wymieszanych cząstek dodatnich i ujemnych będzie się działo coś zupełnie innego. Cząstki przeciwnych znaków będą ściągane ku sobie ogromnymi siłami przyciągania. W rezultacie jednak te olbrzymie siły zrównoważą się prawie całkowicie przez wytwarzanie ciasno upakowanych mieszanych skupisk cząstek dodatnich i ujemnych. Między dwoma takimi skupiskami praktycznie nie wystąpią ani siły przyciągania, ani odpychania.

Taka siła rzeczywiście istnieje — jest nią siła elektryczna, a cała materia jest mieszaniną cząstek dodatnich — protonów i cząstek ujemnych — elektronów, które przyciągają się lub odpychają z tą wielką siłą. Jest tu jednak tak doskonała równowaga, że gdy stanęmy obok kogoś, nie odczuwamy działania żadnej siły. Gdyby siły choć w drobnej części były niezrównoważone, odczulibyśmy to natychmiast. Jeśliby jedna osoba stanęła w odległości ramienia od drugiej osoby i jeśliby każda z tych osób miała o *jeden procent* więcej elektronów niż protonów, to siła odpychająca byłaby niewiarogodnie wielka. Jak wielka? Czy wystarczająco wielka, aby podnieść w górę Empire State Building, najwyższy drapacz

*) Porównaj: Tom I, cz. 1, rozdz. 12 (*Cechy charakterystyczne siły*).

chmur w Nowym Jorku? Nie tylko! Aby podnieść Mount Everest? Nie tylko! Siła odpychania byłaby dostatecznie wielka, aby unieść ciężar równy „ciężarowi” całej Ziemi!

Nietrudno zrozumieć, że przy tak niezmiernie wielkich siłach i tak doskonale zrównoważonych materia, usiłując utrzymać swoje dodatnie i ujemne ładunki w równowadze, przejawia dużą sztywność i wytrzymałość. Najwyższy budynek w Nowym Jorku — Empire State Building, na przykład, waha się na wietrze tylko o niecałe 2,5 m, gdyż siły elektryczne utrzymują każdy jego proton i elektron mniej więcej na ich właściwych miejscach. Jeśli jednak spojrzymy na materię w dostatecznie małej skali, aby widzieć tylko kilka atomów, to żaden mały okruch nie będzie miał na ogół równej liczby ładunków dodatnich i ujemnych i występować będą duże siły elektryczne. Nawet gdy każdy z sąsiednich atomów będzie zawierać taką samą liczbę ładunków o znakach przeciwnych, mogą wystąpić duże wypadkowe siły elektryczne, gdyż siły między poszczególnymi ładunkami zmieniają się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości. Siła wypadkowa może wystąpić wtedy, gdy ładunek ujemny jednego okrucha leży bliżej ładunku dodatniego niż ujemnego drugiego okrucha. Wtedy siły przyciągania mogą być większe niż siły odpychania i mimo równości liczby ładunków przeciwnych znaków w każdym z elementów wystąpi wypadkowa siła przyciągania. Siły, które utrzymują atomy w całości, i siły chemiczne, które utrzymują cząsteczki w całości, są w istocie siłami elektrycznymi, działającymi w obszarach gdzie równowaga ładunku nie jest doskonała lub gdzie odległości są bardzo małe.

Wiecie, oczywiście, że atomy są utworzone z jąder zawierających dodatnie protony i ze znajdujących się poza jądrem elektronów. Moglibyście zapytać: „Dlaczego jeśli siła elektryczna jest tak ogromna, elektrony nie zetkną się z protonami? Jeśli chcą zbliżyć się do siebie, dlaczego nie zbliżają się jeszcze bardziej?” Odpowiedzi na to musimy szukać w efektach kwantowych. Jeśli usiłujemy ścieśnić elektrony w obszarze bliskim protonów, to zgodnie z zasadą nieoznaczoności średni pęd elektronów musi być tym większy, im bardziej ograniczony jest obszar, w którym przebywają. Ten właśnie ruch, którego wymagają prawa mechaniki kwantowej, przeszkadza przyciąganiu elektrycznemu w dalszym zbliżaniu ładunków.

Nasuwa się inne pytanie: „Co utrzymuje jądro w całości?” W jądrze znajduje się wiele protonów, przy czym wszystkie są dodatnie. Dlaczego więc nie odepchną się daleko od siebie? Okazuje się, że w jądrze poza siłami elektrycznymi istnieją siły nieelektryczne, nazwane siłami jądrowymi, które są większe od sił elektrycznych i które mogą utrzymać protony razem, mimo odpychania elektrycznego. Siły jądrowe mają jednak krótki zasięg — maleją one szybciej niż $1/r^2$, a to prowadzi do bardzo ważnej konsekwencji. Gdy jądro ma w sobie za dużo protonów, staje się zbyt wielkie i przestaje być trwałe. Przykładem jest tu uran, który ma 92 protony. Siły jądrowe działają głównie między każdym protonem (lub neutronem) i jego najbliższymi sąsiadami, natomiast siły elektryczne działają na większe odległości, powodując wzajemne odpychanie się wszystkich protonów w jądrze. Im więcej jest protonów w jądrze, tym silniejsze jest odpychanie elektryczne, dopóki, jak w przypadku uranu, równowaga nie stanie się tak czuła, że jądro będzie prawie gotowe rozlecieć się wskutek działania odpychających sił elektrycznych. Jeśli takie jądro delikatnie „stuknąć” (np. powolnym neutronem), rozpadnie się na dwie części, każda o ładunku dodatnim, a części te odlecą od siebie wskutek odpychania elektrycznego. Uwolniona przy tym ener-

gia — to właśnie energia bomby atomowej. Energię tę nazywamy zwykle energią „jądrową”, chociaż w istocie jest to energia „elektryczna”, uwolniona, gdy siły elektryczne przezwą przyciągające siły jądrowe.

Możemy wreszcie zapytać, co utrzymuje w całości ujemnie naładowany elektron (gdyż nie ma tu sił jądrowych). Jeśli utworzony jest on z jednego rodzaju substancji, to każda jej część powinna odpychać inną. Dlaczego więc elektron się nie rozlatuje? Ale czy elektron w ogóle ma „części”? Może powinniśmy powiedzieć, że elektron jest po prostu punktem i że siły elektryczne działają tylko między różnymi ładunkami punktowymi, a więc elektron nie oddziałuje sam na siebie? Być może. Możemy jedynie powiedzieć, że postawienie pytania, co utrzymuje elektron razem, przysporzyło wiele kłopotów w próbach stworzenia pełnej teorii elektromagnetyzmu. Na pytanie to w ogóle nie znaleziono odpowiedzi. Zabawimy się rozważając tę kwestię dokładniej w dalszych rozdziałach.

Jak widzieliśmy, należy oczekiwać, że kombinacja sił elektrycznych i efektów kwantomechanicznych będzie określać szczegółową strukturę substancji materialnych, a więc i ich właściwości. Niektóre substancje są twarde, inne miękkie. Niektóre są „przewodnikami” elektrycznymi, gdyż ich elektrony mogą się swobodnie poruszać, inne są „izolatorami”, gdyż ich elektrony są ściśle związane z poszczególnymi atomami. Później będziemy rozważać, skąd się biorą niektóre z tych właściwości, ale to jest bardzo skomplikowana sprawa, zaczniemy więc od obserwacji sił elektrycznych jedynie w najprostszycy sytuacjach. Zaczniemy od rozważania tylko praw elektryczności, włącznie z magnetyzmem, który w istocie jest częścią tego samego działu fizyki.

Powiedzieliśmy, że siła elektryczna, podobnie jak siła grawitacyjna, jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między ładunkami. Tę zależność nazywa się prawem Coulomba. Nie jest ona jednak całkowicie słuszna, gdy ładunki się poruszają. Siły elektryczne zależą również w skomplikowany sposób od ruchu ładunków. Jedną część siły, działającej między poruszającymi się ładunkami, nazywamy siłą *magnetyczną*. W istocie jest to tylko pewien aspekt efektu elektrycznego. Dlatego właśnie dział fizyki, którym się teraz zajmujemy, nazywamy „elektromagnetyzmem”.

Istnieje pewna ważna zasada ogólna, która umożliwia traktowanie sił elektromagnetycznych w stosunkowo prosty sposób. Stwierdzamy, na drodze doświadczalnej, że siła działająca na dany ładunek, bez względu na to ile jeszcze występuje innych ładunków i bez względu na to jak one się poruszają, zależy tylko od położenia danego ładunku, od jego prędkości i od jego wielkości. Siłę F działającą na ładunek q poruszający się z prędkością v możemy napisać w postaci

$$F = q(E + v \times B). \quad (1.1)$$

E nazywamy *polem elektrycznym*, a B — *polem magnetycznym* w miejscu, gdzie znajduje się ładunek. Jest rzeczą istotną, że siły elektryczne pochodzące od wszystkich innych ładunków we wszechświecie można wyrazić przez podanie tych dwóch wektorów. Ich wartości zależą od tego, gdzie znajduje się ładunek, i mogą się zmieniać w czasie. Ponadto, jeśli zmienimy nasz ładunek na inny, to siła zmieni się proporcjonalnie do zmiany wielkości ładunku, jeżeli reszta ładunków we wszechświecie nie zmieni ani swoich położeń, ani ruchu. (W rzeczywistych warunkach, oczywiście, każdy ładunek wytwarza siły dzia-

łające na inne ładunki w jego otoczeniu i może spowodować ruch tych innych ładunków, więc w pewnych przypadkach pole *może* się zmienić, gdy zamieniamy nasz ładunek na inny.)

Z tomu I już się dowiedzieliśmy, jak wyznaczyć ruch cząstki, gdy znamy działające na nią siły. Łącząc równanie ruchu z równaniem (1.1) otrzymamy:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{mv}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \right] = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.2)$$

Tak więc, jeśli dane są pola \mathbf{E} i \mathbf{B} , możemy wyznaczyć ruch ładunku. Musimy się teraz dowiedzieć, jak powstają te pola \mathbf{E} i \mathbf{B} .

Jedna z najważniejszych, a bardzo upraszczających zasad tworzenia się pól jest związana z następującą sytuacją: przypuśćmy, że pewna liczba ładunków, poruszających się w pewien sposób, wytwarza pole \mathbf{E}_1 , a inny układ ładunków wytwarza pole \mathbf{E}_2 . Jeżeli w danym czasie oba układy ładunków znajdują się w tym samym obszarze (zachowując te same położenia i ruchy, które miały, gdy rozważaliśmy je oddzielnie), to wtedy wytwarzane przez nie pole będzie po prostu sumą pól:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (1.3)$$

Ten fakt nazywamy *zasadą superpozycji* pól. Podlegają jej również pola magnetyczne.

Zasada ta oznacza, że jeżeli znamy prawo rządzące polami elektrycznym i magnetycznym, wytworzonymi przez *pojedynczy* ładunek poruszający się w pewien dowolny sposób, to znamy już wtedy wszystkie prawa elektrodynamiki. Jeśli chcemy znaleźć siłę działającą na ładunek A , to musimy jedynie znaleźć pola \mathbf{E} i \mathbf{B} wytwarzane przez każdy z ładunków B , C , D itd., a następnie dodać te pola \mathbf{E} i \mathbf{B} pochodzące od wszystkich ładunków, aby znaleźć pola, a zatem i siły działające na ładunek A . Byłby to najprostszy sposób przedstawienia praw elektrodynamiki, gdyby się tylko okazało, że pole wytworzone przez pojedynczy ładunek jest nieskomplikowane. Prawa elektrodynamiki przedstawiliśmy już w rozdz. 28 tomu I (cz. 2), ale są one, niestety, raczej skomplikowane.

Okazuje się, że postać, w której prawa elektrodynamiki są najprostsze, nie jest wcale taka, jakiej mogliście się spodziewać. Podanie wzoru na siłę, jaką jeden ładunek wywiera na drugi, nie jest wcale rzeczą najprostszą. To prawda, że ładunki znajdujące się w spoczynku oddziałują na siebie siłami danymi przez proste prawo — przez prawo Coulomba. Ale gdy ładunki się poruszają, prawo określające siły komplikuje się między innymi przez opóźnienia czasowe i na skutek przyspieszenia. W rezultacie nie chcemy formułować elektrodynamiki podając jedynie prawa rządzące siłami pomiędzy ładunkami. Uważamy za dogodniejsze rozpatrzenie innego punktu widzenia — takiego, z którego prawa elektrodynamiki można łatwo ująć.

1-2. Pola elektryczne i magnetyczne

Musimy najpierw rozszerzyć nieco nasz zakres pojęć dotyczący wektorów elektrycznego i magnetycznego, \mathbf{E} i \mathbf{B} . Definiowaliśmy je za pomocą sił działających na ładunek. Teraz

chcemy mówić o polach elektrycznych i magnetycznych w punkcie przestrzeni, nawet gdy nie znajduje się tam żaden ładunek. Możemy to tak wyrazić: jeżeli w danym punkcie ma ładunek działają siły, to w tym punkcie jest „coś”, co pozostanie, gdy usuniemy ładunek. Jeśli ładunek znajdujący się w czasie t w punkcie o współrzędnych (x, y, z) podlega sile \mathbf{F} danej równaniem (1.1), to wektory \mathbf{E} i \mathbf{B} wiążemy z punktem przestrzeni (x, y, z) . Możemy uważać, że $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ i $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ określają siły, które by działały w czasie t na ładunek umieszczony w punkcie (x, y, z) , pod warunkiem, że umieszczenie tego ładunku nie zakłóci położenia ani ruchów wszystkich pozostałych ładunków wytwarzających pole.

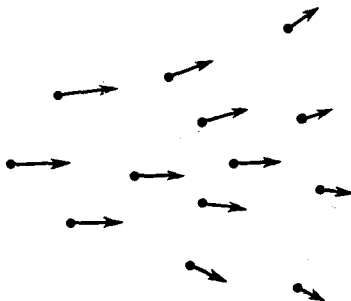
Tak więc, każdemu punktowi (x, y, z) przestrzeni przypisujemy dwa wektory \mathbf{E} i \mathbf{B} , które mogą się zmieniać w czasie. Tym samym traktujemy pola elektryczne i magnetyczne jako funkcje wektorowe zmiennych x, y, z i t . Ponieważ wektor jest określony przez swoje składowe, każde z pól $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ i $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ jest więc dane przez trzy funkcje matematyczne zmiennych x, y, z, t .

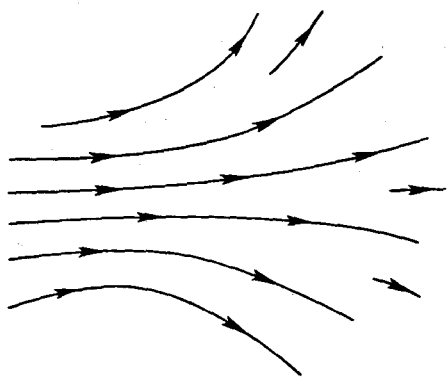
Właśnie dlatego, że możemy wektor \mathbf{E} (lub \mathbf{B}) określić ściśle w każdym punkcie przestrzeni, mówimy, że w przestrzeni istnieje „pole”. Polem danej wielkości fizycznej nazywamy obszar, w którego każdym punkcie wielkość ta ma określoną wartość. Tak na przykład może istnieć pole temperatury. Jest to pole skalarne, które zapisujemy jako $T(x, y, z)$. Temperatura może też zmieniać się w czasie i wtedy mówimy, że pole temperatury jest zależne od czasu i zapisujemy je jako $T(x, y, z, t)$. Innym przykładem jest „pole prędkości” przepływającej cieczy. Prędkość cieczy w każdym punkcie przestrzeni w czasie t oznaczamy przez $v(x, y, z, t)$. To pole jest polem wektorowym.

Wracając do pól elektromagnetycznych — mimo że pola wytwarzane przez ładunki są opisywane bardzo skomplikowanymi wzorami, mają jednak pewną charakterystyczną właściwość: związki między wartościami tych pól w pewnym punkcie, a ich wartościami w innym pobliskim punkcie są bardzo proste. Pola te możemy całkowicie opisać przy pomocy zaledwie kilku takich związków, podanych w postaci równań różniczkowych. Prawa elektrodynamiki dają się najprościej zapisać właśnie w postaci takich równań.

Proponowano wiele „wynalazków” mających ułatwić umysłowi wyobrażenie właściwości pól. Najbardziej poprawne podejście jest jednocześnie najbardziej abstrakcyjne: uważamy po prostu pola za matematyczne funkcje położenia i czasu. Możemy również spróbować wytworzyć sobie myślowy obraz pola rysując w wielu punktach przestrzeni wektory, przedstawiające natężenie i kierunek pola w danym punkcie. Taki obraz pola przedstawia rys. 1.1. Możemy pójść dalej i narysować linie, które są w każdym punkcie styczne do wektorów, co możemy nazwać „śledzeniem kierunku pola”. Gdy to zrobimy, tracimy ślad długości wektorów, ale możemy śledzić zmiany natężenia pola, rysując linie daleko jedna od drugiej tam, gdzie pole jest słabe, a blisko jedna

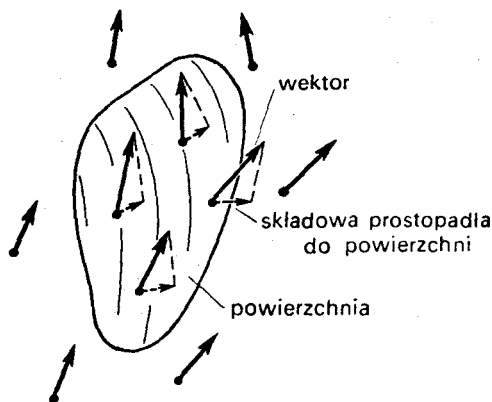
1.1. Pole wektorowe można przedstawić rysując zbiór strzałek, których wielkości i kierunki określają wartość pola wektorowego w punktach, z których wychodzą strzałki.





1.2. Pole wektorowe można przedstawić rysując linie styczne w każdym punkcie do kierunku wektora pola oraz rysując tyle linii, aby ich gęstość była proporcjonalna do natężenia pola.

1.3. Strumień pola wektorowego przez jakąś powierzchnię jest zdefiniowany jako iloczyn średniej wartości składowej normalnej tego wektora i wartości pola tej powierzchni.



drugiej tam, gdzie jest ono silne. Przyjmujemy umownie, że liczba linii przecinających jednostkową powierzchnię do nich prostopadłą jest proporcjonalna do natężenia pola. To jest oczywiście tylko pewne przybliżenie i czasami będziemy musieli rozpoczynać nowe linie, tak aby ich liczba pozostawała proporcjonalna do natężenia pola. Pole z rys. 1.1 przedstawiają linie na rys. 1.2.

1-3. Wielkości charakteryzujące pola wektorowe

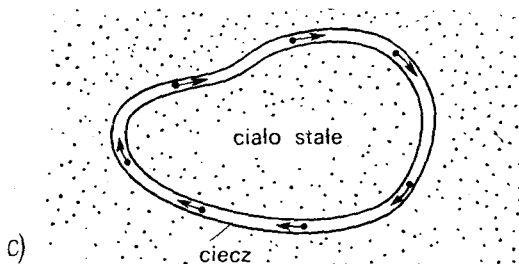
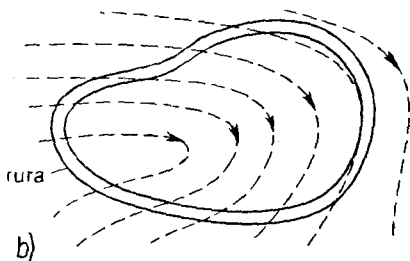
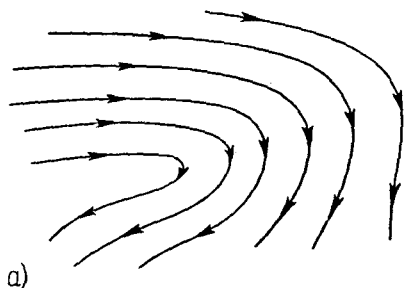
Istnieją dwie ważne właściwości matematyczne pola wektorowego. Będziemy się nimi posługiwać w naszym przedstawieniu praw elektryczności z punktu widzenia teorii pola. Wyobraźmy sobie jakąś zamkniętą powierzchnię i zastanówmy się, czy tracimy „coś” z jej wnętrza, to znaczy czy pole z niej „wypływa”. I tak na przykład, dla pola prędkości moglibyśmy zapytać, czy prędkość jest zawsze skierowana na zewnątrz tej powierzchni, lub — bardziej ogólnie — czy w ciągu jednostki czasu wypływa z niej więcej ciecicy niż do niej wpływa. Wypadkową ilość ciecicy przepływającej przez powierzchnię nazywamy „strumieniem prędkości” przez tę powierzchnię. Przepływ przez element powierzchni jest równy składowej prędkości prostopadłej do powierzchni mnożonej przez pole powierzchni. Dla dowolnej zamkniętej powierzchni wypadkowy wypływ, czyli strumień, jest iloczynem średniej składowej normalnej prędkości i pola powierzchni:

$$\text{strumień} = (\text{średnia składowa normalna}) \times (\text{pole powierzchni}). \quad (1.4)$$

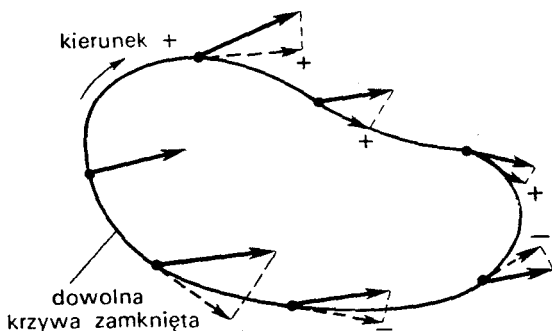
W przypadku pola elektrycznego możemy określić wielkość matematyczną

związaną przez analogię z wypływem i znowu nazwiemy ją strumieniem, ale oczywiście nie będzie to przepływ żadnej substancji, ponieważ pole elektryczne nie jest wcale prędkością czegokolwiek. Okazuje się jednak, że wielkość matematyczna, którą jest średnia składowa normalna pola, ma nadal praktyczne znaczenie. Mówimy więc o *strumieniu elektrycznym*, zdefiniowanym przez równanie (1.4). Ponadto wygodnie jest mówić nie tylko o strumieniu przez całkowicie zamkniętą powierzchnię, ale również przez każdą powierzchnię ograniczoną. Strumień przez taką powierzchnię zdefiniowany jest, tak jak poprzednio, jako iloczyn średniej składowej normalnej przez pole powierzchni. Ilustruje to rys. 1.3.

Druga właściwość pola wektorowego związana jest raczej z linią krzywą niż z powierzchnią. Przypuśćmy, że znowu rozważamy pole prędkości opisujące przepływ cieczy. Możemy postawić takie ciekawe pytanie: „Czy ciecz cyrkuluje?” Chcemy przez to powiedzieć: „Czy istnieje jakiś wypadkowy ruch okrężny wokół jakiejś krzywej zamkniętej?” Przypuśćmy, że nagle zamrażamy całą ciecz, z wyjątkiem tej, która znajduje się wewnątrz rury o stałym przekroju, tworzącej zamkniętą pętlę, tak jak to pokazano na rys. 1.4. Na zewnątrz rury ciecz przestaje się poruszać, ale wewnątrz może nadal się poruszać, gdyż ma pewien pęd, jeżeli oczywiście w rurze nie wytworzy się równowaga pędów. Wielkość zwaną *krążeniem* definiujemy jako iloczyn wypadkowej prędkości



1.4. Pole prędkości cieczy (a). Wyobraźcie sobie rurkę o stałym przekroju, wygiętą wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej (b). Gdyby nagle zamrozić ciecz wszędzie z wyjątkiem wnętrza rurki, ciecz w rurce krążyłaby tak, jak wskazuje rys. c).



1.5. Krążenie pola wektorowego jest iloczynem średniej składowej stycznej wektora (której zwrot wybieramy z jakąś ustaloną umową) i obwodu krzywej zamkniętej tworzącej pętlę.

kości cieczy w rurze i długości obwodu rury. Znowu możemy uogólnić to pojęcie i zdefiniować krążenie dowolnego pola wektorowego (nawet jeśli nic się tam nie porusza). Dla dowolnego pola wektorowego krążenie wokół *jakiegokolwiek pomyślanej krzywej zamkniętej* określa się jako średnią składową styczną wektora, pomnożoną przez długość obwodu pętli (rys. 1.5):

$$\text{krążenie} = (\text{średnia składowa styczna}) \cdot (\text{długość obwodu}). \quad (1.5)$$

Zobaczycie, że ta definicja istotnie daje liczbę proporcjonalną do prędkości krążenia w opisanym wyżej doświadczeniu myślowym z szybko zamrożoną cieczą.

Wprowadzając tylko te dwa pojęcia — strumień i krążenie — możemy od razu opisać wszystkie prawa elektryczności i magnetyzmu. Nie zrozumiecie, być może, od razu znaczenia tych praw, ale dadzą wam one pewne pojęcie, w jaki sposób można przedstawić fizykę elektromagnetyzmu.

1-4. Prawa elektromagnetyzmu

Z pierwszego prawa elektromagnetyzmu można wyznaczyć strumień pola elektrycznego:

$$\text{strumień pola } E \text{ przez dowolną powierzchnię zamkniętą} = \frac{\text{wypadkowy ładunek wewnątrz}}{\epsilon_0}, \quad (1.6)$$

gdzie ϵ_0 jest odpowiednią stałą. (Stałą ϵ_0 odczytujemy jako „epsylon zero”.) Jeśli wewnątrz powierzchni nie ma ładunków, a nawet jeśli w pobliżu niej, ale na zewnątrz znajdują się jakieś ładunki, *średnia składowa normalna* E równa się zeru i nie ma wypadkowego strumienia przez powierzchnię. Aby pokazać, co oznacza takie stwierdzenie, wykażemy, że równanie (1.6) sprowadza się do prawa Coulomba, jeśli dodatkowo założymy, że pole pochodzące od pojedynczego ładunku ma symetrię kulistą. Naokoło ładunku punktowego zakresłamy kulę; wtedy średnia składowa normalna jest po prostu wartością pola E w danym punkcie, gdyż pole musi być skierowane radialnie i musi mieć jednakowe natężenie we wszystkich punktach leżących na kuli. Nasza reguła mówi, że natężenie pola na po-

wierzchni kuli pomnożone przez powierzchnię kuli — tzn. wypływający strumień — jest proporcjonalne do ładunku znajdującego się wewnątrz. Gdybyśmy zakreślili kulę większym promieniem, powierzchnia wzrosłaby jak kwadrat promienia. Średnia składowa normalna pola elektrycznego pomnożona przez tę powierzchnię musi być nadal równa temu samemu ładunkowi, a więc pole elektryczne musi maleć z kwadratem odległości — otrzymaliśmy prawo Coulomba.

Weźmy w przestrzeni dowolną krzywą i zmierzmy krążenie pola elektrycznego wokół tej krzywej. Stwierdzimy, że na ogół będzie ono różne od zera (choć tak nie będzie dla pola kulombowskiego). Drugie prawo elektryczności stwierdza, że dla dowolnej powierzchni S (nie zamkniętej), ograniczonej krzywą C

$$\text{krążenie pola } E \text{ wokół krzywej } C = \frac{d}{dt} (\text{strumień pola } B \text{ przez powierzchnię } S). \quad (1.7)$$

Możemy uzupełnić prawa rządzące polem elektromagnetycznym pisząc dwa analogiczne równania dla pola magnetycznego B :

$$\text{strumień pola } B \text{ przez dowolną zamkniętą powierzchnię} = 0; \quad (1.8)$$

dla powierzchni S ograniczonej krzywą C

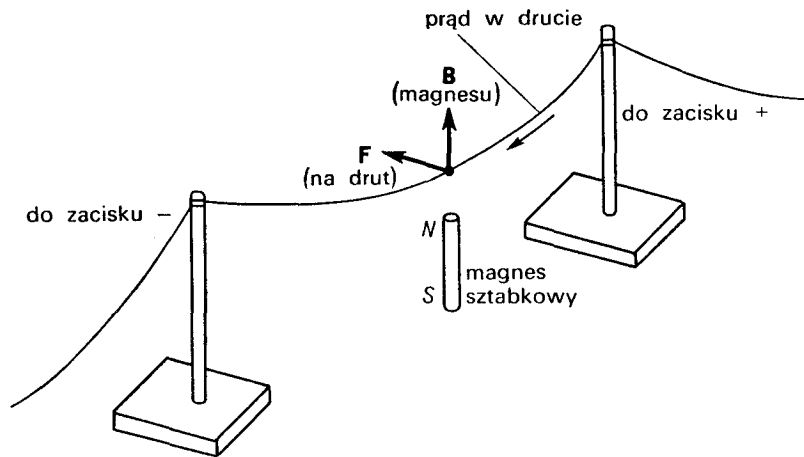
$$c^2 (\text{krążenie pola } B \text{ wzdłuż krzywej } C) = \frac{d}{dt} (\text{strumień pola } E \text{ przez powierzchnię } S) + \frac{\text{strumień prądu elektrycznego przez powierzchnię } S}{\epsilon_0}. \quad (1.9)$$

Stała c^2 , która występuje w równaniu (1.9), jest kwadratem prędkości światła. Pojawia się ona dlatego, iż magnetyzm jest w istocie relatywistycznym skutkiem elektryczności. Stałą ϵ_0 wstawiono tu, aby uzyskać dogodne jednostki prądu elektrycznego.

Równania (1.6)-(1.9) oraz równanie (1.1) zawierają wszystkie prawa elektrodynamiki*). Jak pamiętacie, prawa Newtona można było zapisać w prostej postaci, ale wyniki, do jakich prowadziły, były bardzo skomplikowane i zajęło nam dużo czasu, zanim poznaliśmy je wszystkie. Tych praw natomiast nie można wcale tak prosto zapisać, co oznacza, że prowadzą do jeszcze bardziej skomplikowanych konsekwencji i przedstawienie ich zajmie nam bardzo dużo czasu.

Niektóre z praw elektrodynamiki możemy zilustrować za pomocą kilku prostych doświadczeń, które jakościowo wykazują związki między polami elektrycznym i magnetycznym. Pierwszy człon równania (1.1) poznaliście doświadczalnie sami — czesząc włosy — nie będziemy więc go tu uzasadniać. Konieczność występowania drugiego członu równania (1.1) można zademonstrować przepuszczając prąd elektryczny przez drut wiszący nad magnesem sztabkowym, jak pokazuje to rys. 1.6. Skoro przepuszczamy prąd, drut się porusza, gdyż działa siła $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Gdy płynie prąd, ładunki wewnątrz drutu się poruszają, a więc mają pewną prędkość \mathbf{v} i pole magnetyczne magnesu wywiera na nie siłę, co w wyniku powoduje odsuwanie drutu.

*) Trzeba by jedynie jeszcze dodać uwagę o pewnych konsekwencjach co do znaku krążenia.

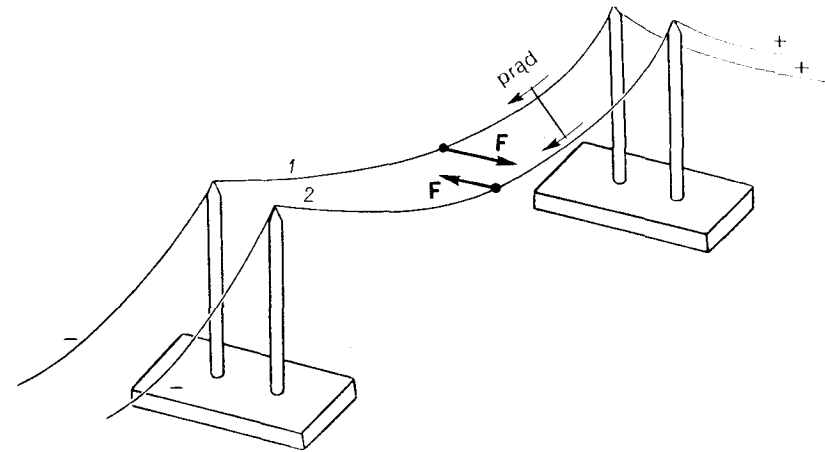
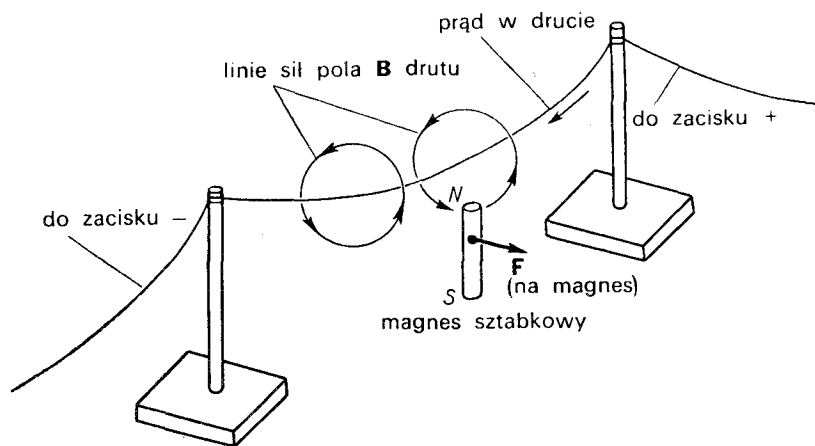


1.6. Magnes sztabkowy wywołuje powstawanie w drucie pola B . Gdy przez drut płynie prąd, drut porusza się wskutek działania siły $F = qv \times B$.

Musimy oczekiwać, że gdy drut będzie popychany w lewo, magnes musi doznać popchnięcia w prawo. (Gdyby bowiem tak nie było, moglibyśmy cały układ umieścić na wózku i otrzymać system napędowy, w którym nie byłoby zachowania pędu!) Siła ta jest zbyt mała, aby poruszyć w sposób widoczny magnes sztabkowy, ale rozporządzając magnesem o czułym zawieszeniu, np. igłą kompasową, zauważymy ruch.

Jak to się dzieje, że drut pcha magnes? Prąd w drucie wytwarza własne pole magnetyczne, które oddziałuje na magnes. Zgodnie z ostatnim członem równania (1.9) z przepływem prądu musi być związane *krążenie* pola B — w tym przypadku linie sił pola B są pętlami wokół drutu, jak to pokazuje rys. 1.7. To pole B jest odpowiedzialne za siłę działającą na magnes.

1.7. Pole magnetyczne drutu wywiera siłę na magnes.

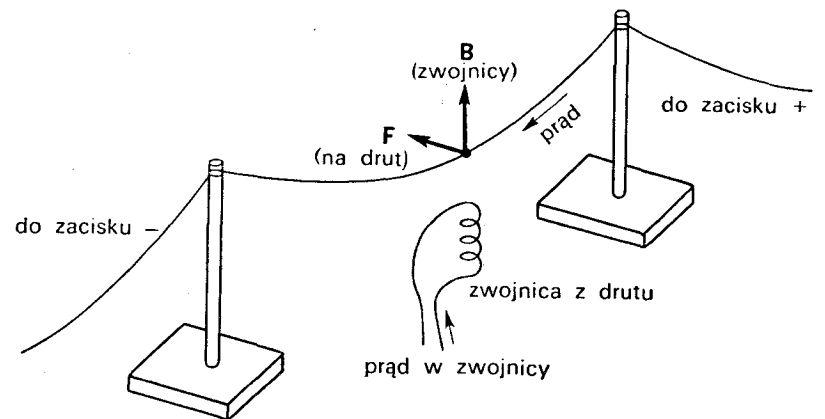


1.8. Dwa druty, po których płyną prądy, wywierają wzajemnie na siebie siły.

Równanie (1.9) mówi nam, że dla danego prądu płynącego w drucie krążenie pola B jest takie samo dla *każdej* krzywej otaczającej drut. Dla krzywych, powiedzmy kół, które poprowadzimy dalej od drutu, obwód jest większy, a więc składowa styczna B musi być mniejsza. Widzicie więc, że należy oczekiwać, że pole B będzie malało liniowo wraz z odległością od długiego prostego drutu.

Powiedzieliśmy, że prąd płynący w drucie wytwarza pole magnetyczne i że gdy istnieje pole magnetyczne, na drut, po którym płynie prąd, działa siła. Musimy więc również oczekiwać, że gdy wytworzymy pole magnetyczne za pomocą prądu płynącego w jednym drucie, będzie ono wywierać siłę na inny drut, po którym także płynie prąd. Można to wykazać używając dwóch podwieszonych drutów, jak na rys. 1.8. Gdy prądy płyną w tym

1.9. Magnes sztabkowy z rys. 1.6 można zastąpić zwojnicą, przez którą płynie prąd elektryczny. Na drut będącą działał wtedy podobne siły.



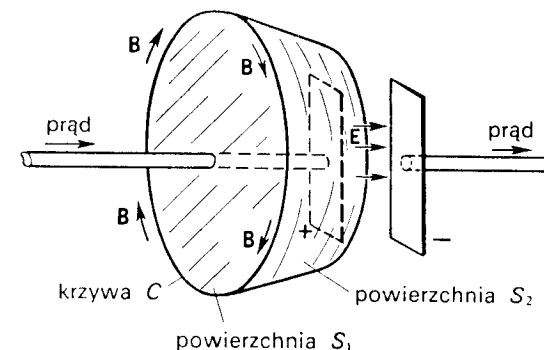
samym kierunku, druty się przyciągają, gdy prądy są skierowane przeciwnie — druty się odpychają.

Mówiąc krótko, prądy elektryczne, tak jak i magnesy, wytwarzają pola magnetyczne. Ale chwileczkę, co to właściwie jest magnes? Jeśli pola magnetyczne są wytwarzane przez poruszające się ładunki, to może pole magnetyczne kawałka żelaza jest w istocie wynikiem działania prądów? Okazuje się, że tak jest. Możemy zastąpić magnes sztabkowy w naszych doświadczeniach zwojnicą z drutu (rys. 1.9). Gdy przez zawieszony drut i umieszczoną pod nim zwojnicę przepływają prądy, obserwujemy ruch drutu, dokładnie taki jak przedtem, gdy zamiast zwojnicy mieliśmy magnes. Innymi słowy, prąd w zwojnicy imituje magnes. Okazuje się więc, że kawałek żelaza działa tak, jak gdyby zawierał w sobie stale płynący prąd okrężny. Istotnie, możemy wyjaśnić własności magnesów jako objaw trwałych prądów płynących w atomach żelaza. Siłę działającą na magnes z rys. 1.7 wyraża drugi człon równania (1.1).

Skąd się biorą te prądy? Czy z ruchu elektronów po orbitach atomowych? To byłaby jedna możliwość. W rzeczywistości stąd pochodzi magnetyzm niektórych substancji, ale nie żelaza. Prócz ruchu okrężnego w atomie elektron wykonuje również ruch obrotowy dookoła własnej osi — coś w rodzaju ruchu dobowego Ziemi — i prąd związany z tym obrotem jest przyczyną pola magnetycznego w żelazie. (Mówimy „coś w rodzaju ruchu dobowego Ziemi”, ponieważ zagadnienie to jest tak głęboko związane z mechaniką kwantową, że nie da się poprawnie ująć za pomocą pojęć klasycznych.) W większości przypadków pewne elektrony wirują w jednym kierunku, a inne w przeciwnym, tak że ich działanie magnetyczne znosi się i wypadkowy efekt jest zerowy. W żelazie jednak — z tajemniczej przyczyny, którą będziemy później omawiać — elektrony obracają się zgodnie dookoła osi równoległych i to właśnie stanowi źródło magnetyzmu.

Ponieważ pola magnesów pochodzą od prądów, nie musimy dopisywać żadnych dodatkowych członów do równań (1.8) czy (1.9), aby uwzględniały one również magnetyzm. Bierzemy po prostu *wszystkie* prądy, również okrężne prądy wirujących elektronów, i wtedy prawo to jest słuszne. Zwróćcie także uwagę, że według równania (1.8) nie ma „ładunków” magnetycznych analogicznych do ładunków elektrycznych, występujących po prawej stronie równania (1.6). Nigdy takich ładunków nie stwierdzono.

Pierwszy człon prawej strony równania (1.9) został odkryty teoretycznie przez Maxwella. Ma on ogromne znaczenie. Wynika z niego, że zmienne pola *elektryczne* wywołują efekty magnetyczne. Istotnie, bez tego członu równanie to nie miałoby sensu, gdyż znaczyłoby wtedy, że nie mogą istnieć prądy w obwodach, które nie są pełnymi pętlami. Prądy takie jednak w rzeczywistości istnieją, jak się o tym przekonamy z następnego przykładu. Wyobraźmy sobie kondensator zrobiony z dwóch płaskich płyt. Jest on ładowany przez prąd, który płynie do jednej płyty a odpływa z drugiej płyty, jak to pokazano na rys. 1.10. Prowadzimy wokół jednego z drutów krzywą C i rozpinamy na niej powierzchnię, która przecina się z drutem (powierzchnia S_1 na rysunku). Zgodnie z równaniem (1.9) krążenie pola B wokół krzywej C dane jest przez prąd w drucie (razy c^2). Co będzie jednak, gdy na krzywej C rozepniemy *inną* powierzchnię S_2 , która ma kształt miski i przechodzi między płytami kondensatora nie dotykając drutu? Przez tę powierzchnię na pewno prąd nie przepływa, ale przez zmianę pomyślanej tylko powierzchni nie możemy przecież zmienić



1.10 Krążenie wektora B po krzywej C dane jest albo przez prąd przepływający poprzez powierzchnię S_1 , albo przez szybkość zmiany strumienia E poprzez powierzchnię S_2 .

realnego pola magnetycznego! Krążenie pola B musi być takie, jakie było poprzednio. Oba człony prawej strony równania (1.9) uzupełniają się dając ten sam wynik dla obu powierzchni S_1 i S_2 . Dla powierzchni S_2 krążenie pola B dane jest przez szybkość zmiany strumienia pola E między płytami kondensatora. Okazuje się, że zmienne pole E związane jest z prądem w taki sposób, że równanie (1.9) jest poprawne. Maxwell pierwszy dostrzegł ten związek i napisał pełne równanie.

Za pomocą układu pokazanego na rys. 1.6 możemy zademonstrować jeszcze inne prawo elektromagnetyzmu. Odłączamy końce podwieszonoego drutu od baterii i łączymy je z galwanometrem, którego wskazania mówią nam, kiedy przez drut przepływa prąd. Gdy *popchniemy* drut na bok w polu magnetycznym magnesu, zaobserwujemy przepływ prądu. To zjawisko jest po prostu jeszcze inną konsekwencją równania (1.1) — elektrony w drucie doznają siły $F = qv \times B$. Elektrony mają również prędkość skierowaną poprzecznie do kierunku płynięcia prądu, gdyż poruszają się wraz z drutem. Ta prędkość v wraz z pionowym polem B magnesu daje w wyniku siłę działającą na elektrony, skierowaną *wzdłuż* drutu, która zaczyna poruszać elektrony w kierunku galwanometru.

Przypuśćmy jednak, że pozostawimy drut w spokoju, a będziemy poruszać magnesem. Domyśliśmy się, na podstawie teorii względności, że nie spowoduje to żadnej różnicy. Istotnie, w galwanometrze zaobserwujemy podobny prąd. W jaki sposób pole magnetyczne może wytworzyć siły działające na ładunki w spoczynku? Zgodnie z równaniem (1.1) musi tu istnieć pole elektryczne. Poruszający się magnes musi wytwarzać pole elektryczne. Równanie (1.7) przedstawia ilościowy opis, jak to się dzieje. Opisuje ono wiele zjawisk o dużym znaczeniu praktycznym, takich jakie zachodzą w prądnicach elektrycznych i transformatorach.

Kombinacja równań (1.7) i (1.9) zawiera wyjaśnienie rozchodzenia się promieniowania elektromagnetycznego na duże odległości. Jest to najbardziej godna uwagi konsekwencja wynikająca z naszych równań. Z grubsza biorąc, można to wyjaśnić następująco: przypuśćmy, że mamy gdzieś pole magnetyczne, które rośnie, gdyż, powiedzmy, przepuszczono nagle przez drut prąd. Wtedy, zgodnie z równaniem (1.7), musi istnieć krążenie pola elek-

trycznego. Gdy pole elektryczne narasta, aby wytworzyć swoje krążenie, wtedy zgodnie z równaniem (1.9) będzie powstawać krążenie pola magnetycznego. Ale narastanie *tego* pola magnetycznego będzie wytwarzało nowe krążenie pola elektrycznego itd. W taki sposób pola przesuwają się w przestrzeni, potrzebując do tego ładunków i prądów jedynie w swoim źródle. W taki właśnie sposób *widzimy* się nawzajem! Opis tego wszystkiego jest zawarty w równaniach pól elektromagnetycznych.

1-5. Czym są pola?

Zrobimy teraz kilka uwag dotyczących naszego podejścia do przedstawionego powyżej zagadnienia. Powiecie może: „Cała ta historia strumieni i krążenia jest nader abstrakcyjna. Istnieją pola elektryczne w każdym punkcie przestrzeni, a poza tym mamy te „prawa”, ale co *naprawdę* się dzieje? Dlaczego nie możesz nam wyjaśnić przy pomocy, na przykład, tego co zachodzi między ładunkami?” No tak, to zależy trochę od waszych przyzwyczajęń. Wielu fizyków uważało kiedyś, że bezpośrednie działanie poprzez próżnię jest nie do pomyślenia. (Jak mogli oni uważać jakąś ideę za nie do pomyślenia, skoro była ona już pomyślana?) Powiedzieliby: „Słuchajcie, jedyne siły jakie znamy, są siłami bezpośredniego działania jednego kawałka materii na drugi. Niemożliwe, żeby istniała siła, której nie byłoby czym przekazać.” Co się jednak okazuje, gdy zbadamy „bezpośrednie działanie” jednego kawałka materii na drugi, będący tuż przy nim? Stwierdzimy, że nie ma jednego kawałka tuż przy drugim; są one od siebie nieco oddzielone i istnieją siły elektryczne działające w małej skali. Stwierdzamy więc, że tak zwane działanie w bezpośrednim zetknięciu musimy wyjaśnić poprzez siły elektryczne. Na pewno nie jest rozsądnie upierać się, że siła elektryczna ma być czymś podobnym do starego, dobrze znanego pchnięcia czy pociągnięcia za pomocą mięśnia, gdy okazuje się, że te pchnięcia mięśniem trzeba interpretować poprzez siły elektryczne! Jedyne co można zrobić sensownego, to zapytać: „Jaki jest *najdogodniejszy* sposób traktowania sił elektrycznych?” Niektórzy wolą przedstawiać je jako oddziaływania ładunków na odległość i stosować jakieś skomplikowane prawo. Inni ubóstwiają linie sił pola. Cały czas rysują linie sił pola i uważają, że pisanie \mathbf{E} i \mathbf{B} jest zbyt abstrakcyjne. Linie sił pola są jednak zbyt prymitywnym sposobem opisu pola i bardzo trudno podać w języku linii sił ściśle, ilościowe prawa. Ponadto wprowadzenie pojęcia linii sił nie uwzględnia najbardziej podstawowej zasady elektrodynamiki — zasady superpozycji. Chociaż wiemy, jak wyglądają linie sił pola dla jednego układu ładunków i jak wyglądają dla innego układu, nie mamy pojęcia, jak będzie wyglądał obraz linii sił pola, gdy oba te układy wystąpią jednocześnie. Natomiast z matematycznego punktu widzenia superpozycja jest łatwa do sformułowania — dodajemy po prostu dwa wektory. Zaletą linii sił pola jest to, że dają one żywy obraz. Mają one jednak i pewne wady. Rozpatrywanie zagadnienia poprzez bezpośrednie oddziaływania ma wielkie zalety, gdy mamy do czynienia z ładunkami w spoczynku, ale ma wielkie wady, gdy rozważamy szybko poruszające się ładunki.

Najlepszym sposobem jest posługiwanie się abstrakcyjną ideą pola. To, że jest ona abstrakcyjna, jest niezbyt szczęśliwe, ale konieczne. Próby przedstawienia pola elektrycznego jako ruchu pewnego rodzaju kół zębatach lub poprzez linie, czy też jako napięć

w pewnego rodzaju substancji, pochłonęły więcej wysiłku fizyków niż trzeba by go było na uzyskanie właściwych rozwiązań zagadnień elektrodynamiki. Jest rzeczą ciekawą, że już w roku 1843 McCullough podał poprawne równania opisujące rozchodzenie się światła w kryształach. Współcześni powiedzieli mu jednak: „No tak, ale nie istnieje żadna realna substancja, której właściwości zapewniałyby spełnienie tych równań, a ponieważ światło jest drganiem, więc musi drgać w *czymś*. Nie możemy zatem uwierzyć w te Twoje abstrakcyjne równania.” Gdyby ludzie mieli szersze umysły, uwierzyliby w poprawne równania opisujące rozchodzenie się światła znacznie wcześniej, niż zrobili to w rzeczywistości.

W przypadku pól magnetycznych warto się zastanowić nad następującym zagadnieniem. Przypuśćmy, że udało się wam stworzyć obraz pola magnetycznego przy użyciu jakichś linii bądź też kół zębatach poruszających się w przestrzeni. Spróbujcie teraz wyjaśnić, co będzie się działo z dwoma ładunkami poruszającymi się w przestrzeni z taką samą szybkością równoległe do siebie. Ponieważ się poruszają, będą się zachowywać jak dwa prądy, zatem będą z nimi związane pola magnetyczne (tak jak z prądami płynącymi po drutach, rys. 1.8). Obserwator, który poruszałby się z taką samą prędkością jak ładunki, widziałby je spoczywające i powiedziałby, że *nie ma* pola magnetycznego. A więc „koła zębata” czy też „linie” znikają, gdy poruszasz się wraz z przedmiotem! Wszystko czegoście tu dokonali, to znalezienie *nowego* problemu. W jaki sposób mogą znikać koła zębata? Ci, którzy rysują linie sił pola, są w podobnym kłopotcie. Nie tylko nie można powiedzieć, czy linie sił pola poruszają się wraz z ładunkami, czy też nie, ale okazuje się, że w pewnych układach współrzędnych mogą one całkowicie zniknąć.

Mówimy zatem, że magnetyzm jest rzeczywiście efektem relatywistycznym. W rozważanym przed chwilą przypadku dwóch ładunków, poruszających się równoległe do siebie, musimy w równaniach ruchu dokonać poprawek relatywistycznych o wyrazach rzędu v^2/c^2 . Poprawki te muszą odpowiadać sile magnetycznej. Jaka jednak będzie siła działająca między dwoma drutami w naszym doświadczeniu (rys. 1.8)? Tu działa *wyłącznie* siła magnetyczna. Nie wygląda to na „poprawkę relatywistyczną”. Jeśli oszacujemy prędkości elektronów w drucie (możecie to zrobić sami), stwierdzimy, że ich średnia prędkość wzdłuż drutu wynosi około 0,01 cm/s. Tak więc v^2/c^2 wynosi tylko 10^{-25} . Z pewnością powiecie, że to jest „poprawka” do pominięcia. Bynajmniej! Chociaż siła magnetyczna wynosi, w tym przypadku, 10^{-25} „normalnej” siły elektrycznej działającej między dwoma poruszającymi się elektronami, pamiętajcie, że „normalna” siła elektryczna zanikła ze względu na prawie idealną równowagę — druty zawierają taką samą liczbę protonów co elektronów. Równowaga jest doskonała z dokładnością większą niż $1 : 10^{25}$ i mały człon relatywistyczny, który nazywamy siłą magnetyczną, jest jedynym członem odgrywającym tu rolę. Staje się on czynnikiem dominującym.

To właśnie prawie idealne równoważenie się efektów elektrycznych pozwoliło na zbadanie efektów relatywistycznych (tj. magnetyzmu) i na sformułowanie ścisłych, z dokładnością do v^2/c^2 , równań, mimo iż fizycy właściwie *nie wiedzieli* wówczas, co one opisują. Dlatego właśnie, gdy odkryto teorię względności, nie trzeba było zmieniać praw elektromagnetyzmu. Były one już — przeciwnie niż prawa mechaniki — poprawne z dokładnością do v^2/c^2 .

1-6. Elektromagnetyzm w nauce i technice

Na zakończenie tego rozdziału chcielibyśmy jeszcze zwrócić uwagę, że wśród wielu zjawisk, jakie badali starożytni Grecy, dwa były szczególnie dziwne: pierwsze — za pomocą potartego bursztynu można unieść do góry małe kawałki papirusa, drugie — kawałek minerału z wyspy Magnesia przyciąga żelazo. Wydaje się nam zadziwiające, że były to jedyne znane Grekom zjawiska, w których przejawia się elektryczność i magnetyzm. Przyczyny tego można szukać w fantastycznej wprost precyzji równoważenia się ładunków, o której przedtem mówiliśmy. Badania uczonych, którzy przyszli po Grekach, odkrywały coraz to nowe zjawiska, będące w istocie swojej tylko różnymi aspektami wspomnianych zjawisk wywoływanych przez bursztyn czy magnetyt. Obecnie zdajemy sobie sprawę, że zjawisko oddziaływań chemicznych, a w końcu i samo życie, można wyjaśnić poprzez elektromagnetyzm.

Jednocześnie z coraz głębszym poznawaniem istoty elektromagnetyzmu pojawiały się coraz to nowe jego zastosowania techniczne: można było przysyłać sygnały na dalekie odległości za pomocą telegrafu, rozmawiać z kimś oddalonym o całe kilometry, nie stosując przy tym żadnych połączeń, napędzać wielkie siłownie — wielkie turbiny wodne połączone są przewodami z inną, odległą o tysiące kilometrów maszyną, która obraca się w takt z nimi; wiele tysięcy rozgałęzionych przewodów, dziesięć tysięcy maszyn w dziesięciu tysiącach miejsc napędza urządzenia przemysłowe i domowe. Wszystko to dzieje się dzięki poznaniu praw elektromagnetyzmu.

Dziś możemy korzystać nawet z bardziej subtelnych efektów. Siły elektryczne mogą być nie tylko ogromne, ale i bardzo słabe; możemy nimi sterować i korzystać z nich różnymi sposobami. Nasze przyrządy są tak czułe, że możemy powiedzieć, co robi oddalony od nas o setki kilometrów człowiek, mierząc jak oddziałują on na elektrony w cienkim pręcie metalowym. Musimy w tym celu jedynie użyć tego pręta jako anteny odbiornika telewizyjnego!

Z dalekiej perspektywy historii ludzkości — oglądanej, powiedzmy, za 10 000 lat — za najważniejsze wydarzenie w 19 stuleciu będzie bez wątpienia uważane odkrycie przez Maxwella praw elektrodynamiki. W porównaniu z tym ważnym odkryciem naukowym, wojna domowa, jaka rozegrała się w Ameryce w tym samym dziesięcioleciu, zblednie do poziomu nic nieznaczącego prowincjonalnego wydarzenia.

rachunek różniczkowy pól wektorowych

2-1. Co to znaczy „rozumieć” w fizyce

Fizyk musi mieć umiejętność patrzenia na problemy z różnych punktów widzenia. Dokładna analiza rzeczywistych problemów fizycznych jest zwykle dość skomplikowana i jakaś szczególna sytuacja fizyczna może okazać się zbyt powikłana, aby móc ją bezpośrednio zanalizować przez rozwiązanie równania różniczkowego. Można jednak uzyskać zupełnie dobre pojęcie o zachowaniu się układu, gdy potrafi się przewidzieć, jaki charakter będzie miało rozwiązanie w różnych warunkach. Takie pojęcia jak: linie sił pola, pojemność, opór, indukcyjność są do tego celu bardzo przydatne, poświęćmy więc sporo czasu na ich przeanalizowanie. W ten sposób wyczuwamy, co się może zdarzyć w różnych sytuacjach elektromagnetycznych. Z drugiej strony żaden z tych heurystycznych modeli, jak na przykład linie sił pola, nie jest dla wszystkich sytuacji ani dostatecznie ścisły, ani dostatecznie wyczerpujący. Istnieje tylko jedna droga ścisłego przedstawienia tych praw, a są nią równania różniczkowe. Mają one tę zaletę, że są to równania podstawowe i, o ile wiemy, ścisłe. Gdy już raz nauczycie się posługiwać równaniami różniczkowymi, zawsze możecie do nich powrócić — niczego tu nie można zapomnieć.

Zabierze wam nieco czasu, zanim zrozumiecie, co powinno się dziać w różnych warunkach. Będziecie musieli rozwiązywać te równania. Za każdym razem, gdy rozwiązujecie równania, dowiadujecie się czegoś o charakterze ich rozwiązań. Aby zachować te rozwiązania w pamięci, pożytecznie będzie poznać ich znaczenie w języku linii sił pola i w językach innych pojęć. W ten sposób rzeczywiście „zrozumiecie” te równania. Na tym właśnie polega różnica między matematyką a fizyką. Matematycy i ludzie o umysłach zdecydowanie matematycznych studiując problemy fizyczne często tracą z oczu sens fizyczny zagadnień. Mówią: „Słuchajcie, cała elektrodynamika to te równania różniczkowe — równania Maxwella. Sami fizycy przyznają, że w nich zawarte jest wszystko. Są one skom-

plikowane, ale ostatecznie to są tylko równania matematyczne i jeśli zrozumiem ich sens matematyczny na wylot, to będę na wylot rozumieć fizykę.” Okazuje się, że tak jednak nie jest. Matematycy, którzy pod takim kątem widzenia chcą się zajmować fizyką — a było ich wielu — nie dają zwykle dużego wkładu do fizyki, a w istocie i do matematyki. Wysiłki ich zawodzą dlatego, że rzeczywiste sytuacje fizyczne w realnym świecie są tak skomplikowane, iż potrzebne jest tu o wiele głębsze zrozumienie równań.

Dirac tak określił, co to znaczy rzeczywiście rozumieć równanie nie tylko w sensie matematycznym: „Rozumiem, co jakieś równanie oznacza, gdy mogę, nie rozwiązując go, wyobrazić sobie cechy charakterystyczne jego rozwiązania.” Jeśli więc możemy przewidzieć, co się stanie w danych warunkach, nie rozwiązując równań, wtedy „rozumiemy” te równania w zastosowaniu do danych warunków. Rozumienie fizyczne jest całkowicie niematematyczne, nieściśle i niedokładne, ale dla fizyka bezwzględnie konieczne.

Zwykle w takim wykładzie jak ten treść pojęć fizycznych poznaje się stopniowo — zaczynając od sytuacji prostych dochodzi się do coraz bardziej skomplikowanych. Wymaga to wtedy, abyście stale zapominali to, czegoście się nauczyli przedtem — to bowiem co jest prawdziwe w pewnych sytuacjach, nie musi być ogólnie słuszne. I tak na przykład „prawo”, że siła elektryczna zależy od kwadratu odległości, *nie zawsze* jest słuszne. Dlatego też bardziej wolimy inne, zupełnie przeciwne podejście. Wolimy najpierw wziąć *ogólne* prawa, a później cofnąć się i zastosować je do prostych sytuacji, wprowadzając przy tym odpowiednie pojęcia fizyczne. I tak właśnie będziemy postępować.

Nasze podejście jest zupełnie różne od podejścia historycznego, które rozwija przedmiot poprzez omawianie doświadczeń, przy których pomocy uzyskiwano informacje. Ale fizyka była przedmiotem dociekań bardzo uzdolnionych ludzi przez ponad 200 lat, a my mamy tylko ograniczony czas na zdobycie naszej wiedzy, nie możemy więc poznać wszystkiego, czego oni dokonali. Niestety, jednym z zagadnień, które będziemy opuszczać w tych wykładach, jest historyczny rozwój wiedzy doświadczalnej. Mamy nadzieję, że lukę tę będziecie mogli uzupełnić częściowo w laboratorium. Informacje historyczne znajdziecie również w wielu podręcznikach elektryczności i magnetyzmu.

2-2. Pola skalarne i wektorowe — T i h^*)

Zacniemy teraz od abstrakcyjnego, matematycznego przedstawienia teorii elektryczności i magnetyzmu. Naszym celem jest wyjaśnienie znaczenia praw podanych w rozdz. 1. Zanim to zrobimy, musimy najpierw zapoznać was z nową i dziwną notacją, którą chcielibyśmy się posługiwać. Zapomnijmy więc na chwilę o elektromagnetyzmie, a zajmijmy się matematyką pól wektorowych. Ma ona ogromne znaczenie nie tylko dla elektromagnetyzmu, ale i dla innych dziedzin fizyki. Różniczkowy rachunek wektorowy, podobnie jak i zwykły rachunek różniczkowy i całkowity, jest bardzo ważny dla wszystkich działów fizyki. Nim się teraz właśnie zajmiemy.

*1) Porównaj: Tom I, cz. 1, rozdz. 11 (*Wektory*).

Writing vectors by hand. (Odręczny zapis wektorów)

Some people use (Niektórzy piszą)

\vec{E} or \vec{E} or just \vec{E} .
(lub lub po prostu)

Others prefer (Inni zaś wolą)

\underline{E}

We like the following way. (Oto nasz ulubiony sposób:)

A B C D E F G H I J K L M N
O P Q R S T U V W X Y Z

Small letters are harder: (Z małymi literami kłopot jest większy:)

a b c d e f g h i j k l m n
o p q r s t u v w x y z

You can invent your own. (Czytelnik może wymyślić własny sposób.)

Podajemy za oryginałem zapis wektorów używany przez autora (Przyp. red. wyd. polskiego.)

Poniżej podano kilka szczegółów z algebry wektorów. Zakładamy, że już je znacie.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{skalar} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{wektor}, \quad (2.2)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z,$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.4)$$

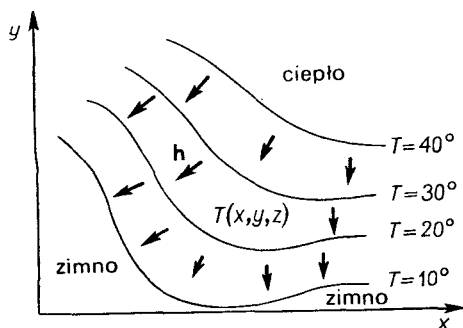
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (2.6)$$

Będziemy również korzystać z dwóch następujących równości, wziętych z rachunku różniczkowego:

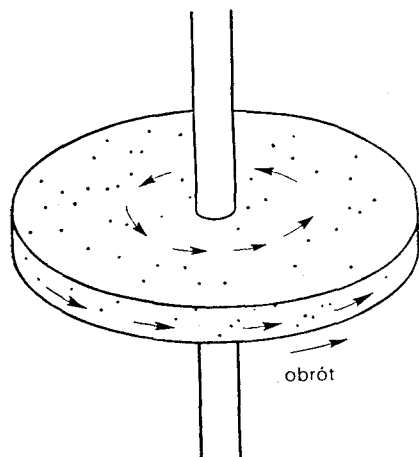
$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (2.8)$$



2.1. Temperatura T jest przykładem pola skalar-
nego. Z każdym punktem (x, y, z) w przestrzeni
związana jest pewna liczba $T(x, y, z)$. Tempe-
ratura we wszystkich punktach na powierzchni
oznaczonej $T = 20^\circ$ (pokazanej jako krzywa
w płaszczyźnie $z = 0$) jest taka sama. Strzałki
pokazują przykładowo wektor przepływu ciepła h .

2.2. Prędkości atomów obracającego się ciała
są przykładem pola wektorowego.



Równanie (2.7) jest spełnione oczywiście
tylko w granicy, gdy Δx , Δy i Δz dążą
do zera.

Najprostszym możliwym polem fizycz-
nym jest pole skalarne. Przez pole, jak pa-
miętacie, rozumiemy wielkość, która za-
leży od położenia w przestrzeni. Przez
pole skalarne rozumiemy po prostu pole,
które jest w każdym punkcie scharaktery-
zowane jedną liczbą — skalar-
em. Oczywiście, liczba ta może się zmieniać w cza-
sie, ale na razie nie będziemy się tym mar-
twić. Będziemy mówili o tym, jak wygląda
pole w danej chwili. Jako przykład pola
skalar-
nego rozważmy bryłę substancji sta-
łej, ogrzaną w niektórych miejscach,
a ochłodzoną w innych, tak że tempe-
ratura ciała zmienia się od punktu do
punktu w jakiś skomplikowany sposób.
Temperatura będzie więc funkcją x , y i z ,
położenia w przestrzeni, mierzonego w pro-
stokątnym układzie współrzędnych. Tem-
peratura jest polem skalar-
nym.

Jednym ze sposobów przedstawienia
sobie pola skalar-
nego jest wyobrażenie
sobie „konturów”, które są pomyślanymi
powierzchniami, przeprowadzonymi przez
wszystkie punkty, w których pole ma tę
samą wartość, podobnie jak linie kon-
turowe na mapie (warstwie) łączą punkty
o tej samej wysokości. Dla pola tempera-
tury kontury nazywamy „powierzchniami
izotermicznymi” lub izotermami. Rysun-
ek 2.1 przedstawia pole temperatur i ilu-
struje zależność temperatury T od x i y ,
gdy $z = 0$. Pokazano tu kilka izoterm.

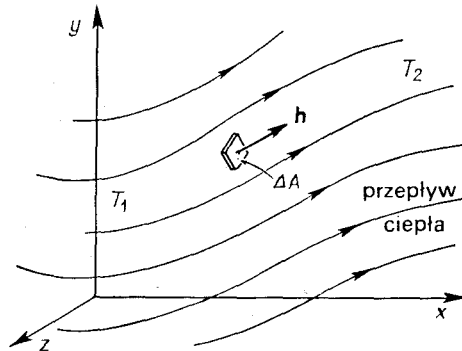
Istnieją także pola wektorowe. Ich idea jest bardzo prosta. W każdym punkcie przestrzeni dany jest pewien wektor. Wektor ten zmienia się od punktu do punktu. Jako przykład rozważmy obracające się ciało. Prędkość każdego punktu ciała jest wektorem, który jest funkcją położenia (rys. 2.2). Jako drugi przykład weźmy przepływ ciepła przez bryłę substancji. Jeśli temperatura bryły jest wysoka w jednym miejscu, a niska w drugim, to będzie zachodził przepływ ciepła od miejsc gorętszych do chłodniejszych. W różnych częściach bryły ciepło będzie płynęło w różnych kierunkach. Przepływ ciepła jest wielkością kierunkową, którą oznaczamy symbolem \mathbf{h} . Jej wartość jest miarą ilości przepływającego ciepła. Przykłady przepływu ciepła pokazano na rys. 2.1.

Spróbujmy ściślej zdefiniować wektor \mathbf{h} . Wartość wektora strumienia ciepła jest to ilość energii cieplnej przechodzącej w ciągu jednostki czasu przez powierzchnię jednostkową nieskończenie małego elementu powierzchniowego, prostopadłego do kierunku przepływu. Wektor ma zwrot zgodny z kierunkiem przepływu (rys. 2.3). Wyrażmy to za pomocą symboli: jeśli ΔJ jest energią cieplną, która w jednostce czasu przechodzi przez element powierzchniowy ΔA , to

$$\mathbf{h} = \frac{\Delta J}{\Delta A} \mathbf{e}_f, \quad (2.9)$$

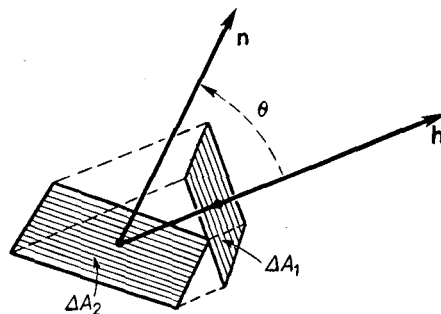
gdzie \mathbf{e}_f jest wektorem jednostkowym w kierunku strumienia.

Wektor \mathbf{h} można zdefiniować jeszcze inaczej — poprzez jego składowe. Zapytujemy, ile ciepła przepływa przez małą powierzchnię nachyloną pod dowolnym kątem do kierunku przepływu. Na rysunku 2.4 pokazaliśmy małą powierzchnię ΔA_2 , nachyloną w stosunku do powierzchni ΔA_1 , prostopadłej do kierunku przepływu. Wektor jednostkowy \mathbf{n} jest prostopadły do powierzchni ΔA_2 . Kąt θ między wektorami \mathbf{n} i \mathbf{h} jest taki sam jak między tymi powierzchniami (gdyż wektor \mathbf{h} jest prostopadły do powierzchni ΔA_1). Jaki



2.3. Przepływ ciepła jako pole wektorowe. Wektor \mathbf{h} jest skierowany wzdłuż kierunku przepływu. Jego wartość jest równa stosunkowi energii przenoszonej w jednostce czasu (przez element powierzchni prostopadły do przepływu) do elementu powierzchni.

2.4. Przepływ ciepła przez powierzchnię ΔA_2 jest taki sam jak przez ΔA_1 .



będzie przepływ ciepła na jednostkę powierzchni przez element powierzchni ΔA_2 ? Przepływ przez element powierzchni ΔA_2 jest taki sam jak przez ΔA_1 , a tylko pola powierzchni są różne. Istotnie, $\Delta A_1 = \Delta A_2 \cos \theta$. Przepływem ciepła przez element powierzchni ΔA_2 jest:

$$\frac{\Delta J}{\Delta A_2} = \frac{\Delta J}{\Delta A_1} \cos \theta = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.10)$$

Równanie to interpretujemy następująco: przepływ ciepła (na jednostkę czasu i na jednostkę powierzchni) przez *dowolny* element powierzchniowy, którego wektorem normalnym jednostkowym jest \mathbf{n} , dany jest iloczynem skalarnym $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$. Moglibyśmy również powiedzieć: składowa przepływu ciepła prostopadła do elementu powierzchniowego ΔA_2 równa się $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$. Jeśli chcemy, możemy uważać powyższe stwierdzenia za *definicję* pola wektorowego \mathbf{h} . Te same pojęcia zastosujemy do innych pól wektorowych.

2-3. Pochodne pól — gradient

Zmiany, jakich doznają pola w czasie, możemy opisać podając pochodne pól względem czasu. W podobny sposób chcielibyśmy opisać zmiany związane z położeniem, gdyż interesuje nas związek pomiędzy, dajmy na to, temperaturą w jednym miejscu a temperaturą w innym, pobliskim miejscu. Jak będziemy tworzyć pochodną temperatury względem położenia? Czy różniczkujemy temperaturę względem x , czy też może względem y lub z ?

Prawa fizyczne, którymi się posługujemy, nie powinny zależeć od wyboru układu odniesienia. Należy więc je zapisywać w takiej postaci, aby obie strony równania były albo skalarami, albo wektorami. Czym jest pochodna pola skalarnego, powiedzmy $\partial T / \partial x$? Czy jest ona skalarem, czy wektorem, czy jeszcze czymś innym? Nie jest, jak łatwo możecie się przekonać, ani skalarem, ani wektorem, gdyż jeśli weźmiemy inną oś x , to $\partial T / \partial x$ będzie na pewno inne. Ale zauważcie, że możemy mieć trzy pochodne: $\partial T / \partial x$, $\partial T / \partial y$ i $\partial T / \partial z$. Mamy tu trzy pochodne, a wiemy, że potrzeba trzech liczb, aby utworzyć wektor. Może te trzy pochodne są składowymi wektora:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \stackrel{?}{=} \text{wektor}. \quad (2.11)$$

Oczywiście, ogólnie nie jest prawdziwe, że każde trzy liczby możemy przyjąć za składowe wektora. Trzy liczby są składowymi wektora tylko wtedy, gdy przy obrocie układu współrzędnych składowe wektora transformują się we właściwy sposób. Trzeba więc sprawdzić, jak zmieniają się te pochodne przy obrocie układu współrzędnych. Pokażemy, że układ trzech liczb (2.11) jest rzeczywiście wektorem. Przy obrocie układu współrzędnych pochodne zmieniają się we właściwy sposób.

Można się o tym przekonać w różny sposób. Jeden sposób polega na sformułowaniu pytania tak, aby odpowiedź była niezależna od układu odniesienia, i na staraniu się wyrażenia tej odpowiedzi w postaci „niezmienniczej”. I tak na przykład, jeżeli $S = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ i jeżeli \mathbf{A} i \mathbf{B} są wektorami, to wiemy, bo dowiedliśmy tego w rozdz. 11 tomu I (cz. 1), że S jest skalarem. *Wiemy*, że S jest skalarem, nie badając, czy zmienia się ono przy zmianie

układu odniesienia. *Nie może się zmieniać*, bo jest iloczynem skalarnym dwóch wektorów. Podobnie, jeśli wiemy, że \mathbf{A} jest wektorem, i mając trzy liczby: B_1, B_2 i B_3 , stwierdzimy, iż

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S, \quad (2.12)$$

gdzie S jest takie samo w każdym układzie współrzędnych, to te trzy liczby B_1, B_2, B_3 muszą być składowymi B_x, B_y, B_z jakiegoś wektora \mathbf{B} .

Pomyślmy teraz o polu temperatury. Weźmy dwa punkty P_1 i P_2 , oddalone od siebie o małą odległość $\Delta \mathbf{R}$. Temperatura w punkcie P_1 wynosi T_1 , a w punkcie P_2 wynosi T_2 , różnica temperatur jest więc równa $\Delta T = T_2 - T_1$. Temperatury w tych rzeczywistych fizycznych punktach na pewno nie zależą od wyboru osi do pomiaru współrzędnych. W szczególności ΔT jest liczbą niezależną od układu współrzędnych. Jest skalarem.

Jeśli wybierzemy jakiś określony układ odniesienia, będziemy mogli napisać $T_1 = T(x, y, z)$ i $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, gdzie $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ są składowymi wektora $\Delta \mathbf{R}$ (rys. 2.5). Pamiętając o równaniu (2.7) możemy napisać:

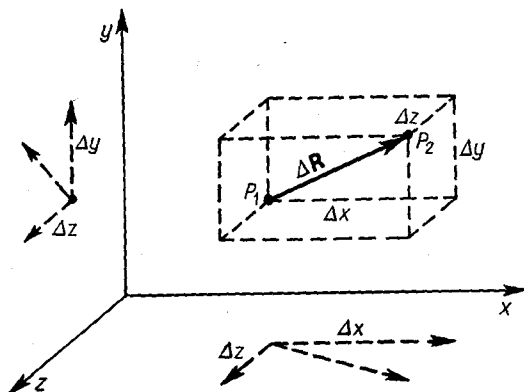
$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z. \quad (2.13)$$

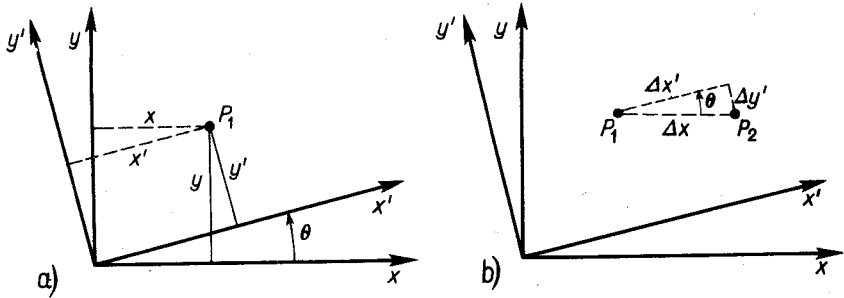
Lewa strona równania (2.13) jest skalarem. Strona prawa jest sumą trzech iloczynów o mnożnikach $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, które są składowymi wektora. Stąd wynika, że liczby

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

są składowymi w kierunkach x, y i z jakiegoś wektora. Zapisujemy ten nowy wektor jako ∇T . Symbol ∇ (nazywany „nabłą”) jest odwróconą literą Δ , i ma nam przypominać o różniczkowaniu. Wyrażenie ∇T można odczytywać różnie: albo jako „nabla T ”, albo jako „gradient T ”.

2.5. Wektor $\Delta \mathbf{R}$, którego składowymi są $\Delta x, \Delta y, \Delta z$





2.6. a. Transformacja obrotu układu współrzędnych. b. Przypadek specjalny, gdy wektor $\Delta \mathbf{R}$ jest równoległy do osi x .

$$\text{grad} T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^* \quad (2.14)$$

Stosując tę notację możemy przepisać równanie (2.13) w bardziej zwartej postaci:

$$\Delta T = \nabla T \cdot \Delta \mathbf{R}, \quad (2.15)$$

co słownie możemy wyrazić w ten sposób, że różnica temperatur w dwóch pobliskich punktach jest iloczynem skalarnym gradientu T i wektora przesunięcia $\Delta \mathbf{R}$. Postać równania (2.15) jest również ilustracją naszego dowodu, że ∇T jest wektorem.

A może jeszcze nie jesteście przekonani? Przeprowadźmy dowód w inny sposób (choć jeżeli będziecie dobrze uważać, to dostrzeżecie, że to w istocie ten sam dowód, tylko w innej postaci). Okażemy, że składowe ∇T transformują się dokładnie tak samo jak składowe $\Delta \mathbf{R}$. Jeśli tak jest naprawdę, to ∇T jest wektorem zgodnie z naszą pierwotną definicją wektora podaną w rozdz. 11 tomu I (cz. 1). Weźmy nowy układ współrzędnych x', y', z' i w tym układzie obliczmy pochodne $\partial T / \partial x', \partial T / \partial y', \partial T / \partial z'$. Dla pewnego uproszczenia przyjmijmy $z = z'$, tak abyśmy mogli zapomnieć o współrzędnej z (ogólniejszy przypadek możecie sprawdzić sami).

Weźmy układ $x'y'$ obrócony o kąt θ względem układu xy (rys. 2.6). Współrzędne punktu (x, y) w układzie primowanym będą następujące:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (2.16)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta. \quad (2.17)$$

Rozwiązując te równania względem x i y otrzymamy:

*) W naszej notacji wyrażenie (a, b, c) reprezentuje wektor o składowych a, b, c . Używając wektorów jednostkowych $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ w kierunkach osi układu współrzędnych możemy napisać:

$$\nabla T = \mathbf{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad (2.18)$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \quad (2.19)$$

Jeśli jakaś para liczb transformuje się według tych równań tak samo jak x i y , to liczby te są składowymi jakiegoś wektora.

Przyjrzyjmy się teraz wyrażeniu na różnicę temperatur w dwóch pobliskich punktach P_1 i P_2 , wybranych tak, jak pokazuje to rys. 2.6 b. W układzie x, y mamy

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x, \quad (2.20)$$

gdyż Δy jest równe zero.

Co dadzą obliczenia w układzie primowanym? Powinniśmy napisać:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y'. \quad (2.21)$$

Z rysunku 2.6 b widać, że

$$\Delta x' = \Delta x \cos \theta, \quad (2.22)$$

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \theta, \quad (2.23)$$

gdyż Δy jest ujemne, gdy Δx jest dodatnie. Wstawiając wyrażenia (2.22) i (2.23) do równania (2.21) otrzymamy

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \theta = \quad (2.24)$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta \right) \Delta x. \quad (2.25)$$

Porównując równanie (2.25) z równaniem (2.20) widzimy, że

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta. \quad (2.26)$$

Równanie to mówi nam, że $\partial T / \partial x$ zależy w taki sam sposób od $\partial T / \partial x'$ i od $\partial T / \partial y'$ jak x w równaniu (2.18) zależy od x' i y' . A zatem $\partial T / \partial x$ jest x -ową składową wektora. Takie samo rozumowanie wykazuje, że $\partial T / \partial y$ i $\partial T / \partial z$ są składowymi w kierunkach y i z . Tak więc ∇T jest na pewno wektorem. Jest to pole wektorowe uzyskane z pola skalarnego T .

2-4. Operator ∇

Możemy teraz uczynić coś bardzo zabawnego i pomysłowego, a co jest jedną z tych rzeczy, które czynią matematykę piękną. Dowód, że grad T , czyli ∇T , jest wektorem, nie zależał od tego, jakie pole skalarne różniczkowaliśmy. Całe rozumowanie będzie takie

samo, gdy T zastąpimy *jakimkolwiek* innym polem skalarnym. Ponieważ równania transformacji pozostają takie same, bez względu na to, co różniczkujemy, moglibyśmy więc równie dobrze opuścić T i zastąpić równanie (2.26) równaniem operatorowym

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \theta. \quad (2.27)$$

Pozostawiamy operatory, jak to powiedział Jeans, „głodne, łaknące zróżniczkowania”.

Ponieważ operatory różniczkowe transformują się tak, jak powinny transformować się składowe wektora, możemy nazwać je składowymi *operatora wektorowego* i możemy napisać:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.28)$$

co, oczywiście, znaczy, że

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.29)$$

Oddzieliliśmy tu gradient od T — i to jest właśnie ten wspaniały pomysł.

Musicie, oczywiście, zawsze pamiętać, że ∇ jest operatorem. Sam więc nic nie oznacza. Ale jeśli sam nic nie oznacza, to co otrzymamy, gdy pomnożymy go przez skalar — na przykład przez T — i uzyskamy iloczyn $T\nabla$? (Zawsze można pomnożyć wektor przez skalar.) Wyrażenie to w dalszym ciągu nic nie oznacza. Jego składową w kierunku x będzie

$$T \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.30)$$

co nie jest liczbą, a nadal pewnego rodzaju operatorem. Jednak zgodnie z algebrą wektorów $T\nabla$ nazywamy wektorem.

Pomnożmy teraz operator ∇ przez skalar z drugiej strony, tak aby otrzymać iloczyn (∇T) . W zwykłej algebrze

$$TA = AT; \quad (2.31)$$

musimy jednak pamiętać, że algebra operatorów różni się nieco od zwykłej algebry wektorów. Posługując się operatorami musimy zawsze zachowywać właściwą kolejność, tak aby operacje występowały we właściwym porządku. Nie będziecie mieć z tym trudności, jeśli po prostu zapamiętacie, że operator ∇ podlega tej samej umowie, co notacja różniczkowania. To, co ma być zróżniczkowane, trzeba umieścić po prawej stronie operatora ∇ . Kolejność jest tu ważna. Pamiętając o problemie kolejności, rozumiemy, że $T\nabla$ jest operatorem, ale iloczyn ∇T nie jest już „łaknącym” operatorem; operator został całkowicie „nasycony”. W istocie, to jest już wektor o znaczeniu fizycznym. Przedstawia on zmienność T w przestrzeni. Składowa x wektora ∇T mówi nam, jak T zmienia się w kierunku x . Jaki jest kierunek wektora ∇T ? Wiemy, że szybkość zmiany T w jakimś kierunku dana jest przez składową wektora ∇T w tym kierunku [patrz równanie (2.15)]. Wynika stąd, że wektor ∇T będzie miał ten kierunek, w którym zmiana T względem przesunięcia jest największa. Gradient T ma kierunek najbardziej stromeego wznoszenia się T .

2-5. Operacje algebraiczne z operatorem ∇

Czy możemy wykonać jeszcze inne operacje algebraiczne z operatorem wektorowym ∇ ? Spróbujmy utworzyć jego kombinację z wektorem. Dwa wektory można kombinować ze sobą uzyskując iloczyn skalarny. Moglibyśmy mieć takie iloczyny:

$$(\text{wektor}) \cdot \nabla \quad \text{lub} \quad \nabla \cdot (\text{wektor}).$$

Pierwszy jeszcze nic nie znaczy, bo nadal jest operatorem. Jego ostateczne znaczenie będzie zależało od wielkości, na którą będzie działał. Drugi iloczyn jest jakimś polem skalarnym ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ jest zawsze skalarom).

Zobaczmy, jak wygląda iloczyn skalarny operatora ∇ i jakiegoś znanego nam pola wektorowego, np. \mathbf{h} . Rozpisując na współrzędne, mamy:

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z, \quad (2.32)$$

czyli

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}. \quad (2.33)$$

Ta suma jest niezmiennikiem względem transformacji układu współrzędnych. Gdybyśmy wzięli inny układ (oznaczony primami), mielibyśmy*)

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'}, \quad (2.34)$$

co, mimo że wygląda inaczej, jest tą samą liczbą, jaką otrzymalibyśmy z równania (2.33).
Zatem

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot \mathbf{h} \quad (2.35)$$

dla każdego punktu w przestrzeni. Tak więc $\nabla \cdot \mathbf{h}$ jest polem skalarnym, które musi reprezentować jakąś wielkość fizyczną. Zdajecie sobie chyba sprawę z tego, że kombinacja pochodnych w wyrażeniu $\nabla \cdot \mathbf{h}$ ma raczej specjalny charakter. Istnieją inne rodzaje kombinacji, jak np. $\partial h_y / \partial x$, które nie są ani skalarom, ani składowymi wektorów.

Wielkość skalarna $\nabla \cdot (\text{wektor})$ jest nadzwyczaj pożyteczna w fizyce i nazywa się ją **dywergencją**. I tak na przykład

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = \text{„dywergencja } \mathbf{h}\text{”}. \quad (2.36)$$

Podobnie jak w przypadku ∇T , możemy również wyrażeniu $\nabla \cdot \mathbf{h}$ przypisać znaczenie fizyczne. Zrobimy to jednak trochę później.

Najpierw chcielibyśmy się przekonać, co możemy jeszcze zrobić z operatorem wekto-

*) Traktujemy tu \mathbf{h} jako wielkość fizyczną, która zależy od położenia w przestrzeni, a nie jako jawną funkcję matematyczną trzech zmiennych. Gdy „różniczkujemy” \mathbf{h} względem x, y i z lub względem x', y' i z' , musimy najpierw podać matematyczne wyrażenie określające \mathbf{h} jako funkcję odpowiednich współrzędnych.

rowym ∇ . Co możemy powiedzieć o jego iloczynie wektorowym? Powinniśmy oczekiwać, że

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{wektor.} \quad (2.37)$$

Jest to wektor, którego składowe możemy wypisać posługując się zwykłą regułą tworzenia iloczynu wektorowego [patrz równanie (2.2)]:

$$(\nabla \times \mathbf{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}, \quad (2.38)$$

podobnie

$$(\nabla \times \mathbf{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (2.39)$$

oraz

$$(\nabla \times \mathbf{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Kombinację $\nabla \times \mathbf{h}$ nazywamy „rotacją \mathbf{h} ”, co zapisujemy „rot \mathbf{h} ”. Dlaczego tak ją nazywamy i jakie jest jej znaczenie fizyczne, dowiemy się później.

Streszczając: mamy trzy rodzaje kombinacji, w których występuje operator ∇ . Oto one:

$$\nabla T = \text{grad } T = \text{wektor,}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = \text{skalar,}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{h} = \text{wektor.}$$

Posługując się tymi kombinacjami możemy zmiany przestrzenne pól zapisywać w zupełnie ogólny, wygodny sposób, niezależny od wyboru współrzędnych.

Jako przykład zastosowania naszego wektorowego operatora różniczkowego ∇ możemy napisać układ równań wektorowych, opisujących te same prawa elektromagnetyzmu, które podaliśmy słownie w rozdz. 1. Są to tak zwane równania Maxwella.

Równania Maxwella

$$\begin{aligned} 1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ 2) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ 3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ 4) \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

gdzie „gęstość ładunku elektrycznego” ρ (ro) jest ilością ładunku na jednostkę objętości, a „gęstość prądu elektrycznego” \mathbf{j} oznacza prąd przepływający w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku prądu. Te cztery równania zawierają pełną klasyczną teorię pola elektromagnetycznego. Widzicie więc jak przy pomocy naszej nowej notacji możemy osiągnąć prostą i elegancką postać praw elektromagnetyzmu!

2-6. Równanie różniczkowe przepływu ciepła

Podamy teraz inny przykład prawa fizycznego zapisanego przy pomocy notacji wektorowej. Prawo to nie jest precyzyjne, ale dla wielu metali i dla wielu innych substancji, które dobrze przewodzą ciepło, jest dostatecznie dokładne. Wicie, że jeżeli ogrzewać prostopadłościenny blok z takiego materiału, przy tym jedną jego ścianę ogrzewać do temperatury T_2 , przeciwległą zaś ścianę chłodzić do temperatury T_1 , to przez blok ten będzie przepływać ciepło od temperatury T_2 do T_1 (rys. 2.7 a). Przepływ ciepła jest proporcjonalny do pola powierzchni A ścian i do różnicy temperatur, a odwrotnie proporcjonalny do d — odległości między ścianami. (Dla danej różnicy temperatur im cieńsza warstwa, tym większy mamy przepływ ciepła.) Niech J będzie energią cieplną, która przechodzi przez blok w jednostce czasu. Wtedy

$$J = \kappa(T_2 - T_1) \frac{A}{d}. \quad (2.42)$$

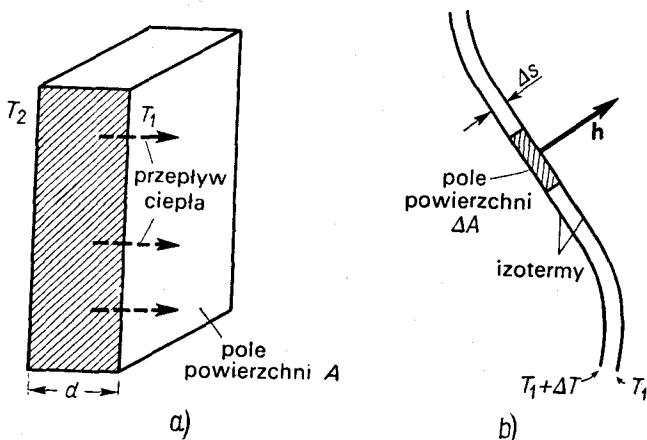
Współczynnik proporcjonalności κ (kappa) nazywamy *przewodnictwem cieplnym*.

Co się będzie działo w bardziej skomplikowanym przypadku? Weźmy dowolnego kształtu bryłę materiału, w której temperatura zmienia się w jakiś szczególny sposób. Przypuśćmy, że obserwujemy tylko mały kawałek tej bryły. Wyobraźcie sobie, że ten kawałek jest takim blokiem, o którym mówiliśmy przed chwilą, ale w zmniejszonej skali (rys. 2.7a). Ustawmy jego podstawy równoległe do powierzchni izotermicznych (rys. 2.7 b), tak aby było słuszne równanie (2.42).

Jeśli powierzchnią obu podstaw naszego bloku będzie ΔA , to przepływ ciepła w jednostce czasu będzie wynosić

$$\Delta J = \kappa \Delta T \frac{\Delta A}{\Delta s}, \quad (2.43)$$

2.7. a. Przepływ ciepła przez płytkę. b. Nieskończenie mała płytkę równoległą do powierzchni izotermicznej w dużym bloku



gdzie Δs jest odległością między podstawami bloku. Wyrażenie $\Delta J/\Delta A$ zdefiniowaliśmy już poprzednio jako wartość wektora \mathbf{h} , zgodnego co do kierunku i zwrotu z przepływem ciepła. Ciepło będzie przepływać od temperatury $T_1 + \Delta T$ do temperatury T_1 , a więc przepływ będzie prostopadły do izoterm, jak to pokazano na rys. 2.7 b. Stosunek $\Delta T/\Delta s$ mówi nam, jak zmienia się temperatura T wraz ze zmianą położenia. Ponieważ wybraliśmy zmianę położenia prostopadłą do izoterm, a więc w kierunku, w którym nasze $\Delta T/\Delta s$ osiąga maksymalną wartość, to $\Delta T/\Delta s$ jest po prostu dane przez długość wektora ∇T . Korzystając z tego, że kierunek wektora ∇T jest taki sam jak wektora \mathbf{h} , możemy równanie (2.43) napisać jako równanie wektorowe

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T. \quad (2.44)$$

(Znak „minus” stawiamy tu dlatego, że przepływ ciepła zachodzi od temperatury wyższej do niższej.) Wzór (2.44) jest równaniem różniczkowym przewodnictwa cieplnego w ośrodkach jednorodnych. Widzicie, że jest ono równaniem wektorowym. Jeśli bowiem κ jest liczbą, obie jego strony są wektorami. Jest ono uogólnieniem na dowolny przypadek wzoru (2.42), który odnosił się do płytki płaskorównoległej. Później nauczymy się zapisywać wszelkiego rodzaju równania fizyki elementarnej, takie jak równanie (2.42), w bardziej wyrafinowanej notacji wektorowej. Notacja ta jest bardzo pożyteczna nie tylko dlatego, że zapisane w niej równania mają prostszą postać, ale również dlatego, że najwyraźniej jest wtedy widoczny *sens fizyczny* takiego równania, bez względu na to, jaki został wybrany układ współrzędnych.

2-7. Drugie pochodne pól wektorowych

Dotychczas mieliśmy do czynienia tylko z pierwszymi pochodnymi. Dlaczegożby nie spróbować drugich? Możemy tu mieć kilka kombinacji:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \nabla \cdot (\nabla T), \\ \text{b) } \nabla \times (\nabla T), \\ \text{c) } \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}), \\ \text{d) } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}), \\ \text{e) } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}). \end{array} \right\} \quad (2.45)$$

Możecie sami sprawdzić, że to są wszystkie możliwe kombinacje.

Przyjrzyjmy się najpierw drugiej z nich, b). Ma ona taką samą postać jak wyrażenie

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A}T) = (\mathbf{A} \times \mathbf{A})T = 0,$$

gdyż $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ jest zawsze zerem. Powinniśmy zatem mieć

$$\text{rot}(\text{grad}T) = \nabla \times (\nabla T) = 0. \quad (2.46)$$

Łatwo możemy się przekonać, że powyższa równość rzeczywiście jest spełniona, pisząc w jawnej postaci jedną (np. w kierunku z) z jej składowych:

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x (\nabla T)_y - \nabla_y (\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (2.47)$$

a to, ze względu na równanie (2.8), jest równe zeru. Takie samo postępowanie można wykonać dla innych składowych. Tak więc $\nabla \times (\nabla T) = 0$ dla każdego rozkładu temperatur, a co więcej — dla *każdej* w ogóle funkcji skalarnej.

Weźmy teraz inny przykład. Zobaczmy, czy mamy jeszcze inną kombinację, która jest zawsze równa zeru. Jak wiemy, iloczyn skalarny wektora i iloczynu wektorowego zawierającego ten wektor jest zerem:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.48)$$

gdyż wektor $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ jest prostopadły do wektora \mathbf{A} i wobec tego nie ma składowej w kierunku wektora \mathbf{A} . To jest właśnie kombinacja równania d) układu (2.45). Możemy więc oczekiwać, że

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = \text{div}(\text{roth}) = 0. \quad (2.49)$$

Znowu, rozkładając na składowe, łatwo można wykazać, że wyrażenie to rzeczywiście jest równe zeru.

Wypowiemy teraz dwa twierdzenia matematyczne, których nie będziemy dowodzić. Są one bardzo interesujące i pożyteczne dla fizyka.

W problemach fizycznych często stwierdzamy, że rotacja jakiejś wielkości, np. pola wektorowego \mathbf{A} , jest równa zeru. Teraz dowiedzieliśmy się [równanie (2.46)], że rotacja gradientu jest zerem. Można więc oczekiwać, że takie pole \mathbf{A} będzie gradientem jakiejś wielkości, gdyż wtedy jego rotacja będzie zerem. Istotnie, jedno ze wspomnianych interesujących twierdzeń mówi, że jeżeli $\text{rot} \mathbf{A}$ jest zerem, to \mathbf{A} jest *wtedy* gradientem *czegoś* — a dokładniej istnieje wtedy jakieś pole skalarne ψ (psi) takie, że \mathbf{A} jest równe $\text{grad} \psi$. Innymi słowy, mamy

Twierdzenie:

$$\begin{array}{ll} \text{Jeżeli} & \nabla \times \mathbf{A} = 0, \\ \text{to istnieje takie} & \psi, \\ \text{że} & \mathbf{A} = \nabla \psi. \end{array} \quad (2.50)$$

Mamy również podobne twierdzenie dla przypadku, gdy dywergencja \mathbf{A} jest zerem. Na podstawie równania (2.49) wiemy, że dywergencja rotacji dowolnego wektora jest **zawsze** równa zeru. Jeśli spotkacie pole wektorowe \mathbf{D} , którego $\text{div} \mathbf{D}$ jest zerem, to drugie **twierdzenie** pozwoli wam wnioskować, że \mathbf{D} jest rotacją jakiegoś pola wektorowego \mathbf{C} . **Bardziej** formalnie formułujemy to jako

Twierdzenie:

$$\begin{array}{ll} \text{Jeżeli} & \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \\ \text{to istnieje takie} & \mathbf{C}, \\ \text{że} & \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{C}. \end{array} \quad (2.51)$$

Przyglądając się możliwym kombinacjom dwóch operatorów ∇ , stwierdziliśmy, że dwie z nich są zawsze równe zero. Zajmijmy się teraz tymi, które są *różne* od zera. Weźmy na przykład pierwszą z naszego spisu kombinację $\nabla \cdot (\nabla T)$. Ogólnie biorąc jest ona różna od zera. Rozpiszmy na składowe:

$$\nabla T = \nabla_x T + \nabla_y T + \nabla_z T$$

oraz

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla_x (\nabla_x T) + \nabla_y (\nabla_y T) + \nabla_z (\nabla_z T) = \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

co na ogół jest jakąś liczbą. Jest to pole skalarne.

Widzicie, że nie musimy zachowywać nawiasów i możemy, bez obawy wywołania nieporozumienia, pisać:

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \nabla^2 T; \quad (2.53)$$

∇^2 traktujemy jako nowy operator. Jest to operator skalarny, a ponieważ często używa się go w fizyce, otrzymał własne imię — *laplasjan*.

$$\text{laplasjan} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.54)$$

Ponieważ laplasjan jest operatorem skalarnym, możemy więc działać nim na wektor. Przez działanie na wektor rozumiemy działanie na każdą z jego składowych we współrzędnych prostokątnych.

$$\nabla^2 \mathbf{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z).$$

Przyjrzyjmy się teraz kombinacji e) z naszego spisu (2.45): $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h})$. Rotację rotacji możemy zapisać jeszcze inaczej, korzystając z równania wektorowego (2.6):

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (2.55)$$

Jeśli zastąpimy \mathbf{A} i \mathbf{B} operatorem ∇ i przyjmiemy $\mathbf{C} = \mathbf{h}$, otrzymamy:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ???$$

Chwileczkę, coś tu nie jest w porządku! Pierwszy składnik jest w porządku, ale drugi niczego nie daje — jest nadal operatorem. Nie dopilnowaliśmy właściwej kolejności. Jeśli jednak spojrzycie jeszcze raz na równanie (2.55), to dostrzeżecie, że można je równie dobrze napisać w takiej postaci:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (2.56)$$

Teraz kolejność czynników jest lepsza. Zróbmy nasze podstawienie do równania (2.56), a otrzymamy:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{h}. \quad (2.57)$$

Ta postać równania wygląda już dobrze i istotnie wszystko jest w porządku, co możecie sprawdzić rozpisując na współrzędne. Drugi składnik jest laplasjanem, możemy więc napisać:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}. \quad (2.58)$$

Powiedzieliśmy już coś o wszystkich kombinacjach z naszego spisu dwukrotnego działania operatorem ∇ z wyjątkiem przypadku c) : $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$. To jest jakieś pole wektorowe, ale nic specjalnie ciekawego nie możemy o nim powiedzieć. Pożytecznie będzie ułożyć nasze wnioski w tabelę:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \text{pole skalarne,} \\ \text{b) } & \nabla \times (\nabla T) = 0, \\ \text{c) } & \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = \text{pole wektorowe,} \\ \text{d) } & \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0, \\ \text{e) } & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}, \\ \text{f) } & (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h} = \text{pole wektorowe.} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Zauważyliście może, że nie próbowaliśmy wynaleźć nowego operatora $(\nabla \times \nabla)$. Czy rozumiecie dlaczego?

2-8. Pułapki

Posłużyliśmy się naszą znajomością zwykłej algebry wektorów w algebrze operatora ∇ . Musimy być jednak ostrożni, gdyż łatwo tu wpaść w pułapkę. Chcielibyśmy tu wspomnieć o dwóch takich pułapkach, mimo że nie grożą nam w tym kursie. A oto pierwsza z nich. Co powiedzielibyście o takim wyrażeniu, zawierającym dwie funkcje skalarne ψ i φ (fi):

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \varphi)?$$

Chcielibyście pewnie powiedzieć, że musi ono być równe zeru, gdyż jest analogiczne do wyrażenia

$$(\mathbf{A}a) \times (\mathbf{A}b),$$

które, jako iloczyn wektorowy dwóch *jednakowych* wektorów \mathbf{A} , jest zawsze równe zeru. Ale w naszym przykładzie dwa operatory ∇ nie są jednakowe! Pierwszy działa na funkcję ψ , a drugi na inną : φ . Mimo więc, że oznaczamy je tym samym symbolem ∇ , muszą to być różne operatory. Jest rzeczą oczywistą, że kierunek $\nabla \psi$ zależy od funkcji ψ i nie musi być równoległy do kierunku $\nabla \varphi$.

$$(\nabla \psi) \times (\nabla \varphi) \neq 0 \text{ (na ogół).}$$

Na szczęście, nie będziemy musieli posługiwać się takimi wyrażeniami. To zresztą, co powiedzieliśmy, nie zmienia faktu, że $\nabla \times \nabla \psi = 0$ dla każdego pola skalarnego, gdyż tu oba operatory ∇ działają na tę samą funkcję.

A oto pułapka numer dwa. Reguły, które tu omówiliśmy, są proste i przyjemne, gdy

mamy do czynienia z prostokątnym układem współrzędnych. I tak na przykład dla wyrażenia $\nabla^2 \mathbf{h}$ składowa w kierunku osi x wynosi:

$$(\nabla^2 \mathbf{h})_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h_x = \nabla^2 h_x, \quad (2.60)$$

natomiast składowa *radialna* wcale *nie* będzie równa $\nabla^2 h_r$. Przyczyna tkwi w tym, że w algebrze wektorów kierunki wektorów są ściśle określone, natomiast w przypadku pola wektorowego ich kierunki są różne w różnych punktach. Gdy pole wektorowe opisujemy, na przykład, we współrzędnych biegunowych, tak zwany kierunek „radialny” zmienia się od punktu do punktu. Napotykamy więc trudności, gdy zaczynamy różniczkować składowe. Tak na przykład nawet dla *stałego* pola wektorowego składowa radialna zmienia się od punktu do punktu.

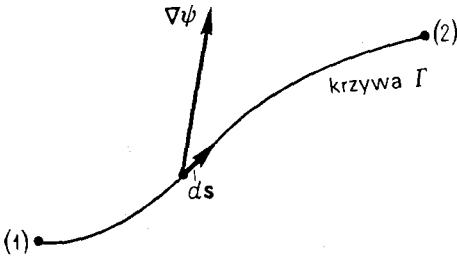
Aby uniknąć kłopotów, najbezpieczniej i najprościej jest trzymać się prostokątnego układu współrzędnych. Warto jednak wspomnieć o pewnym wyjątku: ponieważ laplasjan ∇^2 jest skalarem, możemy używać go w takim układzie współrzędnych, w jakim tylko chcemy (np. we współrzędnych biegunowych). Ponieważ jednak jest on operatorem różniczkowym, więc powinniśmy nim działać tylko na wektory, których składowe leżą w kierunkach ustalonych, to znaczy w układzie prostokątnym. Dlatego też, gdy będziemy rozpisywać wektorowe równania różniczkowe na współrzędne, przedstawiać będziemy wszystkie nasze pola wektorowe w układzie prostokątnym.

rachunek całkowy wektorów

3-1. Całki wektorowe; całka krzywoliniowa z $\nabla\psi$

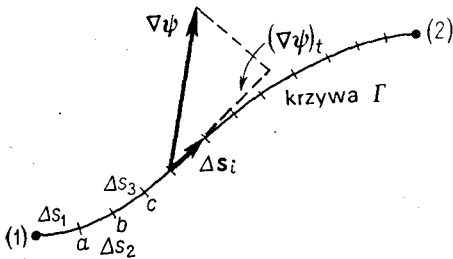
Dowiedzieliśmy się z rozdz. 2, że istnieją rozmaite sposoby różniczkowania pól. Wy-
nikiem zastosowania niektórych z tych sposobów są pola wektorowe, innych — pola
skalarne. Wyprowadziliśmy wiele wzorów, ale wszystko, co było powiedziane w tym roz-
dziale, można streścić w następującej regule: operatory $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ i $\partial/\partial z$ są trzema skła-
dowymi operatora wektorowego ∇ . Teraz pragnęlibyśmy, przynajmniej w pewnym stop-
niu, zrozumieć czym właściwie są pochodne pola. Uzyskamy wtedy lepsze odczucie fizycz-
nego sensu równań pola wektorowego.

Omawialiśmy już znaczenie operacji gradient (operatora ∇ działającego na skalar).
Zajmijmy się teraz wyjaśnieniem fizycznego sensu dywergencji i rotacji. Można to naj-
lepiej uczynić korzystając z pewnych całek wektorowych i równań wiążących te całki.
Niestety, tych równań nie można uzyskać bezpośrednio z algebry wektorów przez proste
podstawienia, będziemy więc musieli przyjąć je jako coś zupełnie nowego. Z tych wzorów
całkowych jeden jest właściwie banalny, ale dwa inne bynajmniej takie nie są. Wyprowa-
dzimy je i omówimy wnioski, jakie można z nich wyciągnąć. Równania, którymi będziemy
się zajmować, są właściwie twierdzeniami matematycznymi. Są one użyteczne nie tylko do
wyjaśnienia, jaki sens fizyczny mają dywergencja i rotacja, ale również pomogą nam w poj-
mowaniu ogólnych teorii fizycznych. Te twierdzenia matematyczne odgrywają taką rolę
w teorii pola, jaką zasada zachowania energii odgrywa w mechanice cząstek. Takie ogólne
twierdzenia są niezmiernie istotne dla głębszego zrozumienia fizyki, przekonacie się jednak,
że nie są bardzo użyteczne w rozwiązywaniu problemów, z wyjątkiem najprostszych przy-
padków. Na szczęście, na początku naszego kursu będziemy mieć do czynienia z wieloma
prostymi zagadnieniami, dającymi się rozwiązać przy pomocy tych trzech wzorów cał-
kowych, które będziemy tu omawiać. Zobaczmy jednak, że w miarę jak problemy będą
się stawać coraz to trudniejsze, te proste metody przestaną już wystarczać.



3.1. Wartości użyte w równaniu (3.1). Wartość wektora $\nabla\psi$ wzięta jest dla elementu liniowego ds .

3.2. Całka krzywoliniowa jest granicą sumy.



węj Γ z iloczynu skalarnego wektora $\nabla\psi$ i innego wektora ds , który jest nieskończenie małym elementem liniowym krzywej Γ [skierowanym od punktu (1) do (2)].

Musimy przede wszystkim powiedzieć, co rozumiemy przez całkę krzywoliniową. Weźmy funkcję skalarną $f(x, y, z)$ i krzywą Γ łączącą dwa punkty (1) i (2). Oznaczmy na krzywej szereg punktów i połączmy te punkty odcinkami prostoliniowymi, tak jak to pokazano na rys. 3.2. Każdy odcinek ma długość Δs_i , gdzie i jest wskaźnikiem przebiegającym wartości 1, 2, 3, ... Przez całkę krzywoliniową

$$\int_{(1)}^{(2)} f ds$$

wzdłuż Γ

rozumiemy granicę sumy

$$\sum f_i \Delta s_i,$$

gdzie f_i jest wartością funkcji w i -tym odcinku. Wartością graniczną będzie wartość, do której zbliża się suma, gdy dodajemy coraz to więcej odcinków, tak aby największy spośród nich $\Delta s_i \rightarrow 0$.

Całka w naszym twierdzeniu [równanie (3.1)] oznacza to samo, mimo że wygląda nieco inaczej. Zamiast f mamy tu inny skalar — składową $\nabla\psi$ w kierunku Δs . Jeśli składową styczną oznaczymy przez $(\nabla\psi)_t$, to

Zajmijmy się najpierw wzorem całkowym, w którym występuje gradient. We wzorze tym zawarta jest bardzo prosta idea: ponieważ gradient reprezentuje szybkość zmiany jakiejś wielkości pola, to jeśli scałkujemy gradient, otrzymamy całkowitą zmianę tej wielkości. Przypuśćmy, że mamy pole skalarne $\psi(x, y, z)$. W dwóch dowolnych punktach (1) i (2) funkcja ψ przyjmuje odpowiednio wartości $\psi(1)$ i $\psi(2)$. [Używamy tu notacji, w której punkt (2) reprezentuje punkt (x_2, y_2, z_2) , a $\psi(2)$ oznacza to samo co $\psi(x_2, y_2, z_2)$.] Jeśli Γ (gamma) jest dowolną krzywą łączącą punkty (1) i (2) (patrz rys. 3.1), to prawdziwy jest następujący związek:

Twierdzenie 1

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} (\nabla\psi) \cdot ds. \quad (3.1)$$

wzdłuż Γ

Występująca tu całka jest *całką krzywoliniową* od punktu (1) do (2) wzdłuż krzy-

$$(\nabla\psi)_i \Delta s = (\nabla\psi) \cdot \Delta s. \quad (3.2)$$

Całka w równaniu (3.1) oznacza sumę takich wyrazów.

Przekonamy się teraz, że równanie (3.1) jest prawdziwe. W rozdziale 1 pokazaliśmy, że składowa $\nabla\psi$ wzdłuż małego przesunięcia ΔR jest szybkością zmiany ψ w kierunku ΔR . Weźmy odcinek krzywej Δs od punktu (1) do punktu a na rys. 3.2. Zgodnie z naszą definicją

$$\Delta\psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1 \quad (3.3)$$

oraz

$$\psi(b) - \psi(a) = (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2, \quad (3.4)$$

gdzie, oczywiście, $(\nabla\psi)_1$ oznacza gradient na odcinku Δs_1 , a $(\nabla\psi)_2$ — gradient na odcinku Δs_2 . Dodając stronami wyrażenia (3.3) i (3.4) otrzymamy

$$\psi(b) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1 + (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2. \quad (3.5)$$

Widzicie więc, że jeżeli dodawać dalej takie wyrazy, to w wyniku otrzyma się

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum (\nabla\psi)_i \cdot \Delta s_i. \quad (3.6)$$

Lewa strona równania nie zależy od wyboru naszych przedziałów, byleby tylko punkty (1) i (2) były zawsze te same. Możemy zatem wziąć granicę prawej strony. W ten sposób dowiedliśmy prawdziwości równania (3.1).

Równość ta nie zależy ani od wyboru punktów a, b, c, \dots , ani od wyboru krzywej Γ łączącej punkty (1) i (2). Twierdzenie nasze jest słuszne dla dowolnej krzywej przechodzącej przez punkty (1) i (2).

Jeszcze uwaga dotycząca notacji: widzicie, że jeśli dla wygody zapiszemy

$$(\nabla\psi) \cdot ds = \nabla\psi \cdot ds, \quad (3.7)$$

nie będzie prowadziło to do żadnych pomyłek. Możemy więc teraz tak zapisać nasze twierdzenie:

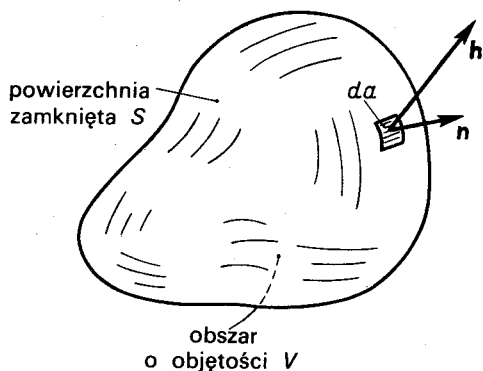
Twierdzenie 1

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\psi \cdot ds. \quad (3.8)$$

dowolna krzywa łącząca
punkty (1) i (2)

3-2. Strumień pola wektorowego

Zanim przejdziemy do następnego twierdzenia całkowego → twierdzenia o dywergencji — chcielibyśmy się zastanowić nad pewnym pojęciem, które ma łatwo zrozumiały sens fizyczny w przypadku przepływu ciepła. Wektor \mathbf{h} przedstawiał nam przepływ ciepła przez jednostkę powierzchni w ciągu jednostki czasu. Przypuśćmy, że wewnątrz bryły



3.3. Powierzchnia zamknięta S otacza obszar o objętości V . Wektor jednostkowy \mathbf{n} jest zewnętrzną normalną do elementu powierzchniowego da , a \mathbf{h} jest wektorem przepływu ciepła przez element powierzchniowy.

jednolitej substancji mamy jakąś powierzchnię zamkniętą S , zawierającą obszar o objętości V (rys. 3.3). Chcielibyśmy się dowiedzieć, ile ciepła wypływa z tego obszaru. Możemy oczywiście znaleźć tę wielkość obliczając całkowity przepływ ciepła przez powierzchnię S .

Niech da będzie elementem powierzchniowym. Symbol ten oznacza różniczkę dwuwymiarową. Jeśli na przykład powierzchnia leży w płaszczyźnie xy , to

$$da = dx dy.$$

Później będziemy mieć do czynienia z całkami objętościowymi i wtedy będzie wygodnie posługiwać się różniczką objętościową, która jest objętością małego sześcianu. Przez symbol dV rozumiemy

$$dV = dx dy dz.$$

Niektórzy zamiast da wolą pisać d^2a , co ma im przypominać, że jest to wielkość drugiego rzędu. Piszą oni również d^3V zamiast dV . My będziemy używać prostszej notacji, zakładając, iż jesteśmy w stanie zapamiętać, że powierzchnia ma dwa wymiary, a objętość – trzy.

Wypływ ciepła przez element powierzchniowy da równy jest powierzchni tego elementu pomnożonej przez składową wektora \mathbf{h} , prostopadłą do elementu da . Zdefiniowaliśmy już poprzednio \mathbf{n} jako wektor jednostkowy skierowany na zewnątrz prostopadle do powierzchni (rys. 3.3). Potrzebna nam składowa wektora \mathbf{h} równa się

$$h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.9)$$

Wypływ ciepła przez element powierzchniowy da wynosi więc

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.10)$$

Aby obliczyć całkowity przepływ ciepła przez jakąś powierzchnię, musimy zsumować przyczynki od wszystkich elementów powierzchni, czyli, innymi słowy, całkujemy wyrażenie (3.10) po całej powierzchni:

$$\text{całkowy wypływ ciepła przez powierzchnię } S = \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.11)$$

Tę całkę powierzchniową nazywamy „strumieniem \mathbf{h} przez powierzchnię”. Początkowo pod pojęciem strumień rozumiano przepływ i występująca tu całka powierzchniowa oznaczała po prostu przepływ wielkości opisywanej wektorem \mathbf{h} przez powierzchnię. Możemy powiedzieć: \mathbf{h} jest „gęstością prądu” przepływu ciepła, a całka powierzchniowa z przepływu jest całkowitym prądem ciepła skierowanym na zewnątrz powierzchni, to jest energią termiczną w jednostce czasu (mierzoną w dżulach na sekundę).

Chcielibyśmy uogólnić to pojęcie na przypadki, w których wektor nie reprezentuje żadnego przepływu, np. na przypadek pola elektrycznego. Jeśli mamy na to ochotę, możemy z całą pewnością całkować składową normalną pola elektrycznego po jakiejś powierzchni. Chociaż nie mamy tu żadnego przepływu, uzyskane wyrażenie nadal nazywamy strumieniem. Mówimy:

$$\text{strumień pola } \mathbf{E} \text{ przez powierzchnię } S = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.12)$$

Uogólniamy znaczenie słowa „strumień” na „całkę powierzchniową składowej normalnej wektora”. Będziemy używać tej samej definicji nawet wtedy, gdy rozważana powierzchnia nie będzie zamknięta, jak to było w dotychczasowych rozważaniach.

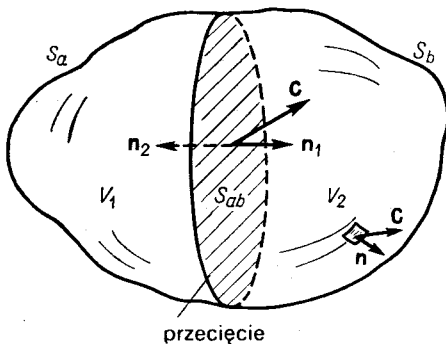
Wracając do szczególnego przypadku przepływu ciepła, rozważmy sytuację, w której *ciepło jest zachowane*. Wyobraźmy sobie na przykład substancję, w której po początkowym zagrzaniu ciepło ani nie powstaje, ani też nie ginie. Jeśli w takich warunkach wypadkowy wypływ ciepła przez zamkniętą powierzchnię będzie różny od zera, to zawartość ciepła w tym obszarze będzie musiała maleć. Tak więc w warunkach, w których ciepło będzie zachowane, musi zachodzić równość:

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = - \frac{dQ}{dt}, \quad (3.13)$$

gdzie Q jest ciepłem zawartym wewnątrz powierzchni S . Strumień ciepła wypływający z powierzchni S równy jest zmianie czasowej całkowitej ilości ciepła Q wewnątrz powierzchni S , wziętej ze znakiem minus. Taka interpretacja jest możliwa dlatego, że mówimy o przepływie ciepła i dlatego, że założyliśmy, iż ciepło jest zachowane. Nie moglibyśmy, oczywiście, mówić o całkowitym cieple wewnątrz obszaru o jakiejś objętości, gdyby ciepło było w nim wytwarzane.

Chcielibyśmy teraz wskazać na ciekawy fakt, dotyczący strumienia dowolnego wektora. Jeśli chcecie, możecie nadal myśleć o wektorze strumienia ciepła, ale to, co powiemy, odnosi się do każdego pola wektorowego \mathbf{C} . Wyobraźmy sobie powierzchnię zamkniętą S , zawierającą pewien obszar o objętości V . Podzielmy ten obszar na dwie części, dokonując przecięcia, tak jak to pokazuje rys. 3.4. Mamy teraz dwie powierzchnie zamknięte, obejmujące dwa obszary o objętościach V_1 i V_2 . Pierwszy obszar o objętości V_1 zamknięty jest powierzchnią S_1 , utworzoną z części S_a powierzchni pierwotnej i z powierzchni przecięcia S_{ab} . Drugi obszar o objętości V_2 zamknięty jest powierzchnią S_2 , utworzoną z reszty powierzchni pierwotnej S_b i z powierzchni przecięcia S_{ab} . Rozważmy teraz następujące

3.4. Obszar V zawarty wewnątrz powierzchni S został podzielony na dwie części przez przecięcie powierzchnią S_{ab} . Mamy teraz obszar V_1 , zamknięty powierzchnią $S_1 = S_a + S_{ab}$, oraz obszar V_2 , zamknięty powierzchnią $S_2 = S_b + S_{ab}$.



zagadnienie. Przypuśćmy, że obliczymy strumień przez powierzchnię S_1 i dodamy do niego strumień przez powierzchnię S_2 . Czy ta suma będzie równa strumieniowi przez całą naszą pierwotną powierzchnię? Okazuje się, że tak. Strumienie przez powierzchnię S_{ab} , wspólną dla S_1 i S_2 , znoszą się. Strumień wektora C z pierwszego obszaru będzie równy

$$\text{strumień przez powierzchnię } S_1 = \int_{S_a} C \cdot n \, da + \int_{S_{ab}} C \cdot n_1 \, da, \quad (3.14)$$

a strumień z drugiego obszaru będzie równy

$$\text{strumień przez powierzchnię } S_2 = \int_{S_b} C \cdot n \, da + \int_{S_{ab}} C \cdot n_2 \, da. \quad (3.15)$$

Zauważcie, że w drugiej całce n_1 oznacza skierowaną na zewnątrz normalną do powierzchni S_{ab} , gdy ta powierzchnia jest częścią powierzchni S_1 . Gdy natomiast powierzchnię S_{ab} traktujemy jako część powierzchni S_2 , skierowaną na zewnątrz normalną oznaczamy przez n_2 (por. rys. 3.4), Rzecz oczywista, że $n_1 = -n_2$, a więc

$$\int_{S_{ab}} C \cdot n_1 \, da = - \int_{S_{ab}} C \cdot n_2 \, da. \quad (3.16)$$

Dodając równania (3.14) i (3.15) widzimy, że suma strumieni przez powierzchnię S_1 i S_2 jest po prostu sumą dwóch całek, które razem dają strumień przez naszą pierwotną powierzchnię $S = S_a + S_b$.

Strumień przez pełną powierzchnię S można więc uważać za sumę strumieni wypływających z dwóch obszarów, na jakie został podzielony pierwotny obszar. Podobnie możemy taki podział prowadzić dalej przecinając obszar o objętości V_1 na dwie dalsze części. Tak więc przy *dowolnym* sposobie podziału pierwotnego obszaru strumień przez powierzchnię zewnętrzną równy jest sumie strumieni wypływających ze wszystkich części, na które został ten obszar podzielony.

3-3. Strumień wypływający z kostki; twierdzenie Gaussa

Rozważmy teraz przypadek szczególnie małego sześcianu, czyli kostki^{*)} i znajdziemy wypływający z niej strumień. Weźmy kostkę o krawędziach równoległych do osi współrzędnych (rys. 3.5). Niech współrzędne naroża leżącego najbliżej początku układu będą x, y, z , a długość krawędzi kostki w kierunku osi x niech będzie równa Δx , w kierunku osi y — Δy , oraz w kierunku osi z — Δz . Chcemy znaleźć strumień pola wektorowego C przez powierzchnię kostki. Obliczymy to sumując strumienie przez każdą z sześciu ścian. Weźmy najpierw ścianę oznaczoną cyfrą 1 na rysunku. Strumień wypływający *na zewnątrz* przez tę ścianę jest składową wektora C w kierunku x wziętą ze znakiem minus, scałkowaną po powierzchni ściany. Ten strumień wynosi

$$- \int C_x \, dy \, dz.$$

^{*)} Całe podane tu rozumowanie słuszne jest także dla dowolnego prostopadłościanu.

Ponieważ wzięliśmy *małą* kostkę, całkę tę możemy przybliżyć przez wartość C_x w środku ściany, nazwanym punktem (1), pomnożoną przez powierzchnię ściany $\Delta y \Delta z$:

$$\text{strumień z powierzchni 1} = -C_x(1) \Delta y \Delta z.$$

Podobnie dla strumienia wypływającego przez ścianę 2 napiszemy:

$$\text{strumień z powierzchni 2} = C_x(2) \Delta y \Delta z.$$

$C_x(1)$ i $C_x(2)$ na ogół się nieco różnią. Jeśli wielkość Δx jest dostatecznie mała, to możemy napisać:

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x.$$

Będą jeszcze, oczywiście, wyrazy zawierające $(\Delta x)^2$ i wyższe potęgi, ale w granicznym przypadku małej wartości Δx możemy je pominąć. Tak więc strumień przez powierzchnię 2 będzie następujący:

$$\text{strumień z powierzchni 2} = \left[C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z.$$

Sumując strumienie dla ścian 1 i 2 otrzymamy:

$$\text{strumień z powierzchni 1 i 2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

W rzeczywistości pochodna powinna być liczona w środku ściany 1, to jest w punkcie $[x, y + (\Delta y/2), z + (\Delta z/2)]$. W granicznym przypadku nieskończenie małej kostki popełniamy mały błąd, który pomijamy licząc ją w narożu (x, y, z) .

Stosując takie samo rozumowanie do wszystkich innych par ścian otrzymamy

$$\text{strumień z powierzchni 3 i 4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

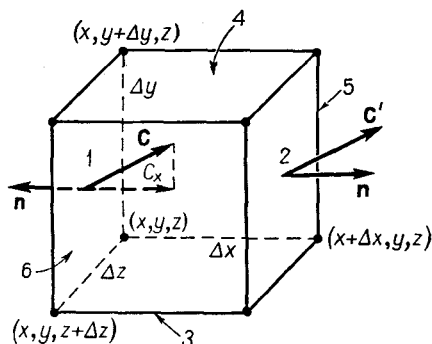
oraz

$$\text{strumień z powierzchni 5 i 6} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Całkowity strumień przez wszystkie ściany jest sumą tych wyrazów:

$$\int_{\text{powierzchnia kostki}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, da = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Suma pochodnych jest po prostu równa $\nabla \cdot \mathbf{C}$, a $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ jest objętością kostki. Dla *kostki nieskończenie małej* będziemy mieli



3.5. Obliczanie strumienia \mathbf{C} wypływającego z małego sześcianu

$$\int_{\substack{\text{powierzchnia} \\ \text{kostki}}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, da = (\nabla \cdot \mathbf{C}) \Delta V. \quad (3.17)$$

Wykazaliśmy, że strumień z powierzchni nieskończenie małej kostki jest równy dywergencji wektora pomnożonej przez objętość kostki. Widzimy teraz, jakie jest znaczenie dywergencji wektora. Dywergencja wektora \mathbf{C} w punkcie P jest strumieniem — „wypływem” — *na jednostkę objętości* w otoczeniu punktu P .

Zwiąaliśmy dywergencję wektora \mathbf{C} ze strumieniem \mathbf{C} tego wektora z każdego nieskończenie małego obszaru. Dla dowolnego skończonego obszaru możemy skorzystać z wyżej dowiedzionego faktu, że całkowity strumień z jakiegoś obszaru jest sumą strumieni z każdej jego części. Możemy więc dywergencję scałkować po całej objętości. Prowadzi nas to do twierdzenia, że całka po dowolnej powierzchni zamkniętej ze składowej normalnej wektora jest równa całce objętościowej po obszarze ograniczonym tą powierzchnią, z dywergencji tego wektora. To właśnie jest twierdzenie Gaussa.

Twierdzenie Gaussa:

$$\int_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{C} \, dV, \quad (3.18)$$

gdzie S jest dowolną powierzchnią zamykającą obszar V .

3-4. Przewodnictwo cieplne; równanie dyfuzji

Aby lepiej poznać twierdzenie Gaussa, rozpatrzmy jakiś przykład zastosowania tego twierdzenia. Weźmy znowu przypadek przepływu ciepła, powiedzmy w metalu. Przypuśćmy, że mamy do czynienia z prostą sytuacją: całe ciepło zostało już dostarczone i obecnie ciało stygnie. Nie ma źródeł ciepła, a więc ciepło jest zachowane. Ile ciepła znajduje się w jakiejś chwili w wybranym obszarze przestrzennym? Ilość ta musi się *zmniejszać* o ilość, która wypływa przez powierzchnię tego obszaru. Jeśli nasz obszar jest małą kostką, to zgodnie z równaniem (3.17) możemy napisać:

$$\text{ciepło uciekające} = \int_{\substack{\text{powierzchnia} \\ \text{kostki}}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, da = \nabla \cdot \mathbf{h} \Delta V. \quad (3.19)$$

To oczywiście musi się równać szybkości ubywania ciepła z wnętrza kostki. Jeśli q jest ilością ciepła na jednostkę objętości, to ilość ciepła w kostce wynosi $q \Delta V$, a szybkość, z jaką ciepło ubywa, dana jest wzorem

$$-\frac{d}{dt}(q \Delta V) = -\frac{dq}{dt} \Delta V. \quad (3.20)$$

Porównując wzory (3.19) i (3.20) widzimy, że

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (3.21)$$

Zwróćcie dobrze uwagę na postać tego równania — z taką postacią równania często się spotykamy w fizyce. Równanie to wyraża zasadę zachowania — w tym przypadku zasadę zachowania ciepła. Ten sam fakt fizyczny wyrażaliśmy inaczej w równaniu (3.13). Tam mieliśmy postać *całkową* zasady zachowania, podczas gdy tu mamy postać *różniczkową*.

Równanie (3.21) uzyskaliśmy stosując równanie (3.13) do nieskończonej małej kostki, możemy jednak dojść do niego jeszcze inną drogą. Dla dużego obszaru V , ograniczonego powierzchnią S , twierdzenie Gaussa mówi, że

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{h} \, dV. \quad (3.22)$$

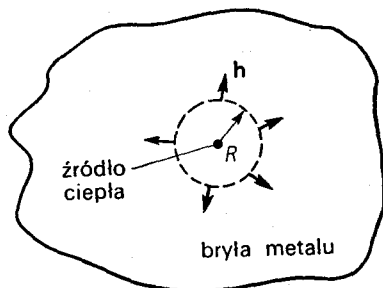
Korzystając z równania (3.21) stwierdzimy, że całka po prawej stronie równania (3.22) jest równa po prostu $-dQ/dt$ i znowu otrzymamy równanie (3.13).

Rozważmy teraz inny przypadek. Wyobraźmy sobie, że mamy bryłę materiału i że w jej wnętrzu jest małe wydrążenie, w którym zachodzi jakaś reakcja chemiczna wytwarzająca ciepło, bądź że w wydrążeniu tym jest opornik grzany prądem elektrycznym. Załóżmy, że ciepło jest wytwarzane praktycznie w jednym punkcie. Niech W będzie energią wyzwalaną w tym punkcie w ciągu jednostki czasu. Założymy także, że poza tym punktem ciepło jest zachowane i że proces wytwarzania ciepła zachodzi przez dłuższy czas, tak że po tym czasie temperatura już nigdzie się nie zmienia. Problem jest taki: jak wygląda wektor cieplny \mathbf{h} w różnych miejscach metalowej bryły i jak duży jest przepływ ciepła w każdym jej punkcie?

Wiemy, że jeśli scałkujemy po powierzchni zamkniętej, otaczającej źródło, składową normalną \mathbf{h} , to otrzymamy zawsze W . Całe ciepło, jakie jest wytwarzane w źródle punktowym, musi wypłynąć przez powierzchnię, gdyż założyliśmy, że przepływ jest stały. Stoimy przed trudnym problemem znalezienia pola wektorowego, które scałkowane po dowolnej powierzchni w wyniku zawsze da W . Pole to możemy znaleźć dość łatwo, jeśli weźmiemy pod uwagę pewną szczególną powierzchnię. Weźmy kulę o promieniu R ze środkiem w źródle i załóżmy, że przepływ ciepła jest radialny (rys. 3.6). Intuicja nam mówi, że jeśli bryła materiału jest duża i nie znajdujemy się zbyt blisko brzegów, to pole \mathbf{h} powinno mieć kierunek radialny, a jego wartość powinna być taka sama we wszystkich punktach na kuli. Widzicie, że aby znaleźć odpowiedź, dodajemy do wzorów matematycznych pewną porcję domysłów — to co się zwykle nazywa „intuicją fizyczną”.

Gdy pole \mathbf{h} jest radialne i ma symetrię kulistą, całka po kuli ze składowej normalnej wektora \mathbf{h} ma bardzo prostą postać, gdyż składowa normalna jest wtedy po prostu równa długości wektora \mathbf{h} i jest stała. Pole powierzchni, po której całkujemy, jest równe $4\pi R^2$. Mamy więc

3.6. W obszarze bliskim punkowego źródła ciepła przepływ ciepła jest skierowany radialnie na zewnątrz.



$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, da = h \cdot 4\pi R^2, \quad (3.23)$$

gdzie h jest długością wektora \mathbf{h} . Ta całka powinna być równa W , ilości ciepła wytwarzanej przez źródło w jednostce czasu. Otrzymujemy więc

$$h = \frac{W}{4\pi R^2},$$

czyli

$$\mathbf{h} = \frac{W}{4\pi R^2} \mathbf{e}_r, \quad (3.24)$$

gdzie \mathbf{e}_r jest, jak zwykle, wektorem jednostkowym w kierunku radialnym. Równanie to mówi, że długość wektora \mathbf{h} jest proporcjonalna do W , a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od źródła.

Uzyskany przed chwilą wynik odnosi się do przepływu ciepła w pobliżu źródła punktowego. Spróbujmy teraz znaleźć równania opisujące zupełnie ogólny przypadek przepływu ciepła, przy jedynym założeniu, że ciepło jest zachowane. Będziemy więc zajmować się tylko tym, co się dzieje poza źródłami lub poza miejscami pochłaniania ciepła.

Równanie różniczkowe przewodnictwa cieplnego zostało wyprowadzone w rozdz. 2. Zgodnie z równaniem (2.44)

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T. \quad (3.25)$$

Pamiętajcie, że nie jest to ścisły związek, ale jest on w przypadku niektórych materiałów, a szczególnie metali, zupełnie dobrym przybliżeniem. Ma on zastosowanie, oczywiście, tylko do tych obszarów, gdzie nie ma ani wytwarzania, ani pochłaniania ciepła. Wyprowadziliśmy przedtem inny związek [równanie (3.21)] dla przypadku, gdy ciepło jest zachowane. Łącząc go z równaniem (3.25) otrzymamy:

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{h} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T),$$

czyli

$$\frac{dq}{dt} = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (3.26)$$

gdzie κ jest stałą. Pamiętajcie, że q jest ilością ciepła w jednostce objętości, a operator $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ jest laplasjanem:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Jeżeli zrobimy teraz jeszcze jedno założenie, będziemy mogli uzyskać bardzo ciekawe równanie. Zakładamy mianowicie, że temperatura materiału jest proporcjonalna do ciepła zawartego w jednostce objętości, czyli zakładamy, że materiał ma określone ciepło właściwe. Gdy założenie to jest słuszne, jak to często bywa, możemy napisać:

$$\Delta q = c_v \Delta T,$$

czyli

$$\frac{dq}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}. \quad (3.27)$$

Szybkość zmiany ilości ciepła jest proporcjonalna do szybkości zmiany temperatury. Współczynnik proporcjonalności c_v jest ciepłem właściwym na jednostkę objętości. Z równań (3.26) i (3.27) otrzymujemy

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{c_v} \nabla^2 T. \quad (3.28)$$

Widzimy, że szybkość zmiany temperatury w każdym punkcie jest proporcjonalna do laplasjanu temperatury, który jest drugą pochodną funkcji współrzędnych, wyrażającej zależność temperatury od położenia. Mamy tu równanie różniczkowe temperatury T w zależności od x, y, z i t .

Równanie różniczkowe (3.28) nosi nazwę *równania dyfuzji ciepła*. Często zapisujemy je w postaci

$$\frac{dT}{dt} = D \nabla^2 T, \quad (3.29)$$

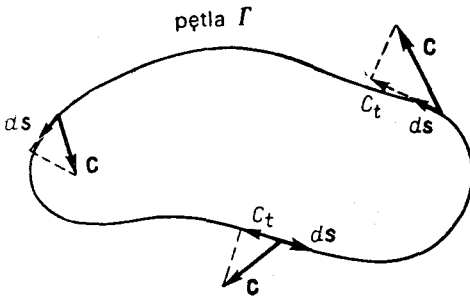
gdzie współczynnik D równy κ/c_v nazywany jest stałą *dyfuzji*.

Równanie dyfuzji występuje w wielu problemach fizycznych, dotyczących np. dyfuzji gazów, dyfuzji neutronów i wielu innych zjawisk. O fizyce tych zjawisk mówiliśmy już w rozdz. 43 tomu I (cz. 2). Teraz macie pełne równanie, które opisuje dyfuzję w jak najbardziej ogólnym przypadku. Później znajdziemy sposoby na rozwiązanie równania dyfuzji, aby móc zobaczyć, jak zmienia się temperatura w poszczególnych przypadkach. Wróćmy teraz do innych twierdzeń dotyczących pól wektorowych.

3-5. Krążenie pola wektorowego

Spójrzmy teraz na rotację w taki sam sposób, jak patrzyliśmy na dywergencję. Do twierdzenia Gaussa doszliśmy rozpatrując całość powierzchniową, chociaż nie było od początku oczywiste, że będziemy mieć do czynienia z dywergencją. Skąd wiedzieliśmy, że aby uzyskać dywergencję, należy całkować po powierzchni? Wcale nie było jasne, że otrzymamy taki wynik. Tak więc, z pozornym brakiem usprawiedliwienia, obliczymy teraz inną wielkość wektorową i pokażemy, że jest ona związana z rotacją. Tym razem obliczamy to, co nazywamy krążeniem pola wektorowego. Niech C będzie dowolnym polem wektorowym. Weźmy jego składową wzdłuż krzywej zamkniętej i obliczmy całość krzywoliniową tej składowej po całej krzywej zamkniętej. Tę całość nazywamy *krążeniem* pola wektorowego po krzywej zamkniętej. Nieco wcześniej w tym rozdziale zajmowaliśmy się całością krzywoliniową z $\nabla\psi$. Rozpatrzmy teraz całość krzywoliniową dla *dowolnego* pola wektorowego C .

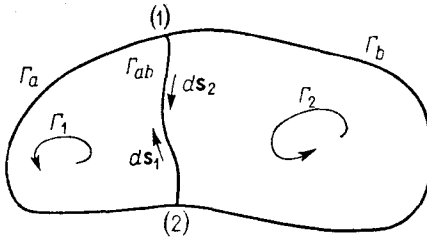
Niech I' będzie dowolną krzywą zamkniętą w przestrzeni. Przykład takiej krzywej pokazano na rys. 3.7. Całość krzywoliniowa wzdłuż takiej krzywej ze składowej stycznnej wektora C jest równa



3.7. Krążenie C po krzywej Γ jest całką krzywoliniową z C_t , składowej stycznej C .

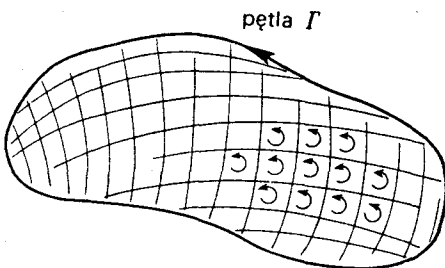
$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.30)$$

Zauważcie, że bierze się tu całkę po całej krzywej zamkniętej, którą w przyszłości będziemy krótko nazywać „pętlą”, a nie tylko od jednego punktu do drugiego, jak to robiliśmy poprzednio. Ma nam o tym przypominać małe kółeczko na znaku całki. Tę całkę nazywa się krążeniem pola wektorowego wokół krzywej Γ . Nazwa pochodzi z rozważań nad krążeniem cieczy, ale podobnie jak „strumień” została rozszerzona na wszystkie pola, nawet jeśli nie ma tam żadnej substancji, która by „krążyła”.



3.8. Krążenie wokół całej pętli jest sumą krążeń po dwóch pętlach: $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ i $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$.

3.9. Wybieramy jakąś powierzchnię ograniczoną pętlą Γ . Powierzchnię tę dzielimy na wiele małych powierzchni, z których każda jest w przybliżeniu kwadratem. Krążenie po krzywej Γ jest sumą krążeń po każdej z małych pętli.



Postępując podobnie, jak w przypadku strumienia, możemy wykazać, że krążenie po pętli jest sumą krążeń po jej dwóch częściowych pętlach. Podzielmy krzywą na dwie pętle łącząc punkty (1) i (2) jakąś krzywą przecinającą pierwotną krzywą (rys. 3.8). Mamy teraz dwie pętle: Γ_1 — utworzoną z Γ_a [która jest częścią pierwotnej krzywej na lewo od punktów (1) i (2)] i z Γ_{ab} [krzywej przecięcia łączącej punkt (1) z punktem (2)] oraz Γ_2 — utworzoną z Γ_b , to jest z pozostałej części pierwotnej krzywej, i z krzywej Γ_{ab} .

Krążenie po krzywej Γ_1 jest sumą całek po krzywej Γ_a i po krzywej Γ_{ab} . Podobnie, krążenie po krzywej Γ_2 jest sumą całek po krzywej Γ_b i po krzywej Γ_{ab} . Całka po krzywej Γ_{ab} ma przy całkowaniu po krzywej Γ_1 przeciwny znak niż przy całkowaniu po krzywej Γ_2 , musimy bowiem obie całki krzywoliniowe wziąć z tym samym kierunkiem obiegu.

Rozumując tak jak poprzednio, dojdziecie do wniosku, że suma tych dwóch krążeń da po prostu całkę wokół krzywej pierwotnej Γ . Części pochodzące od krzywej Γ_{ab} znoszą się. Krążenie po jednej części plus krążenie po drugiej części równa się krążeniu po obwodzie zewnętrznym. Proces podziału pętli pierwotnej na szereg mniejszych pętli można

przewieźć dalej. Gdy dodajemy krążenia po mniejszych pętłach, przyczynki do części wspólnych znoszą się i w wyniku suma jest równa krążeniu po pętli pierwotnej.

Przypuśćmy teraz, że pętla pierwotna ogranicza jakąś powierzchnię. Istnieje, oczywiście, nieskończona liczba powierzchni, dla których ta pętla jest konturem. Wyniki naszego rozumowania będą jednak niezależne od tego, którą z tych powierzchni wybierzemy. Podzielmy pętlę pierwotną na szereg małych pętli, leżących na wybranej przez nas powierzchni (rys. 3.9). Jeśli pętle są dostatecznie małe, to bez względu na kształt powierzchni możemy przyjąć, że każda z nich zamyka obszar płaski. Możemy również tak poprowadzić nasze pętle, aby były w przybliżeniu kwadratami. Krążenie po dużej pętli Γ możemy obliczyć znajdując krążenia po obwodach małych kwadratów i dodając je do siebie.

3-6. Krążenie po obwodzie kwadratu; twierdzenie Stokesa

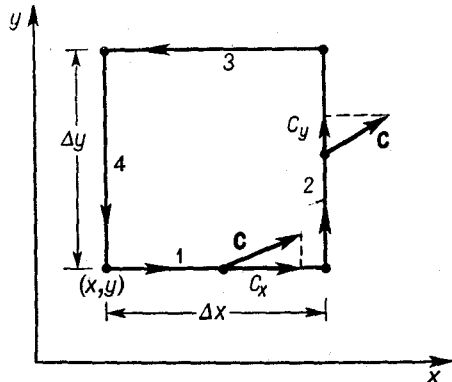
Jak znajdziemy krążenie dla każdego małego kwadratu? Zależy to od tego, jak zorientowany jest taki kwadrat w przestrzeni. Jeśli kwadrat jest odpowiednio ustawiony, jeśli na przykład leży w jednej z płaszczyzn wyznaczonych przez osie układu, obliczenia będą łatwe. Dotychczas nie robiliśmy jeszcze żadnych założeń co do orientacji osi współrzędnych, możemy więc teraz wybrać osie tak, aby mały kwadracik, na którym skupiamy teraz uwagę, leżał w płaszczyźnie xy , tak jak to pokazano na rys. 3.10. Jeśli wynik naszych rozważań wyrazimy w notacji wektorowej, to pozostanie on niezmienny, bez względu na jakąś szczególną orientację płaszczyzny.

Chcemy teraz znaleźć krążenie pola C wokół naszego małego kwadratu. Całkę krzywoliniową możemy obliczyć łatwo, jeśli uczynimy kwadrat tak małym, aby wektor C praktycznie nie zmieniał się wzdłuż żadnego z jego boków. Założenie to jest tym bliższe prawdy, im mniejszy jest kwadrat, tak że naprawdę mówimy tu właściwie o kwadratach nieskończenie małych. Zaczynając w punkcie (x, y) — lewym dolnym rogu figury — posuwamy się w kierunku wskazanym strzałkami. Wzdłuż pierwszego boku — oznaczonego (1) — składowa styczna jest równa $C_x(1)$, a odległość wynosi Δx . Pierwszy wyraz funkcji podcałkowej będzie więc równy $C_x(1) \Delta x$. Dla drugiego boku otrzymamy $C_y(2) \Delta y$, dla trzeciego otrzymamy $-C_x(3) \Delta x$, a dla czwartego: $-C_y(4) \Delta y$. Znaki „minus” wynikają stąd, że zawsze bierzemy składową styczną do kierunku, w którym prowadzimy całkowanie. Całka okrężna jest więc równa

$$\oint C \cdot ds = C_x(1) \Delta x + C_y(2) \Delta y - C_x(3) \Delta x - C_y(4) \Delta y. \quad (3.31)$$

Spójrzmy na pierwszy i trzeci składnik sumy po prawej stronie tego równania. Razem

3.10. Obliczanie krążenia C po małym kwadracie



dają one

$$[C_x(1) - C_x(3)] \Delta x. \quad (3.32)$$

Uważacie zapewne, że w przyjętym przez nas przybliżeniu powyższa różnica jest równa zeru. Jest to prawdziwe jedynie w pierwszym przybliżeniu. Będziemy jednak bardziej dokładni, gdy uwzględnimy zmienność C_x . Uczynimy to biorąc pod uwagę, że

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y. \quad (3.33)$$

Następne kolejne przybliżenie zawierałoby wyrazy rzędu $(\Delta y)^2$, a ponieważ ostatecznie chodzi nam o granicę przy $\Delta y \rightarrow 0$, takie wyrazy można pominąć. Zestawiając równanie (3.33) z (3.32) widzimy, że

$$[C_x(1) - C_x(3)] \Delta y = - \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (3.34)$$

W przyjętym przybliżeniu wystarczy założyć, że występująca tu pochodna jest wzięta w punkcie (x, y) .

Zupełnie podobne wzory możemy napisać dla dwóch pozostałych składników krążenia:

$$C_y(2) \Delta y - C_y(4) \Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (3.35)$$

Krażenie po obwodzie naszego kwadratu jest więc równe

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y, \quad (3.36)$$

co jest interesujące, gdyż dwa wyrazy w nawiasie stanowią po prostu składową w kierunku z rotacji wektora \mathbf{C} . Zauważmy również, że $\Delta x \Delta y$ jest powierzchnią kwadratu. Możemy więc wyrazić nasze krążenie zapisane wzorem (3.36) w postaci

$$(\nabla \times \mathbf{C})_z \Delta a.$$

Składowa w kierunku z oznacza tu składową *normalną* do elementu powierzchni. Możemy więc napisać wyrażenie na krążenie po obwodzie elementarnego kwadratu w niezmienniczej postaci wektorowej:

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = (\nabla \times \mathbf{C})_n \Delta a = (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \Delta a. \quad (3.37)$$

Dośliśmy do następującego wniosku: krążenie dowolnego wektora \mathbf{C} po obwodzie nieskończenie małego kwadratu równe jest iloczynowi składowej rotacji normalnej do powierzchni kwadratu i jego pola powierzchni.

Możemy teraz łatwo podać związek między krążeniem dookoła dowolnej krzywej zamkniętej I , a rotacją pola wektorowego. Figurę ograniczoną krzywą zamkniętą wypełniamy nieskończenie małymi kwadratami i sumujemy krążenia dookoła tych kwadratów. Otrzymana suma może być wyrażona przez całkę. W wyniku otrzymujemy bardzo użyteczne twierdzenie, które (od nazwiska Williama Stokesa) nosi nazwę twierdzenia Stokesa.

Twierdzenie Stokesa:

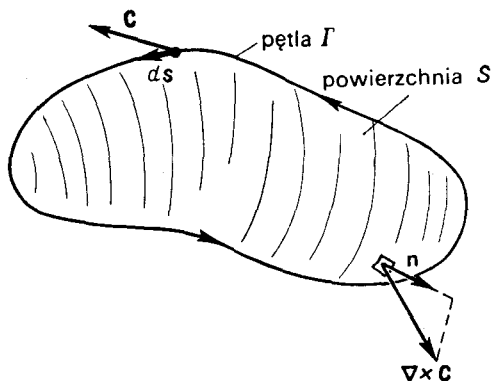
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{C})_n da, \quad (3.38)$$

gdzie S oznacza powierzchnię ograniczoną krzywą Γ .

Musimy teraz ustalić konwencję co do znaków. Na rysunku 3.10 oś z skierowaną jest *ku* nam w „zwykłym”, tzn. w prawoskrętnym układzie odniesienia. Prowadząc całkowanie w kierunku „dodatniego” obrotu, tj. odwrotnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, stwierdziliśmy, że krążenie równe jest składowej w kierunku z wektora $\nabla \times \mathbf{C}$. Całkując w kierunku „ujemnego obrotu”, tj. zgodnie z ruchem wskazówek zegara, otrzymalibyśmy wynik z przeciwnym znakiem. Skąd więc możemy wiedzieć, który kierunek wybrać za dodatni dla normalnej składowej wektora $\nabla \times \mathbf{C}$?

„Dodatnia” normalna musi być zawsze ustawiona względem „kierunku obrotu”, według którego całkujemy, tak jak na rys. 3.10. Na rysunku 3.11 jest to pokazane dla przypadku ogólnego.

Jednym ze sposobów zapamiętania tego związku jest tzw. reguła prawej ręki. Jeśli ułożyć palce *prawej* ręki wzdłuż krzywej Γ tak, aby czubki palców wskazywały dodatni kierunek ds , to odchylony kciuk wskaże *dodatni* kierunek normalnej do powierzchni S .

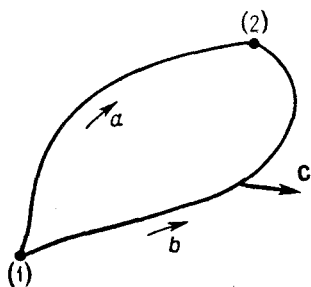


3.11. Krążenie \mathbf{C} wzdłuż krzywej Γ jest całką powierzchniową składowej normalnej $\nabla \times \mathbf{C}$.

3-7. Pola bezwirowe i bezźródłowe

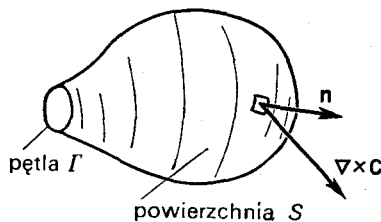
Chcielibyśmy się teraz zastanowić nad niektórymi konsekwencjami naszych nowych twierdzeń. Weźmy najpierw przypadek wektora, którego rotacja jest *wszędzie* zerem. Twierdzenie Stokesa mówi, że wtedy krążenie po dowolnej krzywej zamkniętej też będzie zerem. Jeśli teraz wybierzemy na krzywej zamkniętej dwa punkty (1) i (2) (rys. 3.12), to całka krzywoliniowa ze składowej stycznej wzięta od punktu (1) do (2) jest niezależna od tego, po której z dwóch możliwych dróg będziemy całkować. Możemy więc wnioskować, że całka od punktu (1) do (2) zależy tylko od położenia tych punktów, tzn. jest pewną funkcją wyłącznie położenia. To samo rozumowanie stosowaliśmy w rozdz. 14 tomu I (cz. 1), gdzie dowiedliśmy, że gdy całka z jakiejś wielkości po krzywej zamkniętej jest zerem, to można tę całkę przedstawić jako różnicę pewnej funkcji położenia tych dwóch punktów. Ten fakt pozwolił nam wprowadzić pojęcie potencjału. Dowiedliśmy ponadto, że takie pole wektorowe, którego całka krzywoliniowa ze składowej stycznej nie zależy od drogi całkowania, jest gradientem funkcji potencjalnej [równanie (14.13) z tomu I (cz. 1)].

Wynika stąd, że każde pole wektorowe, którego rotacja jest zerem, równa się gradientowi pewnej funkcji skalarnej, tzn. jeżeli $\nabla \times \mathbf{C} = 0$ wszędzie, to istnieje takie ψ , dla któ-



3.12. Jeżeli wektor $\nabla \times \mathbf{C}$ jest równy zeru, to krążenie wokół krzywej zamkniętej Γ jest zerem. Całka krzywoliniowa z $\mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$ od punktu (1) do punktu (2) wzdłuż a musi być taka sama jak całka krzywoliniowa wzdłuż b .

3.13. Przechodząc z zamkniętą powierzchnią do granicy, stwierdzamy, że całka powierzchniowa z $(\nabla \times \mathbf{C})_n$ musi zniknąć.



skończony, całka krzywoliniowa po Γ będzie dążyć do zera; gdy zacieśniamy pętlę, całka będzie, z grubsza biorąc, proporcjonalna do obwodu Γ , który dąży do zera. Zgodnie z twierdzeniem Stokesa zniknąć musi również całka powierzchniowa z $(\nabla \times \mathbf{C})_n$. Mamy więc nowe twierdzenie:

$$\int_{\text{dowolna powierzchnia zamknięta}} (\nabla \times \mathbf{C})_n da = 0. \quad (3.39)$$

Jest to ciekawe dla nas, ponieważ mamy już jedno twierdzenie o całce powierzchniowej pola wektorowego. Zgodnie z twierdzeniem Gaussa [równanie (3.18)] taka całka powierzchniowa równa jest całce objętościowej z dywergencji wektora. Stosując twierdzenie Gaussa do iloczynu wektorowego $(\nabla \times \mathbf{C})$ mamy:

rego $\mathbf{C} = \nabla\psi$. To bardzo pożyteczny wniosek. Możemy bowiem, jeśli to będzie nam potrzebne, opisać ten specjalny rodzaj pola wektorowego poprzez pole skalarne.

Pokażmy teraz coś innego. Przypuśćmy, że mamy *dowolne* pole skalarne φ (fi). Jeśli weźmiemy jego gradient $\nabla\varphi$, to całka tego wektora po każdej krzywej zamkniętej będzie zerem. Całką krzywoliniową od punktu (1) do punktu (2) jest $\varphi(1) - \varphi(2)$. Jeśli punkty (1) i (2) się pokrywają, twierdzenie 1 [równanie (3.8)] mówi nam, że ta całka krzywoliniowa jest zerem:

$$\oint_{\text{pętla}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Stosując twierdzenie Stokesa mamy

$$\nabla \times (\nabla\varphi) da = 0$$

po *dowolnej* powierzchni. Jeśli całka jest zerem po *każdej* powierzchni, to funkcja podcałkowa musi być zerem. Tak więc

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0 \text{ zawsze.}$$

Tego samego dowiedliśmy w § 2-7, posługując się algebrą wektorów.

Weźmy teraz przypadek specjalny, w którym będziemy wypełniać *małą* pętlę Γ *dużą* powierzchnią S , tak jak to pokazuje rys. 3.13. Chcielibyśmy się dowiedzieć, co się stanie, gdy pętla skurczy się do punktu, tak że powierzchnia stanie się powierzchnią zamkniętą. Jeśli wektor \mathbf{C} będzie wszędzie

$$\int_{\substack{\text{powierzchnia} \\ \text{zamknięta}}} (\nabla \times \mathbf{C})_n da = \int_{\substack{\text{zawarty} \\ \text{w niej obszar}}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) dV. \quad (3.40)$$

Dochodzimy więc do wniosku, że druga całka też musi być równa zero:

$$\int_{\substack{\text{dowolny} \\ \text{obszar}}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) dV = 0. \quad (3.41)$$

Jest to prawdziwe dla każdego pola wektorowego \mathbf{C} . Ponieważ równanie (3.41) zachodzi dla *każdego obszaru*, w *każdym* więc punkcie przestrzeni funkcja podcałkowa musi być równa zero, czyli

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) = 0 \text{ wszędzie.}$$

Ten sam wynik uzyskaliśmy w algebrze wektorów w § 2-7. Teraz zaczynamy dostrzegać, jak wszystko zaczyna pasować do siebie.

3-8. Streszczenie

Streśćmy teraz to, czegośmy się dowiedzieli o rachunku wektorowym. Oto najważniejsze punkty rozdz. 2 i 3.

1. Operatory $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ i $\partial/\partial z$ można uważać za trzy składowe operatora wektorowego ∇ , a wzory wynikające z algebry wektorów, gdy ten operator traktuje się jako wektor, nadal będą słuszne:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

2. Różnica wartości pola skalarnego w dwóch punktach jest równa całce krzywoliniowej ze składowej stycznej gradientu tego skalaru wziętej wzdłuż dowolnej krzywej od punktu (1) do punktu (2)

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(1) \\ \text{dowolna krzywa}}}^{(2)} \nabla \psi \cdot ds. \quad (3.42)$$

3. Całka powierzchniowa po powierzchni zamkniętej składowej normalnej dowolnego wektora równa jest całce dywergencji wektora, wziętej po objętości obszaru zawartego w tej powierzchni:

$$\int_{\substack{\text{powierzchnia} \\ \text{zamknięta}}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\substack{\text{zawarty} \\ \text{w niej obszar}}} \nabla \cdot \mathbf{C} dV. \quad (3.43)$$

4. Całka krzywoliniowa po krzywej zamkniętej ze składowej stycznej dowolnego wektora jest równa całce powierzchniowej po dowolnej powierzchni ograniczonej tą krzywą ze składowej normalnej dywergencji tego wektora.

$$\int_{\text{obwód}} \mathbf{C} \cdot ds = \int_{\text{powierzchnia}} (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.44)$$

elektrostatyka

4-1. Statyka

Zacniemy teraz dokładnie studiować teorię elektromagnetyzmu. Cała ta teoria zawarta jest w równaniach Maxwella.

Równania Maxwella:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.2)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

Sytuacje opisane tymi równaniami mogą być bardzo skomplikowane. Rozpocniemy od rozważenia sytuacji prostszych i nauczymy się dawać sobie z nimi radę, zanim zabierzemy się do rozwiązywania zagadnień trudniejszych. Najłatwiejszy do rozpatrzenia jest taki przypadek, w którym nic się nie zmienia w czasie — tak zwany przypadek *statyczny*. Wszystkie ładunki są na stałe umiejscowione w przestrzeni, bądź też, jeśli się poruszają, to dają stały przepływ prądu (tak aby ρ i \mathbf{j} były stałe w czasie). Wtedy w równaniach Maxwella wszystkie wyrazy, które są pochodnymi czasowymi, są równe zero. Dla tego przypadku równania Maxwella wyglądają więc tak:

Elektrostatyka:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.6)$$

Magnetostatyka:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}, \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.8)$$

Zauważcie pewną interesującą cechę tego układu czterech równań. Można je podzielić na dwie pary. Pole elektryczne \mathbf{E} pojawia się tylko w pierwszej parze równań, a pole magnetyczne \mathbf{B} — tylko w drugiej. Te dwa pola nie są wzajemnie związane. Oznacza to, że *elektryczność i magnetyzm są zupełnie różnymi zjawiskami dopóty, dopóki ładunki i prądy są statyczne*. Wzajemna zależność pól \mathbf{E} i \mathbf{B} występuje dopiero wtedy, gdy pojawiają się zmiany w ładunkach i w prądach, gdy kondensator się ładuje lub gdy porusza się magnes. Zmiany te muszą być dostatecznie szybkie, tak aby pochodne czasowe w równaniach Maxwella przybrały znaczące wartości.

Jeśli przyjrzyjecie się równaniom statyki, zobaczycie, że badania dwóch działów fizyki, które nazywamy elektrostatyką i magnetostatyką, są idealne do poznania właściwości matematycznych pól wektorowych. W elektrostatyce mamy do czynienia z polem wektorowym bezwirowym (*rotacja równa zero*), w którym *dywergencja jest dana*, w magnetostatyce zaś z polem wektorowym bezźródłowym (*dywergencja równa zero*), w którym *dana jest rotacja*. Bardziej konwencjonalnym, a może wam się wydawać, że i bardziej zadowalającym sposobem przedstawiania teorii elektromagnetyzmu, jest rozpocząć naukę od elektrostatyki, a więc od poznania dywergencji, następnie przerobić magnetostatykę i rotację, a w końcu połączyć elektryczność razem z magnetyzmem. My wybraliśmy inną drogę — rozpoczęliśmy od kompletnej teorii rachunku wektorowego. Teraz zastosujemy go do specjalnego przypadku elektrostatyki, w którym pole \mathbf{E} jest dane pierwszą parą równań.

Zacniemy od najprostszych sytuacji, takich, w których położenia wszystkich ładunków są określone. Gdybyśmy mieli studiować tylko elektrostatykę na tym poziomie (jak będziemy to robić przez następne dwa rozdziały), życie byłoby bardzo proste, nawet prawie banalne. Wszystko tu, jak zobaczycie, można otrzymać z prawa Coulomba i kilku całkowań. W wielu realnych problemach elektrostatyki *nie znamy* początkowo położenia ładunków. Wiemy tylko, że rozłożone są w sposób, który zależy od właściwości materii. Położenia, które zajmują ładunki, zależą od pola \mathbf{E} , a ono z kolei zależy od położenia ładunków. Tu właśnie sprawy mogą się bardzo skomplikować. Gdy, na przykład, do przewodnika lub izolatora zbliżyć ciało naładowane, elektrony i protony w przewodniku lub izolatorze *zaczną* się poruszać. Gęstość ładunku ρ w równaniu (4.5) będzie pochodzić częściowo od *znanego* ładunku, który wprowadziliśmy, częściowo jednak od ładunków poruszających się w przewodniku. Trzeba wziąć pod uwagę przyczynki od wszystkich ładunków. Mogą tu powstać subtelne i interesujące zagadnienia. W tym rozdziale, poświęconym elektrostatyce, nie będziemy się jednak zajmować najpiękniejszymi i najciekawszymi jej aspektami. Będziemy rozważać tu tylko sytuacje, w których możemy przyjąć położenia wszystkich ładunków za znane. Musicie się nauczyć dawać sobie z nimi radę, zanim przejdziemy do innych przypadków.

4-2. Prawo Coulomba; zasada superpozycji

Najlogiczniej byłoby rozpocząć nasze rozważania od równań (4.5) i (4.6), łatwiej jednak będzie, gdy zaczniemy od czegoś innego, a później wrócimy do tych równań. Osiągnięte wyniki będą równoważne. Zaczniemy od prawa, o którym już wspominaliśmy poprzednio, nazwanego prawem Coulomba, a które mówi, że między dwoma spoczywającymi ładunkami występuje siła wprost proporcjonalna do iloczynu ładunków, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi. Siła ta jest skierowana wzdłuż prostej łączącej te ładunki.

Prawo Coulomba:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2; \quad (4.9)$$

\mathbf{F}_1 jest siłą działającą na ładunek q_1 , \mathbf{e}_{12} jest wektorem jednostkowym skierowanym od ładunku q_2 do q_1 , a r_{12} jest odległością między ładunkami q_1 i q_2 . Siła \mathbf{F}_2 działająca na ładunek q_2 jest równa \mathbf{F}_1 , lecz przeciwnie skierowana.

Współczynnik proporcjonalności napisaliśmy tu, ze względów historycznych, jako $1/4\pi\epsilon_0$. W stosowanym przez nas układzie jednostek — układzie SI — zdefiniowany jest on jako równy dokładnie 10^{-7} razy kwadrat prędkości światła. Ponieważ prędkość światła wynosi w przybliżeniu $3 \cdot 10^8$ m/s, więc współczynnik ten wynosi około $9 \cdot 10^9$. Jego wymiarem jest niuton·metr² na kulomb², czyli wolt·metr na kulomb.

$$\epsilon_0 c^2 = \frac{10^7}{4\pi}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$$

$$[\epsilon_0] = \text{kulomb}^2/\text{niuton} \cdot \text{metr}^2$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \text{ (z definicji)}$$

$$= 9,0 \cdot 10^9 \text{ (z doświadczenia)}. \quad (4.10)$$

Jednostka: niuton·metr²/kulomb²,
lub wolt·metr/kulomb.

Gdy mamy więcej niż dwa ładunki — a to są jedyne naprawdę ciekawe przypadki — musimy uzupełnić prawo Coulomba o jeszcze jedno stwierdzenie wynikające z obserwacji: siła działająca na jakiś ładunek jest sumą wektorową sił kulombowskich pochodzących od każdego z pozostałych ładunków. Stwierdzenie to nazywamy „zasadą superpozycji”. I to właściwie jest już cała elektrostatyka. Nie ma w niej nic poza prawem Coulomba i zasadą superpozycji. Równania (4.5) i (4.6) — równania elektrostatyki — tyle właśnie mówią, ani mniej, ani więcej.

Posługując się prawem Coulomba dogodnie będzie wprowadzić pojęcie pola elektrycznego \mathbf{E} . Mówimy, że pole $\mathbf{E}(1)$ jest siłą działającą na jednostkę ładunku q_1 , pochodzącą od wszystkich pozostałych ładunków. Dzieliąc równanie (4.9) przez q_1 , otrzymamy na pole

pochodzące od ładunku q_2 , różnego od q_1 , wzór

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}. \quad (4.11)$$

Uważamy przy tym, że pole $\mathbf{E}(1)$ mówi nam coś o punkcie (1), nawet gdy nie ma w nim ładunku q_1 , przy założeniu, że wszystkie inne ładunki zachowują swoje położenia. Mówimy: $\mathbf{E}(1)$ jest polem elektrycznym w punkcie (1).

Pole elektryczne \mathbf{E} jest polem wektorowym, pisząc więc równanie (4.11) mamy na myśli właściwie trzy równania, po jednym dla każdej składowej. Wypiszmy *explicite* składową w kierunku x :

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}. \quad (4.12)$$

Dla innych współrzędnych otrzymamy analogiczne wzory.

Jeśli jest wiele ładunków, to pole w punkcie (1) jest sumą pól pochodzących od każdego z ładunków. Każdy składnik tej sumy będzie wyglądał jak wyrażenia (4.11) lub (4.12). Niech q_j będzie wielkością j -ego ładunku, a r_{1j} — odlegością ładunku q_j od punktu (1), wtedy

$$\mathbf{E}(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^2} \mathbf{e}_{1j}, \quad (4.13)$$

co oczywiście znaczy, że

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j(x_1 - x_j)}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{3/2}}. \quad (4.14)$$

Często wygodnie jest traktować ładunki nie jak oddzielne paczki, tego na przykład rodzaju jak elektrony czy protony, lecz jak coś równomiernie rozmazanego, coś mającego — jak to się zwykle nazywa — „rozkład”. Taki opis jest w porządku, jeżeli tylko nie dotyczy zjawisk zachodzących w zbyt małej skali. Rozkład ładunku przedstawiamy przy pomocy „gęstości ładunku” $\rho(x, y, z)$. Jeśli ilość ładunku w małym obszarze o objętości ΔV_2 , znajdującego się w punkcie (2), jest równa Δq_2 , to gęstość ładunku wyraża się zależnością:

$$\Delta q_2 = \rho(2) \Delta V_2. \quad (4.15)$$

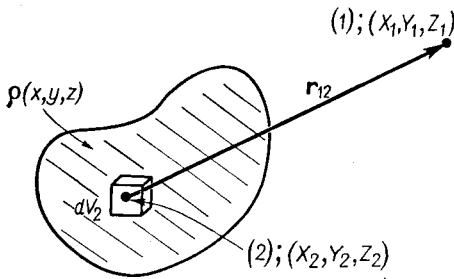
Używając takiego opisu musimy, przy posługiwaniu się prawem Coulomba, zastąpić sumy w równaniach (4.13) i (4.14) przez całki wzięte po całej objętości zawierającej ładunki. Otrzymamy wtedy

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{cała przestrzeń}} \frac{\rho(2)\mathbf{e}_{12} dV_2}{r_{12}^2}. \quad (4.16)$$

Niektórzy wolą taki zapis:

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}},$$

gdzie \mathbf{r}_{12} jest wektorem przesunięcia od punktu (1) do punktu (2), jak to pokazuje rys. 4.1.



4.1. Pole elektryczne E w punkcie (1), pochodzące od rozkładu ładunku, otrzymuje się przez całkowanie rozkładu. Punkt (1) może również leżeć wewnątrz rozkładu.

Wtedy równanie (4.16) zapiszemy w postaci:

$$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{cała przestrzeń}} \frac{\rho(2) \mathbf{r}_{12} dV_2}{r_{12}^3}. \quad (4.17)$$

Gdy chcemy coś obliczyć za pomocą takich całek, musimy zwykle wypisać je w pełnym rozwinięciu. Składowa w kierunku x równania (4.16) lub (4.17) będzie miała postać:

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \int_{\text{cała przestrzeń}} \frac{(x_1 - x_2) \rho(x_2, y_2, z_2) dx_2 dy_2 dz_2}{4\pi\epsilon_0 [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}. \quad (4.18)$$

Nie będziemy często używać tego wzoru. Piszemy go tylko po to, aby podkreślić, że rozwiązaliśmy całkowicie wszystkie problemy elektrostatyki, w których znamy położenia wszystkich ładunków. A teraz pytanie: Jeśli dane są ładunki, jakie będą pola? *Odpowiedź:* Trzeba wykonać to całkowanie. Nie ma więc tu nic ciekawego — jest to po prostu przypadek skomplikowanego całkowania w trzech wymiarach; akurat robota dla maszyny liczącej!

Przy pomocy naszych całek możemy znaleźć pola wytwarzane przez warstwę ładunku, przez linię ładunku, przez powłokę kulistą ładunku, czy przez jakikolwiek inny określony rozkład ładunku. Gdy przystąpimy w przyszłości do rysowania linii sił pola, do mówienia o potencjałach czy do obliczania dywergencji, powinniśmy pamiętać, że już tu otrzymaliśmy gotową odpowiedź. Chodzi tylko o to, że czasami łatwiej jest domyślić się rozwiązania całki niż ją obliczyć. Umiejętność domyślania się wymaga jednak nauczania się przedtem wielu dziwnych rzeczy. W praktyce może się okazać, że lepiej nie być błyskotliwym i zawsze obliczać powyższą całkę bezpośrednio. Będziemy, co prawda, próbowali starać się być błyskotliwymi, na razie jednak będziemy dalej omawiać niektóre inne cechy pola elektrycznego.

4.3. Potencjał elektryczny*)

Zacznijmy nasze rozważania od pojęcia potencjału elektrycznego, który jest związany z pracą potrzebną do przeniesienia ładunku z jednego punktu do drugiego. Mamy pewien rozkład ładunku, który wytwarza pole elektryczne. Pytamy, ile pracy trzeba zużyć na przeniesienie małego ładunku z jednego miejsca do drugiego. Praca wykonana *przeciw* siłom elektrycznym przy przenoszeniu ładunku wzdłuż pewnej drogi jest składową, wziętą ze znakiem *minus*, siły elektrycznej w kierunku ruchu, scałkowaną po danej drodze. Gdy przenosimy ładunek z punktu a do punktu b , praca W równa się

*) Porównaj: Tom I, cz. 1, rozdz. 13 i 14 (*Praca i energia potencjalna*).

$$W = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

gdzie \mathbf{F} jest siłą elektryczną, działającą na ładunek w określonym punkcie, a $d\mathbf{s}$ jest różniczkowym wektorem przesunięcia wzdłuż drogi całkowania (patrz rys. 4.2).

Bardziej nas jednak będzie interesować to, jak znaleźć pracę potrzebną na przeniesienie *jednej jednostki* ładunku. Siła działająca na ładunek jest wtedy liczbowo równa natężeniu pola elektrycznego. W tym przypadku praca, którą oznaczymy przez W (jednostkowa), będzie równa

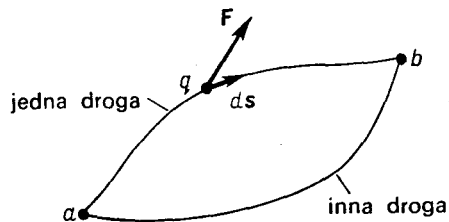
$$W(\text{jednostkowa}) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.19)$$

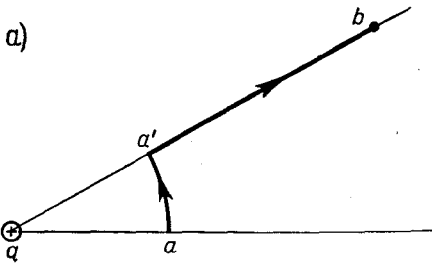
Wynik występującego tu całkowania zależy, na ogół, od tego, po jakiej drodze będziemy całkować. Gdyby jednak całka (4.19) zależała od tego, jaką drogą przechodzimy od punktu a do punktu b , moglibyśmy pobierać pracę z pola przenosząc ładunek do punktu b wzdłuż jednej drogi, a potem z powrotem do punktu a wzdłuż innej drogi. Moglibyśmy przejść do punktu b wzdłuż jednej drogi, dla której W jest mniejsze, a *wrócić* wzdłuż innej, *uzyskując* w ten sposób więcej pracy niż *włożyliśmy*.

W zasadzie pobieranie energii z pola jest możliwe. Poznamy pola, gdzie się rzeczywiście daje to wykonać. Istnieje bowiem możliwość, że poruszając ładunkiem moglibyście wytworzyć siłę działającą na inną część „maszinerii”. Gdyby zaś maszyna poruszała się przeciwko działaniu siły, traciłaby energię, przez co całkowita energia w świecie pozostawałaby stała. W *elektrostatyce* jednak nie ma takiej maszinerii. Znamy siły reakcji na źródła pola — są to siły Coulomba na ładunki wytwarzające pole. Jeżeli inne ładunki pozostają sztywno w ustalonych położeniach — założenie takie przyjmujemy wyłącznie w elektrostatyce — siły reakcji nie mogą wykonać na nich żadnej pracy. Nie ma sposobu, aby uzyskać od nich energię, jeżeli tylko zasada zachowania energii pozostaje słuszna w warunkach elektrostatyki. Wierzmy, że jest słuszna, ale spróbujmy pokazać, że to musi wynikać z prawa sił Coulomba.

Rozpatrzmy najpierw, co się dzieje w polu pojedynczego ładunku q . Niech punkt a będzie w odległości r_1 od ładunku q , a punkt b — w odległości r_2 . Przesuwajmy teraz od punktu a do punktu b inny ładunek, który nazywamy ładunkiem „próbny” i który ma wartość jednej jednostki. Zaczniemy od drogi najłatwiejszej do obliczenia. Poruszajmy naszym próbnym ładunkiem najpierw po łuku koła, a potem po promieniu, jak to pokazano na rys. 4.3 a. Znalezienie pracy wykonanej na tej szczególnej drodze jest dziecinnie łatwe (dlatego właśnie ją wybraliśmy). Po pierwsze — na odcinku aa' nie jest wykonywana żadna praca. Pole jest radialne (zgodnie z prawem Coulomba), a więc jest

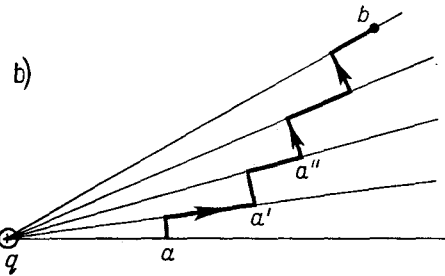
4.2. Praca wykonana przy przeniesieniu ładunku z punktu a do b jest równa całce wzdłuż drogi z $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, wziętej ze znakiem minus.





skierowane pod kątem prostym do kierunku ruchu. Następnie, na drodze od punktu a' do punktu b pole ma kierunek ruchu i zmienia się jak $1/r^2$. Tak więc praca wykonana na przeniesienie ładunku próbnego z punktu a do punktu b jest równa

$$\begin{aligned} - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \\ &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

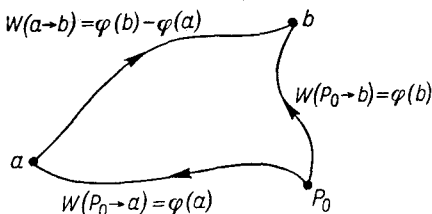


4.3. Przenosząc ładunek próbną z punktu a do b różnymi drogami, wykonujemy zawsze taką samą pracę.

Weźmy teraz inną drogę, po której łatwo można całkować, taką na przykład drogę, jaką pokazuje rys. 4.3 b. Przesuwamy ładunek najpierw po łuku koła, potem po promieniu, następnie znowu po łuku, a potem znowu po promieniu i tak dalej. Za każdym razem, gdy posuwamy się po okręgu, nie wykonujemy pracy, natomiast dla ruchów po promieniu musimy całkować funkcję $1/r^2$. Dla pierwszego odcinka radialnego całkujemy od r_a do $r_{a'}$, dla następnego — od $r_{a'}$ do $r_{a''}$, i tak dalej. Suma tych wszystkich całek ma taką samą wartość, jak całka wzięta od razu od r_a do r_b . Dla tej drogi uzyskaliśmy taki sam wynik jak dla pierwszej drogi. Jest rzeczą jasną, że taki sam wynik dostaniemy dla *każdej* drogi utworzonej z dowolnej liczby tego samego typu odcinków.

4.4. Praca wykonana wzdłuż dowolnej drogi między punktami a i b jest równa pracy, wziętej ze znakiem minus, wykonanej na drodze od jakiegoś punktu P_0 do a plus pracy od punktu P_0 do b .

A co będzie dla gładkiej drogi? Czy dostaniemy taki sam wynik? Omawialiśmy już to w rozdz. 13 tomu I (cz. 1). Rozumując tak samo, jak tam, dojdziemy do wniosku, że praca wykonana na przeniesienie ładunku jednostkowego z punktu a do punktu b jest niezależna od drogi.



$$W(\text{jednostkowa}) \left. \begin{array}{l} a \rightarrow b \\ \text{dowolna} \\ \text{droga} \end{array} \right\} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Ponieważ praca wykonana zależy tylko od położenia punktów końcowych, możemy

ją przedstawić jako różnicę dwóch liczb. Możemy to wyjaśnić następująco. Wybierzmy jakiś punkt odniesienia P_0 i umówmy się, że będziemy obliczać całkę po drodze, która zawsze *przechodzi* przez punkt P_0 . Niech $\varphi(a)$ będzie pracą wykonaną przeciwko polu na drodze *od* punktu P_0 do punktu a , natomiast $\varphi(b)$ niech będzie pracą na drodze *od* punktu P_0 do punktu b (rys. 4.4). Praca na drodze *od* punktu a *do* punktu P_0 jest równa $-\varphi(a)$, a zatem

$$-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (4.21)$$

Ponieważ występuje tu tylko różnica wartości funkcji φ w dwóch punktach, nie musimy więc precyzować położenia punktu P_0 . Jeżeli jednak obierzemy jakiś punkt odniesienia, to liczba φ będzie określona dla *każdego* punktu w przestrzeni: φ będzie wtedy *polem skalarnym*, funkcją x , y i z . Tę funkcję skalarną nazywamy *potencjałem elektrostatycznym* w dowolnym punkcie.

Potencjał elektrostatyczny:

$$\varphi(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.22)$$

Często będzie wygodnie brać punkt odniesienia w nieskończoności. Wtedy przy pojedynczym ładunku w początku układu potencjał w punkcie (x, y, z) , zgodnie z równaniem (4.20), jest równy

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (4.23)$$

Pole elektryczne pochodzące od szeregu ładunków jest sumą pól od pierwszego ładunku, od drugiego, od trzeciego itd. Gdy całkujemy tę sumę, aby znaleźć potencjał, otrzymujemy sumę całek. Każda z tych całek jest potencjałem pochodzącym od jednego z ładunków. A zatem potencjał φ od pewnej liczby ładunków jest sumą potencjałów od każdego poszczególnego ładunku. Dla potencjałów obowiązuje więc również zasada superpozycji. Rozumując podobnie jak wtedy, kiedy znajdowaliśmy pole elektryczne wytworzone przez zespół ładunków i przez rozkład ładunku, możemy uzyskać ogólne wyrażenia na potencjał φ w punkcie, który nazwiemy punktem (1):

$$\varphi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}}, \quad (4.24)$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (4.25)$$

Pamiętajcie, że potencjał φ ma sens fizyczny: jest to energia potencjalna, jaką miałby ładunek jednostkowy, doprowadzony do określonego punktu w przestrzeni z jakiegoś punktu odniesienia.

4-4. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$

Kogo interesuje potencjał φ ? Siły działające na ładunki są przecież dane przez pole elektryczne \mathbf{E} . Istota rzeczy polega jednak na tym, że przy pomocy potencjału φ można obliczyć pole \mathbf{E} , przy tym tak łatwo, jak łatwo można znaleźć pochodną. Weźmy dwa punkty. Niech pierwszą współrzędną jednego z nich będzie x , a drugiego $(x+dx)$, i niech pozostałe współrzędne dla obu będą równe y i z . Zastanówmy się, jaką pracę trzeba wykonać, aby przenieść ładunek jednostkowy z jednego z tych punktów do drugiego. Droga całkowania będzie tu odcinek prostej poziomej od x do $x+dx$. Wykonana praca będzie więc różnicą potencjałów w tych dwóch punktach:

$$\Delta W = \varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x.$$

Natomiast praca wykonana na tej samej drodze przeciw polu jest równa

$$\Delta W = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E_x \Delta x,$$

skąd widzimy, że

$$E_x = - \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (4.26)$$

Podobnie, $E_y = -\partial\varphi/\partial y$, $E_z = -\partial\varphi/\partial z$. Wynik ten możemy wyrazić w notacji analizy wektorowej; otrzymujemy

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (4.27)$$

To równanie jest różniczkową postacią równania (4.22). Można więc rozwiązać każdy problem przy określonych ładunkach obliczając potencjał ze wzoru (4.24) lub (4.25) i znajdując następnie pole z równania (4.27). Równanie (4.27) zgodne jest z omawianym poprzednio w rachunku wektorowym twierdzeniem, że dla każdego pola skalarnego

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\mathbf{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (4.28)$$

Zgodnie z równaniem (4.25) potencjał skalarny φ dany jest przez trójwymiarową całkę, podobną do tej, jaką mamy dla pola \mathbf{E} . Czy jest jakaś korzyść z obliczania potencjału φ zamiast pola \mathbf{E} ? Tak. Potencjał φ jest dany tylko przez jedną całkę, podczas gdy pole \mathbf{E} aż przez trzy, gdyż \mathbf{E} jest wektorem. Ponadto funkcja $1/r$ pozwala się zwykle łatwiej całkować niż funkcja x/r^3 . W wielu konkretnych zagadnieniach często łatwiej jest obliczyć najpierw φ , a później znaleźć pole elektryczne przez wzięcie gradientu niż wyliczać trzy całki dla \mathbf{E} . Jest to tylko sprawa zastosowań praktycznych.

Potencjał φ ma jednak również głębsze znaczenie fizyczne. Pokazaliśmy, że pole \mathbf{E} w prawie Coulomba otrzymuje się z równania $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$, gdzie potencjał φ dany jest wzorem (4.22). Jeśli jednak pole \mathbf{E} równe jest gradientowi jakiegoś pola skalarnego, to wiemy z rachunku wektorowego, że wtedy rotacja \mathbf{E} musi znikać:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.29)$$

A to jest właśnie nasze drugie podstawowe równanie elektrostatyki (4.6). Pokazaliśmy, że prawo Coulomba daje nam pole \mathbf{E} , które spełnia ten warunek. Jak dotychczas, wszystko jest więc w porządku.

Dowiedliśmy rzeczywiście, że $\nabla \times \mathbf{E}$ jest zerem, zanim zdefiniowaliśmy potencjał. Wykazaliśmy, że praca wykonana na drodze zamkniętej jest zerem, to znaczy, że

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

dla dowolnej drogi. Wiemy z rozdz. 3, że dla takiego pola $\nabla \times \mathbf{E}$ musi być wszędzie zerem. Pole elektryczne w elektrostatyce jest przykładem pola bezwirowego.

Możecie wypróbować waszą umiejętność posługiwania się rachunkiem wektorowym dowodząc w inny sposób, że $\nabla \times \mathbf{E}$ jest zerem. Obliczcie składowe wektora $\nabla \times \mathbf{E}$ dla pola ładunku punktowego, danego równaniem (4.11). Jeśli dostaniecie w wyniku zero, to zasada superpozycji mówi, że również dostaniecie zero dla pola pochodzącego od dowolnego rozkładu ładunku.

Chcielibyśmy tu wskazać na bardzo ważny fakt. Dla dowolnej siły *radialnej* praca jest niezależna od drogi oraz istnieje potencjał. Jeśli zastanowicie się nad tym, to dostrzeżecie, że całe rozumowanie, jakie przeprowadziliśmy, aby wykazać, że całka pracy jest niezależna od drogi, opierało się tylko na fakcie, że siła pochodząca od pojedynczego ładunku jest radialna i ma symetrię kulistą. Nie opierało się natomiast na tym, że zależność od odległości jest jak $1/r^2$ — moglibyśmy mieć dowolną zależność od r . Istnienie potencjału i znikanie rotacji wektora \mathbf{E} wynikają jedynie z *symetrii* i z *kierunku* sił elektrostatycznych. Ze względu na to równania (4.28) lub (4.29) mogą zawierać tylko część praw elektryczności.

4-5. Strumień wektora \mathbf{E}

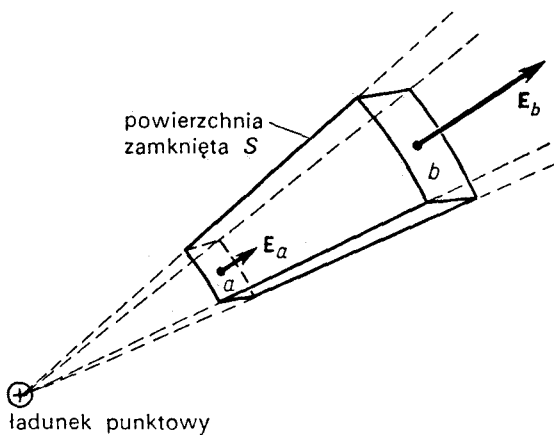
Wyprowadzimy teraz równanie pola, opierające się szczególnie i bezpośrednio na fakcie, że siła jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości. To, że pole zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości, wydaje się niektórym „zupełnie naturalne”, bo „taka zależność występuje przy rozchodzeniu się”. Weźmy źródło wysyłające światło: ilość światła, która przechodzi przez powierzchnię stożka z wierzchołkiem w źródle, jest zawsze taka sama, bez względu na to, jaka jest wysokość stożka. Tak musi być, jeśli energia świetlna ma być zachowana. Ilość światła przechodząca przez jednostkę powierzchni, czyli natężenie, musi się zmieniać odwrotnie proporcjonalnie do powierzchni stożka, czyli odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od źródła. Oczywiście, z tych samych powodów pole elektryczne też powinno się zmieniać odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości! Nie ma jednak w tym przypadku „tych samych powodów”. Nikt nie powie, że pole elektryczne jest miarą przepływu czegoś podobnego do światła, co musi być zachowane. *Gdybyśmy* mieli „model” pola elektrycznego, w którym wektor pola elektrycznego reprezentowałby kierunek i prędkość — powiedzmy prądu — jakichś małych „pocisków”, które by wylatywały, i gdyby nasz model wymagał, aby pociski były zachowane, aby żaden z nich po wystrzeleniu z ładunku nie mógł już zginąć, wtedy

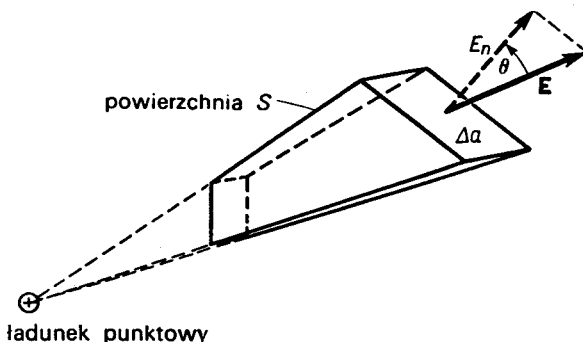
moglibyśmy powiedzieć, że „widzimy”, iż prawo odwrotnych kwadratów jest konieczne. Z drugiej jednak strony, musi być jakiś matematyczny sposób na wyrażenie tej idei fizycznej. Gdyby pole elektryczne *rozchodziło się* podobnie jak pociski spełniające zasadę zachowania, wtedy zmieniałyby się odwrotnie niż kwadrat odległości i moglibyśmy opisać je przy pomocy czysto matematycznego równania. Można w ten sposób rozumować, byleby tylko nie twierdzić, że pole elektryczne *jest utworzone* z pocisków i byleby zdawać sobie sprawę, że używamy jedynie modelu, który ma nam pomóc w uzyskaniu właściwego opisu matematycznego.

Przypuśćmy, że wyobrazimy sobie na chwilę, iż pole elektryczne rzeczywiście przedstawia przepływ czegoś, co jest zachowane, oczywiście zachowane wszędzie poza samym ładunkiem (gdzieś musi się zaczynać!). Wyobrazmy sobie, że to coś wypływa z ładunku na zewnątrz w przestrzeń. Gdyby wektor \mathbf{E} był wektorem takiego przepływu (tak jak \mathbf{h} jest wektorem przepływu ciepła), to w pobliżu źródła punkowego zależałby od odległości jak $1/r^2$. Chcielibyśmy teraz dowiedzieć się za pomocą tego modelu, jak wypowiedzieć prawo odwrotnych kwadratów w głębszy i bardziej abstrakcyjny sposób, aniżeli mówiąc po prostu „odwrotność kwadratu”. (Może dziwicie się, dlaczego chcemy uniknąć bezpośredniego wypowiedzenia tak prostego prawa, a zamiast tego dawać wstydliwie do zrozumienia to samo w inny sposób. Cierpliwości! Okaże się, że tak jest dogodniej.)

Zapytujemy: jaki jest „wypływ” pola \mathbf{E} z dowolnie wybranej zamkniętej powierzchni w otoczeniu ładunku punkowego? Weźmy najpierw łatwą do obliczania powierzchnię, taką jaką pokazuje rys. 4.5. Jeśli pole \mathbf{E} jest podobne do przepływu, to wypadkowy wpływ z takiego pudła powinien być równy zeru. Tak jest wtedy, gdy przez „wypływ” z tej powierzchni rozumiemy całkę powierzchniową składowej normalnej wektora \mathbf{E} , czyli strumień pola \mathbf{E} . Na ścianach radialnych składowa normalna jest zerem. Na ścianach sferycznych składowa normalna E_n jest po prostu wartością bezwzględną E — ze znakiem „minus” dla mniejszej ściany i ze znakiem „plus” dla większej. Wartość wektora \mathbf{E} ma-

4.5. Strumień pola \mathbf{E} wypływający z powierzchni S jest równy zeru.





4.6. Strumień pola \mathbf{E} wypływający z powierzchni S jest równy zeru.

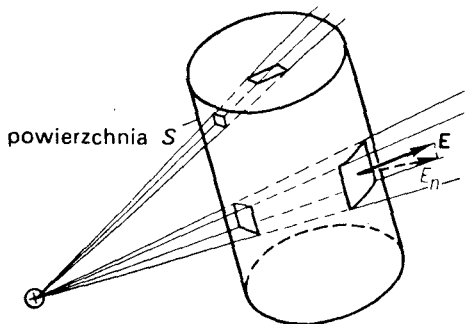
leże jak $1/r^2$, ale pole powierzchni jest proporcjonalne do r^2 , więc iloczyn tych dwóch wielkości jest niezależny od r . Strumień pola \mathbf{E} wpływający przez ścianę a znosi się więc ze strumieniem wypływającym przez ścianę b . Całkowity wypływ z powierzchni S jest zerem, to znaczy, że dla tej powierzchni

$$\int_S E_n da = 0. \quad (4.30)$$

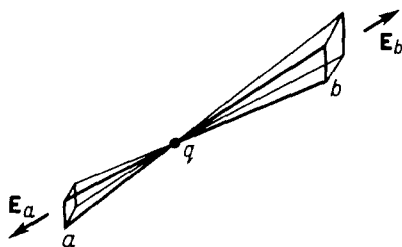
Pokażemy teraz, że powierzchnie końcowe można nachylić względem promienia, nie zmieniając przy tym całki (4.30). To jest prawdziwe w zupełnie ogólnym przypadku, ale dla naszego celu wystarczy wykazać, że zachodzi to wtedy, gdy powierzchnie końcowe są małe i przykrywają mały kąt bryłowy, w istocie nieskończenie mały. Na rysunku 4.6 pokazaliśmy powierzchnię S , której „boki” leżą w kierunku promienia, a której „końce” są do promienia nachylone. Na rysunku powierzchnie końcowe nie są małe, ale musicie wyobrazić sobie, co by się działo, gdyby były one bardzo małe. Pole \mathbf{E} byłoby wtedy na całej powierzchni dostatecznie jednorodne, abyśmy mogli po prostu wziąć jego wartość w środku. Gdy nachylamy powierzchnię o kąt θ , jej wielkość wzrasta o czynnik $1/\cos\theta$, ale składowa normalna do powierzchni E_n maleje jak $\cos\theta$. Iloczyn $E_n \Delta a$ pozostaje niezmienny. Strumień przepływający przez całą powierzchnię S jest nadal zerem.

Łatwo teraz stwierdzić, że strumień wypływający z obszaru o pewnej objętości, zamkniętego przez dowolną powierzchnię, musi być zerem. Można sobie wyobrazić, że każdy obszar przestrzenny jest złożony z kawałków takich, jak na rys. 4.6. Powierzchnia zostanie podzielona całkowicie na pary powierzchni końcowych, a ponieważ strumienie wpływające i wypływające z tych powierzchni znoszą się parami, całkowity strumień przez powierzchnię będzie równy zeru. Tę myśl ilustruje rys. 4.7. Otrzymaliśmy zupełnie ogólny wynik, że całkowity strumień wektora \mathbf{E} przez dowolną powierzchnię S w polu ładunku punktowego jest równy zeru.

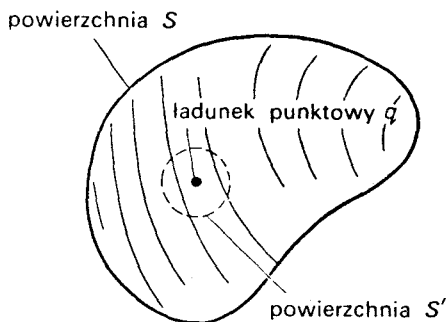
Zauważcie jednak, że nasz dowód jest słuszny tylko wtedy, gdy powierzchnia S nie otacza ładunku. Co się będzie działo, gdy ładunek punktowy znajdzie się wewnątrz powierzchni? Możemy podzielić naszą powierzchnię na pary powierzchni opartych na li-



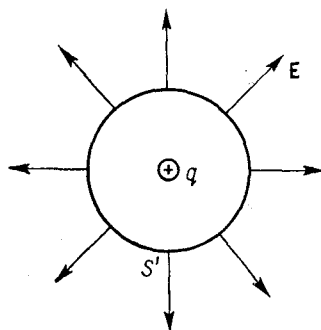
4.7. Każdy obszar przestrzenny można sobie wyobrazić jako utworzony całkowicie z nieskończenie małych stożków. Strumień pola E wypływający z jednego końca każdego wycinka stożkowego jest równy, lecz przeciwnie skierowany niż strumień wypływający z drugiego końca. Całkowity strumień wypływający z powierzchni S jest więc równy zeru.



4.8. Jeśli ładunek znajduje się wewnątrz powierzchni, wypływający strumień nie jest równy zeru.



4.9. Strumień przez powierzchnię S jest taki sam, jak strumień przez powierzchnię S' .



4.10. Strumień przez powierzchnię kulistą zawierającą ładunek punktowy q jest równy q/ϵ_0 .

niach radialnych przechodzących przez ładunek, jak to pokazuje rys. 4.8. Na podstawie takiego samego, jak poprzednio, rozumowania widzimy, że strumienie przez te dwie powierzchnie są nadal równe, ale teraz mają *ten sam* znak. Strumień z powierzchni *otaczającej* ładunek *nie* jest równy zeru. Jaki więc jest? Możemy go znaleźć stosując pewien chwyt. Przypuśćmy, że „usuniemy” ładunek z wnętrza, otaczając go maleńką powierzchnią S' , całkowicie zawartą wewnątrz powierzchni S , jak pokazuje rys. 4.9. Teraz nie ma ładunku w obszarze zamkniętym *między* powierzchniami S i S' . Całkowity strumień

wypływający z tego obszaru (uwzględniając strumień przepływający przez powierzchnię S') jest zerem, zgodnie z rozumowaniem, które przeprowadziliśmy poprzednio. Rozumowanie to mówi nam w istocie, że strumień wpływający *do* obszaru przez powierzchnię S' równa się strumieniowi wypływającemu przez powierzchnię S .

Możemy wybrać dowolny kształt powierzchni S' , niech więc będzie ona kulą ze środkiem w ładunku (rys. 4.10). Możemy teraz łatwo obliczyć strumień przez nią przepływający. Jeśli promieniem tej małej kuli jest r , to wektor \mathbf{E} będzie miał w każdym punkcie na jej powierzchni wartość

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

a kierunek zawsze prostopadły do powierzchni. Strumień przez powierzchnię S' znajdziemy mnożąc składową normalną wektora \mathbf{E} przez pole tej powierzchni:

$$\text{strumień przez powierzchnię } S' = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (4.31)$$

co jest po prostu liczbą, niezależną od promienia kuli! Wiemy więc także, że strumień wpływający przez powierzchnię S jest równy q/ϵ_0 , co jest niezależne od kształtu powierzchni S , jeżeli tylko ładunek znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego tą powierzchnią.

Możemy nasze wnioski zapisać w następującej postaci:

$$\int_{\substack{\text{dowolna} \\ \text{powierzchnia } S}} E_n dS = \begin{cases} 0, & q \text{ na zewnątrz } S; \\ \frac{q}{\epsilon_0}, & q \text{ wewnątrz } S. \end{cases} \quad (4.32)$$

Wróćmy teraz do naszej analogii z „pociskami” i zobaczymy, co nam to daje. Nasze twierdzenie mówi, że wypadkowy przepływ pocisków przez powierzchnię jest równy zeru, jeśli powierzchnia nie zamyka w sobie działa strzelającego te pociski. Jeśli natomiast dział jest otoczone powierzchnią, to bez względu na jej wielkość i kształt liczba pocisków przez nią przechodzących będzie zawsze taka sama — dana przez częstość, z jaką strzela dział. Wszystko to wydaje się sensowne, jeśli pociski są zachowane, ale czy ten model daje nam coś więcej niż równanie (4.32)? Nikomu nie udało się za pomocą tych „pocisków” dojść do czegoś więcej, niż jest zawarte w tym prawie. Dlatego właśnie wolimy dziś przedstawiać pole elektromagnetyczne w sposób czysto abstrakcyjny.

4-6. Prawo Gaussa; dywergencja pola E

Nasz przyjemny wynik, ujęty równaniem (4.32), uzyskaliśmy dla pojedynczego ładunku punktowego. Przypuśćmy, że teraz mamy dwa ładunki: w jednym punkcie ładunek q_1 , w innym — ładunek q_2 . Problem wygląda tu na trudniejszy. Pole elektryczne, którego składową normalną całkujemy dla uzyskania strumienia, jest polem pochodzącym od obu ładunków. Jeśli \mathbf{E}_1 reprezentuje pole elektryczne, jakie występowałoby gdybyśmy mieli

tylko ładunek q_1 , a \mathbf{E}_2 — pole elektryczne, jakie wytwarzałyby sam ładunek q_2 , to całkowite pole elektryczne $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Strumień przez dowolną powierzchnię zamkniętą będzie równy

$$\int_S (\mathbf{E}_{1n} + \mathbf{E}_{2n}) da = \int_S \mathbf{E}_{1n} da + \int_S \mathbf{E}_{2n} da. \quad (4.33)$$

Strumień przy dwóch ładunkach jest równy sumie strumienia pochodzącego od jednego ładunku plus strumień pochodzący od drugiego ładunku. Jeśli oba ładunki znajdują się na zewnątrz powierzchni S , to strumień przez powierzchnię S jest równy zeru. Jeśli ładunek q_1 znajduje się wewnątrz powierzchni S , a ładunek q_2 — na zewnątrz niej, to pierwsza całka daje q_1/ϵ_0 , a druga daje zero. Jeśli powierzchnia otacza oba ładunki, to każdy z nich da swój przyczynę i strumień będzie równy $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$. Reguła ogólna będzie oczywiście mówić, że całkowity strumień z powierzchni zamkniętej równy jest całkowitemu, zawartemu wewnątrz niej ładunkowi, podzielonemu przez ϵ_0 .

Ten wynik jest ważnym prawem ogólnym pola elektrostatycznego i nazywa się go prawem Gaussa.

Prawo Gaussa:

$$\int_{\substack{\text{dowolna powierzchnia} \\ \text{zamknięta } S}} \mathbf{E}_n da = \frac{\text{suma ładunków wewnątrz}}{\epsilon_0}, \quad (4.34)$$

czyli

$$\int_{\substack{\text{dowolna powierzchnia} \\ \text{zamknięta } S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{Q_{\text{wewn}}}{\epsilon_0}, \quad (4.35)$$

gdzie

$$Q_{\text{wewn}} = \sum_{\substack{\text{wewnątrz} \\ S}} q_i. \quad (4.36)$$

Jeśli opiszemy rozmieszczenie ładunków poprzez gęstość ładunku ρ , możemy uważać, że każdy element objętości dV zawiera ładunek „punktowy” ρdV . Wtedy suma rozciągnięta na wszystkie ładunki będzie równa całce

$$Q_{\text{wewn}} = \int_{\substack{\text{obszar} \\ \text{wewnątrz } S}} \rho dV. \quad (4.37)$$

Widzicie zatem, że prawo Gaussa wynika z faktu, że wykładnikiem w prawie Coulomba jest akurat dwa. Pole zmieniające się jak $1/r^3$ lub ogólniej jak $1/r^n$, gdzie $n \neq 2$, nie dałoby prawa Gaussa. A więc prawo Gaussa jest po prostu przedstawieniem w innej postaci prawa Coulomba dla sił działających między dwoma ładunkami. Istotnie, biorąc za punkt wyjścia prawo Gaussa, możemy dojść do prawa Coulomba. Oba prawa są sobie równoważne, jeżeli tylko siły działające między ładunkami są siłami centralnymi.

Zapiszemy teraz prawo Gaussa w postaci różniczkowej. Aby to uczynić, musimy zastosować prawo Gaussa do powierzchni nieskończenie małego sześcianu. W rozdziale 3 pokazaliśmy, że strumień wektora \mathbf{E} z takiego sześcianu jest równy $\nabla \cdot \mathbf{E}$, pomnożonemu przez objętość sześcianu dV . Z definicji gęstości ładunku ρ wynika, że ładunek wewnątrz obszaru o objętości dV jest równy ρdV , a więc prawo Gaussa daje nam:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0},$$

czyli

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.38)$$

Różniczkowa postać prawa Gaussa jest pierwszym z naszych podstawowych równań pola elektrostatycznego [równanie (4.5)]. Pokazaliśmy, że dwa równania elektrostatyki — równanie (4.5) i (4.6) — są równoważne prawu Coulomba. Rozważmy teraz jeden z przykładów zastosowania prawa Gaussa (później zajmiemy się jeszcze wieloma innymi).

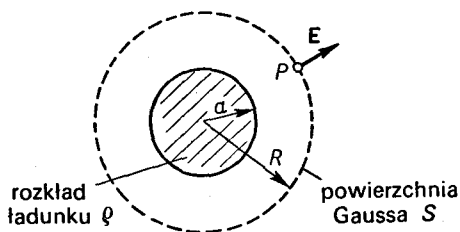
4-7. Pole ładunku kulistego

Gdy studiowaliśmy teorię przyciągania grawitacyjnego, jeden z trudniejszych problemów polegał na udowodnieniu, że siła pochodząca od kuli z jednorodnej materii jest taka sama na powierzchni kuli, jaka by była, gdyby cała materia była skoncentrowana w środku kuli. Przez wiele lat Newton nie publikował swojej teorii grawitacji, gdyż nie był pewien, że to twierdzenie jest prawdziwe. Dowiedliśmy tego twierdzenia w rozdz. 13 tomu I (cz. 1), obliczając potencjał przez całkowanie i znajdując potem siłę grawitacyjną jako jego gradient. Teraz możemy dowieść tego twierdzenia w bardzo prosty sposób. Tym razem będziemy dowodzić odpowiedniego twierdzenia dla jednorodnej kuli utworzonej z ładunku elektrycznego. (Ponieważ prawa elektrostatyki są analogiczne do praw grawitacji, ten sam dowód może również służyć dla pola grawitacyjnego.)

Pytamy: jakie jest pole elektryczne \mathbf{E} w dowolnym punkcie P gdziekolwiek na zewnątrz powierzchni kuli wypełnionej jednorodnie rozłożonym ładunkiem? Ponieważ nie ma żadnego kierunku wyróżnionego, możemy przyjąć, że pole \mathbf{E} jest wszędzie skierowane od środka kuli. Rozważamy pomyślaną powierzchnię sferyczną, współśrodkową z kulą ładunku i przechodzącą przez punkt P (rys. 4.11). Strumień wychodzący z tej powierzchni będzie równy

$$\int E_n da = E \cdot 4\pi R^2.$$

4.11. Zastosowanie prawa Gaussa do znajdowania pola jednorodnej kuli ładunku



Prawo Gaussa mówi nam, że strumień ten jest równy całkowitemu ładunkowi kuli Q , podzielonemu przez ϵ_0 :

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

czyli

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (4.39)$$

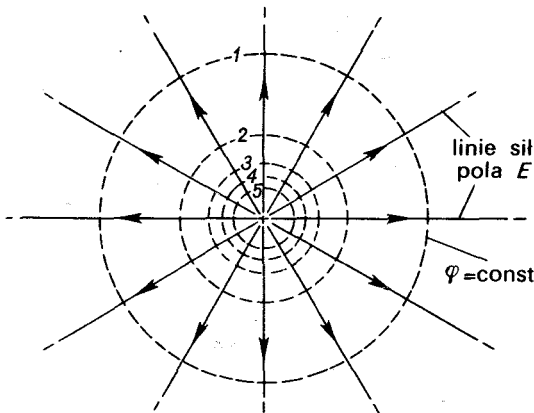
co jest tym samym wzorem, jaki dostalibyśmy dla ładunku punktowego Q . Rozwiązaliśmy zagadnienie Newtona w sposób łatwiejszy niż przez całkowanie. To, oczywiście, jest tylko pozorną łatwością, gdyż upłynęło sporo czasu, zanim byliście w stanie zrozumieć prawo Gaussa, i możecie sądzić, że w rezultacie nic nie zyskaliście na czasie. Gdy jednak będziecie częściej stosować to twierdzenie, zacznie się wam to opłacać. Jest to tylko bowiem sprawa wydajności.

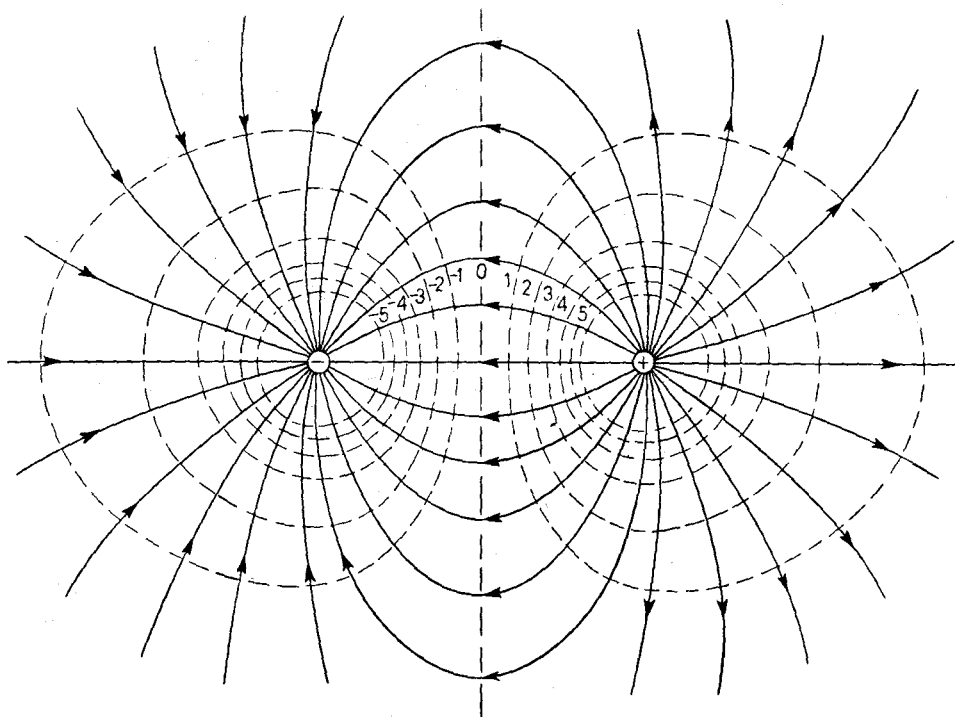
4-8. Linie sił pola; powierzchnie ekwipotencjalne

Chcielibyśmy teraz podać opis geometryczny pola elektrostatycznego. Dwa prawa elektrostatyki: jedno, że strumień przez zamkniętą powierzchnię jest proporcjonalny do ładunku wewnątrz tej powierzchni, i drugie, że pole elektryczne jest gradientem potencjału, dają się przedstawić geometrycznie. Zilustrujemy to na dwóch przykładach.

Zacniemy od pola ładunku punktowego. Prowadzimy linie w kierunku pola, to znaczy linie, które są wszędzie styczne do wektorów pola (rys. 4.12). Nazywamy je *liniami sił pola*. Linie te pokazują wszędzie kierunek wektora elektrycznego. Chcielibyśmy również móc przedstawić długość wektora. Możemy wprowadzić tu regułę, że natężenie pola elektrycznego będzie reprezentowane przez „gęstość” linii, tzn. przez liczbę linii sił przechodzą-

4.12. Linie sił pola i powierzchnie ekwipotencjalne dodatniego ładunku punktowego





4.13. Linie sił i powierzchnie ekwipotencjalne dwóch jednakowych, lecz przeciwnego znaku ładunków punktowych

ych przez jednostkę powierzchni prostopadłej do tych linii. Stosując te dwie reguły możemy przedstawić obraz pola elektrycznego. Dla ładunku punktowego gęstość linii sił musi maleć jak $1/r^2$. Pole powierzchni kulistej, o dowolnym promieniu r , prostopadłej do linii sił, rośnie jak r^2 , jeśli więc będziemy zachowywać zawsze tę samą liczbę linii sił na wszystkich odległościach od ładunku, to ich gęstość będzie proporcjonalna do wartości pola elektrycznego. Zagwarantować jednakową liczbę linii sił na wszystkich odległościach możemy jedynie wtedy, gdy będziemy wymagać, aby linie sił były *ciągłe*, to jest, aby linia zaczynająca się od ładunku nigdzie się nie kończyła. W języku linii sił pola prawo Gaussa mówi, że linie sił powinny zaczynać się tylko od ładunków dodatnich, a kończyć na ujemnych. Liczba linii sił wychodzących z ładunku q musi być równa q/ϵ_0 .

Możemy teraz znaleźć podobny obraz geometryczny dla potencjału φ . Najłatwiejszym sposobem przedstawienia potencjału jest wykreślenie powierzchni, na których potencjał φ jest stały. Nazywamy je powierzchniami *ekwipotencjalnymi* — powierzchniami jednakowego potencjału. Jaki jest związek geometryczny powierzchni ekwipotencjalnych z liniami sił pola? Pole elektryczne jest gradientem potencjału. Gradient ma kierunek, w którym potencjał zmienia się z odległością najszybciej, a zatem gradient jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej. Gdyby pole E *nie* było prostopadłe do powierzchni, miałyby

Uwaga o jednostkach

<i>Wielkość</i>	<i>Jednostka</i>
F	niuton
Q	kulomb
L	metr
W	dżul
$q \sim Q/L^3$	kulomb/metr ³
$1/\epsilon_0 \sim FL^2/Q^2$	niuton · metr ² /kulomb ²
$E \sim F/Q$	niuton/kulomb
$\varphi \sim W/Q$	dżul/kulomb = wolt
$E \sim \varphi/L$	wolt/metr
$1/\epsilon_0 \sim EL^2/Q$	wolt · metr/kulomb

składową *na* tej powierzchni. Potencjał zmieniłby się na powierzchni, ale wtedy nie byłaby ona powierzchnią ekwipotencjalną. Powierzchnie ekwipotencjalne muszą być zatem wszędzie prostopadłe do linii sił pola elektrycznego.

Dla pojedynczego ładunku punktowego powierzchnie ekwipotencjalne są powierzchniami kulistymi, mającymi środek w ładunku. Na rysunku 4.12 pokazaliśmy przecięcie tych powierzchni z płaszczyzną przechodzącą przez ładunek.

Jako drugi przykład rozważmy pole w pobliżu dwóch jednakowych ładunków o przeciwnych znakach. Takie pole łatwo otrzymujemy; jest ono wynikiem nałożenia się pól pochodzących od każdego z ładunków oddzielnie. Możemy więc wziąć dwa obrazy pola, takie jak na rys. 4.12, i nałożyć je na siebie — nie, to niemożliwe! Linie sił pola przecinałyby się, co się nie może zdarzyć, gdyż pole E miałoby wtedy *dwa* kierunki w tym samym punkcie. Teraz widzimy braki obrazu linii sił pola. Geometrycznie nie można zanalizować w prosty sposób, jak będą przebiegały nowe linie sił. Z dwóch niezależnych obrazów nie możemy bezpośrednio uzyskać obrazu złożonego. Zasada superpozycji, ta prosta i zarazem głęboka w swej treści zasada pola elektrycznego, nie daje się w sposób łatwy przedstawić w obrazie linii sił pola.

Model linii sił pola ma jednak też i swoje zalety i gdyby nas to interesowało, mogliśmy narysować odpowiedni obraz dla dwóch równych (lecz o przeciwnych znakach) ładunków. Jeśli obliczymy wektory pola w różnych punktach z równania (4.13), a potencjały z wzoru (4.23), będziemy mogli narysować linie sił pola i odpowiadające im powierzchnie ekwipotencjalne. Wynik przedstawia rys. 4.13. Ale zanim mogliśmy przystąpić do rysowania, musieliśmy rozwiązać zagadnienie od strony matematycznej.

zastosowanie prawa Gaussa

5-1. Elektrostatyka — to prawo Gaussa plus ...

Mamy dwa prawa elektrostatyki: jedno — mówiące, że strumień wektora pola elektrycznego wypływający z danego obszaru jest proporcjonalny do będącego wewnątrz ładunku, czyli prawo Gaussa, oraz drugie — mówiące, że krążenie pola elektrycznego jest zerem, czyli że wektor E jest gradientem funkcji skalarnej. Z tych dwóch praw wynikają wszystkie przewidywania elektrostatyki. Ale wyrazić to wszystko w postaci matematycznej — to jedno, a stosować swobodnie, z pewną dozą pomysłowości — to zupełnie coś innego. W tym rozdziale przebrniemy przez szereg rachunków, które można przeprowadzić przy pomocy prawa Gaussa. Będziemy dowodzili twierdzeń i opiszemy pewne zjawiska, które na podstawie prawa Gaussa łatwo jest zrozumieć, w szczególności zjawiska zachodzące w przewodnikach. Prawo Gaussa samo przez się nie może jednak dać rozwiązania żadnego problemu, gdyż w grę wchodzi tu jeszcze inne prawo elektrostatyki. Gdy więc będziemy stosować prawo Gaussa do rozwiązywania poszczególnych zadań, będziemy musieli dodawać do niego jeszcze coś. Będziemy musieli, na przykład, zakładać coś, biorąc pod uwagę prawa symetrii, o postaci wektora pola lub uwzględniać w jakiś specjalny sposób fakt, że pole jest gradientem potencjału.

5-2. Równowaga w polu elektrostatycznym

Zastanówmy się najpierw nad następującym problemem: Kiedy ładunek punktowy może być w trwałej równowadze mechanicznej w polu elektrycznym innych ładunków? Dla przykładu wyobraźmy sobie trzy ładunki ujemne, umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego, leżącego w płaszczyźnie poziomej. W środku trójkąta, tj. w punkcie równo odległym od wierzchołków, umieszczamy ładunek dodatni. Czy będzie on pozostawał w tym położeniu? Dla uproszczenia zagadnienia nie bierzemy pod uwagę

gravitacji, chociaż uwzględnienie jej nie zmieniłoby wyniku. Siła działająca na ładunek dodatni równa się zeru, ale czy równowaga jest trwała? Czy jeśli ładunek nieco odchylimy, powróci on do położenia równowagi? Odpowiedź brzmi: Nie!

W *żadnym* polu elektrostatycznym *nie* ma punktów równowagi trwałej, chyba że w zetknięciu z innym ładunkiem. Stosując prawo Gaussa łatwo jest zrozumieć, dlaczego tak jest. Po pierwsze, na to aby ładunek był w równowadze w jakimś punkcie P_0 , pole musi być tam równe zeru. Po drugie, jeśli równowaga ma być trwała, to gdy przesuwamy ładunek od punktu P_0 w *dowolnym* kierunku, musi się pojawić siła skierowana przeciwnie do przesunięcia. Pole elektryczne we *wszystkich* pobliskich punktach musi być więc wtedy skierowane w kierunku punktu P_0 . Ale jak łatwo spostrzec, jeżeli w punkcie P_0 nie ma już ładunku, narusza to prawo Gaussa.

Niech jakaś mała, pomyślana powierzchnia otacza punkt P_0 , tak jak pokazano to na rys. 5.1. Gdyby pole elektryczne wszędzie w pobliżu skierowane było ku punktowi P_0 , całka powierzchniowa składowej normalnej na pewno nie byłaby równa zeru. Dla przypadku pokazanego na rys. 5.1 strumień wektora pola przez powierzchnię musi być liczbą ujemną. Prawo Gaussa mówi jednak, że strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię jest proporcjonalny do całkowitego ładunku zawartego wewnątrz. Jeśli nie ma ładunku w punkcie P_0 , to pole, które sobie wyobraziliśmy, gwałci prawo Gaussa. Nie można zrównoważyć ładunku ujemnego. Ładunek dodatni *może* być w równowadze, jeżeli znajduje się w środku rozkładu ładunku ujemnego. Ujemny rozkład ładunku musiałby być, oczywiście, utrzymywany na miejscu przez siły nieelektryczne!

Taki wynik otrzymujemy dla ładunku punktowego, ale czy dotyczy on również skomplikowanego układu ładunków, utrzymywanych w stałych względem siebie położeniach za pomocą na przykład prętów? Rozważmy to zagadnienie dla dwóch równych ładunków zamocowanych do pręta. Czy jest możliwe, żeby taki układ był w równowadze w jakimś polu elektrostatycznym? I znowu odpowiedź brzmi: Nie! *Całkowita* siła działająca na pręt nie może przeciwdziałać przemieszczeniu w którymkolwiek kierunku.

Niech \mathbf{F} będzie całkowitą siłą działającą na pręt; pole \mathbf{F} będzie wtedy polem wektorowym. Stosując takie rozumowanie, jak poprzednio, dochodzimy do wniosku, że w położeniu równowagi trwałej dywergencja \mathbf{F} musiałaby być liczbą ujemną. Całkowita siła, jednak, działająca na pręt równa się sumie iloczynów obu ładunków i odpowiednich wartości wektora pola elektrycznego, w miejscach gdzie znajdują się ładunki.

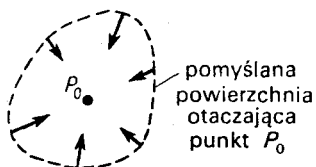
$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E}_1 + q_2 \mathbf{E}_2. \quad (5.1)$$

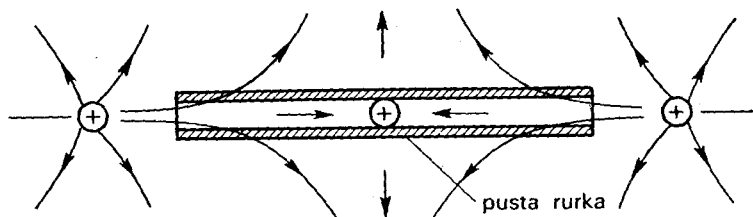
Dywergencja wektora \mathbf{F} równa się

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = q_1 (\nabla \cdot \mathbf{E}_1) + q_2 (\nabla \cdot \mathbf{E}_2).$$

Jeśli każdy z ładunków q_1 i q_2 znajduje się w swobodnej przestrzeni, to zarówno $\nabla \cdot \mathbf{E}_1$, jak i $\nabla \cdot \mathbf{E}_2$ równają się zeru, a wobec tego i $\nabla \cdot \mathbf{F}$ jest równe zeru, a nie liczbie ujemnej, jakby tego wymagał warunek równowagi. Wi-

5.1. Gdyby punkt P_0 był położeniem równowagi trwałej ładunku punktowego dodatniego, to pole elektryczne wszędzie w jego otoczeniu skierowane byłoby ku P_0 .





5.2. Ładunek może znajdować się w stanie równowagi, jeśli występują więzy mechaniczne.

dzicie więc, że rozszerzając to rozumowanie wykażemy, iż żadna sztywna kombinacja jakiegokolwiek liczby ładunków nie może mieć położenia równowagi trwałej w polu elektrostatycznym w swobodnej przestrzeni.

Jednakże nie pokazaliśmy, że równowaga nie jest możliwa w warunkach, kiedy ruch ograniczony jest umocowaną osią obrotu lub innymi więzami mechanicznymi. Jako przykład weźmy rurkę, w której wewnątrz ładunek może poruszać się swobodnie wzdłuż osi, a nie może poruszać się po promieniu rurki. Łatwo jest wytworzyć pole skierowane na obu końcach rurki do jej wnętrza, a w środku długości rurki na zewnątrz. Po prostu w pobliżu każdego końca rurki umieszczamy ładunek dodatni, jak to pokazuje rys. 5.2. Teraz może istnieć punkt równowagi, mimo że dywergencja wektora E jest zerem. Ładunek nie byłby oczywiście w równowadze trwałej dla ruchów bocznych, gdyby nie było sił „nieelektrycznych”, pochodzących od ścianek rurki.

5-3. Równowaga przewodników

W polu układu nieruchomych ładunków nie ma punktu równowagi trwałej, a jak będzie się sprawa przedstawiała w polu układu naładowanych przewodników? Czy układ naładowanych przewodników może wytworzyć pole, które będzie miało punkt równowagi trwałej dla ładunku punktowego (oczywiście, w punkcie leżącym poza przewodnikiem)? Wicie, że w przewodnikach ładunki mogą się przesuwać swobodnie. Czy jeżeli przesuniemy nieco ładunek punktowy, to ładunki na przewodniku nie przesuną się tak, że powstanie siła reakcji działająca na ładunek punktowy? W dalszym ciągu odpowiedź brzmi: Nie! Dowód w tym przypadku jest trudny i naszkicujemy tylko tok rozumowania.

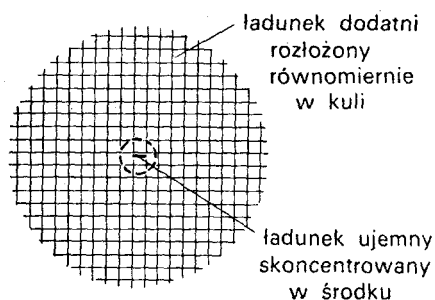
Przede wszystkim zauważmy, że ładunki na przewodniku mogą przemieszczać się tylko wtedy, gdy ruch zmniejsza ich całkowitą energię potencjalną, a część energii jest tracona na wytwarzanie ciepła w czasie ruchu. Wykazaliśmy poprzednio, że gdy ładunki wytwarzające pole są *nieruchome*, to w pobliżu dowolnego punktu P_0 leżącego w polu istnieje kierunek, w którym odsuwanie ładunku od punktu P_0 wywoła *zmniejszenie* energii układu (ponieważ siła w tym kierunku jest skierowana od punktu P_0). Dowolne przemieszczenie ładunków na przewodniku może jedynie jeszcze bardziej zmniejszyć energię potencjalną,

a więc ruch (zgodnie z zasadą pracy wirtualnej) będzie *powiększał* siłę działającą w tym szczególnym kierunku od punktu P_0 , a nie odwróci jej.

Nasz wniosek nie oznacza, że nie można zrównoważyć ładunku siłami elektrycznymi. To jest wykonalne wtedy, gdy można za pomocą odpowiednich urządzeń sterować położeniami i wielkościami ładunków wytwarzających pole. Wiecie, że stojący pręt jest w polu grawitacyjnym w równowadze nietrwałej, ale to nie dowodzi, że nie można go zbalansować na czubku palca. Podobnie, ładunek można utrzymać w jednym miejscu siłami elektrycznymi, pod warunkiem, że są one *zmienne*. Nie można jednak tego osiągnąć za pomocą biernego, to jest *statycznego* układu.

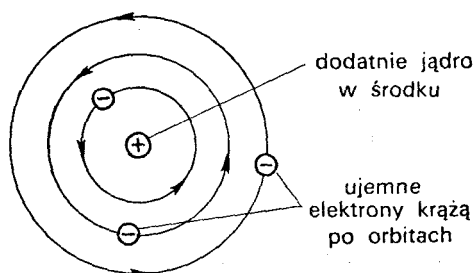
5.4. Trwałość atomów

Jeśli ładunków nie można utrzymać w stałych położeniach, to na pewno nie należy wyobrażać sobie, że materia jest utworzona ze statycznych ładunków *punktowych* (elektronów i protonów), którymi rządzą jedynie prawa elektrostatyki. Taka konfiguracja statyczna jest niemożliwa — runęłaby!



5.3. Model atomu Thomsona

5.4. Model atomu Rutherforda-Bohra



Kiedyś wysuwano przypuszczenie, że ładunek dodatni atomu jest rozłożony równomiernie w kuli, a ładunki ujemne (elektrony) znajdują się w spoczynku w środku ładunku dodatniego (patrz rys. 5.3). To był pierwszy model atomu; zaproponował go Thomson. Na podstawie doświadczenia Geigera i Marsdena Rutherford doszedł do wniosku, że ładunki dodatnie muszą być ciasno skupione w tym, co nazwał jądrem. Trzeba było odrzucić statyczny model Thomsona. Rutherford i Bohr wystąpili z tezą, że zachodzi tu równowaga dynamiczna, przy czym elektrony krążą po orbitach, jak to pokazano na rys. 5.4. Ruch orbitalny nie pozwalała elektronom spaść na jądro. Od razu widać wadę tego modelu. W takim ruchu elektrony byłyby przyspieszane (ze względu na ruch okrężny) i dlatego promieniowałyby energię. Traciłyby więc energię kinetyczną, potrzebną do pozostawiania na orbicie, i zbliżałyby się po spiralach do jądra. Atom byłby znowu nietrwały!

Obecnie trwałość atomów wyjaśnia mechanika kwantowa. Siły elektrostaty-

czne ściąga ją elektron możliwie najbliżej jądra, ale elektron musi pozostawać rozmyty w przestrzeni na pewnym obszarze określonym przez zasadę nieoznaczoności. Gdyby był skupiony na zbyt małej przestrzeni, nieoznaczoność pędu byłaby zbyt wielka. Oznacza to, że elektron ma dużą energię, która pozwala mu przewyciężyć przyciąganie elektryczne. Wynikiem tego jest równowaga elektryczna. Idea ta nie różni się zbytnio od idei Thomsona, tyle tylko, że rozmyty jest tu ładunek *ujemny* (ponieważ masa elektronu jest o wiele mniejsza od masy protonu).

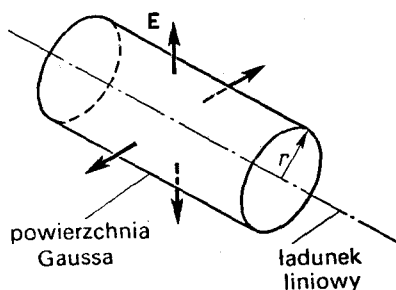
5-5. Pole ładunku liniowego

Prawo Gaussa można zastosować do rozwiązania wielu zagadnień pola elektrostatycznego o specjalnych symetriach, najczęściej kulistej, cylindrycznej lub symetrii względem płaszczyzny. W pozostałej części tego rozdziału zastosujemy prawo Gaussa do rozwiązania kilku takich problemów. Łatwość, z jaką można rozwiązać te problemy, może dać fałszywe wyobrażenie, że metoda ta jest uniwersalna i że można będzie się nią posłużyć w wielu innych zagadnieniach. Niestety, tak nie jest. Lista problemów dających się rozwiązać przy pomocy prawa Gaussa szybko się wyczerpie. W dalszych rozdziałach rozwinęliśmy inne, bardziej uniwersalne metody badania pól elektrostatycznych.

Jako pierwszy przykład rozważmy układ o symetrii cylindrycznej. Przypuśćmy, że mamy bardzo długi, jednorodnie naładowany pręt. Rozumiemy przez to, że ładunki są rozłożone równomiernie wzdłuż nieograniczonej długiej linii prostej, przy czym na jednostkę długości przypada λ jednostek ładunku. Chcemy znaleźć pole elektryczne. Problem można, oczywiście, rozwiązać całkując wkład, jaki daje do pola każda część linii. Zrobimy to jednak bez całkowania, stosując prawo Gaussa i trochę zgadując. Przewidujemy, że pole elektryczne będzie skierowane radialnie od linii. Składowe równoległe do osi, pochodzące od ładunków położonych po jednej stronie danego punktu, będą bowiem kompensowane przez przyczynki od ładunków położonych po drugiej stronie, w wyniku czego powinniśmy otrzymać pole czysto radialne. Również, zgodnie z intuicją, możemy się spodziewać, że pole ma tę samą wartość we wszystkich punktach równoodległych od osi. Jest to raczej oczywiste. (To może nie być takie łatwe do udowodnienia, ale tak jest, jeśli przestrzeń jest symetryczna, jak w to wierzymy.)

Możemy teraz posłużyć się prawem Gaussa w sposób następujący. Rozważamy *pomyślaną* powierzchnię o kształcie walca współosiowego z prostą, tak jak to pokazuje rys. 5.5. Zgodnie z prawem Gaussa całkowity strumień \mathbf{E} z tej powierzchni równa się zawartemu w niej ładunkowi, podzielonemu przez ϵ_0 . Ponieważ przyjmuje się, że pole jest prostopadłe do powierzchni, składowa normalna będzie wartością pola — oznaczmy ją E . Niech promień walca wynosi

5.5. Cylindryczna powierzchnia Gaussa, współosiowa z ładunkiem liniowym



r , a jego długość, dla uproszczenia, równa niech będzie jednej jednostce. Strumień przez powierzchnię walca jest równy E , pomnożonemu przez pole powierzchni, to jest przez $2\pi r$. Strumień przez podstawy jest równy zeru, gdyż pole elektryczne jest do nich styczne. Całkowity ładunek zamknięty wewnątrz walca jest równy λ , ponieważ wzięliśmy prostą o długości jednostkowej. W tych warunkach prawo Gaussa sprowadza się do związku:

$$E \cdot 2\pi r = \lambda / \epsilon_0,$$

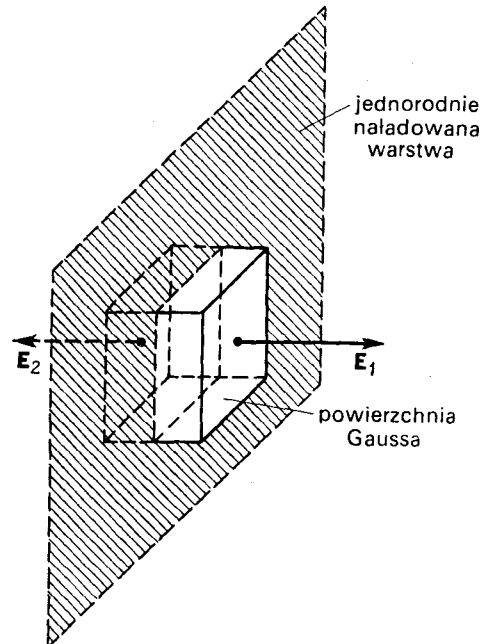
$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}. \quad (5.2)$$

Pole elektryczne ładunku liniowego jest odwrotnie proporcjonalne do *pierwszej* potęgi odległości od linii.

5.6. Warstwa naładowana; pole pomiędzy dwiema warstwami

Jako następny przykład znajdziemy pole jednorodnie naładowanej warstwy płaskiej. Przypuśćmy, że warstwa jest nieskończenie rozciągnięta i że ładunek na jednostkę powierzchni

5.6. Pole elektryczne w pobliżu jednorodnie naładowanej warstwy można znaleźć stosując prawo Gaussa do pomyślanego pudła.



równa się σ . Teraz znowu musimy zgadywać. Rozważania nad symetrią pozwalają nam przewidzieć, że kierunek pola jest wszędzie prostopadły do warstwy i że po obu stronach warstwy wartość pola elektrycznego jest taka sama (*jeśli, oczywiście, nie mamy jeszcze pól od innych ładunków w przestrzeni*). Tym razem jako powierzchnię Gaussa weźmy pudło prostopadłościennie przechodzące przez warstwę, tak jak pokazuje to rys. 5.6. Dwie ściany pudła równoległe do warstwy będą miały jednakowe pola powierzchni, powiedzmy, równe A . Pole elektryczne jest prostopadłe do tych dwóch ścian, a równoległe do pozostałych czterech. Całkowity strumień równa się polu E , pomnożonemu przez pole powierzchni pierwszej ściany, plus polu E , pomnożonemu przez pole powierzchni drugiej ściany. Pozostałe cztery ściany nie dadzą żadnego wkładu do strumienia. Całkowity ładunek zamknięty w pudle wynosi σA . Przyrównując strumień do ładunku zamkniętego wewnątrz, mamy

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

a stąd

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}; \quad (5.3)$$

prosty, ale bardzo ważny wynik.

Pamiętacie może, że ten sam wynik otrzymaliśmy w jednym z poprzednich rozdziałów drogą całkowania po całej powierzchni. Prawo Gaussa daje nam w tym przypadku odpowiedź o wiele szybciej (aczkolwiek nie da się ono tak ogólnie stosować, jak poprzednia metoda).

Podkreślamy, że ten wynik ma zastosowanie *tylko* do pola pochodzącego od naładowanej warstwy płaskiej. Jeżeli w otoczeniu istnieją inne ładunki, to całkowite pole w pobliżu warstwy powinno być sumą pola określonego wzorem (5.3) i pola pochodzącego od innych ładunków. Prawo Gaussa powie nam wtedy tylko, że

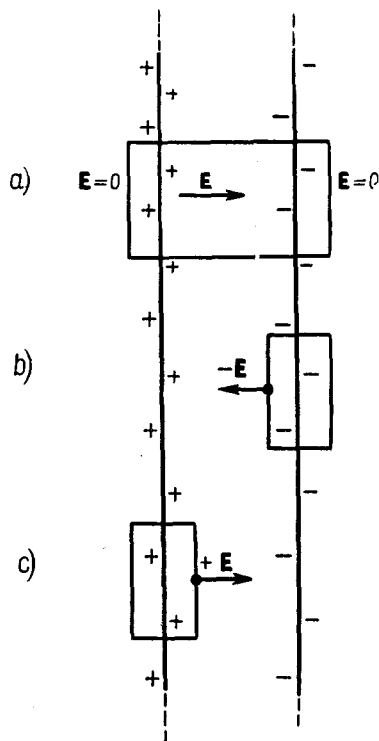
$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.4)$$

gdzie E_1 i E_2 są polami skierowanymi na zewnątrz po każdej stronie warstwy.

Problem dwóch równoległych warstw o równych, lecz przeciwnego znaku gęstościach ładunku: $+\sigma$ i $-\sigma$, jest równie prosty, jeżeli znowu przyjmiemy, że świat zewnętrzny jest całkowicie symetryczny. Przez nałożenie dwóch rozwiązań dla pojedynczej warstwy lub też przez skonstruowanie pudła gaussowskiego, zawierającego obie warstwy, łatwo można pokazać, że *na zewnątrz* obu warstw pole jest równe zero (rys. 5.7 a). Rozważając pudło, które zawiera tylko jedną lub drugą warstwę (rys. 5.7 b i 5.7 c) widzimy, że pole między warstwami jest dwukrotnie większe niż dla warstwy pojedynczej:

$$E \text{ (między warstwami)} = \sigma/\epsilon_0, \quad (5.5)$$

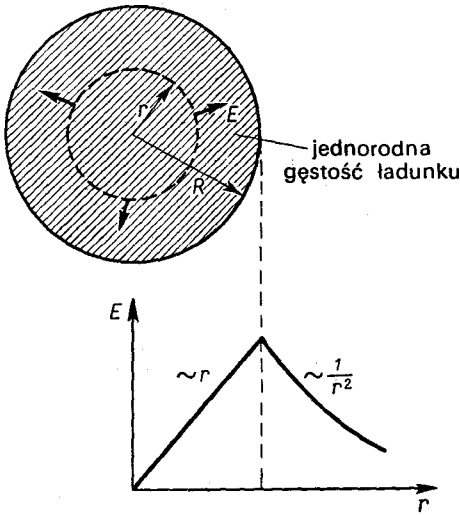
$$E \text{ (na zewnątrz)} = 0. \quad (5.6)$$



5.7. Pole między dwiema naładowanymi warstwami jest równe σ/ϵ_0 .

5-7. Kula naładowana; warstwa kulista

Stosowaliśmy już (w rozdz. 4) prawo Gaussa do wyznaczenia pola na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli. Ta sama metoda pozwala znaleźć pole w punktach leżących *wewnątrz* kuli. Takie rachunki można, na przykład, zastosować, aby otrzymać z dobrym



5.8. Prawo Gaussa można zastosować do znalezienia pola wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli.

przybliżeniem pole wewnątrz jądra atomu. Protony, mimo że odpychają się od siebie, są jednak wskutek dużych sił jądrowych rozprzestrzenione równomiernie w całym jądrze.

Przypuśćmy, że mamy kulę o promieniu R , wypełnioną równomiernie ładunkiem. Niech ρ będzie gęstością ładunku (ilość ładunku na jednostkę objętości). Na podstawie rozważań nad symetrią możemy znowu przyjąć, że pole jest radialne i ma tę samą wartość we wszystkich punktach równoodległych od środka. Aby znaleźć pole w odległości r od środka, bierzemy powierzchnię Gaussa o promieniu r ($r < R$), jak pokazano na rys. 5.8. Strumień przez tę powierzchnię jest równy

$$4\pi r^2 E.$$

Ładunek wewnątrz naszej powierzchni Gaussa równa się objętości pomnożonej przez gęstość ładunku ρ :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Zgodnie z prawem Gaussa wartość pola dana jest wyrażeniem

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r < R). \quad (5.7)$$

Możecie się przekonać, że ten wzór daje właściwy wynik dla $r = R$. Pole elektryczne jest proporcjonalne do promienia i skierowane na zewnątrz wzdłuż promienia.

Rozumowanie, które przeprowadziliśmy dla jednorodnie naładowanej kuli, można również zastosować do przypadku naładowanej cienkiej warstwy kulistej. Zakładając, że pole jest wszędzie radialne i ma symetrię kulistą, otrzymujemy bezpośrednio z prawa Gaussa, że pole na zewnątrz warstwy jest takie, jak dla ładunku punktowego, a pole gdziekolwiek wewnątrz jest równe zero (gdyż powierzchnia Gaussa wewnątrz warstwy nie zawiera ładunku).

5-8. Czy pole ładunku punktowego jest dokładnie opisane przez funkcję $1/r^2$?

Jeśli zanalizujemy dokładnie, w jaki sposób pole wewnątrz warstwy kulistej staje się zerem, zrozumiemy lepiej, dlaczego prawo Gaussa jest prawdziwe jedynie pod warunkiem, że siła kulombowska zależy ściśle od kwadratu odległości. Weźmy punkt P wewnątrz

jednorodnie naładowanej warstwy kulistej. Wyobraźmy sobie mały stożek o wierzchołku w punkcie P ; stożek ten wycina na powierzchni kuli element powierzchniowy Δa_1 (rys. 5.9). Symetryczny stożek, rozwierający się z drugiej strony punktu P , wytnie element powierzchniowy Δa_2 . Jeżeli odległościami od punktu P do tych dwóch elementów są r_1 i r_2 , to stosunek tych powierzchni wynosi

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

(Na podstawie rozważań geometrycznych możecie wykazać, że jest to słuszne dla dowolnego punktu P wewnątrz kuli.)

Jeżeli powierzchnia kuli jest naładowana jednorodnie, to ładunek Δq na każdym z elementów powierzchni jest proporcjonalny do pola powierzchni:

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}.$$

Prawo Coulomba mówi, że stosunek wartości pól elektrycznych wytworzonych w punkcie P przez te dwa elementy powierzchni jest równy

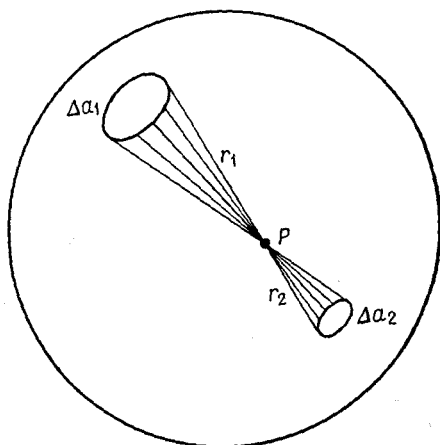
$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2/r_2^2}{q_1/r_1^2} = 1.$$

Pola dokładnie się znoszą. Ponieważ wszystkie części powierzchni można w ten sposób połączyć w pary, całkowite pole w punkcie P jest więc równe zero. Widzicie jednak, że tak by nie było, gdyby wykładnik przy r w prawie Coulomba nie był dokładnie równy dwu.

Słuszność prawa Gaussa opiera się na prawie Coulomba podającym zależność siły od odwrotności kwadratu odległości. Gdyby siła nie była dokładnie odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości, pole wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli nie byłoby dokładnie równe zero. Gdyby, na przykład, siła zmieniała się szybciej, powiedzmy jak odwrotność sześciastku r , to część powierzchni, która jest bliżej punktu wewnętrznego, wytwarzałaby pole silniejsze niż część bardziej odległa i przy dodatnim ładunku powierzchniowym pole skierowane by było radialnie do wewnątrz. Te wnioski nasuwają elegancki sposób sprawdzenia, czy zależność od odwrotności kwadratu jest ściśle słuszna. Musimy tylko stwierdzić, czy pole wewnątrz jednorodnie naładowanej warstwy kulistej jest dokładnie równe zero, czy też nie jest.

Na szczęście, istnieje metoda pozwalająca to stwierdzić. Zwykle występują poważne

5.9. W każdym punkcie P wewnątrz naładowanej warstwy kulistej pole jest równe zero.



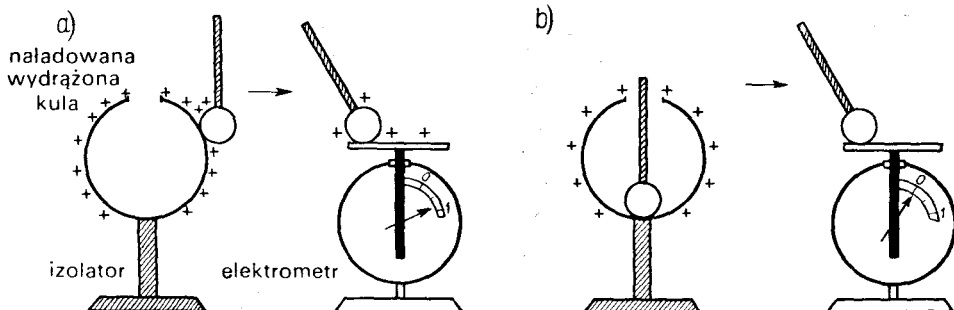
trudności, gdy chcemy zmierzyć jakąś wielkość fizyczną z bardzo dużą dokładnością — dokładność jednego procentu może nie być zbyt trudna do osiągnięcia, ale jak sprawdzić prawo Coulomba z dokładnością do jednej miliardowej? Nie można, z całą pewnością, przy najlepszych nawet dostępnych technikach, mierzyć *siły* między dwoma naładowanymi ciałami z taką dokładnością. Stwierdzając jednak tylko, że wartość pola wewnątrz naładowanej kuli jest *mniej* od pewnej wartości, możemy z dużą bardzo dokładnością wykazać poprawność prawa Gaussa, a zatem i zależność od odwrotności kwadratu w prawie Coulomba. Metoda polega w istocie na *porównaniu* prawa rządzącego siłą z idealnym prawem opartym na zależności od odwrotności kwadratu. Takie porównania równych lub prawie równych wielkości są zwykle podstawą najbardziej dokładnych pomiarów fizycznych.

W jaki sposób możemy obserwować pole wewnątrz naładowanej kuli? Można to zrobić próbując naładować jakieś ciało przez dotknięcie nim wnętrza przewodnika kulistego. Wiedząc, że jeżeli dotknąć naładowane ciało małą metalową kulką, a potem kulkę zetknąć z elektrometrem, to przyrząd naładuje się i wskazówka się wychyli od położenia zerowego (rys. 5.10 a). Kulka chwyta ładunek, ponieważ na zewnątrz naładowanego przewodnika istnieją siły elektryczne, które powodują, że ładunki przeskakują od kulki (względnie z niej uciekają). Jeśli przeprowadzicie takie samo doświadczenie dotykając małą kulką *wewnątrz* naładowanej kuli, to stwierdzicie, że na elektrometr nie jest przenoszony żaden ładunek. Przy pomocy takiego doświadczenia możecie stwierdzić, że pole wewnątrz kuli wynosi co najwyżej kilka procentów pola na zewnątrz i że prawo Gaussa jest co najmniej w przybliżeniu słuszne.

Okazuje się, że Benjamin Franklin pierwszy zauważył, że pole wewnątrz naładowanej warstwy kulistej jest równe zero. Obserwacja ta wydała mu się dziwna. Priestleyowi, kiedy dowiedział się o tym od Franklina, przyszło na myśl, że może to być związane z prawem odwrotnych kwadratów, gdyż wiadano już, że kulista warstwa materii nie wytwarza wewnątrz pola grawitacyjnego. Coulomb zmierzył zależność od odwrotności kwadratów dopiero w 18 lat później, a prawo Gaussa pojawiło się jeszcze później.

Prawo Gaussa zostało starannie sprawdzone przez umieszczenie elektrometru we wnętrzu wielkiej czaszy kulistej, by się przekonać, czy pojawią się jakieś jego wychylenia w czasie ładowania kuli do wysokiego potencjału. Żadnych wychyleń nie zaobserwowano.

5.10. Wewnątrz zamkniętej warstwy przewodzącej pole elektryczne jest równe zero.



Znając geometrię układu i czułość przyrządu można było obliczyć, jakie jest minimalne pole, jeszcze dopuszczalne mimo negatywnego wyniku obserwacji. Stąd można było znaleźć górną granicę odstępstwa wykładnika przy r od dwójki. Jeśli napiszemy, że siła elektrostatyczna zależy od $r^{-2+\varepsilon}$, możemy na ε nałożyć górną granicę. Tą metodą Maxwell wyznaczył, że ε jest mniejsze od $\frac{1}{10000}$. W roku 1936 Plimpton i Laughton powtórzyli to doświadczenie w ulepszonej wersji i stwierdzili, że wykładnik w prawie Coulomba różni się od dwójki o mniej niż o jedną miliardową.

Nasuwa się teraz interesujące pytanie: Co wiemy o dokładności prawa Coulomba w różnych warunkach? W opisanych przed chwilą doświadczeniach mierzyło się zależność pola od odległości dla odległości dziesiątków centymetrów, ale co się dzieje na odległościach wewnątrzatomowych, np. w atomie wodoru? Sądzimy, że elektron jest tam przyciągany do jądra siłą podlegającą temu samemu prawu zależności od odwrotności kwadratu. To prawda, że do opisu mechanicznego zachowania się elektronu trzeba stosować mechanikę kwantową, ale działająca siła jest zwykłą siłą elektrostatyczną. Przy formułowaniu problemu trzeba znać energię potencjalną elektronu jako funkcję odległości od jądra. Prawo Coulomba daje nam potencjał, który zmienia się jak odwrotność pierwszej potęgi odległości. Z jaką dokładnością znany jest ten wykładnik dla tak małych odległości? W wyniku wykonanych w roku 1947 przez Lamba i Retherforda niezmiernie starannych pomiarów względnego położenia poziomów energetycznych atomu wodoru wiemy, że dla skali odległości atomowych, to jest rzędu jednego angstroma (10^{-8} cm), wykładnik jest poprawny znowu z dokładnością do jednej miliardowej.

Taka dokładność pomiarów Lamba i Retherforda była możliwa ze względu na pewien „przypadek” fizyczny. Dwa ze stanów atomu wodoru mogą mieć prawie identyczne energie *tylko* wtedy, gdy potencjał zmienia się dokładnie jak $1/r$. Tę bardzo drobną różnicę energii znaleziono z pomiaru częstości ω fotonów emitowanych lub absorbowanych w przejściach między jednym stanem a drugim (różnica energii $\Delta E = \hbar\omega$). Obliczenia wykazały, że ta różnica ΔE powinna znacznie się różnić od zaobserwowanej wartości, jeśli wykładnik w prawie Coulomba odbiega od liczby dwa o jedną miliardową.

Czy ten sam wykładnik ma wartość poprawną dla jeszcze mniejszych odległości? Z pomiarów fizyki jądrowej wiadomo, że na typowo jądrowych odległościach — rzędu 10^{-13} cm — działają nadal siły elektrostatyczne i że powinny się one zmieniać w przybliżeniu jak odwrotność kwadratu odległości. Dokładniej to omówimy w jednym z dalszych rozdziałów. Wiemy, że prawo Coulomba obowiązuje, przynajmniej do pewnego stopnia, dla odległości rzędu 10^{-13} cm.

A co będzie z odległościami 10^{-14} cm? Ten obszar można badać bombardując protony elektronami o bardzo wysokiej energii i obserwując ich rozproszenie. Dotychczasowe wyniki wydają się wskazywać, że tutaj prawo Coulomba zawodzi. Na odległościach mniejszych niż 10^{-14} cm siły elektryczne są około dziesięć razy mniejsze, niżby to wynikało z tego prawa. Możliwe są dwa wyjaśnienia: albo że prawo Coulomba nie obowiązuje już dla tak małych odległości, albo też, że przedmiot naszych obserwacji, elektrony i protony, nie są ładunkami punktowymi. Być może, że albo elektron, albo proton, albo też oba są rozmyte. Większość fizyków woli traktować ładunek protonu jako rozmyty. Wiemy, że protony oddziałują silnie z mezonami. Proton będzie zatem od czasu do czasu istniał

jako neutron z otaczającym go mezonem π^+ . Taka konfiguracja będzie działała podobnie jak mała kula naładowana dodatnio. Wiemy, że pole ładunku kulistego nie zmienia się jak $1/r^2$ na wszystkich odległościach od środka. Bardzo możliwe, że ładunek protonu jest rozmyty, ale teoria mezonów π jest jeszcze niekompletna i może się okazać, że to prawo Coulomba zawodzi dla małych odległości. Ta kwestia jest jeszcze stale otwarta.

Jeszcze jedna sprawa: prawo zależności od odwrotności kwadratu jest słuszne dla odległości takich jak 1 m i takich jak 10^{-10} m, ale czy współczynnik $1/4\pi\epsilon_0$ jest zawsze taki sam? Odpowiedź brzmi: tak; a przynajmniej z dokładnością do piętnastu milionowych.

Wróćmy do ważnego zagadnienia, któreśmy pominęli mówiąc o doświadczalnym potwierdzeniu prawa Gaussa. Zdziwiło was pewnie, jak doświadczenia Maxwella czy Plimptona i Laughtona mogły dawać taką dokładność, jeżeli przewodniki kuliste, których używali, nie były kulami idealnymi. Dokładność do jednej miliardowej jest rzeczywiście wielkim osiągnięciem i słusznie możecie stawiać sobie pytanie, jak można z taką dokładnością wykonać przewodnik kulisty. Na pewno kula rzeczywista będzie miała jakieś małe nieregularności, a jeśli takie nieregularności będą, to czy nie powstaną wewnątrz tej kuli jakieś pola? Chcemy teraz pokazać, że wcale nie trzeba mieć kuli doskonałej. Istotnie, można udowodnić, że wewnątrz zamkniętej warstwy przewodzącej, *dowolnego* kształtu, nie ma pola. Mówiąc inaczej, wyniki doświadczeń, wykazujących zależność od $1/r^2$, nie miały nic wspólnego z tym, że powierzchnia była w kształcie kuli (z wyjątkiem tego, że dla kuli łatwiej jest obliczyć, jakie *powinno* być pole, gdyby prawo Coulomba było niesłuszne). Zajmiemy się teraz dowodem tego; musimy jednak najpierw poznać pewne właściwości przewodników elektrycznych.

5-9. Pola przewodnika

Przewodnik elektryczny jest ciałem stałym, które zawiera wiele „swobodnych” elektronów. Elektrony te mogą poruszać się swobodnie w substancji przewodzącej, ale nie mogą wydobywać się poprzez jej powierzchnię na zewnątrz. W metalu jest tyle swobodnych elektronów, że każde pole elektryczne wprawi dużą ich liczbę w ruch. Tak powstały przepływ elektronów musi być albo stale podtrzymywany przez zewnętrzne źródła energii, albo też ruch elektronów zaniknie, gdy wyczerpią one źródła wytwarzające pole początkowe. W warunkach „elektrostatyki” nie rozpatrujemy ciągłych źródeł prądu (rozpatrzmy je później przy studiowaniu magnetostatyki), elektrony więc poruszają się tylko tak długo, aż znajdą się w położeniach dających wszędzie wewnątrz przewodnika pole zerowe. To zwykle następuje już w ciągu małego ułamka sekundy. Gdyby jakieś pole pozostało, to zmusiłoby elektrony do dalszego ruchu. Jedyne rozwiązanie elektrostatyczne jest takie, że wszędzie wewnątrz pole jest równe zero.

Rozważmy teraz *wnętrze* naładowanego przewodnika. (Przez „wnętrze” rozumiemy sam *metal*.) Ponieważ metal jest przewodnikiem, pole wewnętrzne musi być równe zero, a zatem i gradient potencjału φ będzie równy zero. Oznacza to, że od punktu do punktu potencjał φ się nie zmienia. Każdy przewodnik jest *obszarem* ekwipotencjalnym, a jego powierzchnia jest powierzchnią ekwipotencjalną. Ponieważ w substancji przewodzącej

pole elektryczne jest wszędzie równe zeru, dywergencja pola E jest równa zeru i zgodnie z prawem Gaussa gęstość ładunku we wnętrzu przewodnika też musi być równa zeru.

Jeśli ładunki nie mogą występować we wnętrzu przewodnika, to jak może on być w ogóle naładowany? Co mamy na myśli mówiąc, że przewodnik jest „naładowany”? Gdzie są te ładunki? Okazuje się, że rezydują one na powierzchni przewodnika, gdzie istnieją duże siły, powstrzymujące je od ucieczki; nie są więc tam całkowicie „swobodne”. Studiując fizykę ciała stałego dowiadujemy się, że nadmiarowy ładunek każdego przewodnika mieści się średnio w obrębie jednej lub dwóch warstw atomowych powierzchni. Tymczasem wystarczy nam w zupełności, jeśli powiemy, że każdy ładunek dostarczony na powierzchnię przewodnika lub do jego wnętrza zbiera się na jego powierzchni. Wewnątrz przewodnika nie ma ładunku.

Zauważmy także, że pole elektryczne tuż na zewnątrz powierzchni przewodnika musi być do niej prostopadłe. Nie może wystąpić tam składowa styczna wektora pola. Gdyby składowa styczna istniała, elektrony poruszczałyby się *wzdłuż* powierzchni, gdyż nie ma sił, które by temu przeszkadzały. Mówiąc inaczej: wiemy, że linie sił pola elektrycznego muszą być zawsze skierowane pod kątem prostym do powierzchni ekwipotencjalnej.

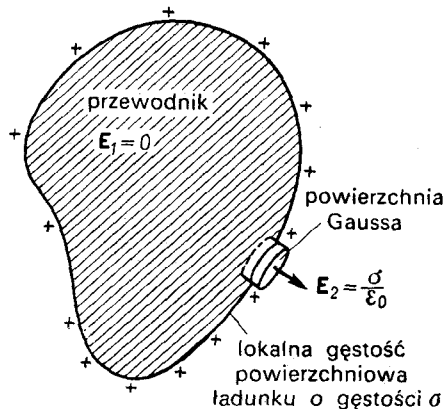
Stosując prawo Gaussa możemy związać natężenie pola tuż na zewnątrz przewodnika z lokalną gęstością na jego powierzchni. Jako powierzchnię Gaussa weźmy małe pudło cylindryczne, którego połowa wystaje poza powierzchnię przewodnika, jak to pokazuje rys. 5.11. Do całkowitego strumienia pola E przyczynia się jedynie zewnętrzna część pudła. Pole tuż na zewnątrz powierzchni przewodnika będzie więc dane następującym wzorem:

na zewnątrz przewodnika

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.8)$$

gdzie σ jest lokalną gęstością powierzchniową ładunku.

Dlaczego warstwa ładunku na przewodniku wytwarza inne pole niż *sama* warstwa ładunku? Inaczej mówiąc, dlaczego według wzoru (5.8) pole jest dwa razy większe niż według wzoru (5.3)? Przyczyna, oczywiście, tkwi w tym, że w przypadku przewodnika *nie* powiedzieliśmy, że nie ma „innych” ładunków naokoło. Istotnie, muszą wystąpić jakieś ładunki, aby spowodować, że $E = 0$ w przewodniku. Ładunki w bezpośrednim otoczeniu punktu P na powierzchni dają pole $E_{\text{lokalne}} = \sigma_{\text{lokalne}}/2\epsilon_0$ zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz powierzchni. Wszystkie jednak pozostałe ładunki na przewodniku „koniurują”, aby wytworzyć dodatkowe pole w punkcie P , równe co do wartości polu E_{lokalne} . Całkowite pole wewnątrz spada do zera, a pole na zewnątrz równa się $2E_{\text{lokalne}} = \sigma/\epsilon_0$.



5.11. Pole elektryczne tuż na zewnątrz powierzchni przewodnika jest proporcjonalne do lokalnej gęstości powierzchniowej ładunku.

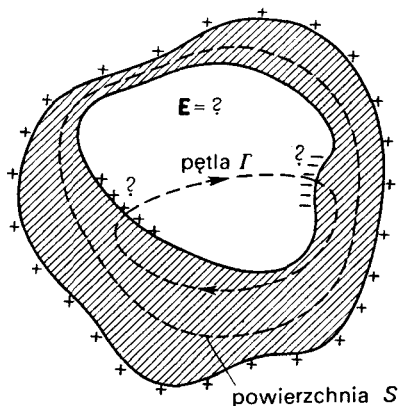
5-10. Pole we wnęce przewodnika

Wróćmy teraz do problemu pustego zasobnika — przewodnika zawierającego wydrążoną wnękę. W *metal*u pole nie występuje, ale czy istnieje pole we *wnęce*? Wykażemy, że jeżeli wnęka jest *pusta*, to nie ma w niej pola, *bez względu na to, jaki jest kształt* przewodnika i kształt owej wnęki (rys. 5.12). Weźmy powierzchnię Gaussa (S na rys. 5.12), obejmującą wydrążoną wnękę, ale pozostającą wszędzie w materiale przewodzącym. Wszędzie na powierzchni S pole jest równe zero, nie ma więc strumienia przez powierzchnię S i *całkowity* ładunek wewnątrz powierzchni S jest równy zero. Na podstawie rozważań symetrii można wnosić, że dla czaszy kulistej *nie* ma żadnego ładunku wewnątrz. Ogólnie jednak rzecz biorąc, możemy tylko powiedzieć, że na wewnętrznej powierzchni przewodnika jest taka sama liczba ładunków dodatnich i ujemnych. W jednej części *móglby* być jakiś dodatni ładunek powierzchniowy, a w innej — ujemny, jak to pokazano na rys. 5.12. Tego nie może wykluczyć prawo Gaussa.

W rzeczywistości dodatnie i ujemne ładunki na wewnętrznej powierzchni przesuną się aż do zetknięcia się z sobą i zniósą się. Możemy wykazać, że znoszą się one całkowicie, stosując prawo, że krążenie pola E jest zawsze równe zero (elektrostatyka). Przypuśćmy, że na jakiejś powierzchni wewnętrznej były ładunki. Wiemy, że w jakimś miejscu musi znajdować się taka sama liczba ładunków przeciwnego znaku. Wszystkie linie sił pola E muszą zaczynać się od ładunków dodatnich, a kończyć na ujemnych (ponieważ rozpatrujemy przypadek, kiedy nie ma w wydrążeniu swobodnych ładunków). Wyobraźmy sobie teraz jakąś pętlę Γ , która przecina wnękę wzdłuż jakiejś linii sił pola od jakiegoś ładunku dodatniego do ujemnego, a powraca do swego punktu początkowego poprzez przewodnik (patrz rys. 5.12). Całka wzdłuż linii sił w wydrążeniu od dodatniego do ujemnego ładunku nie będzie równa zero, całka zaś wzdłuż linii przechodzącej przez metal jest równa zero, gdyż $E = 0$. Mieliśmy więc

5.12. Jakie jest pole w dowolnego kształtu pustej wnęce przewodnika?

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0 ???$$



Tymczasem całka krzywoliniowa z pola E po dowolnej krzywej zamkniętej jest w polu elektrostatycznym zawsze równa zero. Nie może więc być żadnych pól wewnątrz pustej wnęki, ani żadnych ładunków na powierzchni wewnętrznej.

Trzeba, żebyście zwrócili uwagę na określenie, jakiegośmy tu użyli. Mówiliśmy stale: „wewnątrz *pustej* wnęki”. Jeśli wewnątrz wydrążonej wnęki umieścić w stałych położeniach jakieś ładunki, np. na izolatorze lub na małym przewodniku izolowanym od głównego przewodnika, to we wnęce mogą być pola, ale wtedy nie mamy już „pustej” wnęki.

Wykazaliśmy, że jeżeli wnęka jest całkowicie otoczona przewodnikiem, to żaden statyczny rozkład ładunku *na zewnątrz* nie może wytworzyć pól wewnątrz. Na tym właśnie opiera się zasada „ekranowania” aparatury elektrycznej, polegająca na umieszczeniu jej w metalowym pudle. Takie samo rozumowanie wykaże, że żaden rozkład ładunku *wewnątrz* zamkniętego przewodnika nie może wytworzyć pól *na zewnątrz*. Ekranowanie działa w obie strony! W elektrostatyce, ale nie w polach zmiennych, pola po obu stronach zamkniętej czaszy przewodzącej są od siebie całkowicie niezależne.

Teraz widzicie, dlaczego można było sprawdzić prawo Coulomba z tak dużą dokładnością. Kształt używanej do tego pustej czaszy nie ma znaczenia. Czasza nie musi być kulista, może być kanciasta! Jeżeli prawo Gaussa jest ściśle, to pole wewnątrz jest zawsze równe zeru. Teraz możecie także zrozumieć, dlaczego można spokojnie usiąść wewnątrz wysokonapięciowej końcówki generatora van de Graaffa, dającego napięcia miliona woltów, bez obawy, że zostanie się porażonym. Można to zrobić dzięki prawu Gaussa.

pole elektryczne w różnych warunkach (I)

6-1. Równania potencjału elektrostatycznego

Rozdział ten zawiera opis zachowania się pola elektrycznego w rozmaitych sytuacjach. Da to pewien wgląd we właściwości pola elektrycznego. Zapoznamy się tu również z metodami matematycznymi, stosowanymi do obliczania pola.

Zaznaczmy na początku, że cały problem matematyczny polega na rozwiązaniu dwóch równań, mianowicie równań Maxwella dla elektrostatyki:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (6.2)$$

Te dwa równania można w istocie sprowadzić do jednego. Z drugiego z nich widzimy od razu, że pole można przedstawić jako gradient jakiegoś skalaru (patrz § 3-7):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (6.3)$$

Dowolne określone pole elektryczne możemy, jeśli mamy ochotę, przedstawić poprzez jego gradient φ . Równanie różniczkowe, które musi spełniać potencjał φ , otrzymujemy przez podstawienie zależności (6.3) do równania (6.1):

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6.4)$$

Dywergencja gradientu φ jest tym samym, czym operator ∇^2 , działający na potencjał φ :

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \quad (6.5)$$

Możemy więc równanie (6.4) zapisać w postaci

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.6)$$

Operator ∇^2 nazywamy laplasjanem, a równanie (6.6) — równaniem Laplace'a. Cała elektrostatyka, z punktu widzenia matematyki, jest tylko badaniem rozwiązań tego jednego równania (6.6). Gdy uzyska się φ , jako rozwiązanie równania (6.6), wtedy można natychmiast znaleźć pole E z wzoru (6.3).

Weźmy najpierw specjalną klasę problemów, w których gęstość ładunku ρ dana jest jako funkcja x, y, z . Wtedy problem staje się prawie banalny, gdyż znamy już rozwiązanie równania (6.6) dla przypadku ogólnego. Wykazaliśmy, że jeżeli znamy gęstość ρ w każdym punkcie, to potencjał w punkcie (1) dany jest wyrażeniem

$$\varphi(1) = \int \frac{\rho(2) dV_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \quad (6.7)$$

gdzie $\rho(2)$ jest gęstością ładunku, a dV_2 — elementem objętości w punkcie (2), natomiast r_{12} jest odległością między punktami (1) i (2). Rozwiązanie równania różniczkowego (6.6) redukuje się do znalezienia całki objętościowej. Trzeba zwrócić specjalną uwagę na rozwiązanie równania (6.7), gdyż w fizyce natrafiamy na wiele sytuacji, które prowadzą do równań typu

$$\nabla^2 (\text{czegoś}) = (\text{coś innego}),$$

a równanie (6.7) jest prototypem rozwiązania każdego z tych problemów.

Rozwiązanie problemów pola elektrostatycznego jest więc zupełnie proste, jeśli znane są położenia wszystkich ładunków. Zobaczmy na kilku przykładach, jak się to robi.

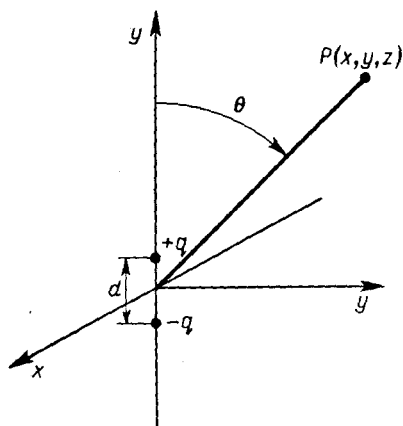
6-2. Dipol elektryczny

Weźmy najpierw dwa ładunki $+q$ i $-q$, których wzajemna odległość wynosi d . Wybierzmy układ współrzędnych tak, aby oś z przechodziła przez oba ładunki, a początek układu leżał w równej od nich odległości (rys. 6.1). Wtedy, po zastosowaniu wzoru (4.24), potencjał pochodzący od obu ładunków dany będzie wyrażeniem:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{[z-(d/2)]^2 + x^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{[z+d/2]^2 + x^2 + y^2}} \right]. \quad (6.8)$$

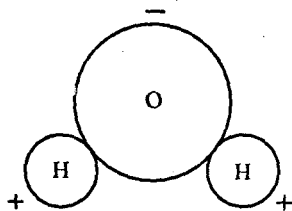
Nie będziemy tu wypisywać wzoru na pole elektryczne, ale mając potencjał możemy zawsze obliczyć. Rozwiązaliśmy więc problem dwóch ładunków.

Ważnym przypadkiem szczególnym będą dwa ładunki znajdujące się bardzo blisko siebie; interesują nas wtedy pola w odległościach od ładunków o wiele większych niż odległość między ładunkami. Taką bliską parę ładunków nazywamy *dipolem*. Z dipolami spotykamy się często.



6.1. Dipol: dwa ładunki $+q$ i $-q$ oddalone od siebie o odległość d .

6.2. Cząsteczka wody H_2O . Atomy wodoru mają nieco mniej niż należną im część chmury elektronowej, atom tlenu nieco więcej.



Zbadajmy więc pole dwóch ładunków różnoimiennych, umieszczonych w niewielkiej od siebie odległości d . Gdy d staje się równe zero, ładunki stykają się bezpośrednio, oba potencjały znoszą się i nie ma pola. Jeśli jednak ładunki nie będą się stykały, uzyskamy

Anteny „dipolowe” można traktować z dobrym przybliżeniem jako dwa ładunki w małej od siebie odległości, oczywiście pod warunkiem, że nie interesuje nas pole zbyt blisko anteny. (Zwykle interesują nas anteny z *poruszającymi się* ładunkami; wtedy nie można już w zasadzie stosować równań statyki, ale w pewnych przypadkach stanowią one dostateczne przybliżenie.)

Ważniejsze są może dipole atomowe. Jeżeli w jakiejś substancji istnieją siły elektryczne, to elektrony i protony podlegają przeciwnie skierowanym siłom i zostają względem siebie przesunięte. W przewodnikach, jak pamiętacie, część elektronów przesuwa się do powierzchni i pole wewnątrz pozostaje równe zero. W izolatorze elektrony nie mogą się daleko przesuwać — są ściągane z powrotem przez siły przyciągania jądrowego, ale się jednak przemieszczają odrobinię. Tak więc, chociaż atom lub cząsteczka pozostają obojętne w polu sił zewnętrznych, to jednak ładunki dodatnie i ujemne są w nich nieco rozdzielone, wskutek czego stają się one małymi dipolami. Gdy interesują nas pola tych dipoli atomowych w sąsiedztwie przedmiotów „normalnej” wielkości, mamy wtedy do czynienia z odległościami znacznie większymi niż odległości, na jakie są rozsunięte pary ładunków.

W niektórych cząsteczkach, nawet gdy nie ma pól zewnętrznych, ładunki są nieco rozdzielone ze względu na kształt cząsteczki. W cząsteczce wody, na przykład, wypadkowy ładunek

atomu tlenu jest ujemny, a wypadkowe ładunki dwóch atomów wodoru — dodatnie. Atomy wodoru nie są przy tym rozmieszczone symetrycznie, lecz tak, jak wskazuje rys. 6.2. Chociaż całkowity ładunek cząsteczki wynosi zero, to jednak istnieje pewien rozkład ładunku: po jednej stronie jest nieco więcej ładunku dodatniego, a po drugiej — ujemnego. Taka konfiguracja na pewno nie jest tak prosta jak układ dwu ładunków punktowych, ale jeżeli obserwować ją z dostatecznie dużej odległości, zachowuje się jak dipol. Pole na dużych odległościach, jak przekonamy się później, nie jest czułe na drobne szczegóły.

zupnie dobre przybliżenie potencjału rozwijając wyrażenie (6.8) w szereg według potęg malej wielkości d (stosując rozwinięcie dwumianu). Odrzucając wyższe potęgi d , otrzymamy

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd.$$

Wygodnie będzie wprowadzić oznaczenie

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Wtedy

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)$$

co

$$\frac{1}{\sqrt{[z - (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 [1 - (zd/r^2)]}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

Stosując znowu rozwinięcie dwumianowe wyrażenia $[1 - (zd/r^2)]^{-1/2}$ i odrzucając wyrazy zawierające d w potęgach wyższych niż druga, otrzymamy

$$\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right).$$

Podobnie

$$\frac{1}{\sqrt{[z + (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right).$$

Suma tych dwóch wyrazów daje potencjał:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} qd. \quad (6.9)$$

Potencjał, a więc i pole, które jest jego pochodną, jest proporcjonalny do qd , iloczynu ładunku i odległości. Iloczyn ten nosi nazwę *momentu dipolowego*. Oznaczamy go literą p (nie mylić z pędem!):

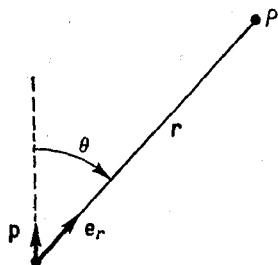
$$p = qd. \quad (6.10)$$

Równanie (6.9) możemy również napisać inaczej:

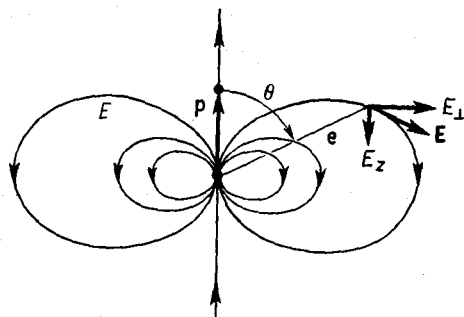
$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (6.11)$$

gdź $z/r = \cos \theta$, gdzie θ jest kątem między osią dipola a promieniem wodzącym punktu (x, y, z) (patrz rys. 6.1). W danym kierunku od osi potencjał dipola maleje jak $1/r^2$ (podczas gdy dla ładunku punktowego potencjał malał jak $1/r$). Pole elektryczne dipola maleje więc jak $1/r^3$.

Nasz wzór możemy przedstawić w postaci wektorowej, jeżeli zdefiniujemy \mathbf{p} jako wektor o wartości bezwzględnej równej p , kierunku zgodnym z osią dipola i skierowany od ła-



6.3. Dipol opisany za pomocą wektora



6.4. Pole elektryczne dipola

dunku $-q$ do $+q$. Wtedy

$$\cos \theta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r, \quad (6.12)$$

gdzie \mathbf{e}_r jest wektorem jednostkowym w kierunku promienia wodzącego (rys. 6.3). Punkt (x, y, z) możemy zapisać przy pomocy jego wektora wodzącego \mathbf{r} i wtedy

potencjał dipolowy

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (6.13)$$

Wzór ten stosuje się do dipola o dowolnej orientacji i położeniu, jeżeli tylko \mathbf{r} jest wektorem poprowadzonym od dipola do rozważanego punktu.

Jeśli interesuje nas pole elektryczne dipola, to możemy je otrzymać biorąc gradient jego potencjału φ . Tak na przykład składowa w kierunku osi z pola jest równa $-\partial\varphi/\partial z$. Dla dipola skierowanego wzdłuż osi z otrzymamy, stosując wzór (6.9):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right), \\ E_z &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Składowymi w kierunkach x i y są:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}.$$

Jeśli złożymy te dwie składowe, otrzymamy składową *prostą* do osi z , tak zwaną składową transwersalną E_{\perp} :

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2},$$

czyli

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3}. \quad (6.15)$$

Składowa transwersalna E_{\perp} leży w płaszczyźnie x, y i skierowana jest od osi dipola. Całkowite pole będzie, oczywiście, równe

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_{\perp}^2}.$$

Pole dipolowe zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do sześciątku odległości od dipola. Na osi, gdzie $\theta = 0$, ma ono dwukrotnie większe natężenie niż dla $\theta = 90^\circ$. Dla tych obu szczególnych wartości kąta pole elektryczne ma tylko składową w kierunku osi z , ale o różnym znaku w każdym z tych położeniach (rys. 6.4).

6-3. Uwagi dotyczące równań wektorowych

Doszliliśmy teraz do właściwego momentu, żeby przekazać pewną ogólną uwagę dotyczącą analizy wektorowej. Za jej pomocą można wyrazić podstawowe dowody w elektrycznych równaniach w zupełnie ogólnej postaci, ale przy różnych obliczeniach i analizach dobrze jest wybrać osie współrzędnych w jakiś dogodny sposób. Zauważcie, że gdy szukaliśmy potencjału dipola, wybraliśmy oś z wzdłuż kierunku dipola, a nie pod jakimś dowolnym kątem. To bardzo ułatwiło rachunki. Później jednak napisaliśmy równania w postaci wektorowej, tak że nie zależały już one od jakiegoś szczególnego wyboru układu współrzędnych. Teraz, wiedząc już, że zależności są ogólnie prawdziwe, możemy wybierać dowolny układ współrzędnych. Nie ma, oczywiście, sensu trudzić się z jakimś arbitralnie wybranym układem współrzędnych, pod dziwnym kątem do dipola, jeśli można dla danego problemu wybrać jakiś dogodny układ, jeżeli tylko wynik może być w końcu wyrażony w postaci równania wektorowego. Korzystajmy więc koniecznie z tego, że równania wektorowe są niezależne od układu współrzędnych.

Z drugiej jednak strony, gdy próbuje obliczyć dywergencję wektora, zamiast po prostu przyglądać się wyrażeniu $\nabla \cdot \mathbf{E}$ i dziwić się, co ono oznacza, pamiętajcie, że można je zawsze rozwinąć na sumę składowych:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Jeśli umiecie znaleźć składowe x, y i z pola elektrycznego i zróżniczkować je, to znajdziecie dywergencję. Niektórym się wydaje, że jest coś nieeleganckiego — jakieś przyznanie się do porażki — w wypisaniu składowych. Wydaje się im, że zawsze trzeba wszystko zapisywać przy pomocy operatorów wektorowych. Często jednak nie mamy z tego żadnej korzyści. Gdy pierwszy raz stykamy się z jakimś szczególnym problemem, wypisanie współrzędnych pomaga nam zwykle w lepszym zrozumieniu o co w nim chodzi. Nie ma nic nieeleganckiego we wstawieniu liczb do równań i nie ma nic nieeleganckiego w zastąpieniu dziwnych symboli pochodnymi. W istocie tkwi w tym czasem pewna mądrość. Oczywiście,

jeśli publikujecie pracę w czasopiśmie specjalistycznym, będzie wyglądało lepiej, a czasem nawet bardziej zrozumiale, jeśli podacie równania w postaci wektorowej. Ponadto będzie to oszczędność miejsca.

6-4. Potencjał dipolowy jako gradient

Chcielibyśmy wskazać tu na pewną zabawną rzecz tycającą wzoru dipolowego (6.13). Potencjał ten można również zapisać w postaci

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right). \quad (6.16)$$

Jeśli obliczycie gradient $(1/r)$, to dostaniecie

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

i równanie (6.16) będzie miało taką samą postać jak równanie (6.13)

Jak do tego doszliśmy? Po prostu przypomnieliśmy sobie, że wielkość \mathbf{e}_r/r^2 występuje we wzorze na pole ładunku punkowego i że to pole jest gradientem *potencjału* zmieniającego się jak $1/r$.

Istnieje *fizyczna* przyczyna, dla której można napisać potencjał dipolowy w postaci równania (6.16). Przypuśćmy, że w początku układu mamy ładunek q . Potencjał w punkcie $P(x, y, z)$ będzie równy

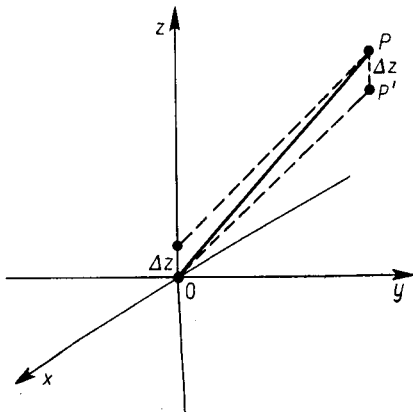
$$\varphi_0 = \frac{q}{r}.$$

6.5. Potencjał w punkcie P pochodzący od ładunku punkowego znajdującego się w odległości Δz nad początkiem układu jest taki sam jak potencjał w punkcie P' (Δz poniżej P) pochodzący od tego samego ładunku umieszczonego w początku układu.

(Tymczasem opuśćmy w tym rozumowaniu czynnik $1/4\pi\epsilon_0$; możemy go wstawić na końcu.) Jeśli przesuniemy ładunek $+q$ na odległość Δz , to potencjał w punkcie P zmieni się nieco, powiedzmy o $\Delta\varphi_+$. Ile wynosi $\Delta\varphi_+$? Jest to po prostu wartość, o którą *zmieniłby* się potencjał, gdybyśmy *pozostawili* ładunek w początku układu, a za to przesunęlibyśmy punkt P w *dół* o tę samą odległość Δz (patrz rys. 6.5.) A zatem

$$\Delta\varphi_+ = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} \Delta z,$$

gdzie Δz jest tak samo jak przedtem równe $d/2$. Stosując wyrażenie $\varphi = q/r$ na potencjał ładunku dodatniego otrzymujemy



$$\varphi_+ = \frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.17)$$

Analogicznie, potencjał ładunku ujemnego będzie równy

$$\varphi_- = \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.18)$$

Całkowity potencjał jest sumą potencjałów (6.17) i (6.18):

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{r} \right) d = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) qd. \quad (6.19)$$

Dla dipoli inaczej skierowanych możemy przedstawić przemieszczenie ładunku dodatniego przez wektor $\Delta \mathbf{r}_+$. Wtedy równanie (6.17) zapiszemy jako

$$\Delta \varphi_+ = - \nabla \varphi_0 \cdot \Delta \mathbf{r}_+,$$

gdzie wielkość $\Delta \mathbf{r}$ trzeba zastąpić wielkością $\mathbf{d}/2$. Wykonując różniczkowanie, otrzymujemy analogicznie do zależności (6.19)

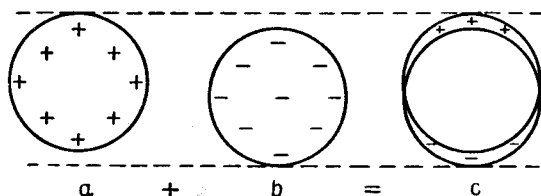
$$\varphi = - \nabla \left(\frac{1}{r} \right) qd.$$

To przedstawia właściwie to samo, co równanie (6.16), jeśli wprowadzimy $q\mathbf{d} = \mathbf{p}$ i wstawimy znowu $1/4\pi\epsilon_0$. Potencjał dipola z równania (6.13) można przedstawić jako

$$\varphi = - \mathbf{p} \cdot \nabla \Phi_0, \quad (6.20)$$

gdzie $\Phi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$ jest potencjałem *jednostkowego* ładunku punktowego.

Chociaż potencjał znanego rozkładu ładunku możemy zawsze znaleźć przez całkowanie, czasami jednak można zaoszczędzić sporo czasu przez zastosowanie jakiegoś pomysłowego chwytu. Często można, na przykład, stosować zasadę superpozycji. Jeżeli mamy rozkład ładunków, który możemy rozłożyć na sumę dwóch rozkładów o znanych potencjałach, szukany potencjał będzie po prostu sumą tych dwóch potencjałów. Jednym tego przykładem byłoby tu wyprowadzenie wzoru (6.20), a drugi przykład jest następujący: przypuśćmy, że mamy powierzchnię kulistą, na której rozkład ładunku powierzchniowego zmienia się jak cosinus kąta biegunowego. Całkowanie takiego rozkładu jest bardzo uciążliwe, ale, o dziwo, taki rozkład można zanalizować na podstawie zasady superpozycji. Wyobraźcie sobie dwie kule: jedną o jednorodnej gęstości ładunku dodatniego, a drugą — ujemnego. Gdy kule są nałożone na siebie, wypadkowy ładunek jest zerowy, kula jest nienaładowana. Jeśli teraz dodatnio naładowaną kulę trochę przesunąć względem kuli ujemnie naładowanej, to wewnątrz nienaładowanej kuli pozostanie nadal neutralne, ale po jednej stronie pojawi się nieco ładunku dodatniego, a po drugiej — ujemnego (rys. 6.6). Jeśli względne przesunięcie naładowanych kul jest niewielkie, ładunek wypadkowy jest równoważny ładunkowi powierzchniowemu (na powierzchni kulistej) i gęstość ładunku powierzchniowego jest proporcjonalna do cosinusa kąta biegunowego.



6.6. Dwie jednorodnie naładowane kule, przemieszczone nieco względem siebie, są równoważne niejednorodnemu rozkładowi ładunku powierzchniowego.

Szukając potencjału takiego rozkładu nie potrzebujemy wcale całkować. Wiemy, że potencjał od każdej z naładowanych kul, dla punktu leżącego na zewnątrz kuli, jest taki sam jak potencjał ładunku punktowego. Te dwie przesunięte względem siebie kule zachowują się podobnie jak dwa ładunki punktowe; potencjał pochodzący od nich jest po prostu potencjałem dipolowym.

W ten sposób można wykazać, że kula o promieniu a i o gęstości ładunku powierzchniowego

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$$

wytwarza na zewnątrz takie samo pole jak dipol o momencie dipolowym

$$p = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3}.$$

Można również wykazać, że wewnątrz kuli pole będzie stałe i że będzie miało wartość

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

Jeśli θ jest kątem liczonym od dodatniej części osi z , to kierunek pola elektrycznego wewnątrz kuli jest zgodny z kierunkiem *ujemnej* części osi z . Rozważany przypadek nie jest wcale tak sztuczny, jakby się mogło wydawać; spotkamy się z nim znowu w teorii dielektryków.

6-5. Przybliżenie dipolowe dla dowolnego rozkładu ładunków

Pole dipolowe występuje również w innym ciekawym i ważnym przypadku. Przypuśćmy, że mamy ciało o skomplikowanym rozkładzie ładunku, np. cząsteczkę wody (rys. 6.2), i że interesuje nas tylko pole daleko od tego ciała. Pokażemy, że na pole można znaleźć stosunkowo proste wyrażenie, słuszne dla odległości dużych w porównaniu z rozmiarami ciała.

Możemy przedstawić sobie nasze ciało jako zbiór ładunków punktowych q_i , skupionych w pewnym ograniczonym obszarze, jak to pokazuje rys. 6.7. (Później będziemy mogli

zastąpić ładunek q_i wielkością $q dV$.) Niech każdy ładunek q_i znajduje się w odległości d_i od początku układu, wybranego gdzieś wewnątrz grupy ładunków. Jaki będzie potencjał w punkcie P , znajdującym się w odległości R od początku układu, jeśli R jest znacznie większe niż maksymalne d_i ? Potencjał pochodzący od całego zbioru ładunków dany jest wyrażeniem

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (6.21)$$

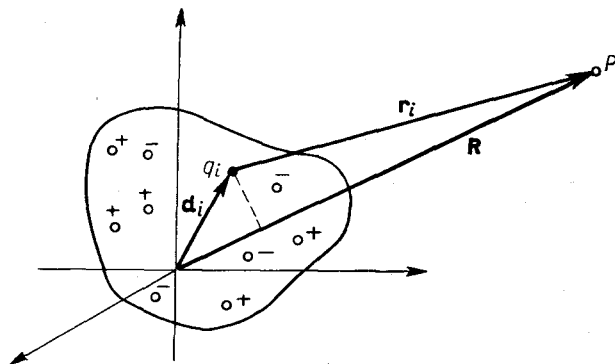
gdzie r_i jest odległością od punktu P do ładunku q_i (długością wektora $\mathbf{R}-\mathbf{d}_i$). Jeśli odległość od ładunków do punktu P jest niezmiernie duża, to każdą z odległości r_i można przybliżyć przez R . Każdy składnik sumy będzie teraz równy q_i/R i możemy czynnik $1/R$ wynieść przed znak sumowania. Otrzymujemy bardzo prosty wynik:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (6.22)$$

gdzie Q jest całkowitym ładunkiem ciała. Stwierdziliśmy więc, że w punktach dostatecznie odległych od naładowanego odłamka ciała odłamek ten wygląda jak ładunek punktowy. Wynik nie jest znów taki zadziwiający.

Co jednak będzie, gdy liczba ładunków dodatnich będzie taka sama jak liczba ładunków ujemnych? Wtedy całkowity ładunek Q ciała będzie zerem. To nie jest wcale niezwykły przypadek — w istocie, jak wiemy, ciała są zwykle elektrycznie obojętne. Cząsteczka wody jest obojętna, ale nie wszystkie ładunki znajdują się w jednym punkcie, jeśli więc znajdziemy się dostatecznie blisko, będziemy mogli odczuć pewne efekty rozdzielonych ładunków. Dla znalezienia potencjału dowolnego rozkładu ładunków w obojętnym elektrycznie ciele musimy już mieć teraz lepsze przybliżenie niż daje równanie (6.22). Równanie (6.21) jest jeszcze nadal ściśle, ale nie możemy już zakładać, że $r_i = R$. Na odległość r_i musimy mieć bardziej ściśle wyrażenie. Jeśli punkt P znajduje się w dużej odległości, to r_i będą się

6.7. Obliczanie potencjału w punkcie P znajdującym się w dużej odległości od zbioru ładunków



różniły od R , z doskonałym przybliżeniem, o rzut \mathbf{d} na \mathbf{R} , jak to widać z rys. 6.7. (Trzeba sobie wyobrazić, że punkt P leży w rzeczywistości dalej, niżby to wynikało z rysunku.) Mówiąc inaczej, jeżeli \mathbf{e}_r jest wektorem jednostkowym w kierunku \mathbf{R} , to nasze następne przybliżenie na r_i będzie dane wzorem

$$r_i \approx R - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r. \quad (6.23)$$

W istocie szukamy wyrażenia $1/r_i$. Ponieważ $d_i \ll R$, więc w naszym przybliżeniu możemy napisać

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{R} \right). \quad (6.24)$$

Wstawiając to wyrażenie do wzoru (6.21) otrzymamy potencjał φ :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{R^2} + \dots \right). \quad (6.25)$$

Trzy kropki oznaczają, że pominęliśmy wyrazy z d/R w wyższych potęgach. Wszystko to razem jest rozwinięciem wyrażenia $1/r_i$ w szereg Taylora wokół wartości $1/R$ według potęg d_i/R .

Pierwszy wyraz w równaniu (6.25) otrzymaliśmy już poprzednio; teraz jeśli ciało jest elektrycznie obojętne, wyraz ten odpada. Wyraz drugi zależy od $1/R^2$, tak jak dla dipola. Istotnie, jeśli *zdefiniujemy*

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{d}_i, \quad (6.26)$$

jako właściwość rozkładu ładunku, drugi wyraz potencjału (6.25) będzie równy

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{R^2}, \quad (6.27)$$

czyli będzie równy *dokładnie potencjałowi dipola*. Wielkość \mathbf{p} nazywamy momentem dipolowym rozkładu ładunku. To jest uogólnienie naszej wcześniejszej definicji i dla specjalnego przypadku dwóch ładunków punktowych do niej się znowu sprowadza.

Stwierdziliśmy więc, że dostatecznie daleko od *dowolnego* zbioru ładunków, który jako całość jest elektrycznie obojętny, potencjał jest potencjałem dipolowym. Wraz ze wzrostem odległości R maleje jak $1/R^2$, wraz z kierunkiem zmienia się jak $\cos\theta$, a jego wartość zależy od momentu dipolowego rozkładu ładunku. Z tych właśnie względów pola dipolowe mają takie duże znaczenie; prosty przypadek pary ładunków punktowych jest raczej rzadki.

Cząsteczka wody, na przykład, ma duży moment dipolowy. Od pól elektrycznych, wynikających z tego momentu, zależą pewne ważne właściwości wody. Dla wielu cząsteczek, np. dla CO_2 , moment dipolowy znika ze względu na symetrię cząsteczki. W tych przypadkach musimy rozwinięcie w szereg prowadzić dalej, uzyskując w wyrażeniu na potencjał wyraz proporcjonalny do $1/R^3$. Nazywamy go potencjałem kwadrupolowym. Takie przypadki omówimy później.

6-6. Pola przewodników naładowanych

Zakończyliśmy rozpatrywanie przykładów, w których rozkład ładunku był znany od początku. Były to przykłady zagadnień bez poważniejszych trudności, wymagające od swych rozwiązań co najwyżej pewnych całkowań. Teraz zajmujemy się zupełnie innymi zagadnieniami, polegającymi na wyznaczeniu pól w pobliżu naładowanych przewodników.

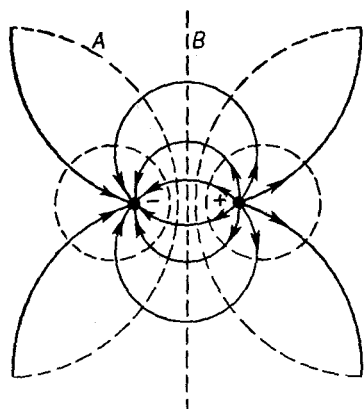
Przypuśćmy, że całkowity ładunek, znajdujący się na jakimś dowolnym przewodniku, równy jest Q . Nie możemy powiedzieć, gdzie dokładnie znajdują się poszczególne ładunki. Będą one rozrzucone w jakiś sposób po powierzchni. Skąd możemy wiedzieć, jaki jest rozkład ładunków na powierzchni? Muszą się one tak rozłożyć, aby potencjał na powierzchni był stały. Gdyby powierzchnia nie była powierzchnią ekwipotencjalną, wewnątrz przewodnika istniałoby pole elektryczne i ładunki poruszałyby się tak długo, aż wartość pola spadłaby do zera. Tego rodzaju problem ogólny można rozwiązać w sposób następujący. Zgadujemy, jaki jest rozkład ładunków, i obliczamy potencjał. Jeśli się okaże, że potencjał jest wszędzie na powierzchni stały, problem będzie rozwiązany. Jeśli natomiast okaże się, że powierzchnia nie jest ekwipotencjalna, to źle odgadliśmy, jaki jest rozkład ładunku, i musimy zgadywać jeszcze raz, z nadzieją, że tym razem nam się uda. Może się to ciągnąć nieskończenie, jeżeli nie będziemy zgadywać z sensem.

Kwestia, jak odgadnąć, jaki jest rozkład, jest od strony matematycznej trudna. Natura ma, oczywiście, czas, aby stworzyć pewien rozkład — ładunki są popychane i pociągane tak długo, aż się zrównoważą. Gdy próbujemy jednak rozwiązać odpowiedni problem, każda próba zabiera nam tak dużo czasu, że ta metoda staje się bardzo uciążliwa. Dla jakiegokolwiek dowolnej grupy przewodników i ładunków problem ten może być bardzo skomplikowany i na ogół będzie go można jedynie rozwiązać pracochłonnymi metodami numerycznymi. Obecnie takie obliczenia numeryczne wykonują za nas maszyny liczące, którym trzeba jedynie wskazać drogę postępowania.

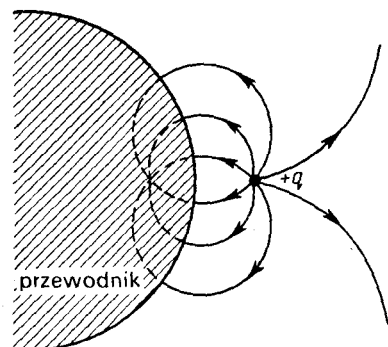
Z drugiej jednak strony istnieje wiele drobnych zagadnień praktycznych, w których byłoby przyjemnie móc znaleźć odpowiedź jakąś prostszą, bardziej bezpośrednią metodą, bez wypisywania programu dla maszyny liczącej. Na szczęście, istnieje wiele przypadków, w których można „wydusić” z Natury odpowiedź, stosując pewne chwytły. Pierwszy chwyt, jaki opiszemy, będzie polegał na skorzystaniu ze znanych już rozwiązań, uzyskanych dla przypadków, w których ładunki mają określone położenia.

6-7. Metoda obrazów

Znaleźliśmy pole dwóch ładunków punktowych. Rysunek 6.8 pokazuje niektóre linie pola i niektóre powierzchnie ekwipotencjalne, uzyskane z obliczeń, jakie przeprowadziliśmy w rozdz. 5. Weźmy teraz pod uwagę powierzchnię ekwipotencjalną, oznaczoną literą A . Przypuśćmy, że ukształtujemy cienką folię metalową tak, aby leżała dokładnie na tej powierzchni. Jeśli również dopasujemy jej potencjał do właściwej wartości, to nikt nie pozna, że umieściliśmy tę folię, bo nic się nie zmieni.



6.8. Linie pola i powierzchnie ekwipotencjalne dwóch ładunków punktowych



6.9. Pole na zewnątrz przewodnika o kształcie powierzchni ekwipotencjalnej z rys. 6.8

Zauważcie jednak, że w istocie rozwiązaliśmy *nowy* problem. Mamy tu sytuację, w której powierzchnia zakrzywionego przewodnika o danym potencjale jest umieszczona w pobliżu ładunku punktowego. Jeśli folia metalowa, którą umieściliśmy na powierzchni ekwipotencjalnej, zamyka się (lub w praktyce, jeśli rozciąga się dostatecznie daleko), to mamy tu sytuację taką samą jak w § 5-10, gdzie rozpatrywaliśmy przestrzeń podzieloną na dwa obszary: jeden — wewnątrz, a drugi — na zewnątrz zamkniętej warstwy przewodzącej. Stwierdziliśmy tam, że pola w tych dwóch obszarach są od siebie zupełnie niezależne. Tak więc na zewnątrz naszego zakrzywionego przewodnika będziemy mieli zawsze to samo pole, bez względu na to, jakie pole będzie w środku. Możemy nawet wypełnić całe wnętrze materiałem przewodzącym. Znaleźliśmy więc pola dla przypadku pokazanego na rys. 6.9. W obszarze na zewnątrz przewodnika pole jest takie jak w przypadku dwóch ładunków punktowych (takie jak przedstawione na rys. 6.8). Wewnątrz przewodnika pole jest równe zero. Również, tak jak powinno być, pole tuż na zewnątrz przewodnika jest prostopadłe do jego powierzchni.

Tak więc pola z rys. 6.9 możemy znaleźć obliczając pole pochodzące od ładunku q i pole pochodzące od jakiegoś pomyślanego ładunku $-q$, umieszczonego w odpowiednim punkcie. Ładunek punktowy, o którym pomyśleliśmy, że istnieje z tyłu, za powierzchnią przewodzącą, nosi nazwę *obrazu elektrycznego*.

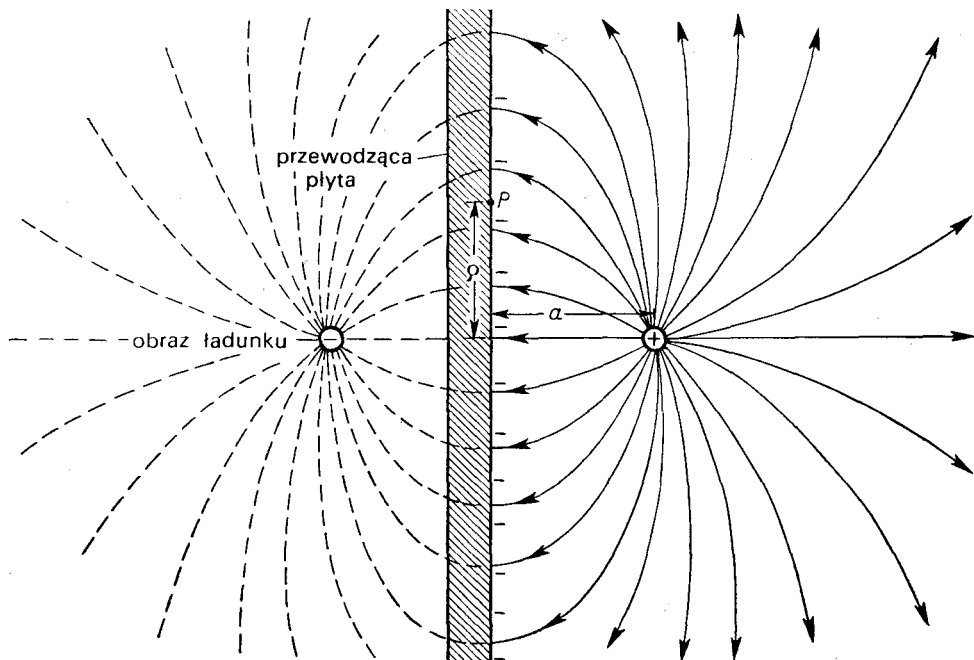
W książkach możecie znaleźć długą listę rozwiązań dla przewodników o kształcie hiperbolicznym lub o innym podobnie skomplikowanym kształcie i dziwić się pewnie będziecie, jak można dać sobie radę z powierzchniami o tak przeraźliwych kształtach. Te problemy zostały rozwiązane „od tyłu”! Ktoś rozwiązał jakies proste zagadnienie z danym rozkładem ładunków. Później zobaczył, że któraś z powierzchni ekwipotencjalnych ma nowy kształt, napisał więc pracę, w której wskazał, że pole przewodnika o tym szczególnym kształcie można opisać w pewien sposób.

6-8. Ładunek punktowy w pobliżu płaszczyzny przewodzącej

Jako najprostsze zastosowanie tej metody weźmy przypadek płaszczyzny ekwipotencjalnej, oznaczonej na rys. 6.8 literą *B*. Za pomocą tej płaszczyzny możemy rozwiązać zagadnienie ładunku punktowego znajdującego się w pobliżu płaszczyzny przewodzącej. Wymazujemy po prostu lewą stronę rysunku. Linie pola dla naszego przypadku przedstawia rys. 6.10. Zauważcie, że ponieważ płaszczyzna znajdowała się w równych odległościach od obu ładunków, ma potencjał zerowy. Rozwiązaliśmy problem ładunku dodatniego, znajdującego się w pobliżu uziemionej warstwy przewodzącej.

Znaleźliśmy pole całkowite, ale jaki jest rozkład *rzeczywistych* ładunków, od których ono zależy? Poza naszym punktowym ładunkiem dodatnim istnieją ujemne ładunki indukowane na warstwie przewodzącej, które zostały przyciągnięte przez ładunek dodatni (z dużych odległości). Przypuśćmy teraz, że z jakichś względów praktycznych albo po prostu z ciekawości chcielibyście wiedzieć, jak te ładunki ujemne są rozłożone na powierzchni. Możecie znaleźć gęstość ładunku powierzchniowego korzystając z wyników § 5-6, uzyskanych z twierdzenia Gaussa. Składowa normalna pola elektrycznego tuż na zewnątrz przewodnika jest równa gęstości powierzchniowej ładunku σ , podzielonej przez ϵ_0 . Gęstość ładunku w każdym punkcie powierzchni możemy obliczyć z wartości składowej normalnej

6.10. Pole ładunku znajdującego się w pobliżu płaszczyzny przewodzącej, znalezione metodą obrazów



poła elektrycznego przy powierzchni. Wartość tej składowej znamy, ponieważ znamy wartość pola w każdym punkcie.

Weźmy na powierzchni punkt P , leżący w odległości ϱ od prostej prostopadłej do powierzchni i przechodzącej przez ładunek punktowy (rys. 6.10). Pole elektryczne w punkcie P jest prostopadłe do powierzchni i skierowane ku niej. Składowa wektora pola pochodzącego od ładunku *dodatniego*, normalna do powierzchni, wynosi

$$E_{n+} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{(a^2 + \varrho^2)^{3/2}}. \quad (6.28)$$

Do tego musimy dodać pole elektryczne, pochodzące od ujemnego obrazu ładunku. Pole to podwaja składową normalną (a znosi wszystkie inne). Tak więc gęstość ładunku σ w dowolnym punkcie powierzchni będzie równa

$$\sigma(\varrho) = \epsilon_0 E(\varrho) = -\frac{2aq}{4\pi(a^2 + \varrho^2)^{3/2}}. \quad (6.29)$$

Możemy sprawdzić nasz wynik całkując σ po całej powierzchni. Stwierdzimy wtedy, że całkowity ładunek indukowany równa się $-q$, tak jak być powinno.

Jeszcze jedno pytanie: czy na ładunek punktowy działa jakaś siła? Tak, działa, ponieważ istnieje przyciąganie przez indukowany ujemny ładunek powierzchniowy na płycie. Znając gęstość ładunku powierzchniowego [z równania (6.29)] możemy przez całkowanie obliczyć siłę działającą na dodatni ładunek punktowy. Wiemy jednak, że siła działająca na ładunek dodatni jest dokładnie taka sama, jaka by była, *gdybyśmy* zamiast płyty *mieli* ujemny obraz ładunku, gdyż pola w otoczeniu ładunku są w obu przypadkach takie same. Siła, działająca na ładunek punktowy, skierowana jest ku płycie i ma wartość

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2}. \quad (6.30)$$

Znaleźliśmy siłę sposobem o wiele prostszym niż przez całkowanie po wszystkich ujemnych ładunkach.

6-9. Ładunek punktowy w pobliżu kuli przewodzącej

Jakie inne powierzchnie, poza płaszczyzną, dają proste rozwiązania? Najprostszym przykładem będzie tu kula. Znajdźmy pole elektryczne wokół metalowej kuli, w której pobliżu znajduje się ładunek punktowy q (rys. 6.11). Musimy znaleźć jakąś prostą sytuację fizyczną, w której kula jest powierzchnią ekwipotencjalną. Przeglądając zadania, które ktoś inny już rozwiązał, znajdziemy, że pole dwóch *nierównych* ładunków punktowych ma powierzchnię ekwipotencjalną, będącą powierzchnią kuli. No, właśnie! Jeśli wybierzemy położenie obrazu ładunku i dobierzemy właściwą wielkość ładunku, to może uda nam się dopasować naszą kulę do powierzchni ekwipotencjalnej. Istotnie, to się da zrobić w następujący sposób.

Przypuśćmy, że chcemy, aby powierzchnia ekwipotencjalna była kulą o promieniu a , ze środkiem w odległości b od ładunku q . Umieścimy obraz ładunku o wielkości $q' = -q(a/b)$ na prostej łączącej ładunek punktowy ze środkiem kuli, w odległości a^2/b od środka kuli. Kula będzie miała wtedy potencjał równy zero.

Matematyczna przyczyna tego tkwi w tym, że kula jest miejscem geometrycznym punktów, których odległości od dwóch wybranych punktów są w stałym stosunku. Zgodnie z rys. 6.11 potencjał w punkcie P , pochodzący od ładunków q i q' , jest proporcjonalny do

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}.$$

Potencjał będzie więc równy zero we wszystkich punktach, dla których

$$\frac{q'}{r_2} = -\frac{q}{r_1}, \text{ czyli } \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q}.$$

Jeśli ładunek q' umieścimy w odległości a^2/b od środka kuli, to stosunek r_2/r_1 będzie miał stałą wartość a/b . Jeśli

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{b}, \quad (6.31)$$

to powierzchnia kuli jest powierzchnią ekwipotencjalną. Istotnie, jej potencjał wynosi zero.

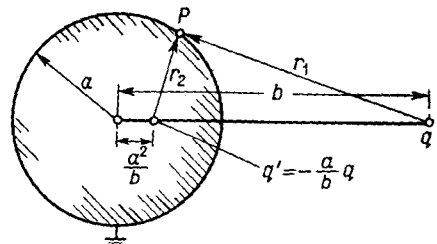
A jak będzie wyglądała sprawa z kulą, która nie będzie miała potencjału zerowego? Potencjał kuli będzie równy zero tylko wtedy, gdy zdarzy się tak, że całkowity ładunek kuli będzie równy q' . Oczywiście, jeśli kula jest uziemiona, indukowany na niej ładunek musi być właśnie taki. Ale co będzie w przypadku, gdy kula będzie izolowana i gdy nie dostarczymy na nią ładunku lub też w przypadku, gdy została naładowana ładunkiem Q ? A jeśli ma jakiś potencjał *różny* od zera? Na wszystkie te pytania łatwo znaleźć odpowiedź. Możemy zawsze dodać ładunek punktowy q'' w środku kuli. Powierzchnia kuli, zgodnie z zasadą superpozycji, będzie nadal ekwipotencjalna, jedynie wartość potencjału może się zmienić.

Weźmy, na przykład, kulę przewodzącą, naładowaną i izolowaną od otoczenia. Jeśli zbliżymy do niej dodatni ładunek punktowy q , całkowity ładunek kuli pozostanie nadal równy zero. Odpowiadające temu rozwiązanie znajdziemy stosując metodę obrazu ładunku q' i wprowadzając w środku kuli dodatkowy ładunek q'' , taki że

$$q'' = -q' = \frac{a}{b}q. \quad (6.32)$$

Wszędzie na zewnątrz kuli pola będą dane przez zasadę superpozycji pól pochodzących od ładunków q , q' i q'' . Problem jest więc rozwiązany.

6.11. Ładunek punktowy q indukuje ładunki na uziemionej kuli przewodzącej, której pole jest takie, jak obrazu ładunku q' , umieszczonego w punkcie wskazanym na rysunku.



Widzimy teraz, że będzie istniała siła przyciągania między kulą i ładunkiem punktowym q . Nawet gdy kula będzie elektrycznie obojętna i nie będzie na niej ładunku, siła ta nie będzie równa zeru. Skąd się bierze to przyciąganie? Jeżeli do przewodzącej kuli zbliżamy ładunek dodatni, to przyciąga on na bliższą sobie stronę ładunki ujemne, pozostawiając ładunki dodatnie na stronie dalszej. Przyciąganie przez ładunki ujemne jest wtedy większe niż odpychanie przez ładunki dodatnie i w wyniku powstaje przyciąganie między kulą a ładunkiem punktowym. Jak duże jest to przyciąganie, można stwierdzić obliczając siłę działającą na ładunek q w polu pochodzącym od ładunków q' i q'' . Siła całkowita jest sumą siły przyciągającej między ładunkami q i q' [$q' = -(a/b)q$], znajdującymi się w odległości $b - (a^2/b)$, oraz siły odpychania między ładunkami q i q'' [$q'' = (a/b)q$], znajdującymi się w odległości b .

Tych, których bawiło w dzieciństwie pudełko od kakao firmy Droste z etykietką, na której wyrysowano zakonnicę trzymającą na tacy pudełko kakao, na którego etykietce wyrysowano zakonnicę trzymającą na tacy pudełko kakao, na którego etykietce... może zainteresować następujący problem. Dwie jednakowe kule, jedna o całkowitym ładunku $+Q$, druga o całkowitym ładunku $-Q$ są umieszczone w pewnej od siebie odległości. Jaka siła działa między nimi? Problem można rozwiązać przez nieskończoną liczbę obrazów. Przyjmujemy najpierw przybliżenie, polegające na zastąpieniu każdej kuli przez odpowiedni ładunek umieszczony w jej środku. Te ładunki dadzą obrazy w drugiej kuli. Obrazy ładunków będą miały znowu obrazy itd., itd. Rozwiązanie przypomina obrazek na pudełku kakao — i jest szybko zbieżne.

6-10. Kondensatory; płyty równoległe

Rozważmy teraz inny problem dotyczący przewodników. Weźmy dwie duże płyty metalowe, równoległe do siebie i rozsunięte na odległość małą w porównaniu z szerokością płyt. Przypuśćmy, że każda z płyt została naładowana takim samym co do wielkości, lecz przeciwnego znaku ładunkiem. Ładunki na jednej płycie będą przyciągane przez ładunki na drugiej płycie i będą rozprzestrzeniały się równomiernie na wewnętrznych powierzchniach płyt. Płyty będą więc miały gęstości powierzchniowe ładunku odpowiednio $+\sigma$ i $-\sigma$ (patrz rys. 6.12). Z rozdziału 5 wiemy, że pole między płytami jest równe σ/ϵ_0 , a na zewnątrz płyt — zeru. Płyty będą miały różne potencjały φ_1 i φ_2 . Dla wygody różnicę ich oznaczajmy symbolem V ; różnica ta nazywana jest zwykle „napięciem”:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = V.$$

(Niektórzy oznaczają potencjał przez V , my jednak wolimy stosować symbol φ .)

Praca potrzebna na przeniesienie małego ładunku od jednej płyty do drugiej tak się ma do różnicy potencjałów V , jak ten mały ładunek do ładunku jednostkowego:

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q, \quad (6.33)$$

gdzie $\pm Q$ jest całkowitym ładunkiem każdej płyty, A — polem powierzchni płyt, d — odległością między płytami.

Widzimy, że napięcie jest proporcjonalne do ładunku. Taką proporcjonalność między V i Q stwierdzamy dla każdego dwóch przewodników w przestrzeni, jeśli tylko na jednym z nich jest ładunek dodatni, a na drugim — równy mu ładunek ujemny. Różnica potencjałów między tymi przewodnikami, czyli napięcie, będzie proporcjonalna do ładunku (przy założeniu, że w otoczeniu nie ma innych ładunków).

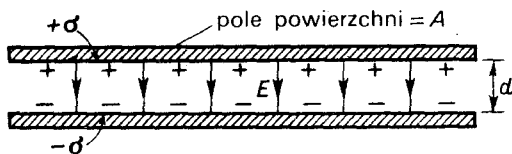
Skąd się bierze ta proporcjonalność? Po prostu z zasady superpozycji. Przypuśćmy, że znamy rozwiązanie dla jednego układu ładunków i potem nakładamy na siebie dwa takie rozwiązania. Ładunki zostały podwojone, pola zostały podwojone i praca, potrzebna na przeniesienie ładunku jednostkowego z jednego miejsca do drugiego, też została podwojona. Dlatego różnica potencjałów między dwoma punktami jest proporcjonalna do ładunków. W szczególności, różnica potencjałów między dwoma przewodnikami jest proporcjonalna do ładunków na nich się znajdujących. Ktoś kiedyś napisał równanie proporcjonalności w inny sposób, mianowicie:

$$Q = CV,$$

gdzie C jest stałą. Ten współczynnik proporcjonalności nazywamy *pojemnością*, a taki układ dwóch przewodników — *kondensatorem*. W przypadku naszego kondensatora płytkowego będziemy mieli

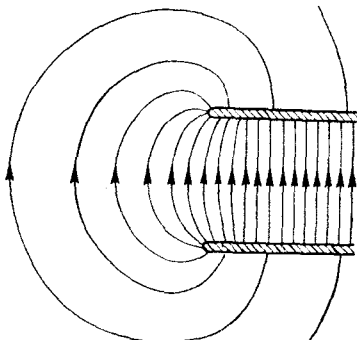
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (\text{płyty równoległe}). \quad (6.34)$$

Ten wzór nie jest ścisły, gdyż pole między płytkami nie jest wszędzie jednorodne, tak jak to zakładaliśmy. Pole nie kończy się na brzegach płyt, lecz wygląda mniej więcej tak, jak pokazuje to rys. 6.13. Całkowity ładunek nie równa się σA , trzeba by wprowadzić małą poprawkę na efekty brzegowe. Aby stwierdzić, jaka to jest poprawka, trzeba obliczyć pole bardziej dokładnie i przekonać się, co się dzieje na brzegach. To jest skomplikowany problem matematyczny, który można jednak rozwiązać metodą, której nie będziemy teraz omawiać. Z obliczeń tych wynika, że gęstość ładunku rośnie nieco w pobliżu brzegów. Oznacza to, że pojemność tych płyt jest nieco większa, niż myślimy to obliczyli. [Tę poprawioną pojemność z bardzo dobrym przybli-



6.12. Kondensator płasko-równoległy

6.13. Pole elektryczne w pobliżu brzegów dwóch płytek równoległych



zeniem można również otrzymać z równania (6.34), biorąc jednak na A pole powierzchni, jaką *miałyby* płyty, gdyby je rozciągnąć o odległość $\frac{3}{8}$ odstepu między płytami].

Mówiliśmy o pojemności dwóch przewodników. Czasem mówi się o pojemności pojedynczego obiektu. Mówi się na przykład, że pojemność kuli o promieniu a wynosi $4\pi\epsilon_0 a$. Wyrażając się w ten sposób, ma się na myśli, że drugą okładką kondensatora jest kula o promieniu nieskończenie wielkim i że gdy na kuli o promieniu a znajduje się ładunek $+Q$, to na kuli o promieniu nieskończonym jest ładunek $-Q$. Można również mówić o pojemności, gdy ma się trzy przewodniki lub więcej; nie będziemy się jednak nad tym zatrzymywać.

Przypuśćmy, że chcemy mieć kondensator o bardzo wielkiej pojemności. Dużą pojemność możemy uzyskać biorąc dużą powierzchnię płyt i bardzo małą odległość między nimi. Możemy między folie aluminiowe włożyć woskowany papier i zwinąć wszystko razem. (Jeśli zatopimy to jeszcze w masie plastycznej, otrzymamy typowy kondensator radiowy.) Jaką korzyść mamy z kondensatorów? Kondensatory służą do przechowywania ładunków. Jeśli próbujemy przechować ładunek, np. na kuli, to w miarę ładowania jej potencjał szybko rośnie. Może wzrosnąć nawet tak bardzo, że ładunki zaczną uciekać do powietrza drogą wyładowań iskrowych. Jeśli ten sam ładunek dostarczymy do kondensatora o wielkiej pojemności, to napięcie na jego okładkach będzie małe.

W wielu zastosowaniach w układach elektronicznych wygodnie jest mieć urządzenie, które może absorbować lub oddawać duże ilości ładunku nie zmieniając przy tym zbytnio samego potencjału. Do tego właśnie nadaje się kondensator. Kondensatory używa się również w wielu przyrządach elektronicznych i maszynach obliczeniowych, aby uzyskać określoną zmianę napięcia przy jakiejś określonej zmianie ładunku. Podobne zastosowanie poznaliśmy w rozdz. 23 tomu I (cz. 1), gdzie opisywaliśmy właściwości układów rezonansowych.

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ farad/metr}$$

Z definicji pojemności C widzimy, że jednostką jej jest 1 kulomb na wolt (1 C/V). Jednostkę tę nazywa się *faradem* (F). Z równania (6.34) widać, że jednostką ϵ_0 jest farad/metr. Najczęściej używane kondensatory mają pojemności od pikofarada (pF) do milifarada (mF). Małe kondensatory kilku pikofaradów stosuje się w strojonych układach wysokiej częstotliwości, natomiast w filtrach zasilaczy mocy spotyka się kondensatory o pojemnościach setek i tysięcy mikrofaradów. Para płyt o powierzchni 1 cm^2 o odstepie 1 mm ma pojemność około 1 pf.

6-11. Wyładowania wysokiego napięcia

Omówimy teraz w sposób jakościowy pewne cechy pól wokół przewodników. Jeśli naładowany przewodnik nie jest kulą, lecz ma na sobie jakieś ostrze, jak na przykład

przedmiot naszkicowany na rys. 6.14, to pole wokół tego ostrza jest znacznie silniejsze niż wokół reszty przewodnika. Przyczynę tego można wyjaśnić jakościowo tym, że ładunki starają się rozprzestrzenić możliwie jak najbardziej po powierzchni przewodnika, a czubek ostrza jest możliwie najbardziej oddalony od reszty powierzchni. Część ładunków zostaje wciśnięta na czubek ostrza. Stosunkowo mała liczba ładunków na ostrzu daje dużą gęstość powierzchniową, a duża gęstość powierzchniowa oznacza silne pole tuż na zewnątrz powierzchni.

Można w prosty sposób uzasadnić, że pole jest największe tam, gdzie promień krzywizny jest najmniejszy, rozważając układ dwóch kul, dużej i małej, połączonych drutem (rys. 6.15). Jest to nieco wyidealizowana postać przewodnika z rys. 6.14. Drut będzie miał mały wpływ na pole zewnętrzne; potrzebny jest tylko po to, aby utrzymać obie kule na tym samym potencjale. Która z kul będzie miała silniejsze pole przy swojej powierzchni? Kula po lewej stronie ma promień a i ładunek Q . Jej potencjał jest równy

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}.$$

Oczywiście, obecność jednej kuli zmienia rozkład ładunku na drugiej kuli, tak że w rzeczywistości nie mamy tu rozkładów o symetrii kulistej. Jeśli jednak chcemy tylko oszacować pole, możemy posłużyć się potencjałem ładunku kulistego.) Mała kula ma promień b i ładunek q . Jej potencjałem jest

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}.$$

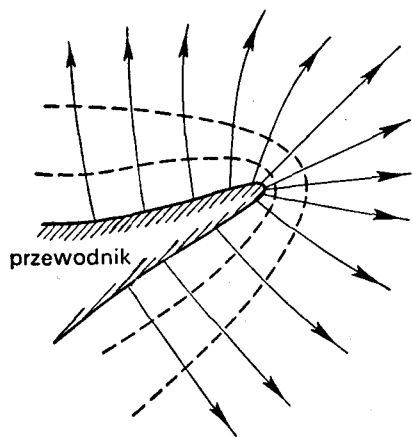
Wiemy, że $\varphi_1 = \varphi_2$, więc

$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{b}.$$

Wiemy również, że pole przy powierzchni jest proporcjonalne do gęstości ładunku powierzchniowego [patrz równanie (5.8)], która jest równa całkowitemu ładunkowi, podzielonemu przez kwadrat promienia. Otrzymujemy zatem

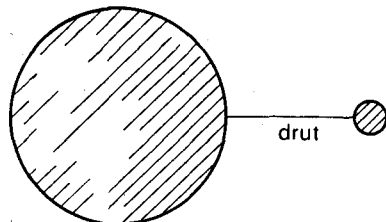
$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q/a^2}{q/b^2} = \frac{b}{a}. \quad (6.35)$$

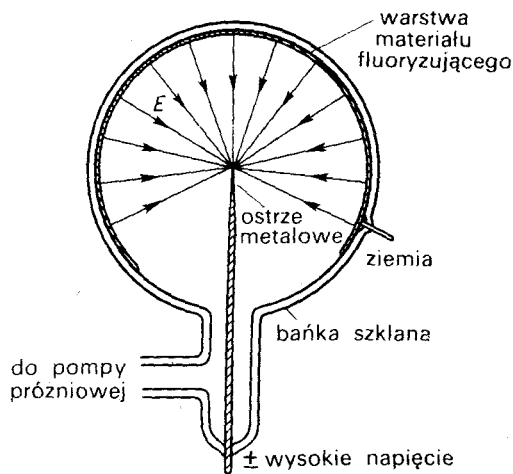
Tak więc przy powierzchni mniejszej kuli pole jest silniejsze. Pola elektryczne są zatem odwrotnie proporcjonalne do promieni krzywizny.



6.14. Pole elektryczne w pobliżu ostrza przewodnika jest bardzo duże.

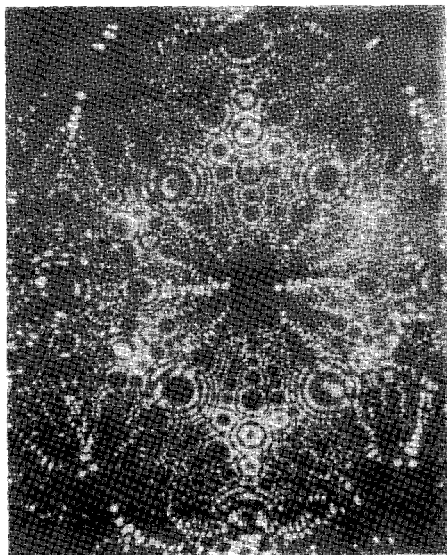
6.15. Pole ostrza można przybliżyć przez pole dwóch kul znajdujących się na tym samym potencjale.





6.16. Mikroskop jonowy

6.17. Obraz wytworzony przez mikroskop jonowy



Ten wynik jest bardzo ważny dla zastosowań technicznych. Gdy pola elektryczne stają się zbyt duże, może nastąpić przebicie przez powietrze. Jakiś zabłąkany w powietrzu ładunek (elektron lub jon) zostaje przyspieszony w polu elektrycznym i jeśli pole jest bardzo duże, ładunek zdąży nabrać tak dużej szybkości, że przy zderzeniu z atomem powietrza wybija z niego elektron. W rezultacie wytwarza się coraz więcej jonów. Ich ruch stanowi wyładowanie, czyli iskrę. Jeśli chcecie, żeby jakieś ciało naładowane do wysokiego potencjału samorzutnie się nie rozładowywało przez iskry, musicie zadbać, aby jego powierzchnia była gładka, tak aby w żadnym miejscu pole nie było zanadto duże.

6-12. Jonowy mikroskop polowy

Istnieje ciekawe zastosowanie tych nadzwyczaj dużych pól elektrycznych, otaczających ostrze naładowanego przewodnika. Działanie tak zwanego *jonowego mikroskopu polowego* oparte jest właśnie na wykorzystaniu bardzo dużego pola, wytworzonego przez ostrze metalowe^{*)}. Mikroskop taki zbudowany jest w następujący sposób. Bardzo cienka igła, której ostrze ma średnicę około 1000 Å, umieszczona jest w środku opróżnionej kuli szklanej (rys. 6.16). Wewnętrzna powierzchnia kuli pokryta jest cienką warstwą fluoryzującego materiału przewodzącego. Między tą warstwą a igłą przyłożone jest bardzo wysokie napięcie.

Zastanówmy się najpierw, co się będzie działo, gdy igła będzie miała potencjał ujemny względem warstwy fluoryzującej. Linie pola elektrycznego będą bardzo skupione

^{*)} Patrz E. W. Mueller, *The field-ion microscope*, „Advances in Electronics and Electron Physics”, 1, 83-179 (1960).

przy ostrym końcu. Pole elektryczne może osiągać tu wartości aż do 40 milionów woltów na centymetr. W polach o tak wielkim natężeniu elektrony są wyciągane z powierzchni igły i przyspieszane ku warstwie fluoryzującej. Gdy uderzają w warstwę, powodują emisję światła, podobnie jak to się dzieje w lampie kineskopowej telewizora.

Będziemy bardzo bliscy rzeczywistości mówiąc, że elektron biegnie po promieniu kuli, to jest wzdłuż linii sił pola elektrycznego, aby trafić w dany punkt ekranu fluoryzującego. Na powierzchni kuli widzimy więc coś w rodzaju obrazu ostrza. Ścisłej, widzimy obraz zdolności *emisyjnej* powierzchni, to jest łatwości, z jaką elektrony mogą opuszczać powierzchnię ostrza. Gdyby zdolność rozdzielcza mikroskopu była dostatecznie duża, można by mieć nadzieję na stwierdzenie położenia poszczególnych atomów ostrza. Za pomocą elektronów nie podobna osiągnąć takiej zdolności rozdzielczej z następujących powodów. Po pierwsze — występuje kwantowomechaniczne ugięcie fal elektronowych, co zamazuje obraz. Po drugie — wewnętrzne ruchy elektronów w metalu sprawiają, że elektrony mają poprzeczną składową prędkości przy opuszczaniu ostrza i ta przypadkowa składowa poprzeczna również psuje ostrość obrazu. Te dwa efekty łącznie ograniczają zdolność rozdzielczą do około 25 Å.

Jeśli jednak zmieniamy polaryzację (tzn. zmienimy potencjał igły na dodatni) i wpuścimy do bańki nieco helu gazowego, to uzyskamy o wiele lepszą zdolność rozdzielczą. Gdy atom helu zderza się z czubkiem ostrza, to istniejące tam pole elektryczne o wielkim natężeniu odrywa od atomu helu elektron, pozostawiając dodatni jon. Ten jon helu jest przyspieszany wzdłuż linii pola ku ekranowi fluoryzującemu. Ponieważ jon helu jest o wiele cięższy od elektronu, jego kwantowomechaniczna długość fali jest znacznie mniejsza. Jeśli temperatura nie jest zbyt wysoka, to i efekty prędkości termicznych są znacznie mniejsze niż dla elektronów. Otrzymuje się więc znacznie ostrzejszy obraz ostrza. W jonowym mikroskopie polowym z dodatnią polaryzacją ostrza można uzyskać powiększenia aż do 2000000 razy, to jest 10 razy lepsze niż w najlepszym z mikroskopów elektronowych.

Rysunek 6.17 przedstawia obraz uzyskany w jonowym mikroskopie polowym z katodą wolframową. Prawdopodobieństwo jonizacji atomu helu zależy od tego, czy trafia on w sam środek atomu wolframu, czy też pomiędzy dwa atomy. Układ plamek na ekranie fluoryzującym pokazuje rozmieszczenie *poszczególnych atomów* w ostrzu wolframowym. Można zrozumieć, dlaczego plamki układają się na pierścieniach, wyobrażając sobie pudło sześciennie wypełnione regularnie kulkami, ułożonymi w prostokątną sieć sześcienną, mającymi przedstawiać atomy metalu. Na powierzchni kulistej, przecinającej pudło, staje się wówczas układ pierścieni obsadzonych kulkami. Jonowy mikroskop polowy pozwolił ludziom po raz pierwszy zobaczyć atomy. To jest zadziwiające osiągnięcie, ważniejszy prostą budowę przyrządu.

pole elektryczne w różnych warunkach (II)

7-1. Metody znajdowania pola elektrostatycznego

W rozdziale tym kontynuujemy nasze rozważania nad polami elektrycznymi w różnych szczególnych sytuacjach. Przedstawimy najpierw kilka bardziej wyszukanych metod rozwiązywania problemów dotyczących przewodników. Nie oczekujemy wcale, że opanujecie od razu te metody. Wydaje się jednak, że będzie dla was interesujące poznać jakiego rodzaju problemy można będzie rozwiązać opanowawszy techniki, które poznacie na wyższych latach studiów. Następnie zajmiemy się dwoma przykładami, w których rozkład ładunku nie jest ani ustalony, ani też nie jest dany ładunek na przewodniku, lecz rozkład ładunku jest określony pewnym innym prawem fizyki.

Jak wiemy z rozdz. 6, problem znalezienia pola elektrostatycznego jest w zasadzie prosty, jeśli tylko określony jest rozkład ładunku; wtedy wymaga on tylko obliczenia całki. Gdy mamy jednak do czynienia z przewodnikami, powstają komplikacje, gdyż rozkład ładunku na przewodniku nie jest początkowo znany — ładunek musi się tak rozłożyć, aby powierzchnia przewodnika była ekwipotencjalna. Rozwiązywanie takich problemów nie jest proste i często nie jest bezpośrednie (tzn. jego punktem wyjścia nie są równania pola dla rozpatrywanego układu fizycznego).

Poznaliśmy pewną pośrednią metodę rozwiązywania takich problemów. Szukaliśmy powierzchni ekwipotencjalnych dla pewnego określonego rozkładu ładunków, a potem jedną z nich zastępowaliśmy powierzchnią przewodzącą. W ten sposób możemy stworzyć listę rozwiązań szczególnych dla przewodników w kształcie kul, płaszczyzn itp. Metoda obrazów, opisana w rozdz. 6, jest właśnie jedną z takich pośrednich metod. Inną z nich zajmiemy się w tym rozdziale.

Jeśli badany problem nie należy do klasy problemów, dla których potrafimy konstruować rozwiązania metodą pośrednią, zmuszeni jesteśmy rozwiązywać go przy pomocy

metody bezpośredniej. Od strony matematycznej metoda bezpośrednia sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a.

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (7.1)$$

z warunkiem, że φ przybiera odpowiednie wartości brzegowe na powierzchni przewodnika. Problemy wymagające rozwiązania równania różniczkowego pola z pewnymi *warunkami brzegowymi* nazywamy zwykle zagadnieniami *wartości brzegowych*. Są one przedmiotem badań matematycznych. W przypadku przewodników o skomplikowanych kształtach nie ma jakiegś ogólnej metody analitycznej znajdowania rozwiązań równań pola. Nawet tak pozornie prosty problem, jak naładowany walec metalowy zamknięty z obu końców, przedstawia ogromne trudności matematyczne. Można go rozwiązać jedynie z pewnym przybliżeniem, stosując metody numeryczne. *Jedynie* ogólne metody rozwiązywania są metodami numerycznymi.

Istnieje jednak kilka problemów, dla których równanie (7.1) można rozwiązać bezpośrednio. Tak na przykład problem naładowanego przewodnika o kształcie elipsoidy obrotowej można rozwiązać ściśle poprzez znane funkcje specjalne. W granicznym przypadku, gdy uczynimy elipsoidę nieskończenie płaską, otrzymamy rozwiązanie dla cienkiej tarczy. Podobnie uzyskamy rozwiązanie dla igły, wydłużając nieskończenie elipsoidę. Trzeba jednak podkreślić, że tylko metody numeryczne są jedynymi bezpośrednimi metodami, dającymi się stosować ogólnie.

Zagadnienia warunków brzegowych można również rozwiązać na podstawie pomiarów analogii fizycznych. Równanie Laplace'a opisuje różne sytuacje fizyczne: przepływ statyczny ciepła, bezwirowy przepływ cieczy, przepływ prądu w ośrodku rozciąglwym, odkształcenia membran sprężystych. Bardzo często można znaleźć model fizyczny, będący analogią jakiegoś problemu elektrycznego, który właśnie chcemy rozwiązać. Przez pomiary odpowiedniej analogicznej wielkości modelu można uzyskać rozwiązanie badanego problemu. Przykładem metody analogii jest zastosowanie wanny elektrolitycznej do rozwiązywania dwuwymiarowych problemów elektrostatycznych. To zastosowanie jest możliwe dzięki temu, że potencjał w jednorodnie przewodzącym ośrodku jest taki sam, jak w próżni.

Istnieje wiele sytuacji fizycznych, w których zmiany pól w jednym kierunku są bądź zerowe, bądź też tak niewielkie, w porównaniu ze zmianami w innych kierunkach, że można je pominąć. Takie problemy nazywamy problemami dwuwymiarowymi — pole zależy w nich tylko od dwóch współrzędnych. Jeśli, na przykład, wzdłuż osi z umieścimy długi naładowany drut, to pole elektryczne w pobliżu drutu zależy tylko od x i od y , a nie zależy od z — jest to właśnie problem dwuwymiarowy. Ponieważ w problemie dwuwymiarowym $\partial/\partial z = 0$, równanie Laplace'a przyjmie tu postać

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.2)$$

Równanie dwuwymiarowe jest stosunkowo proste, istnieje więc wiele warunków, w których da się ono rozwiązać analitycznie. Przedstawimy teraz bardzo ważną metodę matematyczną, którą zaliczylibyśmy do metod pośrednich znajdowania pola elektrostatycznego, opierającą się na pewnym twierdzeniu o funkcjach zmiennej zespolonej.

7-2. Pola dwuwymiarowe; funkcje zmiennej zespolonej

Zmienną zespoloną z definiujemy jako

$$z = x + iy$$

(nie pomyłcie z ze składową w kierunku osi z , którą ignorujemy w dalszych rozważaniach, ponieważ przyjęliśmy, że pole nie zależy od z). Każdy punkt na płaszczyźnie xy odpowiada jakiejś liczbie zespolonej z . Możemy używać z jako pojedynczą (zespoloną) zmienną i przy jej pomocy określać różne funkcje matematyczne $F(z)$ (przyjmujące wartości zespolone). Tak na przykład

$$F(z) = z^2,$$

$$F(z) = 1/z^3,$$

$$F(z) = z \log z$$

i tak dalej.

Jeśli dana jest jakaś funkcja $F(z)$, możemy zastąpić zmienną z wyrażeniem $x + iy$ i otrzymać funkcję zmiennych x i y , mającą część rzeczywistą i urojoną. I tak na przykład

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (7.3)$$

Każdą więc funkcję $F(z)$ można przedstawić jako sumę: części czysto rzeczywistej i części czysto urojonej, przy czym każda z tych części jest funkcją x i y :

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y), \quad (7.4)$$

gdzie $U(x, y)$ i $V(x, y)$ są funkcjami rzeczywistymi. Tak więc z każdej funkcji zespolonej można otrzymać dwie nowe funkcje rzeczywiste, np. funkcja $F(z) = z^2$ daje nam dwie nowe funkcje:

$$U(x, y) = x^2 - y^2, \quad (7.5)$$

$$V(x, y) = 2xy. \quad (7.6)$$

Dochodzimy teraz do cudownego twierdzenia matematycznego, które jest tak przyjemne, że jego dowód odłożymy do jednego z wykładów matematyki, nie możemy przecież odsłaniać wszystkich tajemnic matematyki, gdyż wówczas przedmiot ten mógłby stać się dla was nudny. Twierdzenie to brzmi następująco: dla każdej „zwyčajnej funkcji” $F(z)$ (matematycy zdefiniują to lepiej) funkcje U i V automatycznie spełniają zależności:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad (7.8)$$

a zatem każda z funkcji U i V spełnia równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (7.10)$$

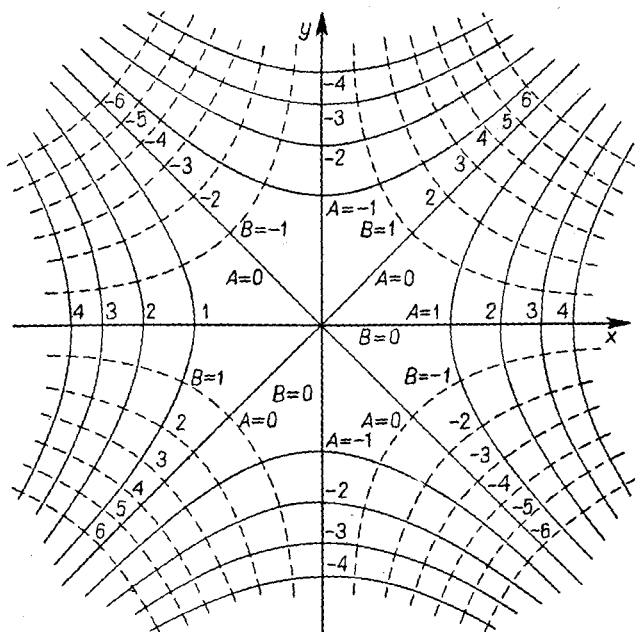
Łatwo sprawdzić, że funkcje (7.5) i (7.6) spełniają te równania.

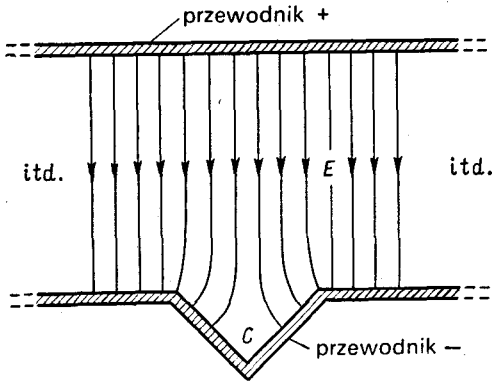
Biorąc więc za punkt wyjścia jakąś zwykłą funkcję $F(z)$ możemy otrzymać dwie funkcje $U(x, y)$ i $V(x, y)$, które spełniają dwuwymiarowe równania Laplace'a. Każda funkcja przedstawia pewien możliwy potencjał elektrostatyczny. Jeśli wybierzemy *dowolną* funkcję $F(z)$, będzie ona przedstawiała *jakiś* problem pola elektrycznego — a w istocie *dwa* problemy, gdyż zarówno funkcja U , jak i V , przedstawia *jakiś* rozwiązanie równań Laplace'a. Wymyślając różne funkcje możemy wypisać tyle rozwiązań, ile tylko nam się podoba, a później musimy tylko znaleźć *problemy*, które dają takie właśnie rozwiązania. To może się wydawać cofaniem się, ale jest to zupełnie sensowna droga postępowania.

Dla przykładu zobaczymy, jaki sens fizyczny może mieć funkcja $F(z) = z^2$. Z funkcji tej otrzymujemy dwie funkcje potencjału (7.5) i (7.6). Aby znaleźć, jakiego problemu rozwiązaniem jest funkcja U , szukamy linii ekwipotencjalnych, zakładając, że U równe jest jakiejś stałej A :

$$x^2 - y^2 = A.$$

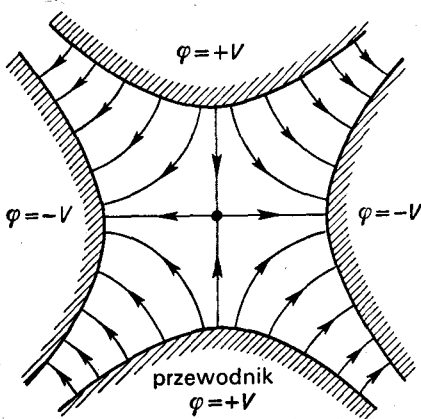
7.1. Dwie rodziny krzywych ortogonalnych, które mogą przedstawiać powierzchnie ekwipotencjalne w dwuwymiarowym polu elektrostatycznym





7.2. Pole elektryczne w punkcie C jest takie samo, jak na rys. 7.1

7.3. Pole soczewki kwadrupolowej



Pole elektryczne jest proporcjonalne do odległości od osi. Z faktu tego korzysta się w urządzeniach (nazwanych soczewkami kwadrupolowymi) stosowanych do ogniskowania wiązek cząstek naładowanych (patrz t. II, cz. 2, § 29-9). Potrzebne pole uzyskuje się zwykle przez zastosowanie czterech elektrod hiperbolicznych, jak pokazano na rys. 7.3. Na tym rysunku linie sił pola elektrycznego otrzymaliśmy przerysowując po prostu z rys. 7.1 rodzinę krzywych przerywanych, które przedstawiały $V = \text{const}$. Ale nam się udało! Krzywe $V = \text{const}$ są prostopadłe do krzywych $U = \text{const}$ ze względu na równania (7.7)

Jest to równanie hiperboli równoosiowej. Dla różnych wartości A otrzymujemy hiperbole pokazane na rys. 7.1. Gdy $A = 0$, mamy przypadek szczególny prostych przechodzących przez początek układu i nachylonych do osi pod kątem 45° .

Taki układ linii ekwipotencjalnych odpowiada różnym możliwym sytuacjom fizycznym. Po pierwsze — przedstawia on rozkład pola w pobliżu punktu leżącego w równej odległości od dwóch równych ładunków punktowych. Po drugie — przedstawia on rozkład pola wewnątrz prostokątnego naroża przewodnika. Gdy mamy dwie elektrody o kształtach takich, jak pokazuje to rys. 7.2, mające różne potencjały, rozkład pola w narożu C będzie taki sam jak w pobliżu początku układu na rys. 7.1. Linie ciągłe przedstawiają linie ekwipotencjalne, a prostopadłe do nich linie przerywane — linie sił pola E . W pobliżu występów pole elektryczne staje się silniejsze, natomiast w pobliżu zagłębień — słabsze.

Znalezione przez nas rozwiązanie odpowiada również elektrodzie o kształcie hiperboli, umieszczonej w pobliżu prostokątnego naroża, lub też dwóm hiperbolicznym elektrodom, mającym odpowiednie potencjały. Zauważcie, że pole z rys. 7.1 ma pewną ciekawą właściwość. Składowa w kierunku x pola elektrycznego (E_x) dana jest równaniem

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2x.$$

i (7.8). Dla każdej wybranej przez nas funkcji $F(z)$ otrzymujemy z krzywych U i V zarówno linie ekwipotencjalne, jak i linie sił pola. Pamiętajcie, że rozwiązaliśmy albo jeden, albo drugi problem, zależnie od tego, którą rodzinę krzywych nazwalimy liniami ekwipotencjalnymi.

Jako drugi przykład weźmy funkcję

$$F(z) = \sqrt{z}. \quad (7.11)$$

Jeśli napiszemy

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

gdzie

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oraz

$$\operatorname{tg} \theta = y/x,$$

to

$$F(z) = \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \rho^{1/2} (\cos \theta/2 + i \sin \theta/2),$$

a zatem

$$F(z) = \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} + x}{2} \right]^{1/2} + i \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} - x}{2} \right]^{1/2}. \quad (7.12)$$

Na rysunku 7.4 przedstawiono rodzinę krzywych $U(x, y) = A$ i $V(x, y) = B$. Znowu jest szereg możliwych rozwiązań, które dają takie pole. Jednym z najciekawszych rozwiązań jest pole w pobliżu brzegu cienkiej płyty.

Jeśli linia $B = 0$ — na prawo od osi y — przedstawia cieką naładowaną płytę, to linie sił pola w jej pobliżu dane przez krzywe $U(x, y) = A$. Odpowiednią sytuację fizyczną przedstawia rys. 7.5.

Jako dalsze przykłady weźmy następujące funkcje:

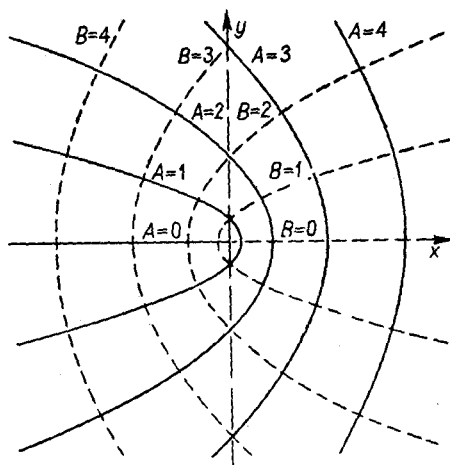
$$F(z) = z^{3/2}, \quad (7.13)$$

co daje pole na zewnątrz prostego naroża,

$$F(z) = \log z, \quad (7.14)$$

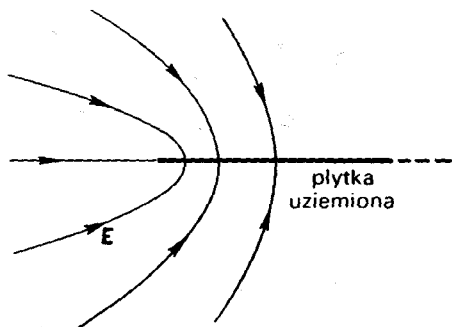
co daje pole ładunku liniowego, oraz

$$F(z) = 1/z, \quad (7.15)$$



7.4. Krzywe stałego $U(x, y)$ i $V(x, y)$ z równania (7.12)

7.5. Pole elektryczne w pobliżu krawędzi cienkiej płytki uziemionej



co daje pole dwuwymiarowego analogu dipola elektrycznego, tj. pole dwóch równoległych ładunków liniowych o przeciwnych znakach i leżących blisko siebie.

Nie będziemy dalej rozwijać tego tematu, chcielibyśmy tylko podkreślić, że chociaż metoda zmiennej zespolonej jest często bardzo użyteczna, to jednak jest ona ograniczona tylko do problemów dwuwymiarowych, no a ponadto nie jest metodą bezpośrednią.

7-3. Oscylacje plazmy*)

Zajmiemy się teraz pewnymi sytuacjami fizycznymi, w których pole określone jest nie przez nieruchome ładunki, ani też nie przez ładunki na powierzchniach przewodzących, lecz przez kombinację dwóch zjawisk fizycznych. Mówiąc inaczej, pole będzie określone jednocześnie dwoma układami równań: 1. równaniami elektrostatyki, wiążącymi pola elektryczne z rozkładem ładunku, i 2. równaniem z innego działu fizyki, określającym położenia lub ruch ładunków w obecności pola.

Omówimy najpierw przypadek dynamiczny, w którym ruchem ładunków rządzą prawa Newtona. Prosty przykładem będzie tu plazma, która jest zjonizowanym gazem, składającym się z jonów i swobodnych elektronów, rozłożonych w pewnym obszarze w przestrzeni. Górna warstwa atmosfery — jonosfera — jest przykładem takiej plazmy. Promieniowanie nadfioletowe Słońca wyrzuca elektrony z cząsteczek powietrza, tworząc swobodne elektrony i jony. W takiej plazmie jony dodatnie są o wiele cięższe niż elektrony, tak że ruch jonów możemy pominąć w porównaniu z ruchem elektronów.

Niech n_0 będzie gęstością elektronów w niezakłóconym stanie równowagi. n_0 musi być także równe gęstości jonów dodatnich, gdyż plazma jest elektrycznie obojętna (w stanie niezakłóconym). Przypuśćmy teraz, że równowaga elektronów została w jakiś sposób zakłócona i zastanówmy się, co się będzie działo. Jeśli gęstość elektronów w jakimś obszarze wzrośnie, to będą się one odpychały i dążyły do powrotu do swoich położeń równowagi. Gdy elektrony poruszają się ku swoim pierwotnym położeniom, ich energia kinetyczna rośnie i zamiast zatrzymać się w położeniach równowagi, biegną one dalej. Będą tak oscylować tam i z powrotem. Mamy tu sytuację podobną do tej, z jaką spotykamy się w przypadku fal głosowych, gdzie siłą dążącą do przywrócenia równowagi jest ciśnienie gazu. W plazmie siłą dążącą do przywrócenia równowagi jest siła elektryczna działająca na elektron.

Aby uprościć rozważania, zajmiemy się tylko przypadkiem, kiedy wszystkie ruchy odbywają się w tym samym kierunku, powiedzmy w kierunku osi x . Niech elektrony, które początkowo znajdowały się w położeniach x , znajdują się po czasie t w pewnych niewielkich odległościach $s(x, t)$ od swoich położeń równowagi. Ponieważ elektrony uległy przesunięciu, ich gęstość, na ogół, zmieni się. Zmianę gęstości można łatwo obliczyć. Elektrony zawarte początkowo między płaszczyznami a i b (patrz rys. 7.6) przesunęły się i zawierają się teraz między płaszczyznami a' i b' . Liczba elektronów, które były między płaszczyznami a i b , jest proporcjonalna do $n_0 \Delta x$. Ta sama liczba elektronów zawiera się teraz w obszarze, którego szerokość wynosi $\Delta x + \Delta s$. Gęstość jest teraz równa

*) Porównaj: Tom I, cz. 1, rozdz. 23 (Rezonans).

$$n = \frac{n_0 \Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + (\Delta s / \Delta x)}. \quad (7.16)$$

Jeśli zmiana gęstości jest mała, możemy [stosując rozwinięcie dwumianu $(1 + \epsilon)^{-1}$] napisać:

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x} \right). \quad (7.17)$$

Zakładamy, że przesunięcia jonów dodatnich są nieznaczne (ze względu na ich o wiele większą masę), a zatem ich gęstość możemy przyjąć za stałą i równą n_0 . Każdy elektron niesie ładunek $-q_e$, więc średnia zmiana gęstości w danym punkcie jest równa

$$\rho = -(n - n_0)q_e,$$

czyli

$$\rho = n_0 q_e \frac{ds}{dx} \quad (7.18)$$

(iloraz różnicowy $\Delta s / \Delta x$ zastąpiliśmy tu pochodną).

Gęstość ładunku związana jest z polem elektrycznym równaniami Maxwella, a w szczególności równaniem

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.19)$$

Jeśli problem jest rzeczywiście jednowymiarowy (i jeśli nie ma innych pól poza polem wywołanym przemieszczeniami elektronów), to pole elektryczne \mathbf{E} ma tylko jedną składową E_x . Równania (7.19) i (7.18) dają

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (7.20)$$

Całkując równanie (7.20) otrzymamy

$$E_x = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} s + K. \quad (7.21)$$

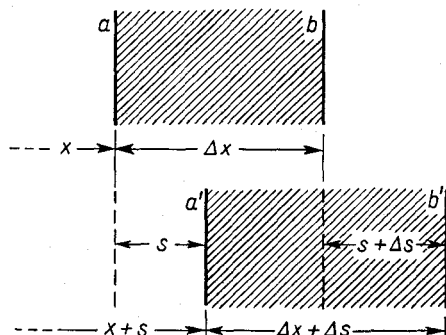
Gdy $s = 0$, $E_x = 0$, więc stała całkowania K jest równa zero.

Siła działająca na elektron odchyłony od położenia równowagi jest równa

$$F_x = - \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s, \quad (7.22)$$

Jest to siła dążąca do przywrócenia równowagi, proporcjonalna do przemieszczenia elektronu s . Prowadzi to do powstania drgań harmoniczných elektronów. Równanie ruchu

7.6. Ruch w fali plazmowej. Elektrony w płaszczyźnie a przesuwają się do a' , a elektrony w płaszczyźnie b do b' .



elektronu odchylonego od położenia równowagi ma postać

$$m_e \frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s. \quad (7.23)$$

s zmienia się tu harmonicznie w czasie jak $\cos \omega t$ lub też, używając wyrażenia wykładniczego z tomu I, jak

$$e^{i\omega_p t}. \quad (7.24)$$

Częstość oscylacji ω_p wyznacza się z równania (7.23):

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e}; \quad (7.25)$$

nazywa się ją *częstością plazmową*. Jest to liczba charakterystyczna dla danej plazmy.

W zagadnieniach dotyczących elektronów niektórzy wolą wyrażać odpowiedzi poprzez wielkość e^2 , zdefiniowaną jako

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,3068 \cdot 10^{-28} \text{ N} \cdot \text{m}^2. \quad (7.26)$$

Jeśli zastosujemy tę umowę, to równanie (7.25) będzie miało postać

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}; \quad (7.27)$$

z taką postacią tego równania spotkacie się w większości książek.

Stwierdziłmy więc, że zakłócenie równowagi plazmy wywoła swobodne oscylacje elektronów wokół ich położenia równowagi z naturalną częstością ω_p , która jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z gęstości elektronów. Plazma elektronowa zachowuje się tak, jak układ rezonansowy, opisany przez nas w rozdz. 23 tomu I (cz. 1).

Ten naturalny rezonans plazmowy przejawia się w pewnych ciekawych zjawiskach. Tak na przykład fale radiowe mogą przechodzić przez jonosferę tylko wtedy, gdy ich częstość jest wyższa niż częstość plazmy. Jeśli częstość jest niższa od częstości plazmowej, sygnał odbija się od jonosfery. Gdy chcemy skomunikować się z satelitami, krążącymi w przestrzeni, musimy używać wysokich częstości, gdy natomiast chcemy nawiązać łączność radiową z miejscem leżącym za horyzontem, musimy stosować częstości niższe niż częstość plazmowa, tak aby sygnał odbijał się od jonosfery z powrotem ku Ziemi.

Inny ciekawy przypadek drgań plazmowych zachodzi w metalach. Plazma dodatnich jonów i swobodnych elektronów ma w metalu ograniczoną swobodę ruchów. Gęstość n_0 jest bardzo duża, a więc i częstość ω_p też jest bardzo duża. Mimo to można jednak obserwować oscylacje elektronów. Zgodnie z mechaniką kwantową oscylator harmoniczny o częstości własnej ω_p ma poziomy energetyczne odległe od siebie o $\hbar\omega_p$. Jeśli więc będziemy strzelać elektronami np. poprzez folię aluminiową i starannie mierzyć energie elektronów po drugiej stronie folii, to należy oczekiwać, że część elektronów utraci energię $\hbar\omega_p$ na korzyść oscylacji plazmy. Istotnie tak się dzieje. W roku 1936 zaobserwowano po raz pierw-

by doświadczalnie, że elektrony o energiach od kilkuset do kilku tysięcy elektronowoltów znacząco skokowo energię przechodząc przez cienką folię metalową. Istota tego zjawiska stała się zrozumiała dopiero w roku 1953, gdy Bohm i Pines^{*)} wykazali, że obserwacje te można wyjaśnić poprzez pobudzenia kwantowe drgań plazmy w metalu.

7.4. Cząstki koloidalne w elektrolicie

Zajmiemy się teraz innym zjawiskiem, w którym położeniami ładunków rządzi potencjał, pochodzący częściowo od tychże ładunków. Wynikające stąd efekty mają znaczny wpływ na zachowanie się koloidów. Koloidem nazywamy zawiesinę w wodzie drobnych naładowanych cząstek, które chociaż mikroskopijnych rozmiarów, w skali atomowej są jeszcze bardzo duże. Gdyby cząstki koloidalne nie były naładowane, dążyłyby do koagulacji w duże skupiska. Ze względu jednak na to, że są naładowane, odpychają się od siebie i pozostają zawiesiną.

Jeśli teraz dodać do wody nieco soli, to zdysocjuje ona na dodatnie i ujemne jony (taki roztwór jonowy nazywamy elektrolitem). Jony ujemne są przez cząstki koloidalne przyciągane (jeśli założymy, że ich ładunek jest dodatni), a jony dodatnie — odpychane. Wyznamy teraz rozkład w przestrzeni jonów otaczających taką cząstkę koloidalną.

Dla uproszczenia będziemy znowu rozwiązywać tylko przypadek jednowymiarowy. Jeśli pomyślimy o cząstce koloidalnej jako o kuli mającej ogromny promień (w skali atomowej!), możemy wtedy traktować małą część jej powierzchni jako płaszczyznę. (Gdy staramy się zrozumieć jakieś nowe zjawisko, dobrze jest przyjąć nawet zbyt uproszczony model, a potem, gdy dzięki temu modelowi zrozumiemy, na czym polega problem, łatwiej nam już znaleźć bardziej dokładne metody rozwiązania go.)

Przypuścimy, że rozkładowi jonów odpowiada gęstość ładunku $\rho(x)$ i potencjał elektryczny φ , związane ze sobą prawem elektrostatyki $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ lub — dla pola, które jest zmienne tylko w jednym kierunku — prawem

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.28)$$

Zalóżmy teraz, że taki potencjał $\varphi(x)$ istnieje. Jak będzie wyglądał wówczas rozkład jonów? Możemy go znaleźć na podstawie zasad mechaniki statystycznej. Problem polega na tym, żeby wyznaczyć taki potencjał φ , aby wynikająca z mechaniki statystycznej gęstość ładunku również spełniała równanie (7.28).

Zgodnie z mechaniką statystyczną [patrz rozdz. 40 tomu I (cz. 2)] cząstki w równowadze termicznej w polu sił są tak rozłożone, że gęstość cząstek n w położeniu x dana jest równaniem

$$n(x) = n_0 e^{-U(x)/kT}, \quad (7.29)$$

^{*)} Przegląd późniejszych prac i bibliografię znaleźć można w artykule C. J. Powella i J. B. Swanna, *Phys. Rev.* **115**, 869 (1959).

gdzie $U(x)$ jest energią potencjalną, k — stałą Boltzmana, a T jest temperaturą w skali Kelvina.

Zakładamy, że każdy jon niesie tylko jeden ładunek elektronowy — dodatni lub ujemny. W odległości x od powierzchni cząstki koloidalnej jon dodatni będzie miał energię potencjalną $q_e \varphi(x)$, a więc

$$U(x) = q_e \varphi(x).$$

Gęstość jonów dodatnich n_+ jest zatem równa

$$n_+(x) = n_0 \exp[-q_e \varphi(x)/kT].$$

Podobnie, dla gęstości jonów ujemnych n_- otrzymujemy

$$n_-(x) = n_0 \exp[+q_e \varphi(x)/kT].$$

Całkowita gęstość ładunku równa jest

$$\rho = q_e n_+ - q_e n_-,$$

czyli

$$\rho = q_e n_0 [\exp(-q_e \varphi/kT) - \exp(+q_e \varphi/kT)]. \quad (7.30)$$

Wstawiając tę wartość do równania (7.28), stwierdzamy, że potencjał φ musi spełniać równanie

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = - \frac{q_e n_0}{\epsilon_0} [\exp(-q_e \varphi/kT) - \exp(+q_e \varphi/kT)]. \quad (7.31)$$

Ogólne rozwiązanie tego równania można znaleźć łatwo [pomnóżcie obie strony przez $2(d\varphi/dx)$ i scałkujcie po x]. Aby jednak możliwie uprościć nasz problem, rozważać będziemy tu tylko graniczny przypadek, kiedy potencjał jest mały, czyli gdy temperatura T jest wysoka. Przypadek, gdy potencjał φ jest mały, odpowiada roztworowi rozcieńczonemu. Wykładnik potęgi jest wtedy mały i możemy przyjąć przybliżenie

$$\exp(\pm q_e \varphi/kT) = 1 \pm \frac{q_e \varphi}{kT}. \quad (7.32)$$

Równanie (7.31) daje wtedy

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = + \frac{2n_0 q_e^2}{\epsilon_0 kT} \varphi(x). \quad (7.33)$$

Zauważcie, że tym razem po prawej stronie równania mamy znak plus. Rozwiązania na φ nie mają charakteru oscylującego, lecz wykładniczy.

Rozwiązaniem ogólnym równania (7.33) jest

$$\varphi = A e^{-x/D} + B e^{+x/D}, \quad (7.34)$$

gdzie

$$D^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 q_e^2}. \quad (7.35)$$

Stałe A i B muszą być wyznaczone z warunków zadania. W naszym przypadku B musi być zerem, inaczej potencjał dążyłby do nieskończoności dla dużych x . Mamy więc

$$\varphi = A e^{-x/D}, \quad (7.36)$$

gdzie A jest potencjałem dla $x = 0$, na powierzchni cząstki koloidalnej.

Potencjał maleje o czynnik $1/e$ za każdym razem, gdy odległość rośnie o D , jak to wskazuje wykres 7.7. Liczbę D nazywamy *długością Debye'a*. Jest ona miarą grubości powłoki jonowej, która otacza dużą cząstkę naładowaną w elektrolicie. Równanie (7.36) mówi, że grubość powłoki maleje wraz ze wzrostem koncentracji jonów (n_0) lub gdy temperatura maleje.

Stałą A w równaniu (7.36) łatwo można znaleźć, gdy znamy ładunek powierzchniowy na cząstce koloidalnej. Wiemy, że

$$E_n = E_x(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (7.37)$$

Pamiętamy, że E jest również gradientem potencjału φ :

$$E_x(0) = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0 = + \frac{A}{D}, \quad (7.38)$$

stąd

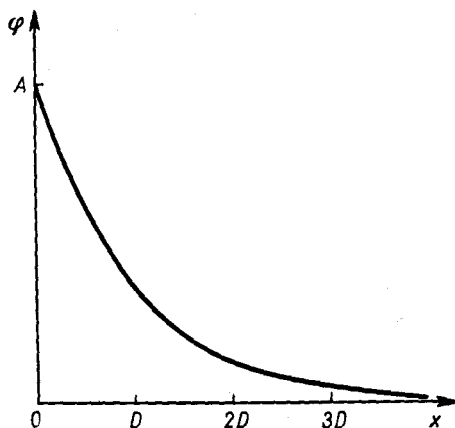
$$A = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.39)$$

Wstawiając ten wynik do wzoru (7.36) i przyjmując $x = 0$ znajdujemy potencjał cząstki koloidalnej:

$$\varphi(0) = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.40)$$

Zauważcie, że potencjał ten ma tę samą wartość co różnica potencjałów między płytkami kondensatora płaskiego o odległości D i o gęstości ładunku powierzchniowego σ .

Powiedzieliśmy, że odpychanie elektrostatyczne przeszkadza cząstkom koloidalnym łączyć się ze sobą. Teraz jednak widzimy, że pole w niewielkiej odległości od powierzchni cząstki jest osłabione przez powłokę jonową, jaka się dookoła niej tworzy. Jeżeli powłoki stają się dostatecznie cienkie, wzrasta prawdopodobieństwo zderzeń między cząstkami, które mogą się wtedy sklejać. Następuje wówczas koagulacja koloidu; jest on wytrącany z cieczy. Na podstawie przeprowadzonej analizy łatwo jest zrozumieć, dlaczego dodanie dostatecznej ilości soli do roztworu koloidalnego powoduje wytrącanie się zawiesiny. Proces taki nazywamy „wysalaniem koloidu”.



7.7. Zmiany potencjału w pobliżu powierzchni cząstki koloidalnej. D jest długością Debye'a.

Innym ciekawym przykładem jest oddziaływanie roztworu soli na cząsteczki białka. Cząsteczka białka jest długim, skomplikowanym i giętym łańcuchem aminokwasów. Znajduje się na niej dużo ładunków i czasem się zdarza, że powstaje jakiś ładunek wypadkowy, powiedzmy ujemny, rozłożony w pewien sposób wzdłuż łańcucha. Ze względu na wzajemne odpychanie się ładunków ujemnych łańcuch białka zostaje rozciągnięty. Wskutek tych samych oddziaływań jeden łańcuch będzie odpychany od drugiego. Możemy więc uzyskać zawieszinę cząsteczek łańcuchowych w cieczy. Jeśli jednak do cieczy dodamy nieco soli, zmienimy właściwości roztworu. W miarę dodawania soli maleje długość Debye'a, cząsteczki zbliżają się do siebie i mogą nawet zetknąć się ze sobą. Gdy dodatek soli będzie dostateczny, cząsteczki zaczną wytrącać się z roztworu. Istnieje wiele podobnych zjawisk chemicznych, które można wyjaśnić występowaniem sił elektrycznych.

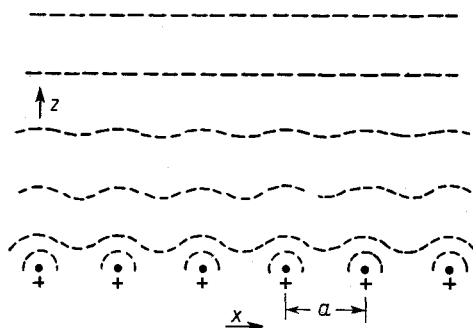
7-5. Pole elektrostatyczne siatki przewodzącej

Jako ostatni przykład opiszemy inną ciekawą właściwość pól elektrycznych. Korzysta się z niej budując niektóre przyrządy elektryczne, konstruując lampy elektronowe i do innych jeszcze celów. Chodzi tu o charakter pola elektrycznego w pobliżu siatki utworzonej z naładowanych drutów. Aby możliwie uprościć problem, rozważmy układ nieskończenie długich drutów, równoległych i równoodległych od siebie, leżących w jednej płaszczyźnie.

Pole elektryczne w dużej odległości od płaszczyzny jest stałe, tak jak gdyby ładunek był rozłożony równomiernie na płaszczyźnie. Przy zbliżaniu się do tej siatki z drutów pole traci swoją jednorodność. Spróbujmy ocenić, w jakiej odległości od siatki występują jeszcze niejednorodności pola. Rysunek 7.8 przedstawia szkic linii ekwipotencjalnych na różnych odległościach od siatki. Im bliżej siatki, tym zmiany potencjału są większe. W pobliżu siatki fluktuacje pola są periodyczne.

Wiemy już [rozdz. 50 tomu I (cz. 2)], że każda wielkość periodyczna może być przedstawiona jako suma fal sinusoidalnych (twierdzenie Fouriera). Poszukajmy odpowiedniej funkcji harmonicznej, która spełni równania naszego pola.

7.8. Powierzchnie ekwipotencjalne nad jednorodną siatką z naładowanych drutów



Jeśli druty leżą w płaszczyźnie xy i są równoległe do osi y , możemy spróbować przedstawić potencjał φ za pomocą wyrażenia

$$\varphi(x, z) = F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a}, \quad (7.41)$$

gdzie a jest stałą odległością między drutami, a n jest tak zwaną liczbą harmoniczną (założyliśmy, że druty są długie, aby zapewnić stałość potencjału w kierunku osi y). Pełne rozwiązanie będzie sumą takich wyrażen dla $n = 1, 2, 3$ itd.

Potencjał ten musi spełniać równanie

Laplace'a w obszarze poza drutami (tam, gdzie nie ma ładunku), tzn.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Wstawiając wyrażenie (7.41) do równania Laplace'a, otrzymujemy

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a} + \frac{d^2 F_n}{dz^2} \cos \frac{2\pi nx}{a} = 0, \quad (7.42)$$

to znaczy, że funkcja $F_n(z)$ musi spełniać równanie

$$\frac{d^2 F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n. \quad (7.43)$$

Wobec tego

$$F_n = A_n \exp(-z/z_0), \quad (7.44)$$

gdzie

$$z_0 = \frac{a}{2\pi n}. \quad (7.45)$$

Stwierdziliśmy więc, że jeżeli istnieje składowa fourierowska pola o harmonicznej n , to składowa ta będzie malała wykładniczo wraz z charakterystyczną odległością $z_0 = a/2\pi n$. Dla pierwszej harmonicznej ($n = 1$) amplituda maleje o czynnik $e^{-2\pi}$ (silny zanik), gdy z rośnie o jeden odstęp między drutami a . Dalsze harmoniczne maleją jeszcze szybciej. Widzimy, że już na odległości kilku a od siatki pole jest prawie jednorodne, czyli składniki oscylacyjne są małe. Zawsze, oczywiście, pozostaje pole „zerowej harmonicznej”

$$\varphi_0 = -E_0 z,$$

dające dla dużych z pole jednorodne. Pełne rozwiązanie będzie kombinacją tego wyrazu i sumy wyrazów (7.41), w których F_n ma wartość określoną równaniem (7.44). Współczynniki A_n trzeba tak dopasować, aby całkowita suma dawała po zróżniczkowaniu pole elektryczne takie, jakie daje siatka naładowanych drutów o gęstości ładunku λ .

Powyższa metoda wyjaśnia, dlaczego ekranowanie elektrostatyczne za pomocą siatki jest często równie dobre, jak ekranowanie za pomocą blachy metalowej. W odległościach większych niż kilka odstępów między drutami pole wewnątrz zamkniętej siatki jest równe zero. Widzimy teraz, dlaczego do ekranowania czułych przyrządów elektrycznych używa się miedzianych siatek, które są lżejsze i tańsze niż blacha miedziana.

energia elektrostatyczna

8-1. Energia elektrostatyczna ładunków. Kula jednorodna

W badaniach nad mechaniką jednym z najciekawszych i najbardziej pożytecznych odkryć było odkrycie zasady zachowania energii. Wyrażenia na energię kinetyczną i potencjalną układu mechanicznego pozwalają nam znaleźć związki między stanem układu w chwili wcześniejszej a jego stanem w chwili późniejszej, przy czym nie musimy zagłębiać się w to, co się dzieje w czasie między tymi chwilami. Teraz chcielibyśmy się zająć energią układów elektrostatycznych. W nauce o elektryczności również będziemy mogli posłużyć się zasadą zachowania energii, aby odkryć szereg interesujących zależności.

Wyrażenie na energię oddziaływania w elektrostatyce jest bardzo proste. W istocie już o nim mówiliśmy. Przypuśćmy, że mamy dwa ładunki q_1 i q_2 w odległości r_{12} od siebie. Układ ma pewną energię, gdyż trzeba było wykonać pewną pracę na zbliżenie tych ładunków. Obliczaliśmy już pracę potrzebną na zbliżenie dwóch ładunków z dużej odległości. Wynosi ona

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} \quad (8.1)$$

Wiemy również, że gdy mamy kilka ładunków, to siła działająca na któryś z nich jest, zgodnie z zasadą superpozycji, sumą sił pochodzących od wszystkich pozostałych ładunków. Wynika stąd, że całkowita energia układu wielu ładunków jest sumą energii wzajemnych oddziaływań każdej z par ładunków. Jeśli q_i i q_j są dowolnymi dwoma ładunkami, a r_{ij} — odległością między nimi (rys. 8.1), to energia tej pary będzie równa

$$\frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} \quad (8.2)$$

Całkowita energia elektrostatyczna U jest sumą energii wszystkich możliwych par ładunków:

$$U = \sum_{\text{wszystkie pary}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (8.3)$$

Jeśli rozkład ładunku określony jest gęstością ładunku ρ , to sumę w równaniu (8.3) trzeba oczywiście zastąpić całką.

Zajmiemy się teraz dwoma zagadnieniami związanymi z energią elektrostatyczną: jedno — to zastosowanie pojęcia energii do problemów elektrostatyki, a drugie — to wyznaczanie tej energii różnymi sposobami. Czasami łatwiej jest obliczyć pracę wykonaną w jakimś szczególnym przypadku niż wyznaczać sumę w równaniu (8.3) lub odpowiednią całkę. Jako przykład obliczmy energię potrzebną do skupienia ładunku w kulę o jednorodnej gęstości ładunku. Energia ta jest po prostu pracą wykonaną przy skupianiu ładunków z nieskończoności.

Przypuśćmy, że tworzymy tę kulę budując kolejne cienkie warstwy sferyczne o nieskończenie małej grubości. W każdym kolejnym stadium tej budowy zbieramy małą ilość ładunku i umieszczamy go na cienkiej warstwie od r do $r+dr$. Proces ten prowadzimy tak długo, aż uzyskamy kulę o promieniu a (rys. 8.2). Jeśli Q_r jest ładunkiem kuli o promieniu r , to praca wykonana przy dostarczaniu do niej ładunku dQ jest równa

$$dU = \frac{Q_r dQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.4)$$

Ładunek Q_r wynosi

$$Q_r = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3,$$

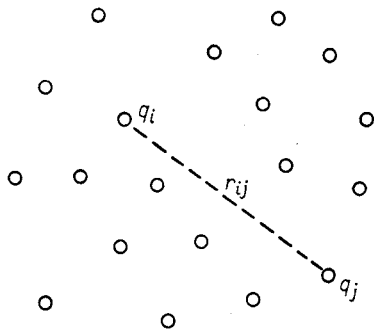
gdzie ρ jest gęstością ładunku kuli. Wtedy

$$dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Równanie (8.4) przyjmuje teraz postać

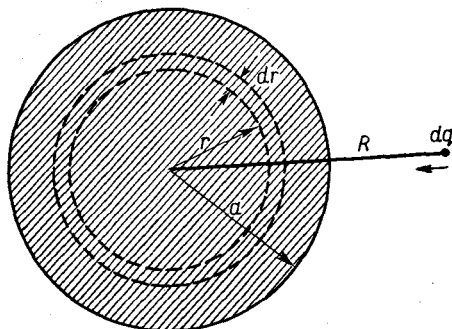
$$dU = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0} \quad (8.5)$$

Całkowita energia potrzebna do skupienia ładunku w kulę jest całką z dU od $r = 0$ do



8.1. Energia elektrostatyczna układu cząstek jest sumą energii elektrostatycznej każdej pary.

8.2. Energię jednorodnie naładowanej kuli można obliczyć wyobrażając sobie, że kula ta utworzona jest z kolejnych warstw kulistych.



$r = a$, czyli

$$U = \frac{4\pi q^2 a^5}{15\epsilon_0}. \quad (8.6)$$

Można to również wyrazić poprzez całkowity ładunek kuli Q :

$$U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.7)$$

Energia jest proporcjonalna do kwadratu całkowitego ładunku i odwrotnie proporcjonalna do promienia. Możemy również zinterpretować równanie (8.7) mówiąc, że średnia ($1/r_{ij}$) dla wszystkich par punktów kuli wynosi $3/5a$.

8-2. Energia kondensatora.

Siły działające na naładowane przewodniki*)

Zastanówmy się teraz, jaka energia jest potrzebna do naładowania przewodnika. Jeśli z jednego przewodnika kondensatora zabrać ładunek Q i umieścić go na drugim przewodniku, to różnica potencjałów między nimi będzie wynosić

$$V = \frac{Q}{C}, \quad (8.8)$$

gdzie C jest pojemnością kondensatora. Jaką pracę wykonuje się przy ładowaniu przewodnika? Postępując podobnie jak przedtem dla kuli, wyobraźmy sobie, że kondensator został naładowany przez przeniesienie ładunku z jednej płyty na drugą małymi porcjami dQ . Praca potrzebna na przeniesienie ładunku dQ jest równa

$$dU = V dQ.$$

Wstawiając tu wartość V z równania (8.8) mamy

$$dU = \frac{Q dQ}{C}.$$

Całkując od ładunku zerowego do końcowego ładunku Q otrzymujemy

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \quad (8.9)$$

co można również zapisać jako

$$U = \frac{1}{2} CV^2. \quad (8.10)$$

*) Porównaj: Tom I, cz. 1, rozdz. 4 (Zasada zachowania energii) oraz rozdz. 13 i 14 (Praca i energia potencjalna).

Przypominając sobie, że pojemność przewodzącej kuli (względem nieskończoności) jest równa

$$C_{\text{kuli}} = 4\pi\epsilon_0 a,$$

otrzymujemy natychmiast z równania (8.10) energię naładowanej kuli:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.11)$$

To, oczywiście, jest również energią cienkiej warstwy kulistej o całkowitym ładunku Q i równa się $\frac{5}{6}$ energii jednorodnie naładowanej kuli [równanie (8.7)].

Jak można stosować pojęcie energii elektrostatycznej? Zastanówmy się nad odpowiedziami na następujące pytania: Jaka siła działa między płytami kondensatora? Jaki jest moment siły względem osi naładowanego przewodnika w obecności innego przewodnika o ładunku przeciwnego znaku? Na takie pytania łatwo jest znaleźć odpowiedź, korzystając z równania (8.9) na energię elektrostatyczną kondensatora i opierając się na zasadzie pracy wirtualnej [rozdz. 4, 13 i 14 tomu I (cz. 1)].

Zastosujmy tę metodę do obliczenia siły działającej między płytami kondensatora płaskiego. Wyobraźmy sobie, że odległość między płytami wzrosła o mały odcinek Δz . Praca zewnętrzna, wykonana przy przesunięciu płyt, wynosi

$$\Delta W = F \Delta z, \quad (8.12)$$

gdzie F jest siłą działającą między płytami. Praca ta równa jest zmianie energii elektrostatycznej kondensatora.

Zgodnie z równaniem (8.9) energia kondensatora była początkowo równa

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Zmiana energii (jeśli ładunek się nie zmienia) wynosi

$$U = \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C} \right). \quad (8.13)$$

Przyrównując wyrażenia (8.12) i (8.13) otrzymujemy

$$F \Delta z = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right), \quad (8.14)$$

co można również zapisać jako

$$F \Delta z = - \frac{Q^2}{2C^2} \Delta C. \quad (8.15)$$

Siła pochodzi, oczywiście, z przyciągania między ładunkami na płytach. Nie musimy jednak martwić się o szczegóły rozkładu ładunku; wszystko, co jest nam potrzebne, zawiera się w pojemności C . Łatwo jest rozszerzyć tę metodę na przewodniki o dowolnym kształcie i na dowolną składową siły. W równaniu (8.14) zastępujemy F szukaną składową, a Δz

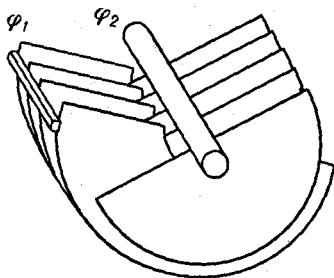
małym przemieszczeniem w odpowiednim kierunku. Gdy mamy elektrodę obracającą się na osi i chcemy znaleźć moment siły τ , wypisujemy wyrażenie na pracę wirtualną:

$$\Delta W = \tau \Delta \theta,$$

gdzie $\Delta \theta$ jest małym przesunięciem kątowym. Oczywiście, $\Delta(1/C)$ musi być zmianą $1/C$ odpowiadającą $\Delta \theta$. W ten sposób możemy znaleźć moment siły działającej na ruchome płyty w kondensatorze zmiennym, takim jak na rys. 8.3.

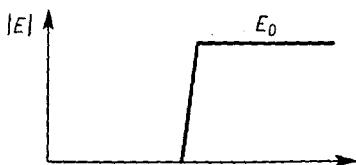
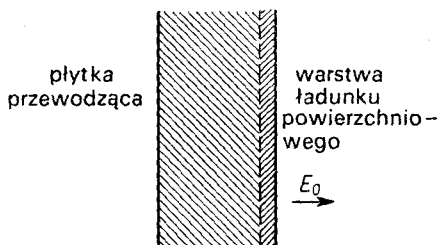
Wracając do szczególnego przypadku kondensatora płaskiego możemy zastosować wzór na pojemność, wyprowadzony w rozdz. 6:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon_0 A}, \quad (8.16)$$



8.3. Jaki jest moment siły działający na płytki kondensatora zmiennego?

8.4. Pole przy powierzchni przewodnika zmienia się od zera do $E_0 = \sigma/\epsilon_0$, gdy posuwamy się poprzez warstwę ładunku powierzchniowego.



gdzie A jest polem powierzchni każdej z płyt. Jeśli powiększymy odstęp płyt o Δz , to

$$\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta z}{\epsilon_0 A}.$$

Z równania (8.14) znajdujemy siłę działającą między płytami:

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}. \quad (8.17)$$

Przyjrzyjmy się dokładnie równaniu (8.17) i spróbujmy powiedzieć, skąd się bierze ta siła. Niech ładunek na płytach będzie równy

$$Q = \sigma A.$$

Równanie (8.17) będzie miało teraz postać

$$F = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Wartość pola elektrycznego między płytami wynosi

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

więc

$$F = \frac{1}{2} Q E_0. \quad (8.18)$$

Można się domyślić od razu, że siła działająca na jedną płytę równa się ładunkowi Q na tej płycie pomnożonemu przez pole działające na ten ładunek. W równaniu (8.18) występuje jednak niespodziewanie czynnik $\frac{1}{2}$. Bierze się to stąd, że E_0 nie jest wartością

poła w miejscu, gdzie znajduje się ładunek. Wyobraźmy sobie, że ładunek na powierzchni płyty zajmuje cienką warstwę, tak jak to pokazano na rys. 8.4. Pole zmienia się tu od zera na wewnętrznej granicy warstwy do wartości E_0 w przestrzeni na zewnątrz płytki. Średnie pole działające na ładunek powierzchniowy wynosi $E_0/2$. Dlatego właśnie w równaniu (8.18) występuje czynnik $\frac{1}{2}$.

Zauważyliście pewnie, że przy obliczaniu pracy wirtualnej założyliśmy, że ładunek na kondensatorze jest stały — kondensator nie jest połączony elektrycznie z innymi obiektami i całkowity ładunek nie może się zmieniać.

Gdybyśmy założyli, że przy przesunięciu wirtualnym istnieje stała różnica potencjałów między płytami kondensatora, musielibyśmy napisać

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

i zamiast równania (8.15) mielibyśmy równanie

$$F \Delta z = \frac{1}{2} V^2 \Delta C,$$

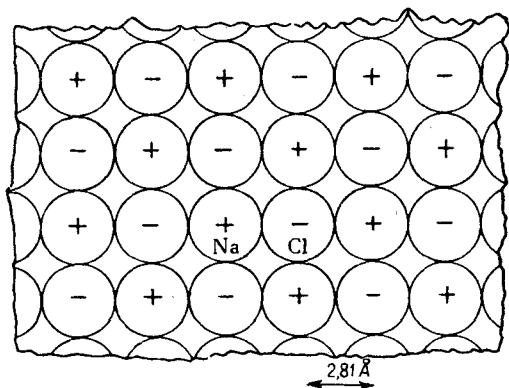
co dawałoby siłę równą co do wartości bezwzględnej sile z równania (8.15) (gdyż $V = Q/C$), ale z przeciwnym znakiem! Przecież siła działająca między płytkami kondensatora nie może zmieniać znaku, gdy odłączamy kondensator od źródła ładunków! Wiemy również, że dwie płyty o ładunkach przeciwnego znaku muszą się przyciągać. W tym drugim przypadku źle zastosowaliśmy zasadę pracy wirtualnej — nie wzięliśmy pod uwagę pracy wykonanej na źródle ładunku. Aby utrzymać stały potencjał V przy zmianie pojemności, źródło ładunku musi dostarczyć ładunek $V \Delta C$. Ten ładunek jest dostarczany do miejsca, w którym potencjał jest równy V , a więc praca wykonana przez układ elektryczny, który utrzymuje stały potencjał, jest równa $V^2 \Delta C$. Praca mechaniczna $F \Delta z$ plus praca elektryczna $V^2 \Delta C$ stanowią razem zmianę całkowitej energii kondensatora $\frac{1}{2} V^2 \Delta C$. Dlatego $F \Delta z$ równa się tak jak przedtem $-\frac{1}{2} V^2 \Delta C$.

8-3. Energia elektrostatyczna kryształu jonowego

Zajmiemy się teraz zastosowaniem energii elektrostatycznej w fizyce atomowej. Nie możemy mierzyć sił działających między atomami, ale często chodzi nam o znalezienie różnicy energii między jednym układem atomów a drugim, np. energii przemiany chemicznej. Ponieważ siły atomowe są zasadniczo siłami elektrycznymi, energie chemiczne są w znacznym stopniu po prostu energiami elektrostatycznymi.

Weźmy na przykład energię elektrostatyczną sieci jonowej. Kryształ jonowy, taki jak NaCl, składa się z dodatnich i z ujemnych jonów, które można traktować jak sztywne kule. Przyciągają się one wzajemnie aż do zetknięcia, a wtedy zaczynają występować siły odpychania, które szybko rosną przy zmniejszaniu się odległości.

W pierwszym przybliżeniu wyobrażamy sobie sztywny układ kul, przedstawiających atomy soli kamiennej. Struktura sieci została określona na podstawie rentgenowskich badań dyfrakcyjnych. Jest to sieć regularna — przypominająca trójwymiarową szachownicę. Rysunek 8.5 przedstawia przekrój kryształu. Odległości sieciowe między jonami wynoszą $2,81 \text{ \AA}$ ($=2,81 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$).



8.5. Przekrój w skali atomowej poprzez kryształ soli kamiennej. W dwóch pozostałych przekrojach prostopadłych jony Na i Cl są tak samo ułożone w szachownicę [patrz rys. 1.7 z tomu I (cz. 1)]

energia rozdzielania NaCl na jony jest równa

$$W = 7,64 \cdot 10^5 \text{ J/mol.}$$

Fizykochemicy wolą wyrażać energię w kilokaloriach (1 kilokaloria = 4190 dżuli). 1 elektronowolt na cząsteczkę równy jest 23 kilokaloriom na mol. Chemik powie więc, że energia potrzebna do rozdzielania kryształu NaCl wynosi

$$W = 183 \text{ kcal/mol.}$$

Czy obliczając pracę potrzebną do rozdzielania kryształu NaCl na jony uzyskamy wartość zgodną ze znaną doświadczalnie energią chemiczną? Zgodnie z naszą teorią praca ta jest sumą energii potencjalnych wszystkich par jonów. Tę sumę będzie najłatwiej znaleźć wybierając jakiś jeden jon i obliczając jego energię potencjalną względem wszystkich innych jonów. Da to nam *podwojoną* wartość energii przypadającej na jeden jon, energia należy bowiem do *pary* ładunków. Jeśli szukamy energii związanej z jednym jonom, musimy wziąć połowę sumy. W istocie jednak potrzebna nam jest energia przypadająca *na cząsteczkę*, która zawiera dwa jony, a więc suma, którą obliczamy, da nam od razu energię przypadającą na cząsteczkę.

Energia potencjalna dwóch sąsiednich jonów wynosi e^2/a , gdzie $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$, a a jest odległością między jonami, liczoną od środka jednego do środka drugiego jonu. (Bierzemy tu pod uwagę jony jednowartościowe.) Energia ta wynosi 5,12 eV, co jak widzimy, daje nam wynik zgodny co do rzędu wielkości. Dalecy jednak jeszcze jesteśmy od potrzebnej nam nieskończonej sumy wyrazów.

Zacznijmy od zsumowania wyrazów pochodzących od jonów leżących wzdłuż jednej prostej. Traktując jon oznaczony Na na rys. 8.5 jako nasz wybrany jon, weźmy pod uwagę wszystkie jony leżące na tej samej co on prostej poziomej. Najbliżej naszego wy-

Słuszność takiego obrazu tego układu można sprawdzić obliczając ilość energii potrzebną do oderwania od siebie tych jonów, to jest do całkowitego rozdzielania kryształu na jony. Energia ta powinna być równa sumie ciepła parowania NaCl i energii potrzebnej do dysocjacji cząsteczek na jony. Ta całkowita energia rozdzielania NaCl na jony została znaleziona doświadczalnie i równa się 7,92 eV na cząsteczkę. Ponieważ

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J,}$$

a liczba Avogadro, to jest liczba cząsteczek w jednym molu, jest równa

$$N_0 = 6,02 \cdot 10^{23},$$

branego jonu w odległości a leżą dwa jony Cl o ładunkach ujemnych. Następnie w odległościach $2a$ leżą dwa jony dodatnie itd. Niech energią tej sumy ładunków będzie U_1 :

$$U_1 = \frac{e^2}{a} \left(-\frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \dots \right) = -\frac{2e^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right). \quad (8.19)$$

Szereg ten jest powoli zbieżny i dlatego trudny do wyliczenia numerycznego; wiadomo jednak, że suma ta jest równa $\ln 2$. Mamy więc

$$U_1 = -\frac{2e^2}{a} \ln 2 = -1,386 \frac{e^2}{a}. \quad (8.20)$$

Weźmy teraz sąsiedni rząd jonów. Najbliższy leży w odległości a i jest jonem ujemnym. Następnie są dwa jony dodatnie w odległościach $\sqrt{2}a$. Dalsze pary leżą w odległościach $\sqrt{5}a$, $\sqrt{10}a$ itd. Dla całego rzędu otrzymujemy szereg:

$$\frac{e^2}{a} \left(-\frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}} - \dots \right). \quad (8.21)$$

Istnieją cztery takie rzędy: ponad naszym wybranym jonem, poniżej, przed nim i za nim. Następnie istnieją cztery linie, będące najbliższe na diagonalach itd.

Jeśli cierpliwie uwzględnicie wszystkie rzędy i później zsumujecie, otrzymacie pełną energię

$$U = 1,747 \frac{e^2}{a},$$

co znaczy nieco więcej niż otrzymaliśmy z równania (8.20) dla pierwszego rzędu. Podstawiając $e^2/a = 5,12 \text{ eV}$ mamy

$$U = 8,94 \text{ eV}.$$

Nasz wynik jest około 10% wyższy od doświadczalnie znalezionej wartości energii. Wskazuje to, że nasza myśl, iż sieć krystaliczna jest utrzymywana w całości przez elektryczne siły kulombowskie, jest w zasadzie słuszna. Po raz pierwszy uzyskaliśmy tu dane o jakiejś właściwości substancji makroskopowej na podstawie naszej znajomości fizyki atomowej. Później będziemy tą drogą zdobywać więcej wiadomości. Dział fizyki, który próbuje wyjaśniać właściwości dużych brył materii na podstawie praw rządzących zachowaniem się atomów, nosi nazwę *fizyki ciała stałego*.

Zastanówmy się teraz, skąd się wziął błąd w naszych obliczeniach. Dlaczego nie otrzymaliśmy wyniku zgodnego z wynikiem doświadczenia? Nasz błąd pochodzi z nieuwzględnienia odpychania, jakie zachodzi między jonami na bardzo bliskich odległościach. Jony nie są w rzeczywistości doskonale sztywnymi kulami i gdy znajdują się bardzo blisko siebie, ulegają pewnemu spłaszczeniu. Nie są zbyt miękkie, więc to spłaszczenie jest niewielkie. Część energii jest jednak zużyta na zdeformowanie jonów i gdy jony oddzielamy od siebie, ta część energii zostaje wyzwolona. Rzeczywista energia potrzebna na rozdzielenie jonów jest nieco mniejsza niż energia przez nas obliczona — odpychanie pomaga w przewyciężeniu przyciągania elektrostatycznego.

Czy można w jakiś sposób uwzględnić to oddziaływanie? Moglibyśmy to zrobić, gdybyśmy znali prawo rządzące siłą odpychania. Nie będziemy teraz analizować szczegółowo mechanizmu odpychania, można jednak zdobyć pewne o nim pojęcie na podstawie pomiarów makroskopowych. Z pomiarów *ściśliwości* całego kryształu można uzyskać pewne dane liczbowe odnoszące się do prawa odpychania między jonami, a więc i do przyczynku tego oddziaływania do energii. W ten sposób znaleziono, że wkład odpychania wynosi $\frac{1}{9,4}$ wkładu przyciągania elektrostatycznego (oczywiście znaki tych udziałów są przeciwnie). Jeśli odejmiemy wkład odpychania od czysto elektrostatycznej energii, otrzymamy energię dysocjacji 7,99 eV na cząsteczkę. Jest to już wartość znacznie bliższa znalezionej doświadczalnie liczby 7,92 eV, ale jeszcze nie doskonale zgodna. W naszych obliczeniach nie wzięliśmy bowiem pod uwagę jeszcze jednej rzeczy: nie uwzględniliśmy energii kinetycznej drgań sieci. Po wprowadzeniu poprawki uwzględniającej ten efekt uzyskuje się bardzo dobrą zgodność z wynikiem doświadczenia. Myśl była więc słuszna: energia kryształu takiego jak NaCl jest w większej części elektrostatyczna.

8-4. Energia elektrostatyczna w jądrze atomowym

Weźmiemy teraz inny przykład energii elektrostatycznej w fizyce atomowej — energię elektryczną jądra atomowego. Musimy najpierw omówić pewne właściwości sił (nazywanych siłami jądrowymi), które utrzymują protony i neutrony razem w jądrze. We wczesnej fazie badań jądra — oraz neutronów i protonów, z których jest ono utworzone — spodziewano się, że silna, nieelektryczna składowa siły działającej między, powiedzmy, jednym protonem a drugim, podlega jakiemuś prostemu prawu, podobnemu do prawa odwrotności kwadratu w elektryczności. Gdy tylko uda się określić to prawo i odpowiednie prawa dla sił między protonem i neutronem oraz między neutronami, można będzie podać pełny opis zachowania się tych cząstek w jądrze. Rozpoczęto więc, zaplanowane na dużą skalę, badania nad rozpraszaniem protonów, w nadziei znalezienia prawa, któremu podlegają działające między nimi siły. Po 30 latach wysiłków nie udało się jeszcze znaleźć żadnej prostej zależności. Zebrano bardzo dużo wiadomości na temat sił działających między protonami, ale stwierdzono, że prawo rządzące tymi siłami jest tak skomplikowane, jak tylko być może.

Mówiąc „skomplikowane, jak tylko być może” mamy na myśli, że siła zależy od tytułu czynników, ile tylko ich może być.

Po pierwsze — siła jądrowa nie jest jakąś prostą funkcją odległości między dwoma protonami. Na dużych odległościach występuje przyciąganie, natomiast na mniejszych — odpychanie. Zależność od odległości jest funkcją skomplikowaną, dotychczas jeszcze nie całkowicie poznaną.

Po drugie — siła jądrowa zależy od orientacji spinu protonów. Każde dwa oddziałujące ze sobą protony mogą wirować albo tak, że ich momenty pędu są równoległe, albo tak, że momenty pędu są antyrównoległe. Przy spinach równoległych siła jest inna niż przy spinach antyrównoległych (rys. 8.6a i b). Różnica ta jest znaczna; to nie jest bynajmniej mały efekt.

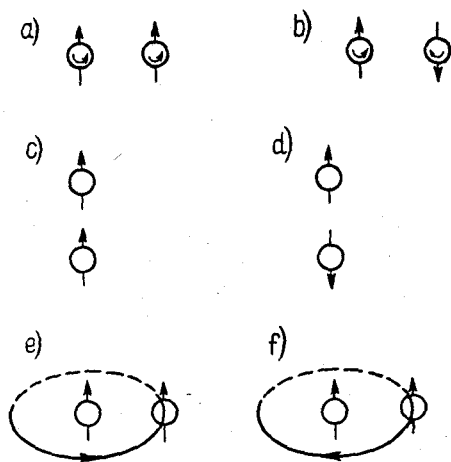
Po trzecie — siła jądrowa jest zupełnie inna wtedy, gdy protony oddalone są od siebie w kierunku *równoległym* do spinów, jak w przypadku c) i d) na rys. 8.6, niż wtedy, gdy protony oddalone są od siebie w kierunku *prostopadłym* do spinów, jak w przypadku a) i b).

Po czwarte — siła jądrowa, podobnie jak siła magnetyczna, zależy od prędkości protonów, z tym jednak, że zależność ta jest o wiele silniejsza niż w magnetyzmie. Ta zależna od prędkości siła nie jest efektem relatywistycznym; wartość jej jest znaczna nawet dla szybkości dużo mniejszych od prędkości światła. Ponadto zależy ona nie tylko od samej wartości prędkości. Jeśli, na przykład, proton porusza się w pobliżu innego protonu, siła jest inna wtedy gdy ruch orbitalny ma ten sam kierunek obrotu, co spin (rys. 8.6e), niż wtedy, gdy kierunek obrotu jest przeciwny do spinu (rys. 8.6f). Nazywamy to „spinowo-orbitalną” składową siły.

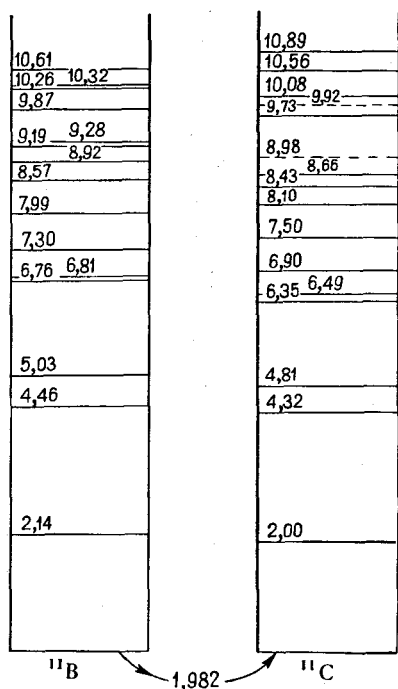
Siły działające między protonem i neutronem lub między dwoma neutronami są równie skomplikowane. Do dzisiaj nie wiemy, jaki mechanizm kryje się za tymi siłami, tzn. nie umiemy wyjaśnić ich w prosty sposób.

Jednakże rozpatrywanie problemów sił jądrowych jest bardzo *uproszczone* przez to, że siła jądrowa między dwoma neutronami jest taka sama, jak między protonem i neutronem lub między dwoma protonami! Jeśli w jakiegokolwiek sytuacji jądrowej wymienimy proton na neutron (lub przeciwnie), *oddziaływania jądrowe* się nie zmieniają. Zasadnicza przyczyna tej równoważności nie jest znana, ale tę zasadę można rozciągnąć na inne silnie oddziaływające cząstki, jak mezony π , czy też cząstki dziwne.

Zasadę tę pięknie ilustruje położenie poziomów energetycznych w jądrach podobnych. Weźmy np. jądro ^{11}B (bor jedenaste), które jest złożone z 5 protonów i 6 neutronów. Te 11 cząstek oddziałują w jądrze w nadzwyczaj skomplikowany sposób. Ze wszystkich możliwych oddziaływań istnieje jedna konfiguracja o najniższej możliwej energii: jest to stan normalny jądra, czyli — jak się mówi — *stan podstawowy*. Jeśli jądro jest zakłócone (np. przez zderzenie z protonem o wielkiej energii lub z inną cząstką), może znaleźć się w różnych innych konfiguracjach, nazywanych *stanami wzbudzonymi*, z których każdy będzie miał pewną energię charakterystyczną, wyższą niż energia stanu podstawowego. W badaniach fizyki jądrowej, jakie prowadzi się za pomocą generatora van de Graffa (np. w Laboratorium Kellogga i Sloana w Kalifornijskim Instytucie Techniki), energie stanów wzbudzonych wyznacza się doświadczalnie. Energie piętnastu najniższych stanów wzbudzonych jądra ^{11}B pokazano na jednowymiarowym wykresie po lewej stronie rys. 8.7. Najniższa linia pozioma przedstawia stan podstawowy. Pierwszy stan wzbudzony



8.6. Siła między dwoma protonami zależy od wszystkich możliwych parametrów



8.7. Poziomy energetyczne ^{11}B i ^{11}C (energia w MeV). Stan podstawowy ^{11}C jest o 1,982 MeV wyższy niż stan podstawowy ^{11}B .

znikać, można jednak się jej doszukać, jeśli weźmiemy pod uwagę inne cechy charakterystyczne jąder w stanach wzbudzonych, np. momenty pędu lub to, w jaki sposób tracą one nadmiar energii.

Uderzające podobieństwo układu poziomów energetycznych ^{11}B i ^{11}C na pewno nie jest przypadkiem. Musi to być przejawem jakiegoś prawa fizycznego. Wskazuje to w istocie, że nawet w skomplikowanej sytuacji jądrowej zastąpienie neutronu protonem nie czyni żadnej prawie różnicy. Siły neutron-neutron i proton-proton muszą być prawie identyczne. Tylko wtedy konfiguracje jądrowe z pięcioma protonami i sześcioma neutronami będą takie same jak z sześcioma protonami i pięcioma neutronami.

Zauważcie, że właściwości tych dwóch jąder nie mówią nam nic o sile neutron-proton — w obu jądrach jest ta sama liczba kombinacji neutron-proton. Jeśli jednak porównamy dwa inne jądra, np. ^{14}C , które ma 6 protonów i 8 neutronów, oraz ^{14}N , które ma po 7 protonów i neutronów, to stwierdzimy podobną odpowiedniość poziomów energetycznych. Możemy więc wyciągnąć wniosek, że siły p-p, n-n i p-n są identyczne, mimo całej swojej złożoności. Wśród praw sił jądrowych mamy nieoczekiwaną zasadę. Mimo że siły między każdą parą cząstek jądrowych są bardzo skomplikowane, siły między trzema możliwymi różnymi parami są takie same.

ma energię o 2,14 MeV wyższą niż stan podstawowy, drugi stan wzbudzony ma energię wyższą o 4,46 MeV niż stan wzbudzony itd. Fizyka jądrowa próbuje znaleźć wyjaśnienie tego raczej skomplikowanego układu energii, dotychczas nie ma jednak jeszcze ogólnej i kompletnej teorii takich poziomów energetycznych.

Jeśli w ^{11}B zastąpimy jeden z neutronów protonem, otrzymamy jeden z izotopów węgla ^{11}C . Zmierzono energie szesnastu najniższych stanów wzbudzonych ^{11}C — podano je po prawej stronie rys. 8.7; liniami przerywanymi oznaczono poziomy, co do których dane doświadczalne nie są jeszcze pewne.

Przyglądając się rys. 8.7 widzimy uderzające podobieństwo układów poziomów energetycznych tych dwóch jąder. Pierwszy poziom wzbudzony leży w obu przypadkach około 2 MeV nad stanem podstawowym. Między pierwszym a drugim stanem wzbudzonym mamy dużą odległość energetyczną około 2,3 MeV, trzeci poziom już leży tylko około 0,5 MeV nad drugim. Między czwartym a piątym znowu duży skok, a między piątym a szóstym mała odległość rzędu 0,1 MeV. I tak dalej. Koło dziesiątego poziomu ta odpowiedniość wydaje się

Istnieją jednak pewne drobne różnice. Poziomy energetyczne nie zgadzają się zupełnie dokładnie, ponadto stan podstawowy ^{11}C ma energię bezwzględną (to znaczy masę) o 1,982 MeV większą niż stan podstawowy ^{11}B . Wszystkie inne poziomy są również w skali energii bezwzględnej przesunięte o tę samą odległość. A więc siły nie są dokładnie równe. Wiemy jednak bardzo dobrze, że *całkowite* siły nie są dokładnie równe — siła elektryczna występuje między dwoma protonami, bo każdy z nich ma ładunek dodatni, natomiast między dwoma neutronami nie ma siły *elektrycznej*. Czy możemy wyjaśnić różnicę między ^{11}B i ^{11}C tym, że oddziaływania elektryczne protonów są różne w tych dwóch przypadkach? Może drobne różnice w poziomach energetycznych są spowodowane efektami elektrycznymi? Siły jądrowe są znacznie większe od sił elektrycznych, więc siły elektryczne będą dawały tylko drobne zaburzenia poziomów energetycznych.

Aby sprawdzić, czy nasze wytłumaczenie jest słuszne, a raczej, aby sprawdzić wynikające stąd konsekwencje, zastanówmy się nad różnicą energii stanu podstawowego tych dwóch jąder. Weźmy bardzo prosty model, zakładając, że jądra są kulami o promieniu r (który wyznaczymy), zawierającymi Z protonów. Jeśli traktujemy jądro jak kulę o jednorodnej gęstości ładunku, to energia elektrostatyczna [na podstawie równania (8.7)] będzie równa

$$U = \frac{3}{5} \frac{(Zq_e)^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (8.22)$$

gdzie q_e jest ładunkiem elementarnym protonu. Ponieważ Z wynosi dla ^{11}B — 6, a dla ^{11}C — 5, energie elektrostatyczne będą różne.

Przy tak małej liczbie protonów równanie (8.22) nie jest jednak całkiem słuszne. Jeśli obliczymy energię elektryczną między wszystkimi parami protonów, które traktować będziemy jak punkty, prawie jednorodnie rozłożone w kuli, to stwierdzimy, że w równaniu (8.22) trzeba wielkość Z^2 zastąpić wielkością $Z(Z-1)$. Energia będzie więc równa

$$U = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{r}. \quad (8.23)$$

Jeśli znamy promień jądra a , możemy z równania (8.23) wyznaczyć różnicę energii elektrostatycznych ^{11}B i ^{11}C . Zróbmy jednak coś przeciwnego: na podstawie doświadczalnie znalezionej różnicy energii obliczymy promień, zakładając, że różnica energii jest tylko pochodzenia elektrostatycznego.

To jednak nie jest całkiem słuszne. Różnica energii 1,982 MeV między stanami podstawowymi ^{11}B i ^{11}C zawiera w sobie również energie spoczynkowe, tzn. energię mc^2 wszystkich cząstek. Przechodząc od ^{11}B do ^{11}C zastępujemy jeden neutron jednym protonem, co prowadzi do mniejszej masy. Tak więc część różnicy energii pochodzi z różnych mas spoczynkowych neutronu i protonu. Ta różnica wynosi 0,784 MeV. Zatem różnica energii elektrostatycznych musi być większa niż 1,982 MeV; wynosi ona

$$1,982 + 0,784 = 2,786 \text{ MeV}.$$

Wstawiając tę wartość energii do równania (8.23), otrzymujemy na promień jądra ^{11}B lub ^{11}C wartość

$$r = 3,12 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \quad (8.24)$$

Czy ta liczba ma jakiś sens? Aby się o tym przekonać, musimy porównać ją z wartościami promieni jądra, wyznaczanymi w inny sposób. Możemy na przykład zmierzyć promień jądra badając rozproszenie szybkich cząstek na jądrze. Na podstawie takich pomiarów stwierdzono, że *gęstość* materii we wszystkich jądrach jest prawie taka sama, to znaczy, że ich objętości są proporcjonalne do liczby tworzących je cząstek. Niech A będzie liczbą protonów i neutronów w jądrze (ta liczba jest w bardzo dobrym przybliżeniu proporcjonalna do masy jądra); wtedy promień dany będzie równaniem

$$r = A^{1/3} r_0, \quad (8.25)$$

gdzie

$$r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \quad (8.26)$$

Na podstawie tych pomiarów można obliczyć, że promień jądra ^{11}B (lub ^{11}C) jest równy

$$r = (1,2 \cdot 10^{-13})(11)^{1/3} = 2,7 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Porównując ten wynik z wyrażeniem (8.24) widzimy, iż nasze założenie, że różnica energii między ^{11}B i ^{11}C jest pochodzenia elektrostatycznego, było zupełnie słuszne. Rozbieżność między wynikami wynosi tylko 15% (nie tak źle, jak na nasze pierwsze obliczenia jądrowe!).

Przyczyna tej rozbieżności jest przypuszczalnie następująca. Zgodnie z obecnym poglądem na jądro, parzysta liczba cząstek jądrowych, w przypadku ^{11}B 5 neutronów i 5 protonów, tworzy rodzaj rdzenia. Gdy dodać jeszcze jedną cząstkę, nie zostaje ona wchłonięta do wewnątrz, lecz krąży na zewnątrz naokoło rdzenia. Jeśli tak jest, to powinniśmy wziąć inną energię elektrostatyczną dla dodatkowego protonu. Powinniśmy przyjąć, że ^{11}C ma energię wyższą od ^{11}B o

$$\frac{(Z-1)q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a},$$

co jest energią potrzebną na dodanie 1 protonu na zewnątrz rdzenia. Liczba ta wynosi akurat $\frac{5}{6}$ wartości przewidzianej równaniem (8.23), a więc na promień powinniśmy wziąć $\frac{5}{6}$ wartości otrzymanej z równania (8.24). Daje to o wiele lepszą zgodność z wartością otrzymaną doświadczalnie.

Z uzyskanych wyników możemy wyciągnąć dwa wnioski. Jeden, że prawa elektryczne są jeszcze słuszne na odległościach tak małych jak 10^{-13} cm, a drugi, że rzeczywiście potwierdziliśmy zadziwiającą równość składowych nieelektrycznych sił między protonem i protonem, neutronem i neutronem oraz protonem i neutronem.

8-5. Energia w polu elektrostatycznym

Zajmiemy się teraz innymi metodami obliczania energii elektrostatycznej. Wszystkie one opierają się na podstawowej zależności (8.3), to jest na sumowaniu po wszystkich parach ładunków energii oddziaływań każdej pary ładunków. Napiszemy najpierw wyrażenie na energię rozkładu ładunku. Jak zwykle, przyjmujemy, że każdy element obje-

kości dV zawiera element ładunku ρdV . Wtedy równanie (8.3) można zapisać jako

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{cała przestrzeń}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_1 dV_2. \quad (8.27)$$

Zwróćcie uwagę na czynnik $\frac{1}{2}$, który wprowadza się dlatego, że w całce podwójnej po dV_1 i dV_2 liczyliśmy wszystkie pary elementów ładunku dwukrotnie. Nie ma dogodnego sposobu napisania całki tak, aby liczyć wszystkie pary tylko raz. Całka po dV_2 w równaniu (8.27) jest po prostu potencjałem w punkcie (1). Mamy więc

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 = \varphi(1),$$

a zatem równanie (8.27) będzie teraz miało postać

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(1) \varphi(1) dV_1.$$

Ponieważ punkt (2) już tu nie występuje, więc możemy po prostu napisać

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (8.28)$$

Równanie to można zinterpretować następująco. Energia potencjalna ładunku ρdV jest iloczynem tego ładunku i potencjału w miejscu, gdzie znajduje się ładunek. Całkowita energia jest więc całką z $\rho \varphi dV$. Mamy tu znowu czynnik $\frac{1}{2}$, który jest konieczny, gdyż liczyliśmy energie dwukrotnie. Energia jednego z pary ładunków jest iloczynem tego ładunku i potencjału w miejscu ładunku, pochodzącego od drugiego ładunku, lub też — iloczynem drugiego ładunku i potencjału w jego miejscu pochodzącego od pierwszego ładunku. Dla dwóch ładunków punktowych napiszemy

$$U = q_1 \varphi(1) = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

$$U = q_2 \varphi(2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$

Możemy również napisać

$$U = \frac{1}{2} [q_1 \varphi(1) + q_2 \varphi(2)]. \quad (8.29)$$

Całka z równania (8.28) odpowiada sumie w nawiasach kwadratowych w równaniu (8.29). Dlatego właśnie potrzebny nam jest czynnik $\frac{1}{2}$.

Ciekawe jest zagadnienie następujące: Gdzie jest ulokowana energia elektrostatyczna? Mógłby ktoś powiedzieć: „Co to kogo obchodzi? Jaki jest sens takiego pytania? Gdy istnieje para oddziaływujących ładunków, układ ten musi mieć pewną energię. Czy musimy mówić, że energia jest umiejscowiona na jednym z ładunków lub na drugim, albo na obu, albo pomiędzy nimi?” Pytania te mogą nie mieć sensu, gdyż naprawdę wiemy tylko, że całkowita energia jest zachowana. Idea, że energia jest *gdzieś* umiejscowiona, nie jest potrzebna.

Przypuśćmy jednak, iż *ma sens* stwierdzenie, że ogólnie energia jest umiejscowiona w jakimś punkcie, tak jak w przypadku energii cieplnej. Moglibyśmy wtedy *rozszerzyć* zasadę zachowania energii przyjmując, że gdy energia w danym obszarze się zmienia, zmiana ta jest różnicą między ilością wpływającej energii a ilością wyptywającej. Zdajecie sobie chyba sprawę, że nasze poprzednie sformułowanie zasady zachowania energii jest nadal zupełnie poprawne, nawet gdy jakaś energia znika w jednym miejscu, a pojawia się w jakimś odległym innym miejscu i nic przy tym się nie dzieje (nie zachodzą żadne zjawiska) w przestrzeni pomiędzy tymi punktami. Rozważmy więc teraz pewne rozszerzenie pojęcia zachowania energii. Możemy je nazwać zasadą *lokalnego* zachowania energii. Taka zasada będzie mówić, że energia w danym obszarze o pewnej objętości zmienia się tylko o ilość, która z tego obszaru wyptywa lub do niego wpływa. Istotnie, jest zupełnie możliwe, że energia jest zachowana lokalnie właśnie w taki sposób. Jeśli tak jest, to powinno obowiązywać bardziej szczegółowe prawo niż proste stwierdzenie zachowania całkowitej energii. Okazuje się, że w przyrodzie *energia jest zachowywana lokalnie*. Możemy wyprowadzić wzory, mówiące nam, gdzie energia jest zlokalizowana i jak wędruje z jednego miejsca do drugiego.

Również z względów natury *fizycznej* jest konieczne, abyśmy mogli określić, gdzie jest zlokalizowana energia. Zgodnie z teorią grawitacji każda masa jest źródłem przyciągania grawitacyjnego. Wiemy również, że $E = mc^2$, że masa jest równoważna energii. Każda energia jest więc źródłem siły grawitacyjnej. Gdybyśmy nie mogli zlokalizować energii, nie moglibyśmy wtedy zlokalizować całej masy. Nie moglibyśmy powiedzieć, gdzie są zlokalizowane źródła pola grawitacyjnego. Teoria grawitacji byłaby niekompletna.

Jeśli ograniczymy się do elektrostatyki, to istotnie nie mamy sposobu określenia, gdzie jest zlokalizowana energia. Pełne równania elektrodynamiki Maxwella dają nam o wiele więcej informacji (choć nawet wtedy odpowiedź, mówiąc ściśle, nie jest jednoznaczna). Dlatego też omówimy tę sprawę dokładniej w jednym z dalszych rozdziałów. Energia jest zlokalizowana w przestrzeni, gdzie istnieje pole elektryczne. To wydaje się sensowne, gdyż wiemy, że ładunki, gdy są przyspieszane, promieniują pole elektryczne. Chcielibyśmy powiedzieć, że gdy światło lub fale radiowe rozchodzą się z jednego punktu do drugiego, niosą ze sobą energię. W falach nie ma jednak ładunków. Chcielibyśmy więc zlokalizować energię tam, gdzie jest pole elektromagnetyczne, a nie w ładunkach, od których pochodzi to pole. Tak więc będziemy wiązać energię nie z ładunkami, lecz z wytworzonym przez nie polem. Możemy, istotnie, wykazać, że równanie (8.28) jest *numerycznie* równe

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.30)$$

Wzór ten mówi, że gdy istnieje pole elektryczne, to w przestrzeni zlokalizowana jest energia o *gęstości* (energia na jednostkę objętości)

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (8.31)$$

Ilustracją tego jest rys. 8.8.

Aby wykazać, że równanie (8.30) jest zgodne z naszymi prawami elektrostatyki, wpro-

wadźmy do równania (8.28) zależność od ϱ , którą uzyskaliśmy w rozdz. 6:

$$\varrho = -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi.$$

Otrzymamy

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \varphi \nabla^2 \varphi dV. \tag{8.32}$$

Wypisując składowe funkcji podcałkowej widzimy, że

$$\begin{aligned} \varphi \nabla^2 \varphi &= \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \\ &= \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) - (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi). \end{aligned} \tag{8.33}$$

Całka energii będzie więc równa

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV.$$

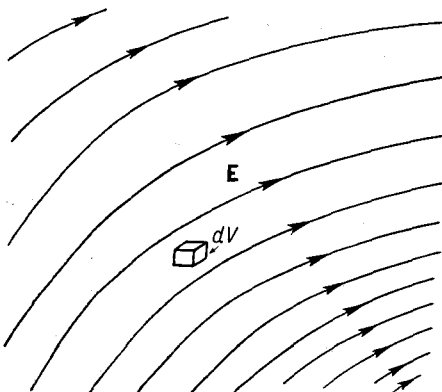
Możemy tu zastosować twierdzenie Gaussa i zamienić drugą całkę na całkę powierzchniową:

$$\int_{\text{obszar}} \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV = \int_{\text{powierzchnia}} (\varphi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} da. \tag{8.34}$$

Całkę powierzchniową możemy oszacować, w przypadku gdy powierzchnia dąży do nieskończoności (całka objętościowa staje się więc całką po całej przestrzeni), zakładając, że wszystkie ładunki znajdują się w skończonej odległości. Najprościej będzie wziąć powierzchnię kulistą o olbrzymim promieniu R i o środku w początku układu współrzędnych. Wiemy, że na bardzo dużych odległościach od ładunków potencjał zmienia się jak $1/R$, a jego gradient $\nabla \varphi$ — jak $1/R^2$. (Wielkości te mogą maleć nawet jeszcze szybciej z rosnącym R , gdy suma ładunków rozmieszczonych w przestrzeni i wytwarzających pole będzie równa zero.) Ponieważ powierzchnia kuli rośnie jak R^2 , całka powierzchniowa maleje jak $(1/R)(1/R^2)R^2 = (1/R)$. Jeśli więc uwzględnimy w całkowaniu całą przestrzeń ($R \rightarrow \infty$), to całka powierzchniowa będzie dążyła do zera i otrzymamy

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cała przestrzeń}} (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) dV = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cała przestrzeń}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \end{aligned} \tag{8.35}$$

8.8. Każdy element objętości $dV = dx dy dz$ zawiera w polu elektrycznym energię $(\epsilon_0/2) E^2 dV$



Widzimy więc, że można przedstawić energię dowolnego rozkładu ładunku jako całkę po gęstości energii umiejscowionej w polu.

8-6. Energia ładunku punkowego

Związek (8.35) mówi, że nawet pojedynczy ładunek punktowy q ma jakąś energię elektrostatyczną. W przypadku ładunku punkowego pole elektryczne dane jest wzorem

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Gęstość energii w odległości r od ładunku będzie więc równa

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$

Jako element objętości możemy wziąć warstwę kulistą o grubości dr i o powierzchni $4\pi r^2$. Energia całkowita wyniesie

$$U = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r=0}^{r=\infty}. \quad (8.36)$$

Granica dla $r = \infty$ nie sprawia trudności, ale dla ładunku punkowego powinniśmy całkować do $r = 0$, co daje całkę nieskończoną. Równanie (8.35) mówi, że w polu ładunku punkowego jest nieskończona ilość energii, mimo że z początku mówiliśmy tylko o energii zlokalizowanej w obszarze *między* ładunkami punktowymi. W naszym pierwotnym wyrażeniu na energię zbioru ładunków punkowych [równanie (8.3)] nie uwzględniliśmy energii oddziaływania ładunku z samym sobą. Oto co się stało. Gdy przeszliśmy do ciągłego rozkładu ładunku w równaniu (8.27), liczyliśmy energię oddziaływania każdego *nieskończenie małego* ładunku z innymi nieskończenie małymi ładunkami. Ta sama energia oddziaływania jest również uwzględniona w równaniu (8.35), gdy więc zastosowaliśmy je do *skończonego* ładunku punkowego, uwzględniliśmy też energię potrzebną na skupienie tego ładunku z jego nieskończenie małych części. Zauważcie, że uzyskamy ten sam wynik co w równaniu (8.36), jeśli użyjemy wyrażenia (8.11) na energię naładowanej kuli i będziemy z promieniem dążyć do zera.

Musimy dojść do wniosku, że idea zlokalizowania energii w polu jest niezgodna z założeniem istnienia ładunków punkowych. Jedną z dróg wyjścia z tej trudności byłoby przyjęcie, że ładunki elementarne, takie jak elektron, nie są w rzeczywistości punktami, lecz małymi rozkładami ładunku. Innym wyjściem byłoby przypuszczenie, że coś jest nie w porządku albo z naszą teorią elektryczności na małych odległościach, albo z zasadą lokalnego zachowania energii. Każde z tych stanowisk zawiera w sobie trudności i te trudności nie zostały pokonane, istnieją do dziś. Nieco później, gdy omówimy pewne dodatkowe pojęcia, takie jak na przykład pęd w polu elektromagnetycznym, zdamy w sposób bardziej pełny sprawę z tych podstawowych trudności w zrozumieniu przyrody.

elektryczność w atmosferze

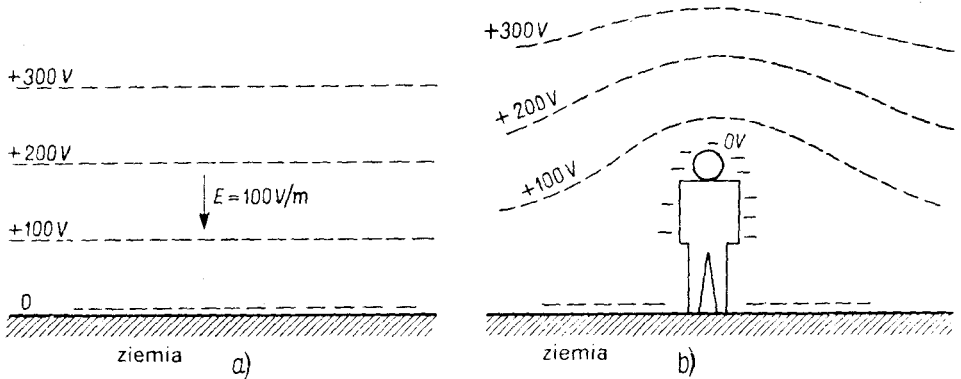
9-1. Gradient potencjału elektrycznego atmosfery*)

W zwykły dzień nad płaskim pustynnym terenem lub nad morzem potencjał elektryczny, w miarę wznoszenia się ponad powierzchnię, rośnie około 100 V/m. W powietrzu istnieje więc pionowe pole elektryczne E o wartości 100 V/m. Przyjmuje się, że znak pola jest taki, aby na powierzchni Ziemi znajdował się ładunek ujemny. Oznacza to, że gdy stoicie na dworze, potencjał na wysokości waszego nosa jest o 200 V wyższy niż u waszych stóp! Moglibyście zapytać: „Dlaczego by nie wystawić w powietrzu dwóch elektrod, jednej nad drugą w odległości 2 m i nie wyzyskać różnicy potencjałów 200 V do zasilania żarówek?” Ktoś z was mógłby się również zdziwić: „Jeśli *rzeczywiście* istnieje różnica potencjałów 200 V między moim nosem a stopami, to dlaczego nie doznaję porażenia prądem wychodząc na ulicę?”

Odpowiemy najpierw na drugie pytanie. Ciało ludzkie jest stosunkowo dobrym przewodnikiem. Gdy stoicie na ziemi, ziemia wspólnie z waszym ciałem stanowi jedną powierzchnię ekwipotencjalną. Normalnie powierzchnie ekwipotencjalne są równoległe do powierzchni Ziemi, tak jak pokazuje rys. 9.1 a, a gdy staniecie na ziemi, powierzchnie ekwipotencjalne ulegają odchyleniu i pole wygląda mniej więcej tak, jak pokazuje rys. 9.1 b. Nadal więc różnica potencjałów między waszą głową a stopami będzie prawie równa zeru. Istnieją bowiem ładunki, które dojdą z ziemi do waszej głowy, zmieniając pole. Niektóre z nich mogą zostać zneutralizowane przez jony z powietrza, ale prąd tych jonów jest bardzo mały, bo powietrze jest złym przewodnikiem.

Jak można zmierzyć takie pole, skoro zmienia się ono, gdy umieścimy w nim jakiś obiekt? Istnieje na to wiele sposobów. Jeden z nich polega na umieszczeniu izolowanego

*) Porównaj: J. Alan Chalmers, *Atmospheric Electricity*, London 1957, Pergamon Press.

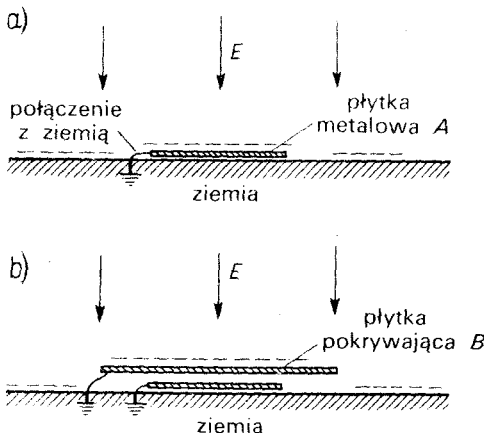


9.1. a. Rozkład potencjału nad Ziemią. b. Rozkład potencjału w pobliżu człowieka stojącego na otwartym płaskim terenie

przewodnika w pewnej odległości nad ziemią i pozostawieniu go tam tak długo, aż osiągnie ten sam potencjał co powietrze. Jeśli pozostawimy go bardzo długo, to przewodnictwo powietrza, chociaż bardzo małe, spowoduje wyciekanie ładunków z przewodnika (lub do przewodnika), aż wreszcie znajdzie się on na tym samym potencjale co otaczające powietrze. Możemy wtedy sprowadzić go z powrotem na ziemię i zmierzyć, jaka zaszła zmiana potencjału. Drugim, szybszym sposobem będzie użycie jako przewodnika ciekącego wiadra z wodą. Gdy krople wody wyciekają z wiadra, unoszą ze sobą nadmiar ładunku i potencjał wiadra zbliża się do potencjału powietrza. (Ładunki, jak wiecie, rezydują na powierzchni, a wyciekające krople są jakby „odłamkami powierzchni”.) Potencjał wiadra

można zmierzyć za pomocą elektrometru.

9.2. a. Uziemiona metalowa płytką ma taki sam ładunek powierzchniowy jak Ziemia. b. Gdy płytkę nakryje uziemionym przewodnikiem, nie będzie miała ładunku powierzchniowego.



Istnieje jeszcze inny sposób pomiaru pola — poprzez bezpośredni pomiar *gradientu* potencjału. Ponieważ istnieje pole elektryczne, więc na ziemi jest jakiś ładunek powierzchniowy ($\sigma = \epsilon_0 E$). Gdy na powierzchni Ziemi położymy płaską metalową płytkę *A* i uziemy ją, pojawią się na niej ładunki ujemne (rys. 9.2 a). Jeśli teraz nakryjemy tę płytkę inną uziemioną płytką *B* (rys. 9.2b), ładunki pojawią się na płytce *B*, a znikną z płytki *A*. Mierząc ładunek, który przepływa z płytki *A*, gdy ją nakrywamy, do ziemi (można to zrobić, na przykład, włączając galwanometr w przewód uziemiający), znajdziemy gęstość ładunku powierzchniowego, jaka była na płytce, a zatem znajdziemy pole elektryczne.

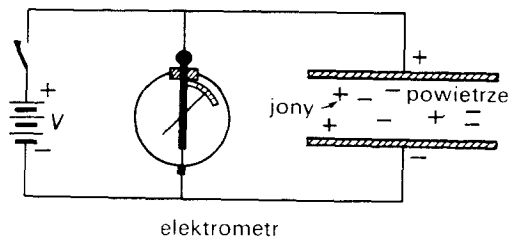
Podaliśmy kilka sposobów mierzenia pola elektrycznego atmosfery, a teraz zajmiemy się opisem tego pola. Pomiary wykazują przede wszystkim, że pole rozciąga się do bardzo dużych wysokości, jednak staje się tam słabsze. Na wysokości 50 km pole jest już bardzo słabe, a więc zmiana potencjału (całka z pola E) zachodzi głównie na mniejszych wysokościach. Całkowita różnica potencjałów między powierzchnią ziemi a górną warstwą atmosfery wynosi około 400000 V.

9-2. Prądy elektryczne w atmosferze

Oprócz gradientu potencjału w atmosferze można również mierzyć inną wielkość — prąd elektryczny. Gęstość prądu jest mała (przez każdy metr kwadratowy powierzchni równoległej do powierzchni Ziemi przechodzi około 10 pA). Powietrze jest widocznie niedoskonałym izolatorem i wskutek jego przewodnictwa mały prąd — spowodowany polem elektrycznym, które przed chwilą opisywaliśmy — płynie od nieba do ziemi.

Dlaczego atmosfera jest przewodząca? Ponieważ tu i ówdzie pomiędzy cząsteczkami powietrza znajduje się jakiś jon — powiedzmy cząsteczka tlenu, która zdobyła dodatkowy elektron albo straciła jeden elektron. Te jony nie pozostają samotne. Ze względu na swe pole elektryczne skupiają one zwykle wokół siebie kilka innych cząsteczek. Około jonu tworzy się więc zlepek cząsteczek, który wraz z innymi, podobnymi zlepkami dryfuje w polu, poruszając się powoli w górę i w dół. Tak powstaje zaobserwowany prąd. Skąd się jednak biorą jony? Początkowo myślano, że jony tworzą się wskutek promieniotwórczości Ziemi. (Wiedzano, że promieniowanie ciał promieniotwórczych może sprawić, że powietrze będzie przewodzić wskutek zjonizowania cząsteczek powietrza.) Cząstki wychodzące z jądra atomowego, np. cząstki β , poruszają się tak szybko, że wyrwywiają z atomów elektrony, tworząc jony. Gdyby jonizacja powietrza rzeczywiście była skutkiem promieniotwórczości ziemskiej, to na większych wysokościach byłaby słabsza niż w pobliżu powierzchni Ziemi, gdzie znajdują się ślady substancji promieniotwórczych — radu, uranu, potasu itp.

Aby sprawdzić tę teorię, kilku fizyków wykonało doświadczenie, mierząc w czasie lotów balonowych jonizację powietrza na różnych wysokościach (Hess w 1912 r.). Wyniki doświadczenia okazały się całkowicie sprzeczne z teorią — jonizacja w jednostce objętości powietrza *rośnie* wraz z wysokością! (Schemat użytego przyrządu pokazuje rys. 9.3. Dwie płytki były ładowane periodycznie do potencjału V . Wskutek przewodnictwa powietrza płytki powoli się rozładowywały. Prędkość rozładowania mierzono elektrometrem.) Wynik pomiarów był nieoczekiwany — było to najbardziej doniosłe odkrycie w całej historii elektryczności atmosferycznej. Tak doniosłe w istocie, że spowodowało rozwinięcie się całkiem nowej dziedziny badań — fizyki promieniowania kosmicznego. Sama elektryczność atmosferyczna pozostawała wśród zjawisk mniej zadziwiających. Stało się jasne, że jonizacja powietrza jest wywoływana czymś, co przychodzi spoza Ziemi. Poszukiwanie tego źródła doprowadziło do odkrycia promieniowania kosmicznego. Nie będziemy teraz zajmować się promieniowaniem kosmicznym, powiemy tylko, że ono właśnie powoduje powstawanie jonów w atmosferze. Jony wprawdzie stale uciekają z atmosfery, ale powstają



9.3. Pomiar przewodnictwa powietrza wywołanego ruchami jonów

lek wyparuje, pozostawia unoszący się w powietrzu malusieńki kryształek NaCl. Te kryształki mogą chwytać ładunki i stawać się jonami; nazywa się je „wielkimi jonami”.

Małe jony, wytworzone przez promieniowanie kosmiczne, są najruchliwsze. Ponieważ są tak małe, poruszają się szybko przez powietrze — z szybkością około 1 cm/s w polu 100 V/m, czyli 1 V/cm. Dużo większe i cięższe jony poruszają się znacznie wolniej. Okazuje się, że gdy jest dużo „jąder”, wychwytyują one ładunki z małych jonów, a ponieważ „wielkie jony” poruszają się w polu powoli, więc całkowite przewodnictwo maleje. Przewodnictwo powietrza bardzo się więc zmienia, gdyż jest bardzo czułe na ilość zawartych w nim „brudów”. „Brudów” takich jest o wiele więcej nad lądem, gdzie wiatry wzbijają kurz i gdzie człowiek zanieczyszcza atmosferę, niż nad morzem. Nic więc dziwnego, że z dnia na dzień, z minuty na minutę, z miejsca do miejsca zmienia się bardzo silnie przewodnictwo w pobliżu powierzchni Ziemi. Gradient potencjału w danym punkcie nad powierzchnią Ziemi również się bardzo zmienia, gdyż mniej więcej ten sam prąd płynie stale z dużych wysokości, a więc zmiany przewodnictwa w pobliżu Ziemi wywołują zmiany gradientu potencjału.

Przewodnictwo powietrza spowodowane dryfowaniem jonów rośnie szybko z wysokością. Dzieje się to z dwóch powodów. Po pierwsze — jonizacja przez promieniowanie kosmiczne rośnie wraz z wysokością. Po drugie — gdy maleje gęstość powietrza, rośnie droga swobodna jonów, a więc mogą one przebyć dłuższą drogę w polu elektrycznym, zanim się zderzą; powoduje to szybki wzrost przewodnictwa wraz z wysokością.

Gęstość prądu elektrycznego w powietrzu wynosi wprawdzie tylko kilka pikoamperów na metr sześcienny, ale przy powierzchni Ziemi mamy bardzo wiele takich metrów sześciennych. Całkowity prąd elektryczny osiągający powierzchnię Ziemi jest zawsze prawie jednakowy i wynosi około 1800 A. Ten prąd jest oczywiście „dodatni” — niesie ku Ziemi ładunki dodatnie. Mamy więc w atmosferze napięcie 400000 V przy prądzie 1800 A, co daje moc 700 MW!

Przy tak wielkim prądzie płynącym w dół ujemny ładunek Ziemi powinien bardzo szybko zostać zubożony. Istotnie, powinno to się stać w ciągu nie więcej niż pół godziny. A jednak upłynęło więcej niż pół godziny od odkrycia pola elektrycznego atmosfery. Dlaczego to pole się utrzymuje? Co podtrzymuje różnicę potencjałów? I między czym a czym ona występuje? Jedną elektrodą jest Ziemia, a drugą? Może tu być wiele pytań.

wciąż nowe, wytwarzane przez cząstki promieniowania kosmicznego, przychodzące spoza Ziemi.

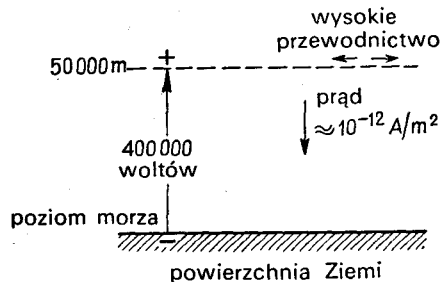
Dla ścisłości musimy powiedzieć, że poza jonami powstałymi z cząsteczek istnieją również inne rodzaje jonów. Drobnutkie cząstki kurzu unoszą się w powietrzu i chwytają ładunki. Nazywane są czasem „jądami”. Gdy na przykład na morzu rozbija się fala, małe cząstki piany wyrzucane są w powietrze. Gdy któraś z tych kropelek

Ziemia ma ła wysokości przew potencjału. Powi przewodnikiem. I „jonosfera”, w I wielką liczbę jon zemy przyjąć, że Możemy założyć, rej prądy płyną n w jaki sposób utr wany z powrotem wrotem przepomp dotyczących elekt

Każda zdobyt dać klucz do rozw żdym razie choć móg. Oto ciekaw rzymy natężenie p stabilne niż grad morzem, czyli w n runkach, i oblicz wartości średnie v pozbyć się przypa zuje się, że mier zmianom dobowy dstawia zmiany c pomiarów wykor Prąd zmienia się największy, gdy w siódma po połud bez względu na t czy nad Oceanem Oceanem Spokojn Arktycznym — n ga on wtedy, gdy : zuje godzinę siódi dzie na świecie i o godzinie 19 cz num o godzinie 4 wy, prąd zależy c a nie od czasu lok cji. Z jednego wzg cze, potwierdza to

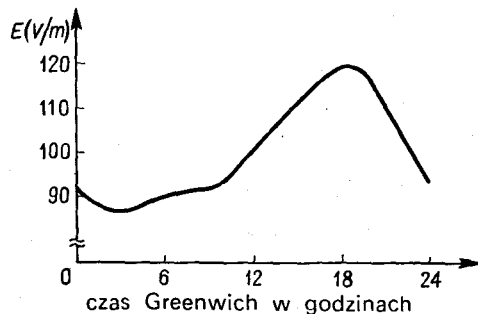
Ziemia ma ładunek ujemny, a potencjał powietrza jest dodatni. Na dostatecznie dużej wysokości przewodnictwo jest tak wielkie, że w płaszczyznach poziomych nie ma zmian potencjału. Powietrze dla tej skali czasu, o której właśnie mówimy, staje się efektywnie przewodnikiem. Dzieje się to na wysokości około 50 km. Jest to obszar położony niżej niż „jonosfera”, w której światło słoneczne wskutek zjawiska fotoelektrycznego wytwarza wielką liczbę jonów. Jednakże dla naszych rozważań elektryczności atmosferycznej możemy przyjąć, że powietrze na wysokości 50 km jest dostatecznie dobrym przewodnikiem. Możemy założyć, że na tej wysokości istnieje powierzchnia doskonale przewodząca, z której prądy płyną na dół. Taki obraz sytuacji przedstawia rys. 9.4. Problem polega na tym, w jaki sposób utrzymywany jest tam ładunek dodatni? W jaki sposób on jest pompowany z powrotem? Skoro bowiem spływa na Ziemię, to musi być w jakiś sposób z powrotem przepompowywany. Była to przez dłuższy czas jedna z największych zagadek dotyczących elektryczności atmosferycznej.

Każda zdobyta informacja może nam dać klucz do rozwiązania zagadki, a w każdym razie choć trochę nam w tym pomóc. Oto ciekawe zjawisko: gdy mierzymy natężenie prądu (które jest bardziej stabilne niż gradient potencjału) ponad morzem, czyli w możliwie ustalonych warunkach, i obliczamy bardzo starannie wartości średnie wyników pomiarów, aby pozbyć się przypadkowych błędów, okazuje się, że mierzona wielkość podlega zmianom dobowym. Rysunek 9.5 przedstawia zmiany czasowe średniej z wielu pomiarów wykonanych nad oceanami. Prąd zmienia się o około $\pm 15\%$ i jest największy, gdy w Londynie jest godzina siódma po południu. Dziwne jest to, że bez względu na to, gdzie mierzymy prąd, czy nad Oceanem Atlantyckim, czy nad Oceanem Spokojnym, czy nad Morzem Arktycznym — największą wartość osiąga on wtedy, gdy zegar w Londynie wskazuje godzinę siódmą po południu! Wszędzie na świecie prąd osiąga maksimum o godzinie 19 czasu Greenwich, a minimum o godzinie 4 tego czasu. Innymi słowy, prąd zależy od czasu uniwersalnego, a nie od czasu lokalnego miejsca obserwacji. Z jednego względu to nie jest tajemnicze, potwierdza to bowiem nasz pogląd, że



9.4. Typowe warunki elektryczne w czystej atmosferze

9.5. Średnie zmiany dobowe gradientu potencjału w atmosferze przy dobrej pogodzie nad oceanami (odniesione do czasu według południka Greenwich)



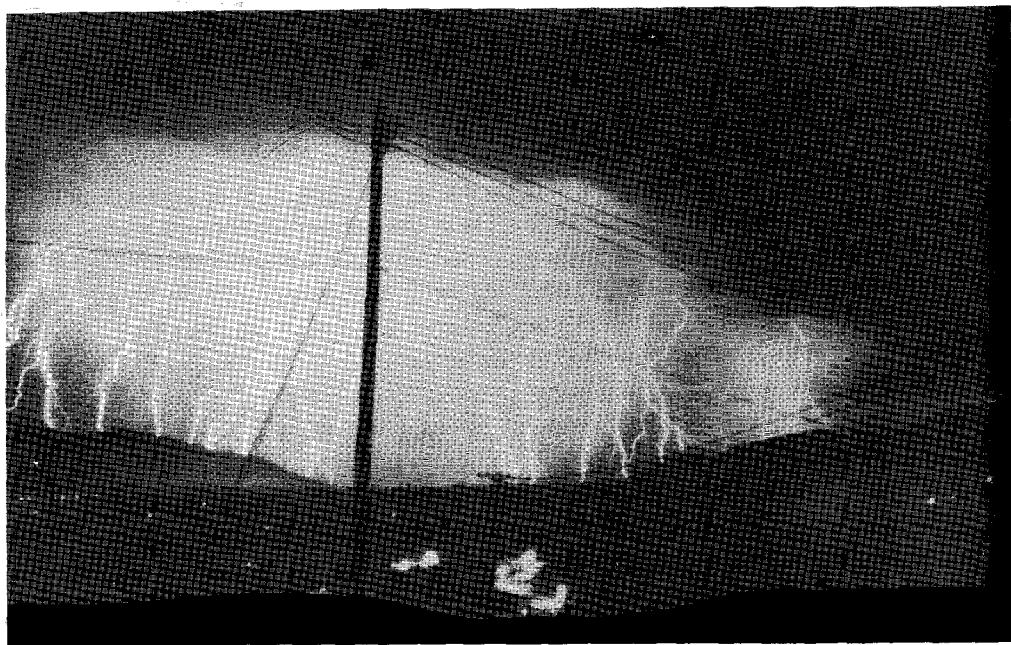
na bardzo dużych wysokościach istnieje duże przewodnictwo poziome, dzięki czemu różnica potencjałów między górną warstwą atmosfery a Ziemią nie zmienia się lokalnie. Każda zmiana potencjału będzie rozprzestrzeniać się wokół całej Ziemi, jak to rzeczywiście stwierdzają te pomiary. Wiemy teraz, że potencjał górnej warstwy atmosfery podnosi się i opada o 15% i zmiany te zależą od czasu uniwersalnego.

9-3. Pochodzenie prądów elektrycznych w atmosferze

Trzeba teraz pomówić o źródle wielkich prądów ujemnych, które muszą płynąć z górnych warstw atmosfery do powierzchni Ziemi, aby ładować ją ujemnie. Gdzie są baterie, z których czerpie się te prądy? „Baterię” taką ilustruje fot. 9.6. Przedstawia ona burzę z błyskawicami. Okazuje się, że błyskawice nie „rozładowują” potencjału, o którym mówiliśmy (jak moglibyście, może pomyśleć). Burze z błyskawicami przynoszą do Ziemi ładunki *ujemne*. Gdy piorun uderza, to jest szansa 10:1, że przynosi on do Ziemi wielką liczbę ładunków ujemnych. To właśnie burze z piorunami ładują Ziemię średnim prądem 1800 A. Rozładowanie następuje w obszarach pięknej pogody.

Na całej Ziemi występuje około 300 burz dziennie. Możemy je uważać za baterie pompujące elektryczność do górnych warstw atmosfery i utrzymujące różnicę potencjałów.

9.6. Mechanizm, który generuje atmosferyczne pole elektryczne (fotografia wykonana przez Williama L. Widmayera)



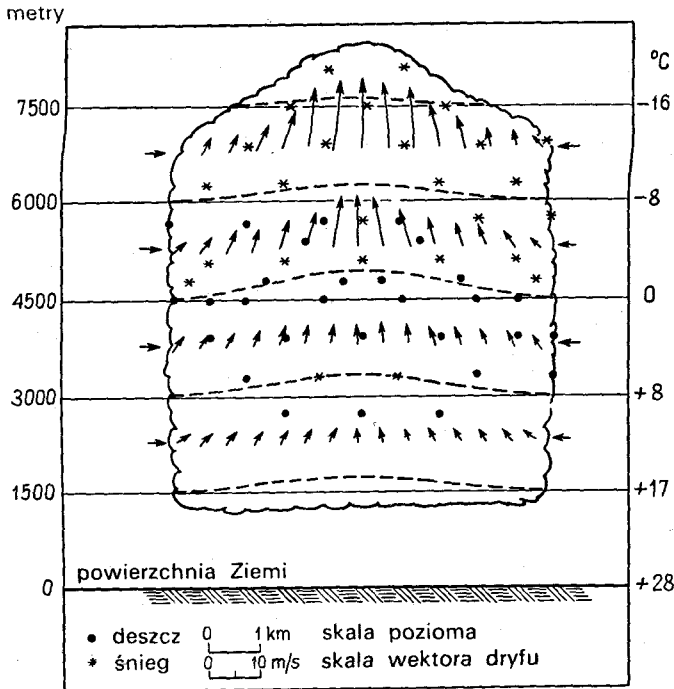
Uwzględnijcie jeszcze geografie Ziemi — występują burze popołudniowe w Brazylii, burze tropikalne w Afryce itd. Oszacowano, ile piorunów uderza w danej chwili w całą Ziemię i nie trzeba chyba mówić, że te oszacowania zgadzają się mniej więcej z pomiarami różnicy potencjałów: największa aktywność burzowa na całej Ziemi przypada na godzinę 19 czasu Greenwich. Oszacowanie liczby błyskawic jest jednak bardzo trudne i wykonano je dopiero *potem*, jak się dowiedziano, że powinna występować zmienność dobową. Takie oszacowanie jest bardzo trudne, gdyż nie mamy dostatecznej liczby obserwacji nad morzami i nad wszystkimi kontynentami, aby znać dokładną liczbę burz. Ale ci, którzy myślą, że zrobili to poprawnie, twierdzą, że szczyt aktywności burzowej przypada o godzinie 19 czasu Greenwich.

Zapoznajmy się bardziej szczegółowo ze zjawiskiem burz, aby zrozumieć ich mechanizm działania. Co się dzieje w czasie burzy? Postaramy się opisać to w takim stopniu, jaki nam jest znany. Gdy od wyidealizowanych kul z doskonałego przewodnika, znajdujących się wewnątrz innych kul, dla których wszystko tak łatwo można policzyć, przechodzimy do wspaniałego zjawiska przyrody, okazuje się, że niewiele wiemy. A jednak to jest naprawdę podniecające zjawisko. Każdy, kogo spotkała burza, był nią albo zachwycony, albo się jej bał, a w każdym razie przeżywał jakieś emocje. A tam, gdzie w zetknięciu ze zjawiskami przyrody odczuwamy jakieś emocje, stwierdzamy zwykle ich złożoność i tajemniczość. Nie będzie możliwe dokładne opisanie mechanizmu burzy, gdyż nie wiemy jeszcze na ten temat wiele. Postaramy się jednak powiedzieć choć trochę o tym, co się dzieje w czasie burzy.

9-4. Burze

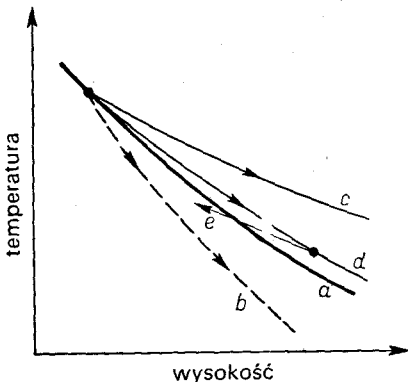
Zwykła burza składa się z wielu „komórek” położonych bardzo blisko siebie, ale od siebie prawie niezależnych. Przez „komórkę” rozumiemy tu obszar o ograniczonej powierzchni w kierunku poziomym, w którym to obszarze zachodzą wszystkie podstawowe procesy. Zwykle jest szereg komórek, jedna obok drugiej, i w każdej z nich dzieje się mniej więcej to samo, tylko w innym czasie. Rysunek 9.7 przedstawia w pewien wyidealizowany sposób szkic takiej komórki burzowej we wczesnym stadium burzy. Okazuje się, że w pewnym miejscu w powietrzu, w pewnych warunkach, które opiszemy, następuje ogólne unoszenie się powietrza z prędkościami coraz to bardziej rosnącymi wraz z wysokością. Gdy ciepłe, wilgotne powietrze z dołu unosi się, ochładza się ono i następuje kondensacja. Na rysunku 9.7 małe krzyżyki oznaczają śnieg, a kropki — deszcz. Ze względu na to, że prądy wstępujące są dostatecznie duże, a kropki dostatecznie małe, ani śnieg, ani deszcz nie spadają jeszcze w tym stadium. To jest dopiero stadium początkowe, a nie prawdziwa burza, w tym sensie, że przy ziemi jeszcze się nic nie dzieje. W tym samym czasie, gdy ciepłe powietrze wznosi się, następuje napływ powietrza z boków. Jest to ważny punkt w naszej analizie, na który przez wiele lat nie zwracano uwagi. Tak więc do góry wznosi się nie tylko powietrze z dołu, ale także pewna ilość powietrza z boków.

Dlaczego powietrze tak się wznosi? Wiecie, że im wyżej, tym powietrze jest chłodniejsze. Słońce nagrzewa ziemię, a para wodna w wyższych warstwach atmosfery wypromienio-



9.7. Komórka burzowa we wczesnym stadium rozwoju (według US Department of Commerce Weather Bureau Report, czerwiec 1949)

9.8. Temperatura atmosfery. *a* - Atmosfera statyczna, *b* - adiabaticzne ochładzanie suchego powietrza, *c* - adiabaticzne ochładzanie wilgotnego powietrza, *d* - wilgotne powietrze z domieszką otaczającego powietrza



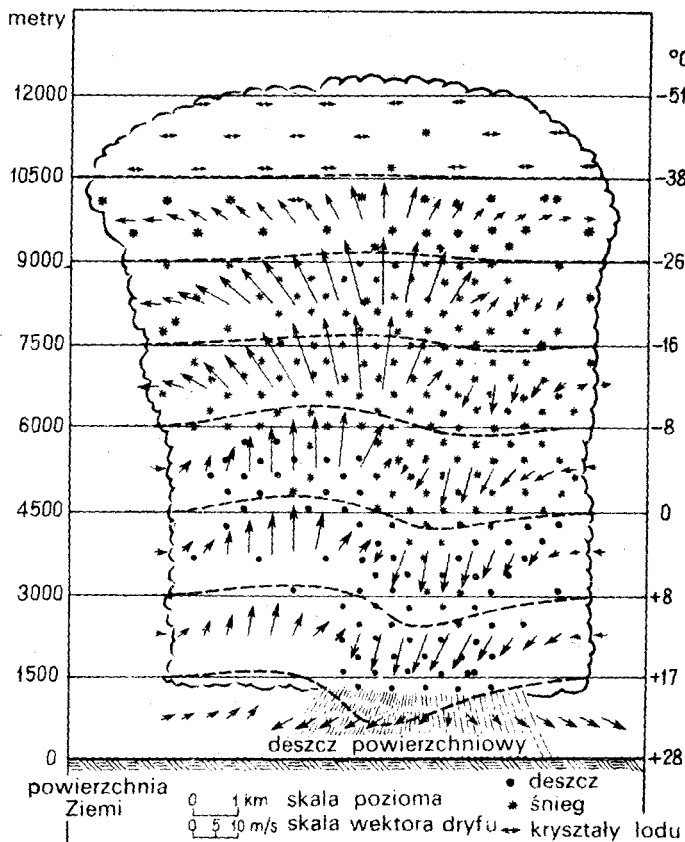
wuje ciepło, dlatego na dużych wysokościach powietrze jest zimne, nawet bardzo zimne, podczas gdy niżej jest zupełnie ciepłe. Moglibyście powiedzieć: „To jest bardzo proste. Ciepłe powietrze jest lżejsze niż zimne. Taka kombinacja jest mechanicznie niestabilna i ciepłe powietrze wznosi się do góry”. Oczywiście, jeśli na różnych wysokościach panują różne temperatury, powietrze jest *termodynamicznie niestabilne*. Gdyby pozostawić powietrze samo sobie nieskończenie długo, miałyby wszędzie temperaturę jednokową. Powietrze jednak nie jest pozostawione samo sobie — stale świeci słońce (w ciągu dnia). Nie jest to więc problem równowagi termodynamicznej, lecz równowagi *mechanicznej*.

Zróbmy wykres temperatury powietrza w zależności od wysokości (rys. 9.8). W normalnych warunkach temperatura będzie spadała wraz z rosnącą wysokością i uzyskamy krzywą *a*. Jakżeż więc atmosfera może być stabilna? Dlaczego gorące powietrze z dołu nie wznosi się po prostu ku górze? Gdyby powietrze unosiło się do góry, jego ciśnienie malałoby. Gdybyśmy teraz wzięli pod uwagę jakąś porcję wznoszącego się powietrza, to stwierdzilibyśmy, że rozpręża się ono adiabatycznie. (Ciepło ani nie wypływałoby, ani nie wpływało, gdyż w tak dużych rozmiarach, z jakimi mamy tu do czynienia, nie ma czasu na przepływ ciepła.) Tak więc ta porcja powietrza ochładzałaby się przy wznoszeniu. Taki proces adiabatyczny dawałby zależność temperatury od wysokości przedstawioną krzywą *b* na rys. 9.8. Powietrze, które wzniosło się z dołu, byłoby *chłodniejsze* niż otoczenie, w które weszło. Nie ma więc powodu, aby gorące powietrze z dolnych warstw wznosiło się ku górze. Gdyby ono się wznosiło, ochładzałoby się do niższej temperatury niż temperatura powietrza będącego już w górze, stawałoby się od niego cięższe i wobec tego miałoby tendencję do opadania na dół. W piękny pogodny dzień, kiedy wilgotność powietrza jest nieduża, temperatura spada wraz z rosnącą wysokością na ogół wolniej, niż na to wskazuje krzywa *c*. Powietrze jest w trwałej równowadze mechanicznej.

Gdy jednak wznosząca się porcja powietrza zawierać będzie dużo pary wodnej, jej krzywa ochładzania adiabatycznego będzie inna. W miarę jak powietrze rozpręża się i ochładza, zawarta w nim para wodna kondensuje się, a kondensująca się woda uwalnia ciepło. Wilgotne powietrze nie ochładza się dlatego tak silnie, jak powietrze suche. Gdy powietrze wilgotniejsze niż przeciętnie zaczyna się wznosić, jego temperatura zmienia się zgodnie z krzywą *c* z rys. 9.8. Ochłodzi się ono nieco, ale będzie jeszcze cieplejsze niż otaczające powietrze na danej wysokości. Gdy gorące wilgotne powietrze zaczyna wskutek jakiejś przyczyny wznosić się, jest zawsze lżejsze i cieplejsze od powietrza otaczającego je i dlatego będzie się nadal wznosić aż do bardzo dużych wysokości. To jest właśnie mechanizm, który powoduje, że powietrze w komórkach burzowych wznosi się.

Przez wiele lat w ten prosty sposób tłumaczono zachowanie się komórek burzowych. Później jednak pomiary wykazały, że temperatura chmur na różnych wysokościach nie jest tak wysoka, jakby na to wskazywała krzywa *c*. Przyczyna tkwi w tym, że gdy „bańka” wilgotnego powietrza idzie do góry, wchłania nieco otaczającego powietrza i dzięki temu się ochładza. Krzywa zależności temperatury od wysokości wygląda raczej jak krzywa *d*, która leży znacznie bliżej pierwotnej krzywej *a* niż krzywa *c*.

Gdy rozpocznie się już opisany wyżej proces konwekcyjny, przekrój komórki burzowej wygląda jak na rys. 9.9. Mamy już tak zwaną „dojrzałą” burzę. W tym stadium istnieje bardzo szybki prąd wstępujący, sięgający wysokości 10000 m, a nawet 15000 m i wyżej. Górna część komórki, zawierająca skondensowane kropelki wody, wznosi się wysoko ponad ławicę chmur, unoszona w górę z szybkością ponad 90 km/h. Gdy unoszona w górę para wodna kondensuje się, tworzy małe kropelki wody, które szybko ochładzają się do temperatur poniżej 0°C. Powinny zamarzać, nie zamarzają jednak natychmiast, gdyż są „przechłodzone”. Wodę i inne ciecze można ochłodzić znacznie poniżej ich punktów zamarzania, jeśli nie ma w nich zarodków krystalizacji. Kropla wody zamarznie w kawałek lodu tylko wtedy, gdy znajduje się w niej jakieś drobne zanieczyszczenie stałe, np. małe krysztalek NaCl. Równowaga jest wtedy taka, że kropelki wody wyparowują, a kryszt-



9.9. Dojrzała komórka burzowa (według US Department of Commerce Weather Bureau Report, czerwiec 1949).

tałki lodu rosną. W pewnych warunkach będziemy więc mieli szybkie zanikanie wody i szybkie przybywanie lodu. Mogą również następować zderzenia między kroplami wody i kryształkami lodu. W zderzeniach tych przechłodzona woda przyczepia się do kryształków lodu, co powoduje jej szybką krystalizację. W pewnym stadium ekspansji chmury następuje szybka akumulacja dużych kryształków lodu.

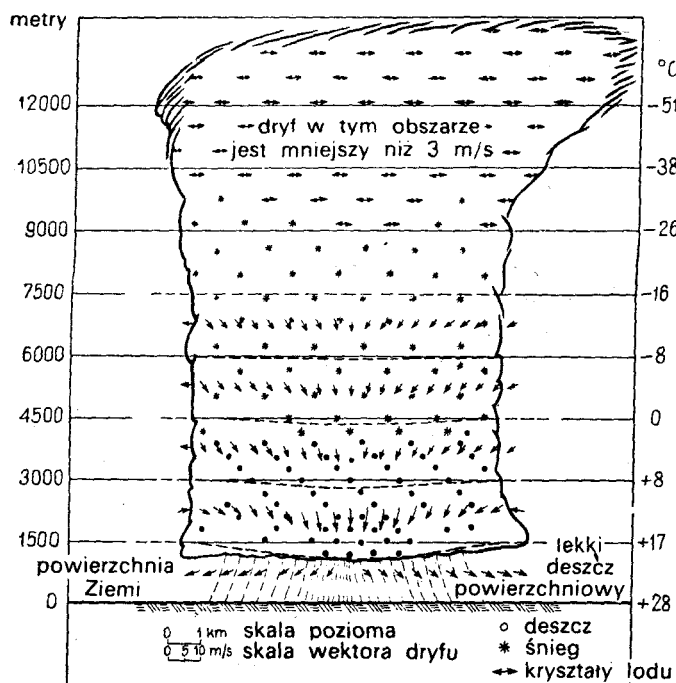
Gdy cząstki lodu stają się zbyt ciężkie, zaczynają opadać w unoszącym się powietrzu, a gdy opadają, porywają ze sobą trochę powietrza i powodują powstawanie prądu zstępującego. Jest zadziwiające, że raz rozpoczęty proces opadania powietrza trwa nadal!

Zauważcie, że krzywa *d* z rys. 9.8, przedstawiająca rzeczywisty rozkład temperatury w chmurze, ma większe nachylenie niż krzywa *c*, która się odnosi do wilgotnego powietrza. Temperatura wilgotnego powietrza spada zgodnie z krzywą *c* i może stać się *niższa* od temperatury otaczającego powietrza na małych wysokościach, jak to pokazuje krzywa *e* z rys. 9.8. W chwili, kiedy to się stanie, chmura będzie miała większą gęstość niż otoczenie i szybko opadnie. Powiecie może: „To jest przecież perpetuum mobile. Najpierw mówił

Pan, że powietrze się wznosi, a gdy już było wysoko, argumentował Pan równie dobrze, że teraz musi opadać”. To jednak nie jest perpetuum mobile. Gdy sytuacja jest niestabilna i gorące powietrze powinno się wznosić, coś musi, oczywiście, napływać na jego miejsce. Zimne powietrze, spływające na dół, będzie zastępowało gorące powietrze, ale powietrze spływające na dół *nie* jest już tym pierwotnym powietrzem. Dawniejsza teoria, zgodnie z którą dana chmura miała unosić się do góry i potem nie mieszając się z innym powietrzem spływać na dół, zawierała w sobie zagadkę. Według tej teorii prądy zstępujące mogły istnieć tylko przy jednoczesnym deszczu — postulat, w który trudno uwierzyć. Gdy tylko zdać sobie sprawę, że wznoszące się powietrze miesza się w dużym stopniu z powietrzem otaczającym, można, na podstawie termodynamiki, wykazać, że możliwe jest spływanie na dół chłodnego powietrza, które początkowo znajdowało się na dużych wysokościach. Takie jest wyjaśnienie schematu burzy z rys. 9.9.

Gdy powietrze opada na dół, ze spodu chmury burzowej zaczyna padać deszcz. Ponadto stosunkowo chłodne powietrze rozprzestrzenia się, gdy tylko dotrze do powierzchni Ziemi. Dlatego przed spadnięciem deszczu wieje lekki chłodny wiatr, który ostrzega nas o zbliżaniu się burzy. W czasie samej burzy pojawiają się nagłe i nieregularne podmuchy wiatru, w chmurze zaś powstają ogromne turbulencje itp. W zasadzie jednak mamy uniesienie powietrza, a potem spadek — ogólnie biorąc proces bardzo skomplikowany.

9.10. Późne stadium komórki burzowej (według US Department of Commerce Weather Bureau Report, czerwiec 1949).

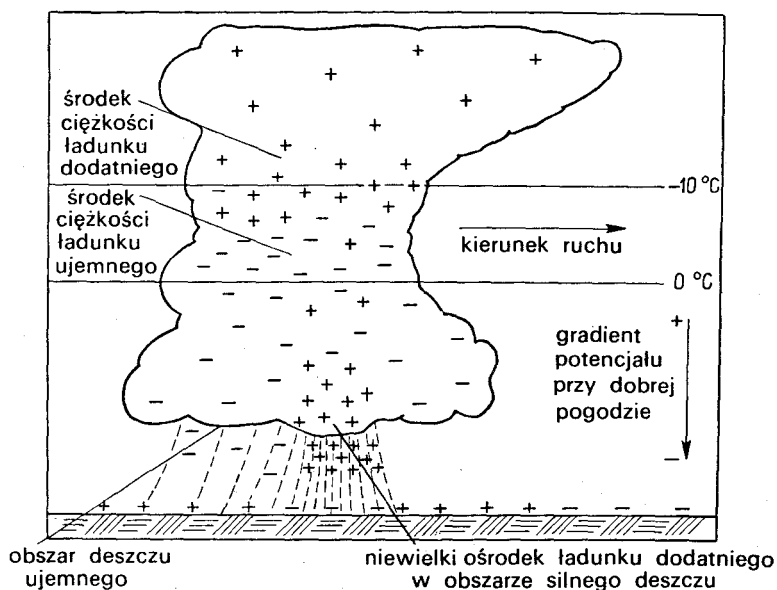


Moment, w którym zaczyna się opad, jest momentem, w którym zaczynają zstępować masy powietrza, a w istocie jest to również ten moment, kiedy powstają zjawiska elektryczne. Zanim jednak opiszemy błyskawice, możemy zakończyć tę historię omówieniem tego, co się dzieje z komórką burzową po pół godzinie, czy czasem po godzinie. Rysunek 9.10 przedstawia wygląd komórki w późnej fazie burzy. Wznoszenie się ustało, gdyż nie ma już dostatecznej ilości gorącego powietrza, aby je podtrzymywać. Opad trwa jeszcze pewien czas, aż spadną ostatnie resztki wody; wszystko się powoli uspokaja, chociaż wysoko w powietrzu pozostały małe kryształki lodu. Na dużych wysokościach wiatry wieją w różnych kierunkach, co powoduje, że wierzch chmury przybiera kształt kowadła. Komórka kończy swój żywot.

9-5. Mechanizm separacji ładunku

Omówimy teraz bardzo ważną sprawę dotyczącą elektryczności atmosferycznej, mianowicie sprawę powstawania ładunków. Z doświadczeń różnego rodzaju, między innymi wykonanych w samolotach lecących przez obszar burzy (piloci, którzy tego dokonywali — to dzielni ludzie!), wiemy, że rozkład ładunku w komórce burzowej wygląda tak, jak pokazuje to rys. 9.11. Wierzch chmury burzowej ma ładunek dodatni, a spód — ujemny, z wyjątkiem małego lokalnego obszaru dodatniego na dnie chmury, który sprawia wszystkim mnóstwo kłopotu. Zdaje się, że nikt nie wie, skąd on się tam bierze i do jakiego stop-

9.11. Rozkład ładunków elektrycznych w dojrzałej komórce burzowej (według US Department of Commerce Weather Bureau Report, czerwiec 1949)

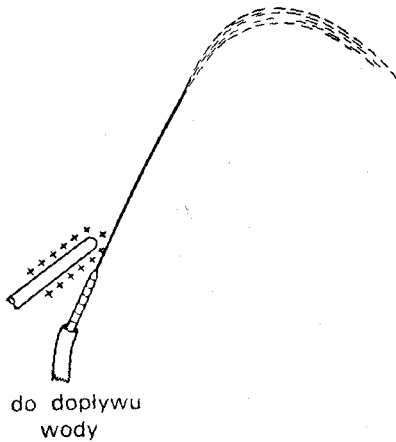


nia jest istotny — czy to jest tylko efekt wtórny opadającego deszczu dodatniego, czy też stanowi on istotną część całego mechanizmu. Wszystko byłoby dużo prostsze, gdyby go tam nie było. W każdym razie dominujący ładunek ujemny na dnie i ładunek dodatni na szczycie mają takie znaki, jakie powinna mieć bateria ładująca Ziemię ujemnie. Ładunki dodatnie znajdują się w powietrzu na wysokości 6-7 km, gdzie temperatura wynosi około -20°C , podczas gdy ładunki ujemne są na wysokości 3-4 km, gdzie temperatura zawiera się w granicach od 0 do -10°C .

Ładunek na dnie chmury jest dostatecznie duży, aby wytworzyć różnice potencjałów 20, 30 a nawet 100 milionów woltów między chmurą a Ziemią, to znaczy znacznie większą niż różnica potencjałów 0,4 miliona woltów, jaka panuje między „niebem” a Ziemią przy czystym niebie. Te olbrzymie napięcia dają przebicia przez powietrze i wywołują olbrzymie wyładowania łukowe. Gdy następuje przebicie, ładunki ujemne z dna chmury burzowej są przenoszone na Ziemię przez uderzający piorun.

Opiszemy teraz w kilku słowach charakter błyskawic. Przede wszystkim wszędzie wokoło istnieją duże różnice potencjałów i wskutek tego następują przebicia przez powietrze. Błyskawice przeskakują pomiędzy jedną częścią chmury a drugą, między dwiema chmurami albo między chmurą a Ziemią. W każdym z wyładowań błyskawicznych — takich właśnie błyskawic, jakie obserwujecie — jest przenoszony ładunek około 20 do 30 C. Nasuwa się pytanie: jak długo regeneruje się w chmurze te 20 czy 30 C zabranych przez błyskawicę? Można to stwierdzić mierząc z daleka od chmury pole elektryczne wytworzone przez moment dipolowy chmury. Pomiaru te wykazują nagły wzrost pola w momencie przeskoku błyskawicy, a następnie wykładniczy powrót do poprzedniej wartości, ze stałą czasową nieco różną dla różnych przypadków, ale o wartości zbliżonej do 5 s. Chmura burzowa po każdej błyskawicy regeneruje w ciągu 5 s swój ładunek. To bynajmniej nie znaczy, że po 5 s uderzy następny piorun, zmienia się bowiem kształt chmury i inne warunki. Pioruny uderzają raczej nieregularnie, ale jest ważne, że około 5 s trwa powrót do warunków początkowych. Zatem w „maszynie” generującej burzę płynie prąd około 4 A. Oznacza to, że model, który miałby wyjaśnić, jak burza generuje swoją elektryczność, musiałby być modelem „soczystym” — musiałoby to być wielkie, szybko działające urządzenie.

Zanim przejdziemy do dalszych rozważań, zastanówmy się nad czymś, co nieomal na pewno jest zupełnie nie związane z naszym tematem, nie mniej ciekawe, gdyż wykazuje działanie pola elektrycznego na krople wody. Powiedzieliśmy, że może to być nie związane z tematem, gdyż odnosi się to do eksperymentu, który można w laboratorium przeprowadzić ze strumieniem wody, aby wykazać silne oddziaływanie pola elektrycznego na krople wody. W chmurze burzowej nie ma strumienia wody — tam jest kondensujący się lód i krople wody. Mechanizm oddziaływań w chmurze burzowej jest więc prawdopodobnie nie związany z tym, co się dzieje w doświadczeniu, które zaraz opiszemy. Jeśli małą dyszę podłączyć do kranu z wodą i skierować ją w górę prawie pionowo, tak jak pokazuje to rys. 9.12, woda będzie wylatywała z niej wąskim strumieniem, rozpryskującym się na drobne kropelki. Gdy strumień w pobliżu dyszy wprowadzić w poprzeczne pole elektryczne (np. zbliżając do niego naładowany pręt), kształt strumienia zmieni się. W słabym polu elektrycznym strumień rozpada się na niewielką liczbę dużych kropli, a w silnym polu — na



9.12. Strumień wody z polem elektrycznym w pobliżu dyszy

wskutek odpychania. Każda kropla rozpadnie się na wiele mniejszych kropelek, z których każda będzie miała ładunek tego samego znaku — odepchną się więc one od siebie i szybko rozprzestrzeniają. Gdy pole rośnie, strumień rozdziela się na coraz to drobniejsze kropelki. Chcielibyśmy tu jedynie zwrócić uwagę na to, że w pewnych warunkach pola elektryczne mogą silnie oddziaływać na kropelki. Dokładny mechanizm tego, co dzieje się w chmurze burzowej, nie jest znany i może nie być wcale związany z tym, co opisaliśmy przed chwilą. Mówiliśmy o tym tylko dlatego, abyście zdali sobie sprawę, jak złożone zjawiska mogą tu wchodzić w grę. W rzeczywistości jeszcze nikt nie zbudował teorii opartej na tej idei.

Przedstawimy tu dwie teorie, które wyjaśniają separację ładunków w chmurze burzowej. Obie teorie zawierają myśl, że na cząstkach opadu znajdują się jakieś ładunki, a w powietrzu — ładunki znaku przeciwnego. Następnie, wskutek ruchu cząstek opadu, wody lub lodu, następuje separacja ładunku elektrycznego. Jedyny problem w tym: jak zaczyna się ładowanie kropli? Jedna ze starszych teorii nazywana jest teorią „rozpadającej się kropli”. Ktoś odkrył, że gdy kropla wody rozpada się w podmuchu wiatru na dwie części, na powierzchni wody jest ładunek dodatni, a w powietrzu ujemny. Teoria rozpadającej się kropli ma wiele braków, z których najpoważniejszy jest ten, że *znak* ładunku się nie zgadza. Poza tym w dużej liczbie burz w strefie umiarkowanej pojawiają się wprawdzie błyskawice, ale opad na dużych wysokościach jest z lodu, a *nie* z wody.

Z tego, co przed chwilą powiedzieliśmy, wynika, że gdyby można było podać przyczynę tego, że ładunek na górze kropli może być inny niż na jej dnie oraz przyczynę tego, że krople w szybkim strumieniu powietrza mogłyby się rozpadać na nierówne części — dużą

*1) Wygodny sposób obserwowania wielkości kropelek polega na podstawieniu pod opadający strumień dużej, cienkiej płyty metalowej. Większe krople robią większy hałas.

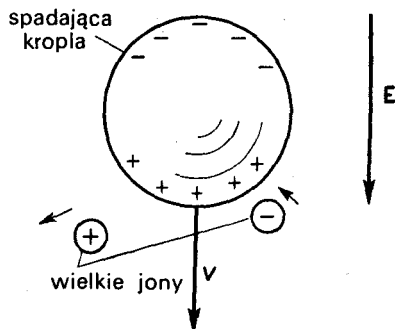
bardzo dużo drobnutkich kropelek^{*)}. W słabym polu pojawia się tendencja przeszkadzająca rozpadaniu się strumienia na kropelki. W silnym zaś polu występuje tendencja sprzyjająca rozdzieleniu na kropelki. Wyjaśnienie tych zjawisk jest prawdopodobnie następujące. Gdy strumień wody przechodzi przez słabe poprzeczne pole elektryczne, jedna jego strona ładuje się słabo dodatnio, a druga słabo ujemnie. Gdy następnie strumień rozpryskuje się, kropelki po jednej stronie mogą być naładowane dodatnio, a po drugiej — ujemnie. Kropelki będą się wobec tego przyciągać i będą miały większą tendencję do skupiania się — strumień nie będzie rozpryskiwał się tak silnie jak poprzednio. Gdy natomiast pole elektryczne jest silne, ładunek na każdej z kropelek jest większy i *sam* ładunek przejawia tendencję do rozrywania kropli

na przodzie, a małą z tyłu (ze względu na ruch przez powietrze lub ze względu na coś innego) — mielibyśmy gotową teorię (i to teorię różną od jakiegokolwiek znanej!) Wtedy bowiem, ze względu na opór powietrza, małe krople nie spadałyby tak szybko, jak duże, i uzyskalibyśmy separację ładunku. Widzicie, że można wymyślić wszelkie możliwości.

Jedną z bardziej pomysłowych teorii, pod wieloma względami bardziej zadowolającą od teorii rozpadającej się kropli, stworzył C.T.R. Wilson. Przedstawimy ją, tak jak to zrobił Wilson, w odniesieniu do kropeł wody, chociaż analogiczne rozumowanie jest słuszne i dla lodu. Przypuśćmy, że w polu elektrycznym 100 V/m spada kropla wody w kierunku ujemnie naładowanej Ziemi. Kropla będzie miała wtedy indukowany moment dipolowy: dół kropli będzie miał ładunek dodatni, a góra — ujemny, tak jak wskazuje to rys. 9.13. W powietrzu znajdują się „jądra”, o których wspominaliśmy przedtem — wielkie, wolno poruszające się jony (szybkie jony nie dają tu dużych efektów). Przypuśćmy, że spadająca kropla zbliża się do wielkiego jonu. Gdy jon jest dodatni, zostaje odepchnięty przez dodatnio naładowane dno kropli, nie przyczepia się do niej. Gdyby do jonu zbliżała się góra kropli, naładowana ujemnie, to oczywiście jon mógłby się do niej przyczepić. Ponieważ jednak kropla spada w powietrzu, istnieje w stosunku do niej dryf powietrza skierowany ku górze, który unosi ze sobą jony, jeśli tylko ich ruch przez powietrze jest dostatecznie powolny. Tak więc jony dodatnie nie mogą przyczepić się również i do góry kropli. Widzicie, że stosuje się to tylko do dużych, powoli poruszających się jonów. Tego typu jony dodatnie nie przyczepią się ani do części przedniej, ani do części tylnej spadającej kropli. Natomiast wielkie, powolne jony ujemne będą przyciągane przez zbliżającą się kroplę i przez nią chwywane. Kropla uzyska ładunek ujemny — znak ładunku został już określony przez potencjał na powierzchni Ziemi — rzeczywiście wypada tu właściwy znak. Ładunek ujemny zostanie sprowadzony przez krople na dno chmury, a jony dodatnie, których krople nie chwytają, zostaną przeniesione różnymi prądami wstępującymi do górnej części chmury. Teoria wydaje się dobra i co najmniej daje właściwy znak. Ponadto nie wymaga ona, aby w chmurze były krople wody. Dowiedzie się, ucząc się o polaryzacji dielektryków, że kawałki lodu dawałyby ten sam efekt. W polu elektrycznym tak samo miałyby na swoich końcach ładunki dodatnie lub ujemne.

Nawet ta teoria zawiera jednak pewne niejasności. Przede wszystkim całkowity ładunek przenoszony w czasie burzy jest bardzo duży, a więc wkrótce zapas wielkich jonów zostałby zużyty. Wilson i inni zmuszeni więc byli założyć, że istnieją jeszcze dodatkowe źródła wielkich jonów. Gdy tylko rozpoczyna się separacja ładunku, powstają bardzo wielkie pola elektryczne i w tych wielkich polach mogą być miejsca, gdzie powietrze zostanie zjonizowane. Jeśli znajdzie się tam jakiś duży ładunek albo jakiś mały obiekt, np. kropla, może on skoncentrować pole tak, że powstanie tak zwane „wyładowanie szcztkowe”. Gdy pole elektry-

9.13. Teoria C. T. R. Wilsona separacji ładunków w chmurze burzowej



czne będzie dostatecznie duże, powiedzmy dodatnie, elektrony będą wpadały do pola i nabierały znacznych szybkości między zderzeniami. Ich szybkości będą tak duże, że przy zderzeniu z atomami będą wyrwać z ich powłok elektrony, pozostawiając jony dodatnie. Wyrwane z atomów elektrony również nabiorą dużych szybkości i zderzą się z innymi elektronami. Powstaje więc coś w rodzaju reakcji łańcuchowej czy kaskady i następuje szybki wzrost liczby jonów. Ładunki dodatnie pozostają w pobliżu swoich pierwotnych pozycji i w ostatecznym wyniku ładunek dodatni przechodzi z punktu, w którym się pierwotnie znajdował, do obszaru leżącego naokoło tego punktu. Wtedy nie ma już, oczywiście, silnego pola i proces się zatrzymuje. Taki jest przebieg wyładowania szczotkowego. Jest możliwe, że pole elektryczne w chmurze stanie się dostatecznie silne, aby wywołać niewielkie wyładowanie szczotkowe. Można również wyobrazić sobie inne mechanizmy prowadzące do silnej jonizacji. Nikt jednak nie wie, jak to jest naprawdę. Tak więc zasadniczo pochodzenie błyskawic nie jest jeszcze dokładnie znane. Wiemy tylko, że występują one w czasie burzy. (No i wiemy, oczywiście, że z błyskawicy powstaje grzmot — z energii termicznej wyzwolonej przez piorun.)

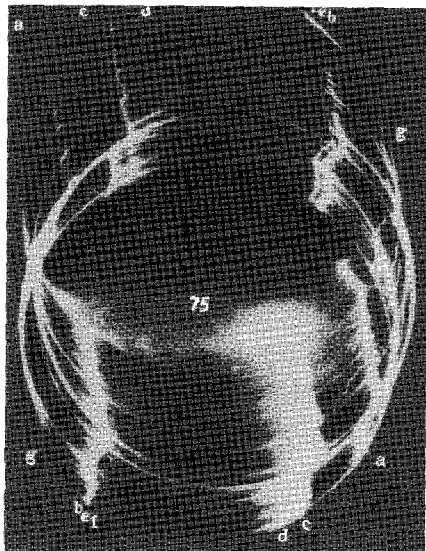
Możemy, jednak przynajmniej częściowo zrozumieć, skąd się bierze elektryczność w atmosferze. Dzięki prądom powietrza, jonom i kroplom wody na cząstkach lodu w chmurze burzowej ładunki dodatnie zostają oddzielone od ładunków ujemnych. Ładunki dodatnie zostają unoszone do szczytu chmury (patrz rys. 9.11), a ładunki ujemne są rzucane na Ziemię w uderzeniach pioruna. Ładunki dodatnie opuszczają szczyt chmury, wchodzą do górnych warstw bardziej przewodzącego powietrza i rozprzestrzeniają się dookoła całej Ziemi. W obszarach pięknej pogody ładunki dodatnie zostają powoli przenoszone z tej warstwy do Ziemi przez jony zawarte w powietrzu, jony zaś wytworzone są przez promieniowanie kosmiczne, przez morze, przez działalność człowieka. Atmosfera jest ciągle czynną maszyną elektryczną!

9-6. Błyskawica

Pierwsze dane o zjawiskach zachodzących w błyskawicach uzyskano z fotografii wykonanych kamerą przy otwartej migawce, trzymaną w rękę i poruszaną tam i z powrotem. Kamera była wycelowana w miejsce, gdzie spodziewano się błyskawicy. Pierwsze tak wykonane fotografie wykazały jasno, że błyskawice są zwykle wielokrotnymi wyładowaniami wzdłuż tej samej drogi. Później opracowano kamerę typu „Boys”, która ma *dwie* soczewki umieszczone co 180° na szybko obracającej się tarczy. Obraz utworzony przez każdą z soczewek przesuwa się po błonie fotograficznej — uzyskujemy obraz rozciągnięty w czasie. Jeśli, na przykład, wyładowanie się powtarza, uzyskamy dwa obrazy jeden obok drugiego. Porównując obrazy pochodzące od dwóch soczewek można się dowiedzieć o następstwie czasowym błysków. Rysunek 9.14 przedstawia fotografię wykonaną za pomocą kamery „Boys”.

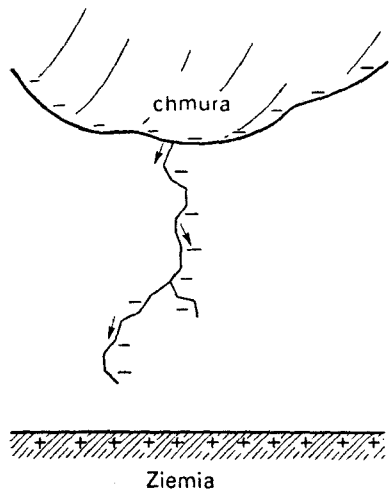
Opiszemy teraz błyskawicę. Również w tym wypadku nie wiemy dokładnie, jaki jest jej mechanizm. Podamy jakościowy opis tego, jak ona *wygląda*, ale nie będziemy wchodzić

w szczególności, *jaka* jest przyczyna zjawisk, które dostrzegamy. Opiszemy tylko zwykły przypadek chmury o ujemnie naładowanym dnie, znajdującej się nad płaskim terenem. Potencjał dna chmury jest bardziej ujemny niż potencjał Ziemi, więc ujemne elektrony będą przyspieszane w kierunku Ziemi. Oto co się dzieje. Wszystko zaczyna się od czegoś, co nazywamy „prekursorem” i co nie ma takiej jasności, jak sama błyskawica. Na fotografiach widać mały jasny punkt, który odrywa się od chmury i bardzo szybko biegnie ku Ziemi — z $\frac{1}{6}$ prędkości światła! Przebiega tylko około 50 m i zatrzymuje się. Odpoczywa około 50 μ s i znów posuwa się o krok. Potem znów się zatrzymuje i znów przebywa dalszy krok i tak dalej. Takimi krokami przebiega drogę aż do Ziemi (rys. 9.15). Przenosi on ładunki ujemne z chmury. Pełno ich jest na drodze, którą przebył. Powietrze jonizuje

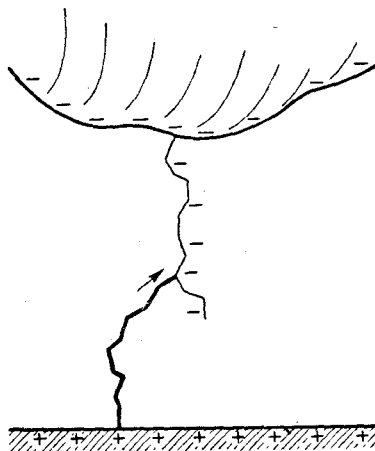


9.14. Fotografia błyskawicy wykonana za pomocą kamery „Boys” [według Schonlanda, Malana, Collensa, Proc. Roy. Soc. London, 152, (1935)]

9.15. Tworzenie się prekursora



9.16. Powracająca błyskawica przebiega drogę utworzoną przez prekursora.



się przez szybko poruszające się ładunki i na drodze, którą przebiegł prekursor, staje się przewodnikiem. W momencie gdy prekursor dotrze do powierzchni Ziemi, powstaje jakby drut łączący ją z chmurą, i pełen ładunków ujemnych. Teraz dopiero ładunek ujemny chmury może uciec. Pierwsze zdają sobie z tego sprawę elektrony na dnie prekursora. Uciekają, pozostawiając za sobą ładunki dodatnie, które mogą przyciągnąć dalsze, wyżej położone elektrony. W końcu więc ładunek ujemny z części chmury wybiegnie szybko na dół drogą wskazaną przez prekursora. Błyskawica, którą *widzicie*, biegnie od Ziemi *do góry*, tak jak wskazuje rys. 9.16. To główne, najjaśniejsze uderzenie rzeczywiście nazywa się *uderzeniem powrotnym*. Ono wytwarza bardzo jasne światło i ciepło, które powodując szybką ekspansję powietrza wywołuje grzmot.

Prąd płynący w błyskawicy wynosi w szczycie około 10000 A, a przenoszony ładunek jest równy około 20 C.

Ale na tym jeszcze nie koniec. Po pewnym czasie, a właściwie po kilku setnych sekundy, gdy zniknęło już uderzenie powrotne, biegnie na dół nowy prekursor, ale tym razem nie przystaje po drodze. Nazywany jest „ciemnym prekursorem” i zbiega na dół — od chmury aż do Ziemi — jednym skokiem. Biegnie tą samą drogą, co pierwszy prekursor, bo to jest teraz najłatwiejsza droga. Nowy prekursor, jest znowu pełen ładunków ujemnych. W momencie, kiedy dotyka powierzchni Ziemi, następuje uderzenie powrotne wprost do góry po przygotowanej przez niego drodze. Widzicie więc, że błyskawica przebiega znowu i znowu, i znowu. Czasami przebiega tylko raz lub dwa, a czasami pięć czy dziesięć razy — kiedyś nawet zaobserwowano 42 błyskawice na tym samym torze — zawsze jednak następują one bardzo szybko po sobie.

Czasami wszystko jeszcze bardziej się komplikuje. Tak na przykład prekursor po jednym ze swoich odpoczynków może rozdzielić się na *dwie* gałęzie, obie zwrócone ku powierzchni Ziemi, ale w nieco innych kierunkach (rys. 9.15). Co się dalej stanie, zależy od tego, czy jedna z gałęzi osiągnie ziemię znacznie wcześniej niż druga. Jeśli tak się stanie, jasne uderzenie powrotne (z ładunku ujemnego płynącego do ziemi) porusza się *w górę* po tej gałęzi, która pierwsza doszła do ziemi, a gdy dotrze do rozgałęzienia, wydaje się, że drugą gałęzią zaczyna sphywać *w dół* jasne wyładowanie. Dzieje się tak dlatego, że ładunek ujemny szybko odpływa i to właśnie rozjaśnia wyładowanie. Na szczycie wtórnej gałęzi zaczynają poruszać się ładunki, opróżniając kolejne jej porcje, i wydaje się, że jasne wyładowanie posuwa się po tej gałęzi w dół, wtedy gdy porusza się ono ku chmurze. Gdy jednak jedna z gałęzi osiągnie ziemię prawie jednocześnie z drugą, może się zdarzyć, że *ciemny* prekursor drugiego uderzenia przebiegnie po tej drugiej gałęzi. Wtedy zobaczycie pierwszy główny błysk w jednym miejscu, a drugi — w innym. To jest tylko pewna odmiana zasadniczego schematu.

Przedstawiony przez nas opis jest zbyt uproszczony dla obszaru bliskiego ziemi. Gdy prekursor zbliża się na odległość około 100 m od ziemi, wiadomo, że z ziemi rozpoczyna się w jego kierunku wyładowanie. Przypuszczalnie pole staje się dostatecznie duże, aby mogły zachodzić wyładowania szczotkowe. Jeśli w tym obszarze znajduje się jakiś przedmiot o ostrych kształtach, np. budynek zakończony wieżyczką, wtedy wyładowanie zaczyna się od tego ostrza i dosięga prekursora. Pioruny mają tendencję uderzania w takie właśnie ostrza.

Od bardzo dawna wiadano, że pioruny uderzają w wysokie przedmioty. Zachowała się pewna wypowiedź Artabanisa, doradcy Kserksesa. W czasie kampanii wojennej Kserksesowi, który chciał cały znany wówczas świat uzależnić od Persów, Artabanis takiej udzielił rady w sprawie ataku na Greków: „Spójrz, jak Bóg razi swymi błyskawicami zawsze większe zwierzęta i nie ścierpi, aby wzrastały one bezczelnie, małe natomiast go nie drażnią. Jakżeż podobnie jego pioruny uderzają zawsze w najwyższe domy i najwyższe drzewa.” Następnie Artabanis wyjaśnia przyczynę tego: „I tak, oczywiście, lubi On umniejszać wszystko, co się wynosi”.

Czy sądzicie, że teraz gdy już znacie prawdziwą przyczynę tego, dlaczego pioruny uderzają w najwyższe drzewa, macie większe kwalifikacje na doradcę wojskowego królów, niż miał to 2300 lat temu Artabanis? Nie wynoście się! Moglibyście jedynie doradzać w sposób mniej poetyczny niż Artabanis.

dielektryki

10-1. Stała dielektryczna

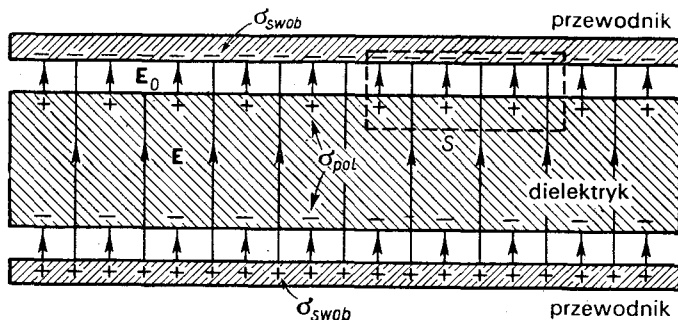
Zaczynamy teraz omawianie innych dziwnych właściwości, jakich materia nabiera pod wpływem pola elektrycznego. W jednym z poprzednich rozdziałów rozważaliśmy zachowanie się *przewodników*, w których ładunki, w oddziaływaniu z polem elektrycznym, mogą się swobodnie przesuwać tak długo, aż wewnątrz przewodnika nie będzie pola. Teraz zajmiemy się *izolatorami*, tj. materiałami, które nie przewodzą elektryczności. Można by z początku sądzić, że w tych substancjach pole elektryczne nie daje żadnego efektu. A jednak Faraday, używając bardzo prostego elektroskopu i płaskiego kondensatora, odkrył, że tak nie jest. Jego doświadczenia wykazały, że pojemność kondensatora *wzrasta*, gdy pomiędzy jego płytki włożyć izolator. Jeśli izolator wypełnia całkowicie przestrzeń między płytkami, pojemność kondensatora rośnie o czynnik κ , który zależy jedynie od natury izolatora. Substancje izolujące nazywane są także *dielektrykami*. Czynnik κ jest więc właściwością dielektryka i nosi nazwę *stałej dielektrycznej*. Stała dielektryczna próżni jest oczywiście jednością.

Nasz problem polega teraz na tym, aby wyjaśnić, dlaczego w izolatorach występuje jakiś efekt elektryczny, jeśli izolatory są rzeczywiście izolatorami i nie przewodzą elektryczności. Zaczniemy od faktu doświadczalnego, że pojemność rośnie, i postaramy się wyjaśnić, jakie zjawiska mogą tam zachodzić. Rozważmy kondensator płaski z jakimiś ładunkami na powierzchniach przewodników, powiedzmy ładunek ujemny jest na płycie górnej, a dodatni — na dolnej. Niech odległość między płytkami wynosi d , a pole powierzchni każdej z płytek będzie równe A . Jak już wykazaliśmy poprzednio, pojemność będzie równa

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad (10.1)$$

a ładunek i napięcie na kondensatorze będą związane ze sobą zależnością

$$Q = CV. \quad (10.2)$$



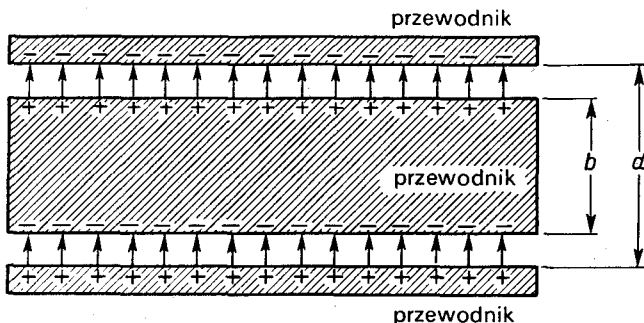
10.1. Kondensator płaski z dielektrykiem. Pokazano linie sił pola E .

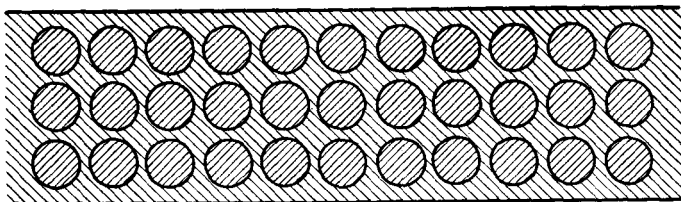
Doświadczenie pokazuje, że jeżeli wstawimy między płytki kondensatora kawałek materiału izolującego, np. licytu lub szkła, pojemność kondensatora będzie większa niż poprzednio. To oczywiście oznacza, że przy tym samym ładunku napięcie będzie mniejsze. Różnica potencjałów jest całką z pola elektrycznego między płytkami kondensatora. Musimy więc wyciągnąć wniosek, że wewnątrz kondensatora pole elektryczne ulega zmniejszeniu, mimo że ładunki na płytkach pozostają niezmienione.

Jak to się może dzieć? Według prawa Gaussa strumień pola elektrycznego jest bezpośrednio związany z ładunkiem. Rozważmy powierzchnię gaussowską S , pokazaną linią przerywaną na rys. 10.1. Ponieważ w obecności dielektryka pole elektryczne jest mniejsze, więc wypadkowy ładunek wewnątrz tej powierzchni musi być mniejszy, niż byłby, gdyby nie było tam izolatora. Jest tylko jeden możliwy wniosek, że mianowicie na powierzchni dielektryka muszą być ładunki dodatnie. Ponieważ pole jest zmniejszone, ale nie równe zero, należy przypuszczać, że ten ładunek dodatni jest mniejszy niż ładunek ujemny na przewodniku. Można więc zrozumieć zaobserwowane zjawisko, jeśli przyjmiemy, że w materiale dielektrycznym umieszczonym w polu elektrycznym pojawia się na jednej jego powierzchni ładunek dodatni, a na drugiej — ładunek ujemny.

Mogliśmy oczekiwać, że tak się stanie w przypadku przewodnika. Przypuśćmy na przykład, że mamy kondensator, w którym płytki odległe są o d i że między płytki wstawiamy

10.2. Gdy do szczeliny kondensatora płaskiego włożyć płytkę przewodzącą, indukowane ładunki redukują pole w kondensatorze do zera





10.3. Model dielektryka: małe przewodzące kule wtłoczone w wyidealizowany izolator

neutralny przewodnik o grubości b (rys. 10.2). Pole elektryczne indukuje ładunek dodatni na jego górnej powierzchni, a ujemny — na dolnej, a więc wewnątrz tego przewodnika nie ma pola. Pole w pozostałej przestrzeni między płytkami jest takie samo, jakie było przedtem, ponieważ jest ono równe gęstości powierzchniowej ładunku, podzielonej przez ϵ_0 . Jednak odległość, po której mamy całkować, aby otrzymać napięcie (różnicę potencjałów), jest zmniejszona. Napięcie będzie teraz równe

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d-b).$$

Wynikający stąd wzór na pojemność kondensatora moglibyśmy otrzymać zastępując w równaniu (10.1) odległość d odległością $(d-b)$:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d[1-(b/d)]}. \quad (10.3)$$

Pojemność kondensatora rośnie o czynnik zależny od stosunku (b/d) i mówiący, jaka część przestrzeni między płytkami jest zajęta przez przewodnik.

To, oczywiście, daje nam możliwość skonstruowania modelu tego, co się dzieje w dielektryku: w dielektryku istnieje wiele cienkich warstw przewodzących. Kłopot z takim modelem polega na tym, że ma on wyróżnioną oś, prostopadłą do warstw, podczas gdy w rzeczywistości większość dielektryków takiej osi nie ma. Możemy jednak wybrnąć z tego kłopotu, jeśli założymy, że materiał izolujący zawiera w sobie małe kule przewodzące, oddzielone od siebie obszarami izolującymi (rys. 10.3). Istnienie stałej dielektrycznej można wyjaśnić przez działanie ładunków indukowanych na każdej z kul. To jest jeden z najwcześniejszych modeli fizycznych dielektryka, użyty do wyjaśnienia zjawiska zaobserwowanego przez Faradaya. Mówiąc dokładniej, przyjęto założenie, że każdy z atomów dielektryka jest doskonałym przewodnikiem, ale izolowanym od innych. Stała dielektryczna będzie zależała od tego, jaką przestrzeń wypełniają kule przewodzące. Tego modelu jednak dzisiaj się nie stosuje.

10-2. Wektor polaryzacji \mathbf{P}

Jeśli przeprowadzimy dalej powyższą analizę, okaże się, że nie pomysł wprowadzenia obszarów doskonałego przewodnictwa i doskonałej izolacji jest tu rzeczą istotną. Każda

z małych kul działa jak dipol, którego moment jest indukowany przez pole zewnętrzne. Jedyną istotną dla zrozumienia zjawiska rzeczą jest właśnie to, że w dielektrykach indukuje się bardzo dużo małych dipoli. Czy dipole indukują się dlatego, że są tam małe kule przewodzące, czy też z innej przyczyny, jest zupełnie nieistotne.

Dlaczego pole elektryczne indukuje w atomie moment dipolowy, skoro atom nie jest przewodzącą kulą? Tę sprawę omówimy bardziej szczegółowo w następnym rozdziale, który będzie dotyczył zjawisk zachodzących wewnątrz substancji dielektrycznych. Podamy teraz jednak jeden przykład dla zilustrowania możliwego tu mechanizmu. Atom ma ładunek dodatni w jądrze, które jest otoczone ujemnymi elektronami. W polu elektrycznym jądro jest przyciągane w jedną stronę, a elektrony w drugą. Orbity lub obraz strzałek i węzłów fali elektronowej (czy też jakkolwiek inny obraz przyjęty przez mechanikę kwantową) zostaną do pewnego stopnia odkształcone (rys. 10.4). Środek ciężkości ładunku ujemnego zostanie przesunięty i nie będzie już znajdował się w tym samym miejscu, co ładunek dodatni jądra. Mówiliśmy już o takim rozkładzie ładunku. Oddziaływanie takiej obojętnej konfiguracji jest w pewnej odległości równoważne, w pierwszym przybliżeniu, oddziaływaniu małego dipola.

Sensowne wydaje się założenie, że gdy pole elektryczne nie jest zbyt wielkie, indukowany moment dipolowy jest proporcjonalny do pola. To znaczy, że małe pole przemieści ładunki tylko trochę, a duże pole znacznie więcej, proporcjonalnie do swej wartości, jeżeli tylko przemieszczenie nie stanie się zbyt duże. W dalszym ciągu tego rozdziału będziemy zakładać, że moment dipolowy jest dokładnie proporcjonalny do pola.

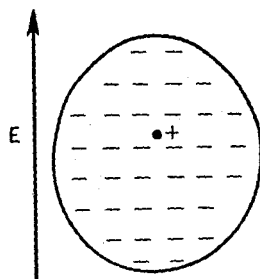
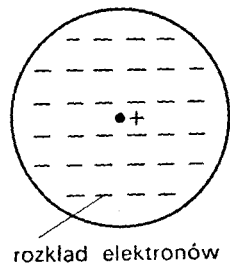
Założymy teraz, że w każdym atomie są ładunki q , rozsunięte na odległość δ , tak że moment dipolowy atomu jest równy $q\delta$ (używamy tu litery δ , gdyż literę d zarezerwowaliśmy na oznaczenie odległości między płytkami kondensatora). Jeśli w jednostce objętości jest N atomów, to *moment dipolowy na jednostkę objętości* będzie równy $Nq\delta$. Ten moment dipolowy na jednostkę objętości będzie reprezentowany przez wektor \mathbf{P} . Nie trzeba chyba mówić, że kierunek tego wektora będzie taki sam, jak poszczególnych momentów dipolowych, to jest jak kierunek rozdzielania ładunków δ :

$$\mathbf{P} = Nq\delta. \quad (10.4)$$

Wektor \mathbf{P} będzie się na ogół zmieniać w dielektryku od punktu do punktu. Jednak w każdym punkcie dielektryka wektor \mathbf{P} będzie proporcjonalny do pola elektrycznego \mathbf{E} w tym punkcie. Współczynnik proporcjonalności, który mówi nam, jak łatwo elektrony ulegają przemieszczeniu, będzie zależał do rodzaju atomów w danej substancji.

Od czego istotnie zależy ten współczynnik proporcjonalności, z jaką dokładnością jest on stały dla dużych pól

10.4. Atom w polu elektrycznym ma przemieszczony rozkład elektronów względem jądra



i co się dzieje wewnątrz różnych substancji, rozważymy nieco później. Tymczasem założymy tylko, że istnieje mechanizm, dzięki któremu jest indukowany moment dipolowy, proporcjonalny do pola elektrycznego.

10-3. Ładunki polaryzacyjne

Zobaczmy teraz, co ten model wnosi do teorii kondensatora wypełnionego dielektrykiem. Rozważmy najpierw warstwę substancji, w której istnieje pewien moment dipolowy \mathbf{P} na jednostkę objętości. Czy wytworzy on jakąś średnią gęstość ładunku? Nie, jeśli moment dipolowy \mathbf{P} jest wszędzie jednakowy. Gdyby ładunki dodatnie i ujemne, rozsunęte względem siebie, miały jednakową średnią gęstość, to samo rozsuniecie nie wywoływałoby powstania wypadkowego ładunku wewnątrz obszaru o jednostkowej objętości. Jeśli, natomiast, moment dipolowy \mathbf{P} byłby większy w jednym miejscu, a mniejszy w innym, oznaczałoby to, że do danego obszaru weszło więcej ładunków, niż z niego wyszło, i można by oczekiwać, że pojawi się jakaś przestrzenna gęstość ładunku. Zakładamy, że w kondensatorze płaskim moment dipolowy \mathbf{P} jest wszędzie jednakowy, istotne więc dla nas jest tylko to, co się dzieje na powierzchniach dielektryka. Z jednej powierzchni ładunki ujemne, elektrony, przesunęły się o efektywną odległość δ , a przysunęły się do drugiej powierzchni, odsuwając się efektywnie o odległość δ od ładunku dodatniego. Jak widać z rys. 10.5, uzyskamy gęstość powierzchniową ładunku, którą nazwiemy powierzchniowym ładunkiem polaryzacyjnym.

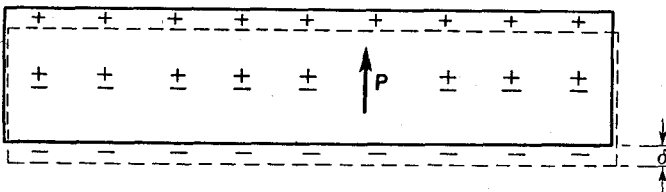
Ładunek ten można obliczyć w sposób następujący. Jeśli A jest polem powierzchni płytki, to liczba elektronów pojawiających się na powierzchni jest iloczynem A , N (N —liczba elektronów w jednostce objętości) i przesunięcia δ , o którym zakładamy, że jest prostopadłe do powierzchni. Ładunek całkowity otrzymamy mnożąc otrzymane wyrażenie przez ładunek elektronu q_e . Aby otrzymać gęstość powierzchniową ładunku polaryzacyjnego, indukowanego na powierzchni, trzeba podzielić ten iloczyn przez A . Powierzchniowa gęstość ładunku jest więc równa

$$\sigma_{\text{pol}} = Nq_e\delta,$$

a to jest po prostu równe wartości wektora polaryzacji \mathbf{P} , określonego równaniem (10.4):

$$\sigma_{\text{pol}} = P. \quad (10.5)$$

10.5. Płytkę dielektryczną w polu jednorodnym. Ładunki dodatnie są przemieszczone na odległość δ względem ładunków ujemnych.



Gęstość powierzchniowa ładunku na powierzchni dielektryka jest równa polaryzacji w jego wnętrzu. Ładunek powierzchniowy jest, oczywiście, dodatni na jednej powierzchni, a ujemny — na drugiej.

Przypuśćmy teraz, że rozważana przez nas warstwa dielektryka znajduje się między okładkami kondensatora płaskiego. Okładki kondensatora mają również ładunek powierzchniowy, który nazwiemy σ_{swob} , ponieważ ładunki mogą swobodnie przesuwać się po całym przewodniku. To jest oczywiście ten ładunek, którego dostarczymy ładując kondensator. Należy podkreślić, że ładunek σ_{pol} istnieje tylko dzięki ładunkowi swobodnemu. Rozładowując kondensator usuwamy ładunek σ_{swob} ; wtedy ładunek σ_{pol} znika nie poprzez rozładowujący drut, lecz cofa się do wnętrza dielektryka wskutek relaksacji polaryzacji wewnątrz materiału.

Możemy teraz zastosować twierdzenie Gaussa do powierzchni S z rys. 10.1. Pole elektryczne E w dielektryku równe jest całkowitej gęstości ładunku powierzchniowego podzielonej przez ϵ_0 . Jest rzeczą jasną, że gęstość ładunku σ_{swob} i σ_{pol} mają znaki przeciwne, więc

$$E = \frac{\sigma_{\text{swob}} - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0}. \quad (10.6)$$

Zauważcie, że pole E_0 między płytką metalową, a powierzchnią dielektryka jest większe niż pole E . W wyrażeniu na E_0 występuje tylko ładunek o gęstości σ_{swob} . Tutaj jednak chodzi nam o pole wewnątrz dielektryka, które jeśli dielektryk prawie całkowicie wypełnia odstęp między okładkami, jest polem w całej prawie objętości. Stosując równanie (10.5) możemy napisać

$$E = \frac{\sigma_{\text{swob}} - P}{\epsilon_0}. \quad (10.7)$$

Równanie to nic nam nie mówi o polu elektrycznym, dopóki nie znamy wektora polaryzacji \mathbf{P} . Tu jednak zakładamy, że wektor \mathbf{P} zależy od pola \mathbf{E} — w istocie, że jest proporcjonalny do \mathbf{E} . Tę proporcjonalność zapisuje się zwykle w postaci

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (10.8)$$

Stałą χ (greckie „chi”) nazywa się *podatnością elektryczną* dielektryka.

Równanie (10.7) przyjmuje więc postać:

$$E = \frac{\sigma_{\text{swob}}}{\epsilon_0} \frac{1}{(1 + \chi)}. \quad (10.9)$$

Widzimy, że pole jest zmniejszone o czynnik $1/(1 + \chi)$.

Napięcie między okładkami jest całką z pola elektrycznego. Ponieważ pole jest jednorodne, więc całka jest po prostu iloczynem pola E i odległości między płytkami d . Mamy więc

$$V = Ed = \frac{\sigma_{\text{swob}} d}{\epsilon_0 (1 + \chi)}.$$

Całkowity ładunek na kondensatorze wynosi $\sigma_{\text{swob}}A$, a więc pojemność, określona równaniem (10.2), będzie teraz równa

$$C = \frac{\epsilon_0 A(1+\chi)}{d} = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}. \quad (10.10)$$

Wyjaśniliśmy zaobserwowane fakty. Gdy przerwę kondensatora płaskiego wypełnić dielektrykiem, pojemność wzrasta o czynnik

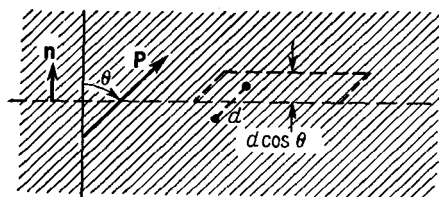
$$\kappa = 1 + \chi. \quad (10.11)$$

który jest właściwością danego dielektryka. Nasze wyjaśnienie nie jest oczywiście pełne, dopóki nie wytłumaczymy — zrobimy to nieco później — skąd się bierze polaryzacja atomów.

Zastanówmy się teraz nad czymś nieco bardziej skomplikowanym — nad sytuacją, w której polaryzacja \mathbf{P} nie wszędzie jest jednakowa. Jak wspominaliśmy poprzednio, jeśli polaryzacja nie jest stała, należy oczekiwać, że wewnątrz dielektryka pojawi się jakaś gęstość ładunku, gdyż przez część powierzchni ograniczającej obszar o małej objętości może wejść więcej ładunku, niż wyjść przez drugą jej część. W jaki sposób możemy obliczyć, ile ładunku przybyło lub ubyło w takim obszarze o małej objętości?

10.6. Ładunek przesunięty przez element pomyślanej powierzchni w dielektryku jest proporcjonalny do składowej \mathbf{P} , prostopadłej do tej powierzchni.

10.7. Niejednorodna polaryzacja \mathbf{P} może dać w wyniku wypadkowy ładunek we wnętrzu dielektryka.

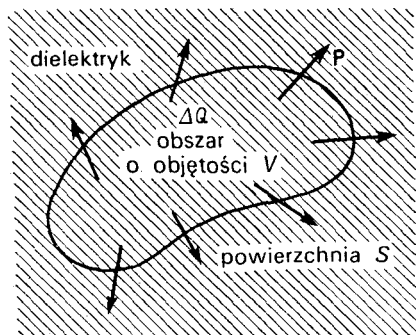


Obliczmy najpierw, ile ładunku przechodzi przez jakąś pomyślaną powierzchnię, gdy materiał jest spolaryzowany. Jeśli wektor polaryzacji \mathbf{P} jest *prostopadły* do powierzchni, to ilość ładunku, która przechodzi przez powierzchnię, równa się po prostu P razy pole powierzchni. Jeśli polaryzacja jest *styczna* do powierzchni, to oczywiście żadne ładunki przez nią nie przechodzą.

Rozumując podobnie jak poprzednio, łatwo można stwierdzić, że ładunek przesunięty przez jakiś element powierzchniowy jest proporcjonalny do *składowej* wektora \mathbf{P} , *normalnej* do powierzchni. Porównajcie rys. 10.6 z rys. 10.5. Widzimy, że równanie (10.5) należy w ogólnym przypadku napisać w postaci

$$\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}. \quad (10.12)$$

Jeśli weźmiemy jakiś pomyślany element powierzchni *wewnątrz* dielektryka, to równanie (10.12) da nam ładunek przesunięty przez



tę powierzchnię, ale nie da nam całkowitego ładunku powierzchniowego, gdyż istnieją tu równe, lecz o przeciwnych znakach przyczynki od dielektryków z obu stron powierzchni.

Przemieszczenie ładunków może jednak dać w wyniku *przestrzenną* gęstość ładunku. Całkowity ładunek przesunięty *na zewnątrz* jakiegoś obszaru trójwymiarowego V wskutek polaryzacji jest całką zewnętrzną składowej normalnej wektora \mathbf{P} po powierzchni S , która ogranicza ten obszar (patrz rys. 10.7). Równy mu nadmiarowy ładunek przeciwnego znaku pozostaje wewnątrz obszaru. Oznaczając wypadkowy ładunek wewnątrz V przez ΔQ_{pol} mamy

$$\Delta Q_{\text{pol}} = - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (10.13)$$

ΔQ_{pol} można przypisać przestrzennemu rozkładowi ładunku o gęstości ϱ_{pol} , a więc

$$\Delta Q_{\text{pol}} = \int_V \varrho_{\text{pol}} \, dV. \quad (10.14)$$

Porównując te dwa równania mamy

$$\int_V \varrho_{\text{pol}} \, dV = - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (10.15)$$

Mamy tu rodzaj twierdzenia Gaussa, które wiąże gęstość ładunku w spolaryzowanym dielektryku z wektorem polaryzacji \mathbf{P} . Widzimy, że zgadza się to z wynikiem uzyskanym dla powierzchniowego ładunku polaryzacyjnego, czyli dla dielektryka w kondensatorze płaskim. Stosując równanie (10.15) do powierzchni Gaussa z rys. 10.1, widzimy, że całka powierzchniowa daje $P \Delta A$, a ładunek wewnątrz jest równy $\sigma_{\text{pol}} \Delta A$; otrzymujemy więc znowu $\sigma = P$.

Podobnie jak prawu Gaussa w elektrostatyce, tak równaniu (10.15) możemy nadać inną postać, stosując matematyczne twierdzenie Gaussa:

$$- \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} \, dV.$$

Otrzymujemy

$$\varrho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (10.16)$$

Jeśli istnieje niejednorodna polaryzacja, to jej dywergencja daje wypadkową gęstość ładunku pojawiającego się w dielektryku. Podkreślamy, że to jest całkowicie *realna* gęstość ładunku. Ładunek ten nazywamy „ładunkiem polaryzacyjnym” tylko dlatego, aby pamiętać, w jaki sposób powstał.

10-4. Równania elektrostatyki dla pól z dielektrykami

Połączmy teraz uzyskane wyniki z teorią elektrostatyki. Podstawowym jej związkem jest równanie

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}. \quad (10.17)$$

ρ jest tutaj gęstością *wszystkich* ładunków elektrycznych. Ponieważ nie łatwo jest śledzić ładunki polaryzacyjne, więc wygodnie będzie podzielić gęstość ρ na dwie części. Znowu przez ρ_{pol} oznaczymy gęstość ładunków wynikłych z niejednorodnej polaryzacji, a przez ρ_{swob} — gęstość pozostałego ładunku. Zwykle ρ_{swob} jest gęstością ładunku, który dostarczamy na przewodnik lub też do znanych punktów w przestrzeni.

Równanie (10.17) będzie teraz miało postać:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{swob}} + \rho_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{swob}} - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

czyli

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{swob}}}{\epsilon_0}. \quad (10.18)$$

Oczywiście, równanie rotacji \mathbf{E} jest niezmienione:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.19)$$

Biorąc \mathbf{P} z równania (10.8), otrzymujemy prostszą postać równania:

$$\nabla \cdot [(1 + \chi)\mathbf{E}] = \nabla \cdot (\kappa\mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{swob}}}{\epsilon_0}. \quad (10.20)$$

To są równania elektrostatyki, gdy w polu znajdują się dielektryki. Nie mówią one, oczywiście, nic nowego, ale są w postaci wygodnej do obliczeń w przypadkach, gdy gęstość ρ_{swob} jest znana i gdy polaryzacja \mathbf{P} jest proporcjonalna do \mathbf{E} .

Zauważcie, że nie wyciągnęliśmy stałej dielektrycznej κ przed znak dywergencji, gdyż stała ta może nie mieć wszędzie jednakowej wartości. Gdy stała dielektryczna jest wszędzie jednakowa, można ją wynieść przed znak dywergencji i równania będą wtedy po prostu równaniami elektrostatyki z gęstością ładunku ρ_{swob} podzieloną przez κ . W postaci przez nas podanej równania stosują się do przypadku ogólnego, kiedy różne dielektryki mogą znajdować się w różnych miejscach w polu. Wtedy równania te mogą być bardzo trudne do rozwiązania.

Jest pewna sprawa o znaczeniu historycznym, o której trzeba wspomnieć. We wczesnej fazie badań nad elektrycznością nie był znany mechanizm atomowy polaryzacji i nie doceniano istnienia gęstości ρ_{pol} . Uważano, że gęstość ρ_{swob} jest całkowitą gęstością ładunku. Aby móc napisać równania Maxwella w prostszej postaci, wprowadzono nowy wektor \mathbf{D} , zdefiniowany jako kombinacja liniowa wektorów \mathbf{E} i \mathbf{P} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (10.21)$$

W wyniku tego równania (10.18) i (10.19) pisano w pozornie bardzo prostej postaci:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{swob}}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.22)$$

Jak można je rozwiązać? Tylko wtedy, gdy dane jest trzecie równanie przedstawiające związek między \mathbf{D} i \mathbf{E} . Jeśli słuszne jest równanie (10.8), to związek ten dany jest równaniem:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi)\mathbf{E} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (10.23)$$

Równanie to zapisywano zwykle jako

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (10.24)$$

gdzie ε jest znowu nową stałą, opisującą właściwości dielektryczne substancji. Nazywa się ją „przenikalnością” (Teraz widzicie, dlaczego mamy ε_0 w naszych równaniach — to jest „przenikalność pustej przestrzeni”). Oczywiście

$$\varepsilon = \kappa \varepsilon_0 = (1 + \chi) \varepsilon_0. \quad (10.25)$$

Obecnie stoimy na innym stanowisku, mianowicie, że prostsze są równania w próżni i gdy bierzemy pod uwagę wszystkie ładunki, bez względu na ich pochodzenie, równania są zawsze poprawne. Jeśli oddzielamy część ładunków albo dla wygody, albo dlatego, że nie chcemy szczegółowo analizować sytuacji, możemy, jeśli chcemy, napisać nasze równania w jakiegokolwiek dogodnej postaci.

Trzeba podkreślić jeszcze jedną rzecz. Równanie takie jak $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ jest próbą opisanie właściwości materii. Materia jednak ma nadzwyczaj skomplikowaną naturę i takie równanie nie jest w rzeczywistości poprawne. Jeśli na przykład pole \mathbf{E} staje się bardzo duże, pole \mathbf{D} nie jest już do niego proporcjonalne. Dla niektórych substancji już przy stosunkowo małych polach pole \mathbf{D} przestaje być proporcjonalne do pola \mathbf{E} . Również współczynnik proporcjonalności może nie być stały — może zależeć od tego, jak szybko zmienia się pole \mathbf{E} . Dlatego taki rodzaj równania jest tylko pewnym przybliżeniem, podobnie jak prawo Hooke’a. To nie może być ani głębokie, ani podstawowe równanie. Natomiast nasze podstawowe równania dla \mathbf{E} , (10.17) i (10.19), reprezentują nasze najgłębsze i kompletne zrozumienie elektrostatyki.

10-5. Pola i siły w dielektrykach

Udowodnimy teraz pewne raczej ogólne twierdzenia elektrostatyki dla przypadku, gdy w polu elektrycznym znajdują się dielektryki. Wiemy, że pojemność kondensatora płaskiego, gdy wypełnić go dielektrykiem, rośnie o pewien określony czynnik. Możemy pokazać, że to jest prawdziwe dla kondensatora *dowolnego* kształtu, jeżeli cały obszar w sąsiedztwie dwóch przewodników jest wypełniony jednorodnym liniowym dielektrykiem. Gdy nie ma dielektryka, równania, które trzeba rozwiązać, mają postać

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{Q_{\text{swob}}}{\varepsilon_0} \quad \text{oraz} \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0,$$

gdy natomiast dielektryk jest, pierwsze z tych równań ulega zmianie. Mamy teraz równania

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \frac{Q_{\text{swob}}}{\varepsilon_0} \quad \text{oraz} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.26)$$

Ponieważ przyjmujemy, że κ jest wszędzie jednakowe, ostatnie dwa równania możemy napisać w postaci:

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \frac{Q_{\text{swob}}}{\varepsilon_0} \quad \text{oraz} \quad \nabla \times (\kappa \mathbf{E}) = 0. \quad (10.27)$$

Mamy więc takie same równania dla κE i dla E_0 . Rozwiązaniem tego układu jest $\kappa E = E_0$. Mówiąc inaczej, gdy jest dielektryk, pole ma wszędzie wartość κ razy mniejszą niż w przypadku, gdy nie było dielektryka. Ponieważ różnica potencjałów równa jest całce liniowej z pola elektrycznego, więc napięcie jest mniejsze tyle samo razy. Przyjmowaliśmy, że ładunek na elektrodach kondensatora jest taki sam w obu przypadkach, więc równanie (10.2) mówi nam, że pojemność w przypadku jednorodnego dielektryka rośnie κ razy.

Jaka siła będzie działała między dwoma naładowanymi przewodnikami w dielektryku? Weźmy pod uwagę dielektryk ciekły, który jest wszędzie jednorodny. Wiemy, że siłę można obliczyć różniczkując energię względem odpowiedniej odległości. Jeśli przewodniki mają równe, lecz przeciwnego znaku ładunki, energia jest równa $U = Q^2/2C$, gdzie C jest ich pojemnością. Stosując zasadę pracy wirtualnej, uzyskujemy przez różniczkowanie składowe siły. Tak na przykład:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right). \quad (10.28)$$

Ponieważ dielektryk powiększa pojemność κ razy, wszystkie siły będą *zmniejszone* o tyle samo razy.

Chcielibyśmy tu podkreślić jedną rzecz. To, co powiedzieliśmy, jest prawdziwe tylko wtedy, gdy dielektryk jest ciekły. Jakikolwiek ruch przewodników otoczonych stałym dielektrykiem zmieniają naprężenia mechaniczne dielektryka i zmieniają jego właściwości elektryczne oraz powodują pewne zmiany energii mechanicznej w dielektryku. Ruch przewodników w cieczy nie powoduje zmian cieczy. Ciecz przesuwa się w inne miejsce, ale jej właściwości elektryczne pozostają niezmienione.

Wiele starych podręczników elektryczności rozpoczyna wykład od „podstawowego” prawa, że siła między dwoma ładunkami jest równa

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \kappa r^2}; \quad (10.29)$$

jest to całkiem niezadowolający punkt widzenia. Po pierwsze – to nie jest w ogólnym przypadku prawdziwe, a tylko prawdziwe dla świata wypełnionego cieczą. Po drugie – κ w tym równaniu ma być stałą, co dla większości substancji jest tylko w przybliżeniu prawdziwe. O wiele lepiej jest zacząć od prawa Coulomba dla ładunków w *próżni*. Prawo to jest zawsze słuszne (dla ładunków stacjonarnych).

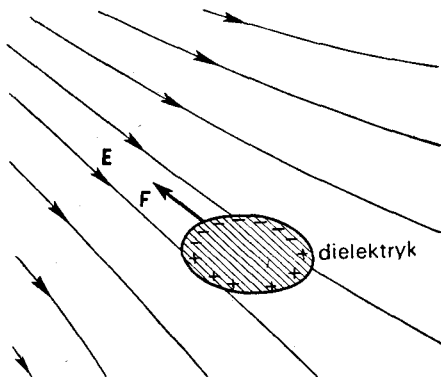
Co się dzieje w ciele stałym? To jest bardzo trudny problem, który nie został rozwiązany, gdyż jest, w pewnym sensie, nieokreślony. Gdy wprowadzacie ładunki do środka stałego dielektryka, powstają różne rodzaje ciśnień i naprężeń. Nie możecie posługiwać się zasadą pracy wirtualnej nie uwzględniając również energii mechanicznej potrzebnej do ściśnięcia ciała stałego, wtedy jednak podanie jednoznacznego sposobu rozróżnienia między siłami elektrycznymi a siłami mechanicznymi pochodzącymi od samej substancji byłoby bardzo trudne. Na szczęście, nikomu w rzeczywistości nie jest potrzebna odpowiedź na to pytanie. Czasami ktoś chce wiedzieć, jakie są naprężenia w ciele stałym, a to można obliczyć. Jest to jednak o wiele bardziej skomplikowane niż prosty wynik, jaki otrzymujemy dla cieczy.

W teorii dielektryków zadziwiająco skomplikowany jest problem, dlaczego naładowane ciała chwytają małe kawałki dielektryka. Jeśli poczeszecie się w suchy dzień, to grzebień będzie chwytł małe skrawki papieru. Jeśli tylko powierzchownie zastanowicie się nad tym, to wyda się wam, że grzebień prawdopodobnie ma ładunek przeciwnego znaku niż papier. Ale papier jest początkowo elektrycznie obojętny. Papier nie ma żadnego ładunku wypadkowego, a mimo to jest przyciągany. To prawda, że czasami papier przyskoczy do grzebienia, a potem odpadnie, odpychany natychmiast, gdy tylko dotknie grzebienia. Wynika to oczywiście stąd, że papier dotykając grzebienia chwytą trochę ładunków ujemnych, a wtedy jednakowe ładunki odpychają się. Ale to nie jest odpowiedź na nasze początkowe pytanie: dlaczego najpierw papier zbliżył się do grzebienia?

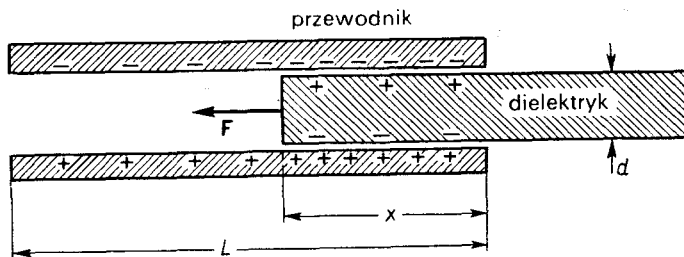
Szukając odpowiedzi trzeba wziąć pod uwagę polaryzację, jaka następuje w dielektryku, gdy umieścić go w polu elektrycznym. Powstają wówczas ładunki polaryzacyjne obu znaków; ładunki te są przyciągane lub odpychane przez grzebień. W rezultacie jednak występuje przyciąganie, gdyż pole bliżej grzebienia jest silniejsze niż pole dalej od niego — grzebień nie jest nieskończoną warstwą. Jego ładunek jest zlokalizowany. Obojętny elektrycznie papier wewnątrz kondensatora płaskiego nie będzie przyciągany do żadnej z płytek. Niejednorodność pola jest zasadniczym elementem mechanizmu przyciągania.

Jak wskazuje rys. 10.8, dielektryk jest zawsze wciągany z obszaru słabego pola do obszaru silniejszego. Istotnie, można wykazać, że dla małych ciał siła jest proporcjonalna do gradientu kwadratu pola elektrycznego. Dlaczego zależy ona od kwadratu pola? Indukowane ładunki polaryzacyjne są proporcjonalne do pola, a dla danych ładunków siła jest proporcjonalna do pola. Jednak, jak już wspomnieliśmy, *wypadkowa* siła będzie występowała tylko wtedy, gdy kwadrat pola

10.8. Przedmiot dielektryczny w polu niejednorodnym podlega sile skierowanej ku obszarom większego natężenia pola.



10.9. Siłę działającą na warstwę dielektryka w kondensatorze płasko-równoległym można obliczyć stosując zasadę zachowania energii.



będzie zmieniać się od punktu do punktu. Tak więc siła jest proporcjonalna do gradientu kwadratu pola. Współczynnik proporcjonalności zależy, między innymi, od stałej dielektrycznej ciała oraz od jego rozmiarów i kształtu.

Istnieje pewien związek z tym problemem, w którym zupełnie dokładnie można obliczyć siłę działającą na dielektryk. Jeśli weźmiemy kondensator płaski ze sztabką dielektryczną wsuniętą tylko częściowo (rys. 10.9), wystąpi siła, starająca się wciągnąć sztabkę do środka. Szczegółowe przeanalizowanie tej siły jest raczej skomplikowane. Związana jest ona z niejednorodnościami pola na brzegach dielektryka i na brzegach okładek kondensatora. Jeśli jednak nie będziemy wchodzić w szczegóły, a po prostu zastosujemy zasadę zachowania energii, będziemy mogli łatwo obliczyć tę siłę. Znajdziemy ją na podstawie poprzednio przez nas wyprowadzonego wzoru. Równanie (10.28) jest równoważne wyrażeniu:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} = + \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (10.30)$$

Musimy tylko znaleźć, jak zmienia się pojemność kondensatora przy zmianie położenia sztabki dielektrycznej.

Niech całkowitą długością okładek kondensatora będzie L , ich szerokością — W , ich odstępem, a jednocześnie grubością dielektryka — d , a głębokością, na którą został wsunięty dielektryk — x . Pojemność kondensatora równa jest stosunkowi całkowitego ładunku swobodnego na płytkach do panującej między nimi różnicy potencjałów. Wiemy, że dla danego napięcia V gęstość ładunku powierzchniowego ładunku swobodnego jest równa $\kappa \epsilon_0 V/d$, więc całkowity ładunek na płytkach wynosi

$$Q = \frac{\kappa \epsilon_0 V}{d} xW + \frac{\epsilon_0 V}{d} (L-x)W,$$

skąd otrzymujemy pojemność

$$C = \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa x + L - x). \quad (10.31)$$

Wstawiając zależność (10.31) do równania (10.30) otrzymujemy

$$F_x = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa - 1). \quad (10.32)$$

To równanie nie jest specjalnie użyteczne, chyba że chcemy znaleźć siłę w takich właśnie warunkach. Chcieliśmy tu tylko pokazać, że można skorzystać z zasady zachowania energii, aby uniknąć ogromnych komplikacji w wyznaczaniu sił działających na dielektryki.

Nasze rozważania nad teorią dielektryków dotyczyły tylko zjawisk elektrycznych przy założeniu, że polaryzacja materiału jest proporcjonalna do pola elektrycznego. Dlaczego taka proporcjonalność występuje, może być z punktu widzenia fizyki bardzo ciekawe. Gdy tylko zrozumiemy z punktu widzenia struktury atomowej pochodzenie stałej dielektrycznej, będziemy mogli wyzyskać pomiary stałych dielektrycznych w różnych warunkach do uzyskania szczegółowych informacji o strukturze atomowej czy cząsteczkowej. O tym będziemy jeszcze mówić w następnym rozdziale.

 wewnątrz dielektryków

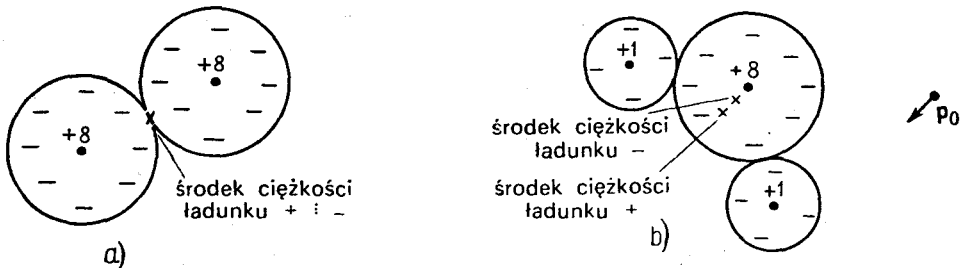
11-1. Dipole cząsteczkowe

W rozdziale tym będziemy się zastanawiać, dlaczego tak się dzieje, że pewne substancje są dielektrykami. W poprzednim rozdziale powiedzieliśmy, że można zrozumieć właściwości układów elektrycznych zawierających dielektryki, jeśli przyjąć, że pole elektryczne przyłożone do dielektryka indukuje w atomach moment dipolowy. W szczególności, jeśli pole elektryczne E indukuje średni na jednostkę objętości moment dipolowy P , to stała dielektryczna κ dana jest zależnością

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E}. \quad (11.1)$$

Mówiliśmy już o zastosowaniu tego równania. Teraz rozważymy mechanizm, dzięki któremu powstaje polaryzacja, gdy wewnątrz materiału jest pole elektryczne. Zaczniemy

11.1. a. Cząsteczka tlenu o zerowym momencie dipolowym. b. Cząsteczka wody ma trwały moment dipolowy p_0 .



od możliwie najprostszego przykładu — polaryzacji gazów. Ale nawet w gazach natrafiamy na komplikacje: istnieją dwa typy gazów. Cząsteczki niektórych gazów, takich jak tlen, które mają symetryczną parę atomów, nie mają własnego momentu dipolowego. Natomiast cząsteczki innych gazów, np. pary wodnej (w której atomy wodoru i tlenu ułożone są niesymetrycznie) mają w sobie trwałe elektryczny moment dipolowy. Jak już mówiliśmy w rozdz. 6 i 7, w cząsteczce pary wodnej atomy wodoru mają średni ładunek dodatni, a atomy tlenu — ujemny. Ponieważ środek ciężkości ładunku ujemnego nie przypada w tym samym miejscu co środek ciężkości ładunku dodatniego, całkowity rozkład ładunku cząsteczki ma moment dipolowy. Taką cząsteczkę nazywamy cząsteczką *polarną*. W tlenie, ze względu na symetrię cząsteczki, środek ciężkości ładunków dodatnich przypada w tym samym miejscu co środek ciężkości ładunków ujemnych, jest to więc cząsteczka *niepolarna*. Staje się jednak ona dipolem, gdy umieścić ją w polu elektrycznym. Te dwa rodzaje cząsteczek są naszkicowane na rys. 11.1.

11-2. Polaryzacja elektronowa*)

Najpierw zajmiemy się polaryzacją cząsteczek niepolarnych. Możemy zacząć od najprostszego przypadku gazu jednoatomowego (np. helu). Gdy atom takiego gazu znajduje się w polu elektrycznym, elektrony odciągane są przez pole w jednym kierunku, a jądro — w drugim (rys. 10.4). Chociaż atomy są bardzo sztywne wobec sił elektrycznych, jakie możemy w doświadczeniach przyłożyć z zewnątrz, powstaje jednak małe wypadkowe przemieszczenie środków ciężkości ładunków i zostaje indukowany moment dipolowy. Dla małych pól przemieszczenie, a więc i moment dipolowy są proporcjonalne do pola elektrycznego. Przemieszczenie rozkładu elektronów, które wywołuje tego rodzaju indukowany moment dipolowy, nazywamy *polaryzacją elektronową*.

Omawialiśmy już wpływ pola elektrycznego na atom, kiedy w rozdz. 31 tomu I (cz. 2) przedstawialiśmy teorię współczynnika załamania. Jeśli pomyślicie chwilę, to stanie się dla was jasne, że musimy teraz zrobić zupełnie to samo, co robiliśmy wtedy. Teraz jednak obchodzą nas tylko pola nie zmieniające się w czasie, podczas gdy współczynnik załamania zależał od pól zmiennych w czasie.

W rozdziale 31 tomu I (cz. 2) zakładaliśmy, że gdy atom znajduje się w oscylującym polu elektrycznym, środek ładunku elektronów musi spełniać równanie

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2x = q_e E. \quad (11.2)$$

Pierwszy wyraz tego równania jest iloczynem masy elektronu i jego przyspieszenia, drugi zaś wyraz przedstawia siłę dążącą do przywrócenia równowagi, a prawa strona równania przedstawia siłę pochodzącą od zewnętrznego pola elektrycznego. Jeśli pole elektryczne zmienia się z częstością ω , to rozwiązaniem równania (11.2) będzie

*) Porównaj: Tom I, cz. 2, rozdz. 31 (*Skąd się bierze współczynnik załamania*).

$$x = \frac{q_e E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (11.3)$$

przy czym rezonans wystąpi dla $\omega = \omega_0$. Poprzednio interpretowaliśmy to rozwiązanie mówiąc, że ω_0 jest częstością, przy której następuje absorpcja światła (w obszarze widzialnym albo w nadfiolecie, zależnie od atomu). Teraz jednak interesuje nas tylko przypadek pola stałego, tzn. gdy $\omega = 0$. Możemy więc pominąć wyraz zawierający przyspieszenie we wzorze (11.2). Przemieszczenie będzie wtedy równe

$$x = \frac{q_e E}{m\omega_0^2}. \quad (11.4)$$

Zatem moment dipolowy p pojedynczego atomu jest równy

$$p = q_e x = \frac{q_e^2 E}{m\omega_0^2}. \quad (11.5)$$

W tej teorii moment dipolowy p jest istotnie proporcjonalny do pola elektrycznego. Pisze się zwykle:

$$\mathbf{p} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (11.6)$$

(ε_0 występuje tu znowu ze względów historycznych.) Stała α nosi nazwę polaryzowalności atomu i ma wymiar L^3 . Jest ona miarą tego, z jaką łatwością pole elektryczne indukuje moment dipolowy w atomie. Porównując wzory (11.5) i (11.6) mamy

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2} = \frac{4\pi e^2}{m\omega_0^2}. \quad (11.7)$$

Jeśli w jednostce objętości jest N atomów, to moment dipolowy na jednostkę objętości (polaryzacja P) dany jest równaniem

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (11.8)$$

Ze wzorów (11.1) i (11.8) otrzymujemy

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = N\alpha \quad (11.9)$$

lub — wstawiając wartość α z równania (11.7) —

$$\kappa - 1 = \frac{4\pi N e^2}{m\omega_0^2}. \quad (11.10)$$

Na podstawie równania (11.9) możemy przewidzieć, że stała dielektryczna różnych gazów powinna zależeć od gęstości gazu i od częstości ω_0 jego absorpcji optycznej.

Nasz wzór jest, oczywiście, tylko bardzo grubym przybliżeniem, gdyż w równaniu (11.2) przyjęliśmy model, który ignoruje komplikacje mechaniki kwantowej. Przyjęliśmy, na przykład, że atom ma tylko jedną częstość rezonansową, podczas gdy w rzeczywistości ma ich wiele. Aby obliczyć poprawnie polaryzowalność α atomów, trzeba w pełni oprzeć się na teorii kwantowej, jednak ujęcie klasyczne daje nam zupełnie sensowne oszacowanie.

Zobaczmy, czy uda się nam uzyskać dobry rząd wielkości stałej dielektrycznej jakiejś substancji. Spróbujmy na przykład zrobić oszacowanie dla wodoru. Obliczyliśmy kiedyś [rozd. 38 tomu I (cz. 2)], że energia potrzebna do zjonizowania atomu wodoru jest w przybliżeniu równa

$$E \approx \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2}. \quad (11.11)$$

W celu oszacowania częstości własnej ω_0 możemy przyjąć, że energia ta jest równa $\hbar\omega_0$ – energii oscylatora atomowego o częstości własnej ω_0 . Otrzymujemy

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^3}.$$

Jeśli teraz wstawimy tę wartość ω_0 do równania (11.7), polaryzowalność atomu będzie równa

$$\alpha \approx 16\pi \left[\frac{\hbar^2}{me^2} \right]^3. \quad (11.12)$$

Wielkość (\hbar^2/me^2) jest promieniem orbity stanu podstawowego atomu Bohra [patrz rozdz. 38 tomu I (cz. 2)] i równa się 0,528 Å. W gazie w warunkach normalnych (ciśnienie 1 atm, temperatura 0° C) znajduje się $2,96 \cdot 10^{19}$ atomów w 1 cm³. Z równania (11.9) otrzymujemy zatem

$$\kappa \approx 1 + (2,96 \cdot 10^{19}) 16\pi (0,528 \cdot 10^{-8})^3 = 1,00020. \quad (11.13)$$

Znaleziona doświadczalnie wartość stałej dielektrycznej wodoru gazowego wynosi

$$\kappa_{\text{dośw}} = 1,00026.$$

Widzimy, że nasza teoria jest w przybliżeniu słuszna. Trudno oczekiwać lepszej zgodności z doświadczeniem, gdyż pomiary przeprowadza się w normalnym wodorze, który ma cząsteczki dwuatomowe, a nie jednoatomowe. Nie byłoby niczym dziwnym, gdyby polaryzacja atomów w cząsteczce nie była dokładnie taka sama, jak oddzielnych atomów. Efekt cząsteczkowy nie jest jednak w rzeczywistości tak duży. Dokładne kwantowomechaniczne obliczenia polaryzowalności α dla atomów wodoru dają wartość około 12% większą niż daje równanie (11.12) (zamiast 16π występuje tam 18π), a zatem przewidują wartość stałej dielektrycznej nieco bliższą wartości doświadczalnej. W każdym razie jest rzeczą jasną, że nasz model dielektryka jest zupełnie niezły.

Innym sprawdzeniem naszej teorii jest zastosowanie równania (11.12) do atomów, które mają wyższą częstość pobudzenia. Tak na przykład energia potrzebna do wyrwania elektronu z atomu helu równa jest pracy potrzebnej do przesunięcia elektronu poprzez różnicę potencjałów 24,5 V, podczas gdy dla wodoru wystarcza energia potrzebna do przesunięcia elektronu poprzez różnicę potencjałów 13,5 V. Możemy więc oczekiwać, że częstość absorpcji ω_0 dla helu będzie około dwukrotnie większa niż dla wodoru, a κ – czterokrotnie mniejsza. Oczekujemy, że

$$\kappa_{\text{helu}} = 1,000050.$$

Wartością znaną doświadczalnie jest

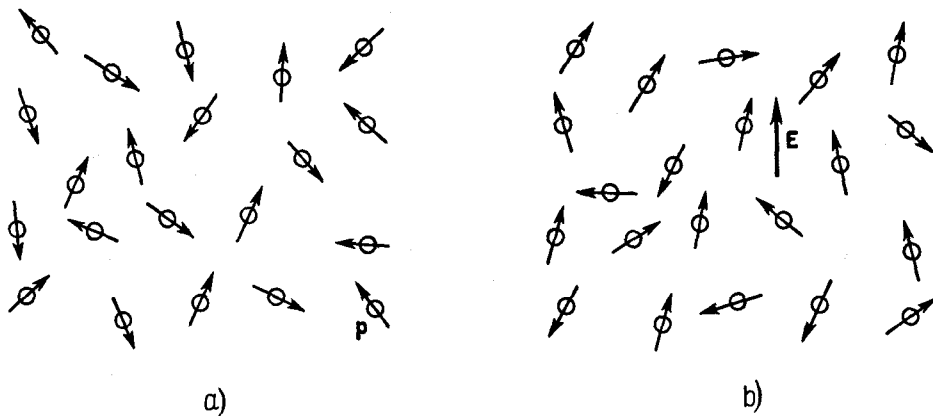
$$\chi_{\text{helu}} = 1,000068.$$

Widzicie więc, że nasze grube oszacowania dają zupełnie dobre wartości. Zrozumieliśmy zatem naturę stałej dielektrycznej gazu niepolarnego, ale tylko jakościowo, gdyż nie zastosowaliśmy jeszcze poprawnej teorii atomowej ruchów elektronów w atomie.

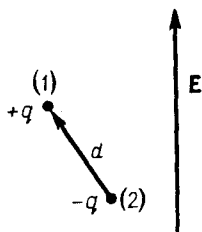
11-3. Cząsteczki polarne; orientacja polaryzacji *)

Przeprowadzimy teraz rozważania nad cząsteczką, która ma trwały moment dipolowy p_0 , np. nad cząsteczką wody. Gdy nie ma pola elektrycznego, poszczególne dipole skierowane są we wszystkich przypadkowych kierunkach, wypadkowy moment w jednostce objętości jest więc równy zero. Gdy przyłożymy pole elektryczne, dzieją się dwie rzeczy. Po pierwsze — indukowany jest dodatkowy moment dipolowy ze względu na siły działające na elektrony; ta część daje nam akurat taką samą polaryzację elektronową, jaką otrzymaliśmy dla cząsteczek niepolarnych. Przy bardzo dokładnych obliczeniach trzeba, oczywiście, ten efekt brać pod uwagę, ale my tymczasem go pominiemy — można go zawsze dodać na końcu. Po drugie — pole elektryczne stara się uporządkować poszczególne dipole, aby wytworzyć wypadkowy moment w jednostce objętości. Gdyby ustawić wszystkie dipole w gazie w jednym kierunku, otrzymałoby się bardzo dużą polaryzację, ale to się nie zdarza. W zwykłych temperaturach i polach elektrycznych zderzenia cząsteczek w ich ruchu termicznym przeszkadzają w porządkowaniu się. Jednak następuje pewne wypadkowe uporządkowanie i powstaje pewna polaryzacja (patrz rys. 11.2). Polaryzację tę

11.2. a. W gazie utworzonym z cząsteczek polarnych momenty poszczególnych cząsteczek są skierowane przypadkowo i średni moment w małym obszarze jest równy zero. b. W polu elektrycznym następuje pewne średnie uporządkowanie cząsteczek.



*) Porównaj: Tom I, cz. 2, rozdz. 40 (*Zasady mechaniki statystycznej*).



można obliczyć metodami mechaniki statystycznej, które opisaliśmy w rozdz. 40 tomu I (cz. 2).

Aby można było zastosować tę metodę, trzeba znać energię dipola w polu elektrycznym. Rozważmy dipol o momencie \mathbf{p}_0 , znajdujący się w polu elektrycznym (rys. 11.3). Energia ładunku dodatniego jest równa $q\varphi(1)$, a energia ładunku ujemnego równa jest $-q\varphi(2)$. Energią dipola będzie więc

$$U = q\varphi(1) - q\varphi(2) = q\mathbf{d} \cdot \nabla\varphi,$$

czyli

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E} = -p_0 E \cos \theta, \quad (11.14)$$

gdzie θ jest kątem między wektorami \mathbf{p}_0 i \mathbf{E} . Jak należało oczekiwać, energia jest mniejsza, gdy dipole są ustawione wzdłuż pola.

Obliczmy teraz, stosując metody mechaniki statystycznej, jakie jest uporządkowanie. Wiemy z rozdz. 40 tomu I (cz. 2), że w stanie równowagi termicznej względna liczba cząsteczek o energii potencjalnej U jest proporcjonalna do

$$e^{-U/kT}, \quad (11.15)$$

gdzie $U(x, y, z)$ jest energią potencjalną wyrażoną w postaci funkcji położenia. Na podstawie tego samego co wtedy rozumowania, stosując równanie (11.14) wyrażające energię potencjalną jako funkcję kąta, możemy dojść do wniosku, że liczba cząsteczek w *jednostkowym kącie bryłowym*, odchylonych o kąt θ od kierunku wektora pola elektrycznego, jest proporcjonalna do $e^{-U/kT}$. Tę liczbę cząsteczek oznaczamy przez $n(\theta)$. Mamy wtedy

$$n(\theta) = n_0 \exp \frac{+p_0 E \cos \theta}{kT}. \quad (11.16)$$

Dla zwykłych temperatur i pól wykładnik jest mały, możemy więc przybliżyć funkcję $n(\theta)$ przez rozwinięcie funkcji wykładniczej w szereg:

$$n(\theta) = n_0 \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{kT} \right). \quad (11.17)$$

Współczynnik n_0 możemy znaleźć całkując wyrażenie (11.17) po wszystkich kątach. W wyniku otrzymamy po prostu N — liczbę cząsteczek w jednostce objętości. Średnia wartość $\cos \theta$ w pełnym kącie jest równa zero, więc całka równa się czynnikowi n_0 , pomnożonemu przez pełny kąt bryłowy 4π . Otrzymujemy

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}. \quad (11.18)$$

Z równania (11.17) wynika, że więcej cząsteczek będzie miało moment dipolowy zorientowany zgodnie z polem ($\cos \theta = 1$) niż przeciwnie do pola ($\cos \theta = -1$). Tak więc w każ-

dym obszarze o małej objętości, zawierającym dużo cząsteczek, wystąpi pewien wypadkowy moment dipolowy na jednostkę objętości, tj. polaryzacja P . Aby znaleźć polaryzację P , musimy obliczyć sumę wektorową wszystkich momentów cząsteczkowych w jednostce objętości. Ponieważ wiemy, że wynik będzie zgodny co do kierunku i co do zwrotu z polem E , więc możemy po prostu sumować składowe w kierunku wektora E (suma składowych prostopadłych do wektora E będzie równa zero):

$$P = \sum_{\text{jednostka objętości}} p_0 \cos \theta_i.$$

Sumę tę możemy wyznaczyć całkując po rozkładzie kątowym. Kąt bryłowy zawarty między stożkami θ i $\theta + d\theta$ jest równy $2\pi \sin \theta d\theta$, więc

$$P = \int_0^\pi n(\theta) p_0 \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (11.19)$$

Wstawiając wartość $n(\theta)$ z równania (11.17), otrzymamy

$$P = -\frac{N}{2} \int_0^\pi \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta \right) p_0 \cos \theta d(\cos \theta),$$

co łatwo już jest scałkować. Otrzymujemy

$$P = \frac{N p_0^2 E}{3kT}. \quad (11.20)$$

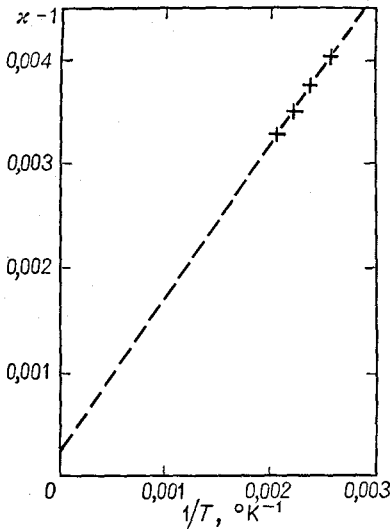
Polaryzacja jest proporcjonalna do pola E , tak jak zwykle dla dielektryków. Również, jak należało tego oczekiwać, polaryzacja jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury, gdyż w wyższych temperaturach wskutek zderzeń następuje więcej odchyśleń od uporządkowania. Tę zależność od $1/T$ nazywa się prawem Curie. Trwały moment dipolowy p_0 występuje w kwadracie, gdyż w danym polu elektrycznym siła porządkująca zależy od p_0 , a średni moment wytworzony przez uporządkowanie jest znowu proporcjonalny do p_0 . Średni indukowany moment jest więc proporcjonalny do p_0^2 .

Zobaczmy teraz, w jakim stopniu równanie (11.20) zgadza się z doświadczeniem. Weźmy przykładowo parę wodną. Ponieważ nie znamy p_0 , nie możemy obliczyć P bezpośrednio, ale równanie (11.20) mówi że $\kappa - 1$ powinno się zmieniać odwrotnie proporcjonalnie do temperatury, a to już możemy sprawdzić.

Z równania (11.20) otrzymujemy

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{N p_0^2}{3 \epsilon_0 kT}; \quad (11.21)$$

$(\kappa - 1)$ zmienia się więc wprost proporcjonalnie do gęstości N , a odwrotnie proporcjonalnie do temperatury bezwzględnej. Stałą dielektryczną mierzono w różnych ciśnieniach i temperaturach, dobieranych tak, aby liczba cząsteczek w jednostce objętości pozostawała



11.4. Wyniki pomiarów stałej dielektrycznej pary wodnej w różnych temperaturach.

zmianami pola. Natomiast polaryzowalność elektronowa pozostaje stała aż do częstości optycznych, ze względu na znacznie mniejszą bezwładność elektronów.

11-4. Pola elektryczne we wnękach dielektryka

Zajmiemy się teraz ciekawym, ale skomplikowanym zagadnieniem stałej dielektrycznej substancji w fazie ciekłej. Weźmy na przykład ciekły hel lub ciekły azot lub inną substancję niepolarną. Nadal spodziewamy się polaryzacji elektronowej. W substancji w fazie ciekłej polaryzacja \mathbf{P} może być duża, więc polaryzacja atomów znajdujących się w bliskim otoczeniu jakiegoś danego atomu będzie miała wpływ na pole elektryczne na niego działające. Rodzi się pytanie; jakie pole elektryczne działa na pojedynczy atom?

Przypuśćmy, że między płytkami kondensatora znajduje się ciecz. Jeśli płytki będą naładowane, wytworzą pole elektryczne w cieczy. Ale w poszczególnych atomach znajdują się ładunki, które również wytwarzają pole i całkowite pole \mathbf{E} jest sumą obu tych pól. Rzeczywiste pole elektryczne zmienia się w cieczy bardzo, bardzo szybko od punktu do punktu. Jest ono bardzo duże wewnątrz atomów — szczególnie tuż obok jądra — a stosunkowo małe pomiędzy atomami. Różnica potencjałów między płytkami równa jest całce liniowej z tego całkowitego pola. Jeśli zignorujemy zmiany na drobnych ziarnach, możemy mówić o *średnim* polu elektrycznym E , które jest po prostu równe V/d (to jest

*) Sänger, Steiger i Gächter, „Helvetica Physica Acta” 5, 200 (1932).

stała*). Zauważcie, że gdyby pomiary były przeprowadzane w stałym ciśnieniu, liczba cząsteczek w jednostce objętości malałaby liniowo wraz z rosnącą temperaturą, a wtedy $(\kappa-1)$ zmieniałoby się jak T^{-2} , a nie jak T^{-1} . Rysunek 11.4 przedstawia wyniki doświadczalne obserwacji zmian $(\kappa-1)$ jako funkcję temperatury. Punkty doświadczalne zgadzają się dobrze z zależnością przewidzianą równaniem (11.21).

Jest jeszcze jedna cecha charakterystyczna stałej dielektrycznej cząsteczek polarnych, mianowicie jej zmienność wraz z częstością przykadanego pola elektrycznego. Ze względu na moment bezwładności cząsteczek musi upłynąć pewien czas, zanim ciężkie cząsteczki obróć się w kierunku pola. Jeśli więc będziemy stosować częstości w dziedzinie mikrofalowej lub jeszcze wyższe, to przyczynę od trwałego momentu dipolowego do stałej dielektrycznej zacznie spadać, gdyż cząsteczki nie będą mogły nadążyć za

pole, które stosowaliśmy w poprzednim rozdziale). Możemy traktować to pole jako średnie po przestrzeni zawierającej wiele atomów.

Pomyślcie może, że „średni” atom w „średnim” położeniu czuje to średnie pole. To nie jest jednak takie proste. Możemy to pokazać rozważając, co się dzieje, jeśli w dielektryku znajdują się różnego kształtu wydrążenia. Przypuśćmy, na przykład, że wycinamy w spolaryzowanym dielektryku szczelinę zorientowaną równoległe do pola elektrycznego (rys. 11.5a). Ponieważ wiemy, że $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, więc całka liniowa z wektora \mathbf{E} po krzywej Γ , która biegnie tak, jak pokazuje rys. 11.5b, powinna się równać zeru. Pole wewnątrz szczeliny musi dawać przyczynek, który po prostu znosi się z polem zewnętrznym. Dlatego pole \mathbf{E}_0 panujące istotnie w środku długiej, cienkiej szczeliny jest równe \mathbf{E} , średniemu polu elektrycznemu w dielektryku.

Weźmy teraz inną szczelinę, prostopadłą do pola \mathbf{E} (rys. 11.5c). W tym przypadku pole \mathbf{E}_0 w szczelinie nie jest takie samo jak pole \mathbf{E} , ponieważ na powierzchniach pojawiają się ładunki polaryzacyjne. Jeśli zastosujemy twierdzenie Gaussa do powierzchni S , pokazanej na rys. 11.5d, stwierdzimy, że pole \mathbf{E}_0 w szczelinie dane jest równaniem

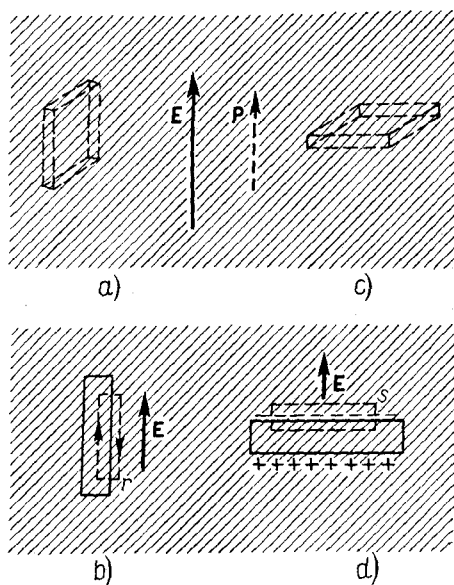
$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}, \quad (11.22)$$

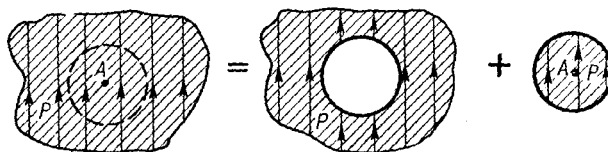
gdzie \mathbf{E} jest znowu polem elektrycznym w dielektryku. (Powierzchnia Gaussa zawiera powierzchniowy ładunek polaryzacyjny $\sigma_{\text{pol}} = P$.) Wspominaliśmy w rozdz. 10, że pole $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ jest często oznaczane symbolem \mathbf{D} ; $\epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \mathbf{D}_0$ jest właśnie polem \mathbf{D} w dielektryku.

We wczesnym okresie historii fizyki, kiedy sądzono, że jest bardzo ważne, by każdą wielkość definiować przez bezpośredni pomiar, fizycy byli zachwyceni, że mogą zdefiniować to, co rozumeli przez pola \mathbf{E} i \mathbf{D} w dielektryku, bez potrzeby „czołgania się” między atomami. Średnie pole \mathbf{E} jest liczbowo równe polu \mathbf{E}_0 , jakie można by zmierzyć w szczelinie wyciętej równoległe do pola, a pole \mathbf{D} mogłoby być zmierzone przez znalezienie pola \mathbf{E}_0 w szczelinie wyciętej prostopadle do pola. Ale nikt nigdy nie mierzy ich, w każdym razie w ten sposób, więc pozostało to czystą abstrakcją.

Dla większości cieczy, które nie mają zbyt skomplikowanej struktury, można oczekiwać, że średnio biorąc atom, otoczony innymi atomami, znajduje się w czymś, co z dobrym przybliżeniem można uważać za wydrążenie kuliste. Zapytamy więc: „Jakie będzie pole w wydrążeniu kulistym?” W znalezieniu od-

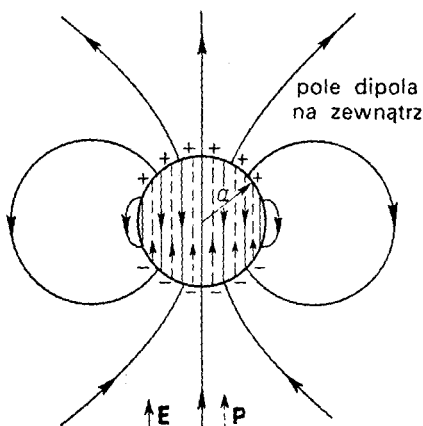
11.5. Pole elektryczne w szczelinie wyciętej w dielektryku zależy od kształtu i od orientacji szczeliny.





11.6. Pole w dowolnym punkcie A w dielektryku można traktować jako sumę pola w kulistej dziurze i pola pochodzącego od kulki, mającej rozmiary tej dziury.

11.7. Pole elektryczne jednorodnie spolaryzowanej kuli



powiedzi pomoże nam spostrzeżenie, że wycinając (w myśli) wydrążenie w jednorodnie spolaryzowanym dielektryku usuwamy po prostu kulkę sporządzoną z tego dielektryka. (Musimy sobie wyobrazić, że zanim zaczniemy wycinać dziurę, polaryzacja zostanie „zamrożona”).

Z zasady superpozycji wynika jednak, że pole wewnątrz dielektryka, zanim została usunięta kulka, było sumą pól pochodzących od wszystkich ładunków na zewnątrz obszaru kulistego i pól pochodzących od ładunków wewnątrz kulki. Jeśli przez E określimy pole w jednorodnym dielektryku, to możemy napisać

$$E = E_{\text{dziury}} + E_{\text{kulki}}, \quad (11.23)$$

gdzie E_{dziury} jest polem w wydrążeniu, a E_{kulki} jest polem wewnątrz kulki jednorodnie spolaryzowanej (patrz rys. 11.6). Pola pochodzące od jednorodnie spolaryzowanej kuli pokazano na rys. 11.7. Pole elektryczne wewnątrz kulki jest jednorodne i równe

$$E_{\text{kulki}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.24)$$

Stosując następnie równanie (11.23) otrzymujemy

$$E_{\text{dziury}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.25)$$

Pole elektryczne we wnętrzu kulistej jest więc większe niż średnie pole o $P/3\epsilon_0$. (Wnęka kulista daje pole, którego wartość leży na $\frac{1}{3}$ pomiędzy wartościami pola w szczelinie równoległej i pola w szczelinie prostopadłej do pola zewnętrznego.)

11-5. Stała dielektryczna cieczy; równanie Clausiusa – Mossottiego

Można się spodziewać, że dla cieczy pole, które polaryzuje poszczególne atomy, ma wartość bardziej zbliżoną do E_{dziury} niż do E . Jeśli w równaniach (11.6) i (11.8) zamiast

poła powodującego polaryzację wstawimy wartość poła E_{dziury} danego równaniem (11.25) otrzymamy

$$P = Na\epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right), \quad (11.26)$$

czyli

$$P = \frac{Na}{1 - (Na/3)} \epsilon_0 E. \quad (11.27)$$

Pamiętając, że $(\kappa - 1)$ jest równe $P/\epsilon_0 E$, mamy

$$\kappa - 1 = \frac{Na}{1 - (Na/3)}, \quad (11.28)$$

co daje nam stałą dielektryczną cieczy wyrażoną poprzez polaryzowalność atomową a . Równanie to nazywamy *równaniem Clausiusa - Mossottiego*.

Gdy Na jest bardzo małe, jak to jest w przypadku gazu (gdyż gęstość N jest mała), można pominąć wyraz $Na/3$ w porównaniu z 1 i otrzymujemy nasz poprzedni wynik — równanie (11.9):

$$\kappa - 1 = Na. \quad (11.29)$$

Porównajmy równanie (11.28) z wynikami doświadczalnymi. Trzeba najpierw znaleźć gazy, dla których, na podstawie pomiarów κ , możemy obliczyć a z równania (11.29). Tak na przykład dla dwusiarczku węgla w temperaturze 0°C stała dielektryczna jest równa 1,0029, więc Na jest równe 0,0029. Gęstość gazu można łatwo obliczyć, a gęstość cieczy można znaleźć w podręcznikach. W temperaturze 20°C gęstość ciekłego CS_2 jest 381 razy większa niż gęstość gazu w 0°C . To znaczy, że N jest 381 razy większe w cieczy niż w gazie. Robiąc założenie, że podstawowa polaryzowalność atomowa dwusiarczku węgla się nie zmieni, gdy go skroplimy, otrzymujemy, że N w cieczy jest równe 381 razy 0,0029, czyli 1,11. Zauważcie, że wyraz $Na/3$ jest prawie równy 0,4, a więc nie można teraz pominąć jego wpływu na obliczenia. Z tych obliczeń wynika, że stała dielektryczna powinna być równa 2,76, co zgadza się zupełnie dobrze ze znalezioną doświadczalnie wartością 2,64.

W tabeli 11.1 podajemy pewne dane doświadczalne dla różnych substancji (wzięte z książki *Handbook of Chemistry and Physics*) oraz stałe dielektryczne obliczone z równania

Tabela 11.1. Obliczenia stałych dielektrycznych cieczy na podstawie stałych dielektrycznych gazów

Substancja	Gaz			Ciecz				
	κ (dośw.)	Na	gęstość	gęstość	stosunek*)	Na	κ (oblicz.)	κ (dośw.)
CS_2	1,0029	0,0029	0,00339	1,293	381	1,11	2,76	2,64
O_2	1,000523	0,000523	0,00143	1,19	832	0,435	1,509	1,507
CCl_4	1,0030	0,0030	0,00489	1,59	325	0,977	2,45	2,24
A	1,000545	0,000545	0,00178	1,44	810	0,441	1,517	1,54

*) Stosunek = gęstość cieczy/gęstość gazu.

(11.28) w sposób wyżej podany. Zgodność między wartościami teoretycznymi a doświadczalnymi jest dla argonu i tlenu jeszcze lepsza niż dla CS_2 , natomiast gorsza dla czterochloru węgla. Wyniki uzyskane z równania (11.28) są ogólnie biorąc zupełnie dobre.

Nasze równanie (11.28) jest słuszne tylko dla *elektronowej* polaryzacji w cieczach. Nie jest ono słuszne dla cząsteczek polarnych, takich jak H_2O . Jeśli przeprowadzimy te same obliczenia dla wody, otrzymamy na Na wartość 13,2, co oznacza, że stała dielektryczna tej cieczy jest *ujemna*, podczas gdy znaleziona doświadczalnie wartość κ wynosi 80. Problem polega tu na odpowiednim traktowaniu dipoli trwałych i właściwą drogę postępowania wskazał tu Onsager. Nie mamy teraz czasu, żeby się tym zajmować, ale jeśli was to interesuje, sprawy te są omówione w książce Kittela, *Wstęp do fizyki ciała stałego**).

11-6. Dielektryki stałe

Zajmiemy się teraz ciałami stałymi. Ciekawą cechą ciał stałych jest to, że mogą mieć polaryzację trwałą, która istnieje nawet wtedy, gdy nie przykładamy zewnętrznego pola elektrycznego. Przykładem może być воск, którego cząsteczki są bardzo długie i mają trwały moment dipolowy. Jeśli rozpuścicie воск i umieścicie go, dopóki jest ciekły, w silnym polu elektrycznym, momenty dipolowe częściowo się uporządkują i tak zostaną, gdy ciecz zastygnie. Materiał stały będzie miał trwałą polaryzację, która pozostanie, gdy usunąć pole. Takie ciało stałe nazywamy *elektretem*.

Elektret ma na swojej powierzchni trwałe ładunki polaryzacyjne. Jest on elektrycznym analogiem magnesu, nie jest jednak tak użyteczny, gdyż swobodne ładunki z powietrza, przyciągane do jego powierzchni, neutralizują z czasem ładunki polaryzacyjne. Elektret zostaje „rozładowany” i nie daje pól zewnętrznych.

Trwała polaryzacja wewnętrzna P zachodzi również w sposób naturalny w niektórych substancjach krystalicznych. W takich kryształach każda komórka podstawowa sieci ma identyczny trwały moment dipolowy (patrz rys. 11.8). Wszystkie dipole mają ten sam kierunek, nawet gdy nie jest przyłożone zewnętrzne pole elektryczne. W istocie taką polaryzację ma wiele kryształów o skomplikowanej budowie. Nie zauważamy tej polaryzacji, gdyż pola zewnętrzne są rozładowywane, tak jak w przypadku elektretów.

Gdy jednak te wewnętrzne momenty dipolowe kryształu ulegają zmianie, pojawia się zewnętrzne pole elektryczne, gdyż ładunki rozproszone nie mają dosyć czasu, aby się zebrać i zneutralizować ładunki polaryzacyjne. Jeśli dielektryk znajduje się w kondensatorze, ładunki swobodne są indukowane na okładkach kondensatora. Momenty dipolowe mogą się zmieniać, gdy, na przykład, dielektryk jest ogrzewany (ze względu na rozszerzalność cieplną). To zjawisko nazywamy *pirelektrycznością*. Podobnie, jeśli zmieniamy naprężenia w kryształach, na przykład gdy go zginamy, moment dipolowy może się nieco zmienić i pojawia się niewielki efekt elektryczny, nazywany *piezoelektrycznością*.

Dla kryształów, które nie mają trwałego momentu, można opracować teorię stałej

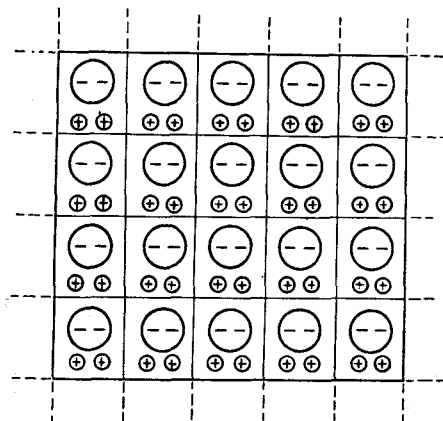
*1) Ch. Kittel, *Wstęp do fizyki ciała stałego*, PWN (tłum. z jęz. angielskiego), w druku. (Przyp. red. wyd. pol.).

dielektrycznej, opartą na podobnych podstawach jak teoria dla cieczy, uwzględniającą polaryzowalność elektronową atomów. Niektóre kryształy zawierają również obracalne dipole i ich rotacja także daje przyczynek do κ . W kryształach jonowych, takich jak NaCl, występuje też *polaryzowalność jonowa*. Kryształ składa się z szachownicy dodatnich i ujemnych jonów; pod wpływem pola elektrycznego jony różnych znaków są rozsuwane w przeciwnych kierunkach. Zachodzi wypadkowe przesunięcie dodatnich jonów względem ujemnych i przez to — polaryzacja przestrzenna. Moglibyśmy oszacować wartość polaryzowalności na podstawie znajomości sztywności kryształów soli, ale nie będziemy tu tego omawiać.

11-7. Ferroelektryczność; BaTiO₃

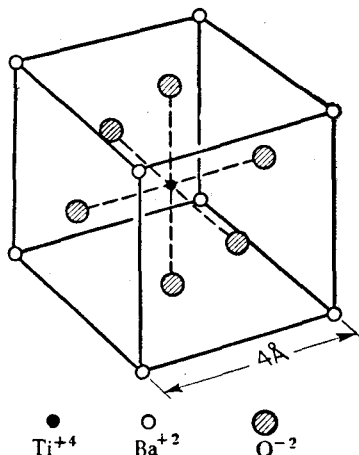
Chcemy teraz opisać pewną szczególną klasę kryształów mających, nieomal przypadkowo, trwały moment. Warunki są tak ściśle określone, że jeżeli nieco tylko podnieść temperaturę, kryształy te tracą swój trwały moment całkowicie. Z drugiej strony, w przypadku gdy są to kryształy prawie regularne, tak że ich momenty mogą być ustawiane w różnych kierunkach, możemy stwierdzić duże zmiany momentu pod wpływem zmian pola elektrycznego. Wszystkie momenty skokowo zmieniają zwrot i otrzymujemy silny efekt. Substancje odznaczające się tego rodzaju trwałym momentem nazywamy *ferroelektrykami* przez analogię do odpowiednich zjawisk ferromagnetycznych, które były najpierw odkryte w żelazie.

Pragnęlibyśmy wyjaśnić, na czym polega ferroelektryczność na przykładzie pewnego określonego materiału ferroelektrycznego. Własności ferroelektryczne mogą mieć różne pochodzenie, ale omówimy tu tylko jeden tajemniczy przypadek — tytanianu baru BaTiO₃.



11.8. Złożona sieć krystaliczna może mieć trwałą polaryzację samoistną P .

11.9. Komórka jednostkowa BaTiO₃. W rzeczywistości atomy wypełniają prawie całą przestrzeń; dla przejrzystości rysunku pokazano jedynie położenia środków.



Podstawowa komórka sieci krystalicznej tej substancji jest przedstawiona na rys. 11.9. Okazuje się, że powyżej pewnej temperatury, a mianowicie 118°C , tytanian baru jest zwykłym dielektrykiem, z ogromną stałą dielektryczną. Natomiast poniżej tej temperatury nagle pojawia się trwały moment.

Aby znaleźć wartość polaryzacji w ciele stałym, musimy najpierw określić lokalne pola elektryczne w każdej jednostkowej komórce. Powinniśmy przy tym uwzględnić pole pochodzące od samej polaryzacji, zupełnie tak samo, jak to uczyniliśmy w przypadku cieczy. Nie możemy jednak przyjąć takiego pola lokalnego, jakie działałoby w otworze kulistym, bo kryształ nie jest jednorodną cieczą. Jeżeli wykonalibyście odpowiednie obliczenia, stwierdzilibyście, że czynnik, który w równaniu (11.24) miał wartość $\frac{1}{3}$, przyjmuje teraz wartość nieco inną, ale niewiele różną od $\frac{1}{3}$. (Dla prostego kryształu regularnego jest on akurat równy $\frac{1}{3}$). Przyjmiemy więc w naszych wstępnych rozważaniach, że dla BaTiO_3 czynnik ten jest równy $\frac{1}{3}$.

Kiedy pisaliśmy równanie (11.28), mogło się wam nasunąć pytanie: co stałoby się, gdyby Na było większe od 3? Wydaje się, że α byłoby wtedy ujemne. Ale tak na pewno nie może być. Zobaczmy, co by się działo, gdybyśmy stopniowo powiększali α w danym kryształe. W miarę wzrostu α rośnie polaryzacja i wytwarza się coraz silniejsze pole lokalne. Ale silniejsze pole lokalne wzmacnia z kolei polaryzację, co znowu jeszcze bardziej wzmacnia pole lokalne. Jeżeli „wydajność” atomów jest wystarczająca, proces biegnie dalej i powstaje coś w rodzaju sprzężenia zwrotnego, prowadzącego do nieograniczonego wzrostu polaryzacji, jeśli możemy założyć, że polaryzacja każdego atomu rośnie proporcjonalnie do pola. Taka „rozbieżność” staje się możliwa, kiedy Na osiągnie wartość 3. Oczywiście, polaryzacja nie staje się nieskończenie wielka, bo proporcjonalność między indukowanym momentem a polem elektrycznym załamuje się dla dużych natężeń pola, tak że nasze wzory przestają być słuszne. Siatka zostaje „zablokowana” przy silnej samorodnej polaryzacji wewnętrznej.

W przypadku BaTiO_3 oprócz polaryzacji elektronowej występuje dosyć silna polaryzacja jonowa, co do której przyjmuje się, że pochodzi od jonów tytanu mogących się nieco poruszać w regularnej siatce. Siatka opiera się większym ruchom, więc tytan przysunawszy się cokolwiek zostaje zahamowany i zatrzymuje się. Ale komórka kryształu nabywa trwałego momentu dipolowego.

Dla większości kryształów taka sytuacja występuje w całym zakresie osiągalnych temperatur. Przypadek tytanianu baru jest szczególnie interesujący, gdyż można tu niezwykle łatwo „odblokować” jego siatkę krystaliczną, nieznacznie zmieniając Na . Wielkość tę możemy zmieniać zmieniając temperaturę, bo N maleje ze wzrostem temperatury z powodu rozszerzalności cieplnej. Poniżej temperatury krytycznej siatka jest bardzo słabo zablokowana, można więc łatwo przez przykładanie zewnętrznego pola rozmaicie ustawić polaryzację i pozornie blokować ją w różnych kierunkach.

Zobaczmy, czy potrafilibyśmy bardziej szczegółowo zanalizować, co się tu dzieje. Temperaturę, przy której Na jest dokładnie równe 3, oznaczamy przez T_c . Przy podwyższeniu temperatury N maleje nieco z powodu rozszerzania się siatki. Ponieważ rozszerzanie to jest małe, możemy powiedzieć, że w pobliżu temperatury krytycznej

$$Na = 3 - \beta(T - T_c), \quad (11.30)$$

gdzie β jest stałą o małej wartości liczbowej, tego samego rzędu wielkości co współczynnik rozszerzalności cieplnej, czyli około 10^{-5} - 10^{-6} na stopień C. Podstawiając to wyrażenie do równania (11.28) otrzymujemy

$$\kappa - 1 = \frac{3 - \beta(T - T_c)}{\beta(T - T_c)/3}.$$

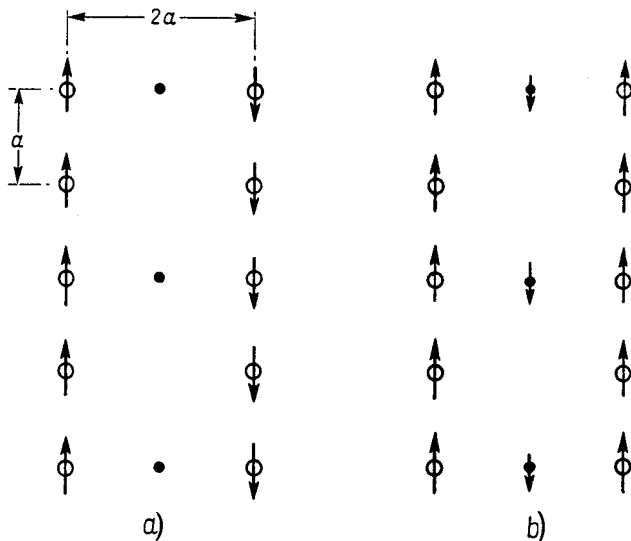
Przy naszym założeniu, że $\beta(T - T_c)$ jest bardzo małe w porównaniu z jednością, możemy powyższe wyrażenie zastąpić jego przybliżeniem:

$$\kappa - 1 = \frac{9}{\beta(T - T_c)}. \quad (11.31)$$

Ten związek jest oczywiście słuszny tylko dla $T > T_c$. Widzimy, że tuż ponad temperaturą krytyczną wartość κ jest olbrzymia. Ze względu na to, że Na bardzo mało się różni od 3, występuje tu potężny efekt wzmocnienia i stała dielektryczna może łatwo osiągnąć wartość rzędu 50000 a nawet rzędu 100000. Wartość stałej dielektrycznej jest silnie zależna od temperatury. Ze wzrostem temperatury maleje ona odwrotnie proporcjonalnie do temperatury. W odróżnieniu od tego, co zachodzi dla gazu dipolarnego, gdzie $\kappa - 1$ maleje odwrotnie proporcjonalnie do temperatury *bezwzględnej*, w przypadku ferroelektryków zmiana jest odwrotnie proporcjonalna do różnicy między temperaturą bezwzględną a temperaturą krytyczną (to prawo nazywamy prawem Curie-Weissa).

Co się dzieje, kiedy obniżamy temperaturę poniżej krytycznej? Jeżeli wyobrazimy sobie siatkę zbudowaną z komórek jednostkowych, takich jak pokazana na rys. 11.9, to widzimy, że istnieją tu łańcuchy jonów uporządkowanych wzdłuż linii pionowych. Jedne z tych łań-

11.10. Modele ferroelektryka: a) antyferroelektryk, b) zwykły ferroelektryk



cuchów złożone są z umieszczonych na przemian jonów tlenu i tytanu. Inne zaś wytworzone są albo z jonów samego baru, albo też samego tlenu, ale odległości między jonami są wtedy większe. Pomyślmy sobie prosty model symulujący tę sytuację wyobrażając sobie szereg łańcuchów jonowych, tak jak to przedstawia rys. 11.10a. Wzdłuż tego, co nazwiemy głównym łańcuchem, odległość międzyjonowa jest równa a , a więc połowie stałej siatki. Odległość poprzeczna między dwoma identycznymi łańcuchami jest natomiast równa $2a$. Na razie pomijamy znajdujące się pomiędzy tymi dwoma łańcuchami inne łańcuchy, rzadziej obsadzone jonami. Aby trochę ułatwić sobie analizę, przypuścimy również, że wszystkie jony w łańcuchu głównym są identyczne. (Nie jest to poważne uproszczenie, bo niezależnie do niego wystąpią tu wszystkie istotne efekty. Jest to jeden z trików fizyki teoretycznej. Rozwiązujemy najpierw inny, prostszy problem, a kiedy już zorientujemy się co do właściwej drogi postępowania, będzie czas na wprowadzenie wszystkich potrzebnych komplikacji.)

Teraz spróbujmy rozważyć, co stałoby się z naszym modelem. Przypuścimy, że moment dipolowy każdego atomu jest równy p i chcemy obliczyć pole w miejscu, gdzie znajduje się dany atom łańcucha. Musimy obliczyć sumę pól pochodzących od wszystkich innych atomów. Najpierw obliczymy pole wytworzone przez dipole jednego pionowego łańcucha. Innymi łańcuchami zajmiemy się później. Pole w odległości r od dipola wzdłuż jego osi jest dane wyrażeniem

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (11.32)$$

Na dany atom działają pola pochodzące od dipoli rozmieszczonych wzdłuż łańcucha w równych odstępach poniżej i powyżej danego, przy czym kierunek pól wytworzonych przez dipole nad samym atomem będzie taki sam jak kierunek pól wytworzonych przez dipole pod tym atomem. Dla całego łańcucha otrzymujemy

$$E_{\text{łańc}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^3} \left(2 + \frac{2}{8} + \frac{2}{27} + \frac{2}{64} \dots \right) = \frac{p}{\epsilon_0} \frac{0,383}{a^3}. \quad (11.33)$$

Nie jest rzeczą zbyt trudną pokazać, że gdyby nasz model był jak zupełnie regularny kryształ, tzn. gdyby następny identyczny łańcuch był odległy o a , należałoby zastąpić liczbę 0,383 liczbą $\frac{1}{3}$. Inaczej by było, gdyby inne łańcuchy znajdowały się w odstępach a ; dawałoby to przyczynek około $-0,050$ jednostki do naszej sumy. Jednakże my rozważamy, model, w którym odstęp między łańcuchami wynosi $2a$, a jak zapewne pamiętacie z rozdz. 7 pole od periodycznie rozmieszczonych źródeł maleje wykładniczo z odległością. A więc te inne łańcuchy dają wkład mniejszy niż $-0,050$ i możemy je pominąć.

Powinniśmy teraz znaleźć, jaka musi być polaryzowalność α , aby mogła nastąpić poprzednio wspomniana „rozbieżność”. Przypuścimy, że indukowany moment p każdego atomu jest proporcjonalny do pola, w którym atom się znajduje, jak w równaniu (11.6). Pole polaryzujące atom mamy wyznaczone z równania (11.32) i (11.33). Mamy więc dwa równania

oraz

$$E_{\text{łańc}} = \frac{0,383}{a^3} \frac{p}{\varepsilon_0}.$$

Istnieją tu dwa rozwiązania: albo E i p są jednocześnie równe zero, albo też

$$a = \frac{a^3}{0,383}$$

dla skończonych wartości E i p . Dlatego więc, jeżeli a będzie tak duże jak $a^3/0,383$ — nastąpi trwała polaryzacja podtrzymywana własnym polem. Ta krytyczna równość jest osiągnięta dokładnie w temperaturze T_c . (Zauważcie, że gdyby a było większe od wartości krytycznej dla małych pól, malałoby dla większych pól i dla stanu równowagi zachodziłaby ta sama równość, którą znaleźliśmy.)

Dla BaTiO_3 odległość a wynosi $2 \cdot 10^{-8}$ cm, musimy więc oczekiwać, że $a = 21,8 \times 10^{-24}$ cm³. Możemy to porównać ze znanymi polaryzowalnościami atomów. Dla tlenu $a = 30,2 \cdot 10^{-24}$ cm³; jesteśmy na właściwej drodze! Ale dla tytanu $a = 2,4 \cdot 10^{-24}$ cm³; raczej mało. Abyśmy mogli stosować nasz model, powinniśmy prawdopodobnie posłużyć się wartością średnią. (Moglibyśmy ponownie rozważyć łańcuch, przyjmując, że otwory rozmieszczone są na przemian, ale wynik byłby prawie taki sam.) Więc $a_{\text{sr}} = 16,3 \cdot 10^{-24}$ cm³, co nie wystarcza, aby nastąpiła polaryzacja trwała.

Ale poczekajcie! Dotychczas zsumowaliśmy tylko polaryzację elektronową. Pozostaje jeszcze pewna polaryzacja spowodowana ruchem jonu tytanu. Brakuje nam jeszcze tylko polaryzowalności jonowej wartości $9,2 \cdot 10^{-24}$ cm³. (Dokładniejsze rachunki uwzględniające, że atomy są ustawione na przemian, wskazują, że w rzeczywistości brakuje $11,9 \times 10^{-24}$ cm³.) Aby zrozumieć właściwości BaTiO_3 , musimy założyć, że taka polaryzowalność jonowa rzeczywiście istnieje.

Czemu jon tytanowy w tytanianie baru miałby mieć tak wielką polaryzowalność jonową? Tego nie wiemy. Następnie, nie jest jasne, dlaczego w niższej temperaturze polaryzuje się tak samo wzdłuż głównej przekątnej sześcianu jak wzdłuż przekątnych jego ścian. Jeżeli zorientujemy się co do rzeczywistych rozmiarów kul z rys. 11.9 i zapytamy, czy tytan ma pewną niewielką swobodę ruchów w pudle utworzonym przez otaczające go atomy tlenu — czego pragnęlibyśmy, gdyż wtedy miałyby możliwość łatwego przesuwania się — znajdujemy, że jest właśnie przeciwnie. Tytan jest uwięziony bardzo ciasno. Atomy baru mają nieco swobody przesuwania się, ale założenie, że to one się poruszają, nie prowadzi do zadowalającego wyniku. Widzicie więc, że zagadnienie nie jest naprawdę w 100% wyjaśnione — pozostają jeszcze tajemnice, które chcielibyśmy przeniknąć.

Powracając do naszego prostego modelu z rys. 11.10a, widzimy, że pole pochodzące od jednego łańcucha wywoływałoby polaryzację sąsiedniego łańcucha w *przeciwną* stronę, co znaczy, że aczkolwiek w każdym łańcuchu poszczególne jony byłyby powiązane ze sobą, jednak nie byłoby trwałego wypadkowego momentu na jednostkę objętości! (Choć nie byłoby żadnych zewnętrznych objawów elektrycznych, to pozostawałyby jeszcze pewne efekty termodynamiczne, które można by było obserwować.) Takie układy istnieją i nazywamy je antyferroelektrykami. Dotychczas więc omawialiśmy właściwie antyferro-

elektryki. Natomiast w przypadku tytanianu baru schemat budowy jest taki, jak wskazuje rys. 11.10b. Łańcuchy tlenowo-tytanowe są wszystkie spolaryzowane w tym samym kierunku, ponieważ między nimi znajdują się łańcuchy pośrednie. Atomy w tych łańcuchach nie są zbyt silnie polaryzowane, ani też gęsto ustawione, będą jednak ulegać w pewnym stopniu polaryzacji w kierunku antyrównoległym do kierunku polaryzacji łańcuchów tlenowo-tytanowych. Słabe pola pochodzące od tych łańcuchów pośrednich działają będą na najbliższy łańcuch tlenowo-tytanowy, polaryzując go równoległe do pierwszego łańcucha tlenowo-tytanowego. A więc BaTiO_3 jest prawdziwym ferroelektrykiem i jest nim z powodu istnienia atomów między głównymi łańcuchami. Być może, że niepokoi was pytanie: „A jaki będzie efekt bezpośredniego oddziaływania dwóch łańcuchów O-Ti ze sobą?” Pamiętajcie jednak, że bezpośredni efekt maleje wykładniczo z odległością — oddziaływanie łańcucha *silnych* dipoli z odległości $2a$ może być słabsze niż oddziaływanie łańcucha słabych dipoli z odległości a .

Na tym kończymy nasze dosyć obszerne przedstawienie tego, jak obecnie pojmujemy stałe dielektryczne gazów, cieczy i ciał stałych.

analogie do elektrostatyki

12-1. Takie same równania mają takie same rozwiązania

Suma informacji o świecie fizycznym, uzyskanych od chwili, w której się rozpoczął postęp nauki, jest tak ogromna, że wydaje się niemal niemożliwe, aby jedna osoba mogła posiadać choćby skromną część tej wiedzy. W rzeczywistości fizyk może jednak utrzymać szeroki zakres wiedzy o świecie fizycznym i nie musi zostać specjalistą w jakiejś wąskiej dziedzinie. Są trzy powody takiego stanu rzeczy. Po pierwsze, istnieją wielkie zasady, do których się stosują wszystkie rodzaje zjawisk — takie jak zasady zachowania energii i momentu pędu. Rozumiejąc głęboko takie zasady rozumie się wiele naraz. Po drugie, wiele skomplikowanych zjawisk, takich jak na przykład zachowanie się ciał stałych pod ciśnieniem, zależy w zasadzie od sił elektrycznych i kwantowych. Jeżeli więc ktoś rozumie podstawowe prawa elektryczności i mechaniki kwantowej, to ma co najmniej pewną szansę zrozumienia wielu zjawisk, które występują w sytuacjach złożonych. Wreszcie, istnieje niezmiernie ważna koincydencja: *równania opisujące wiele różnych sytuacji fizycznych mają dokładnie taką samą postać*. Oczywiście, użyte symbole mogą być rozmaite — jedna litera zastępuje drugą, ale z punktu widzenia matematyki równania są takie same. Znaczy to, że zgłębiwszy jedno zagadnienie, zyskujemy od razu wiele bezpośrednich i dokładnych informacji o rozwiązaniach równań opisujących inny problem.

Przystajemy się teraz zajmować elektrostatyką i wkrótce przejdziemy do studiowania magnetyzmu i elektrodynamiki. Zanim jednak to zrobimy, chcielibyśmy wykazać, że ucząc się elektrostatyki dowiedzieliśmy się zarazem wiele o innych działach fizyki. Przekonamy się bowiem, że równania elektrostatyki występują też w wielu innych działach fizyki. Oczywiście, takie same równania matematyczne muszą mieć takie same rozwiązania, możemy więc rozwiązywać problemy z innych dziedzin równie łatwo — lub równie trudno — jak w elektrostatyce, po prostu tłumacząc znane już rozwiązania jej zagadnień:

Równaniami elektrostatyki, jak wiemy, są następujące związki:

$$\nabla \cdot (\varkappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{swob}}}{\varepsilon_0}, \quad (12.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (12.2)$$

(Rozważamy równania elektrostatyki dielektryków, aby mieć najogólniejszą sytuację.) Tę samą treść fizyczną możemy też wyrazić w innej postaci matematycznej:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (12.3)$$

$$\nabla \cdot (\varkappa \nabla\varphi) = -\frac{\rho_{\text{swob}}}{\varepsilon_0}. \quad (12.4)$$

Rzecz polega na tym, że w fizyce występuje wiele zagadnień, których równania mają tę właśnie postać. Istnieje często potencjał (φ), którego gradient mnożony przez funkcję skalarną (\varkappa) ma dywergencję równą pewnej innej funkcji skalarnej ($-\rho/\varepsilon_0$).

Cokolwiek wiemy o elektrostatyce, możemy wtedy od razu przenieść do tej właśnie innej dziedziny i odwrotnie. (Oczywiście, działa to w obie strony: jeżeli owa inna dziedzina ma jakieś cechy szczególne dobrze nam znane, to wiedzę tę możemy zastosować do odpowiedniego problemu elektrostatycznego.) Chcemy rozważyć kilka przykładów z różnych dziedzin fizyki, które prowadzą do równań tej właśnie postaci.

12-2. Przepływ ciepła; ładunek punktowy w pobliżu nieskończonej płaszczyzny ograniczającej

Jeden przykład omówiliśmy już wcześniej (§ 3-4) — mamy na myśli przepływ ciepła. Wyobraźmy sobie bryłę materialną, niekoniecznie jednorodną, lecz taką, która się może składać z różnych substancji i w której temperatura zmienia się od punktu do punktu. W wyniku tej zmienności temperatury występuje przepływ ciepła, który możemy przedstawić za pomocą wektora \mathbf{h} . Wektor ten reprezentuje sumę energii cieplnej, która przepływa w ciągu jednostki czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do strumienia. Dywergencja wektora \mathbf{h} przedstawia odniesioną do jednostki objętości szybkość wypływu ciepła z danego obszaru:

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{szybkość wypływu ciepła na jednostkę objętości.}$$

(Moglibyśmy, oczywiście, napisać to równanie w postaci całkowej — dokładnie tak samo, jak uczyniliśmy w elektrostatyce z prawem Gaussa — i wtedy mówiłoby nam ono, że strumień przez powierzchnię równy jest szybkości zmiany energii cieplnej zawartej w ośrodku materialnym. Nie będziemy sobie zaprzętać głowy przekształcaniem równań w tę i z powrotem z postaci różniczkowej do całkowej, gdyż przebiega to dokładnie tak samo, jak w elektrostatyce.)

Szybkość, z jaką ciepło jest wytwarzane lub pochłaniane w różnych miejscach, zależy oczywiście od tego, jakie zagadnienie rozpatrujemy. Przypuśćmy na przykład, że mamy źródło ciepła wewnątrz rozważanego ośrodka (choćby źródło promieniotwórcze, czy też

opornik grzany prądem elektrycznym). Oznaczmy literą s energię cieplną wytwarzaną przez to źródło na jednostkę objętości i na sekundę. Mogą też występować straty (lub zyski) energii termicznej na korzyść innych rodzajów energii wewnętrznej w danym obszarze. Jeżeli u jest energią wewnętrzną na jednostkę objętości, to $-du/dt$ będzie także „źródłem” energii cieplnej. Mamy więc

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s - \frac{du}{dt}. \quad (12.5)$$

Nie mamy zamiaru omawiać w tej chwili pełnego równania, w którym sytuacja zmienia się z upływem czasu, gdyż rozważamy analogię do elektrostatyki, gdzie nic od czasu nie zależy. Będziemy więc rozważać jedynie zagadnienia *ustalonego przepływu ciepła*, w których stałe źródła wytworzyły stan równowagi. W tych przypadkach

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s. \quad (12.6)$$

Trzeba mieć oczywiście jeszcze inne równanie, które będzie opisywać, jak ciepło płynie w różnych miejscach. W wielu ośrodkach prąd ciepła jest w przybliżeniu proporcjonalny do szybkości zmian temperatury w zależności od położenia: im większa jest różnica temperatur, tym większy jest strumień ciepła. Jak widzimy, *wektorowy* prąd ciepła jest proporcjonalny do gradientu temperatury. Stała proporcjonalności, K , właściwa dla danej substancji, zwana jest *przewodnością cieplną*:

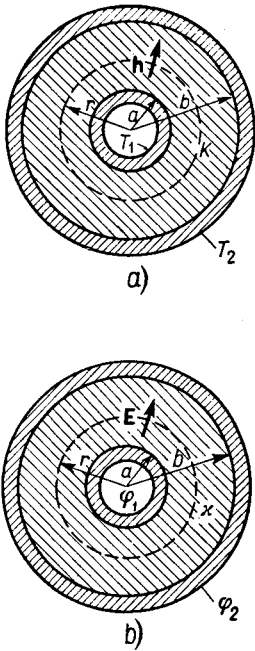
$$\mathbf{h} = -K \nabla T. \quad (12.7)$$

Jeżeli właściwości substancji zmieniają się od miejsca do miejsca, to $K = K(x, y, z)$ jest funkcją położenia. [Równanie (12.7) nie jest tak podstawowe jak równanie (12.5), które wyraża zasadę zachowania energii cieplnej, ponieważ zależy ono od szczególnej właściwości ośrodka.] Jeżeli podstawimy teraz zależność (12.7) do równania (12.6), dostaniemy

$$\nabla \cdot (K \nabla T) = -s; \quad (12.8)$$

równanie to ma dokładnie taką samą postać, jaką ma równanie (12.4). *Zagadnienia ustalonego przepływu ciepła są więc takie same jak zagadnienia elektrostatyki.* Wektor przepływu ciepła \mathbf{h} odpowiada wektorowi pola \mathbf{E} , a temperatura odpowiada potencjałowi φ . Zwracaliśmy już uwagę na to, że punktowe źródło ciepła wytwarza pole temperatur, które się zmienia jak $1/r$, oraz strumień ciepła zmieniający się jak $1/r^2$. Jest to po prostu przekład odpowiednich twierdzeń z elektrostatyki, mówiących, że ładunek punktowy wytwarza potencjał zmieniający się jak $1/r$ oraz pole elektryczne zmieniające się jak $1/r^2$. Możemy na ogół rozwiązywać statyczne zagadnienia cieplne równie łatwo jak problemy elektrostatyki.

Rozważmy prosty przykład. Załóżmy, że mamy walec o promieniu a w temperaturze T_1 podtrzymywanej wskutek wytwarzania ciepła w walcu. (Mógłby to być np. drut z prądem, czy też rura ze skraplającą się wewnątrz niej parą.) Walec pokryty jest koncentryczną warstwą materiału izolującego o przewodności K . Przypuśćmy, że zewnętrzny promień izolacji



12.1. a. Przepływ ciepła w przypadku symetrii walcowej. b. Odpowiedni problem z elektryczności.

równy jest b i że na zewnątrz utrzymujemy temperaturę T_2 (rys. 12.1a). Chcemy obliczyć, z jaką szybkością drut czy rura z parą, czy cokolwiek, co tam jest w środku, będzie tracić ciepło. Niech całkowita ilość ciepła tracona na długości L rury wynosi G — tę właśnie wielkość staramy się znaleźć.

W jaki sposób możemy rozwiązać ten problem? Mamy równania różniczkowe, ale ponieważ są one takie same jak równania elektrostatyki, matematyczna strona problemu jest w ten sposób za nami. Problemem analogicznym jest zagadnienie przewodnika o promieniu a i o potencjale φ_1 , oddzielonego od innego przewodnika o promieniu b i o potencjale φ_2 koncentryczną warstwą dielektryka, jak to przedstawia rys. 12.1b. Ponieważ przepływ ciepła h odpowiada polu elektrycznemu E , wielkość G , którą chcemy znaleźć, odpowiada strumieniowi pola elektrycznego na jednostkę długości (innymi słowy, ładunkowi elektrycznemu na jednostkę długości podzielonemu przez ϵ_0). Problem elektrostatyczny rozwiązaliśmy korzystając z prawa Gaussa.

Tę samą procedurę stosujemy teraz w naszym zagadnieniu przepływu ciepła.

Z symetrii problemu wiemy, że h zależy tylko od odległości od środka. Zamykamy więc rurę w powierzchni walcowej o długości L i o promieniu r . Z twierdzenia Gaussa wiemy, że strumień ciepła h mnożony przez pole tej powierzchni $2\pi rL$ musi być równy całkowitej ilości ciepła wytworzonego wewnątrz tej powierzchni. Wielkość tę oznaczyliśmy symbolem G :

$$2\pi rLh = G, \quad \text{czyli} \quad h = \frac{G}{2\pi rL}. \quad (12.9)$$

Wektor przepływu ciepła jest proporcjonalny do gradientu temperatury:

$$\mathbf{h} = -K\nabla T,$$

czyli w tym wypadku wartość h wynosi

$$h = -K \frac{dT}{dr}.$$

Ten związek wraz z zależnością (12.9) daje

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{G}{2\pi K L r}. \quad (12.10)$$

Całkując od $r = a$ do $r = b$ dostajemy

$$T_2 - T_1 = - \frac{G}{2\pi KL} \ln \frac{b}{a}. \quad (12.11)$$

Rozwiązując to równanie względem G znajdujemy

$$G = \frac{2\pi KL(T_1 - T_2)}{\ln(b/a)}. \quad (12.12)$$

Wynik ten odpowiada dokładnie wynikowi dla ładunku na kondensatorze w kształcie walca:

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 L(\varphi_1 - \varphi_2)}{\ln(b/a)}.$$

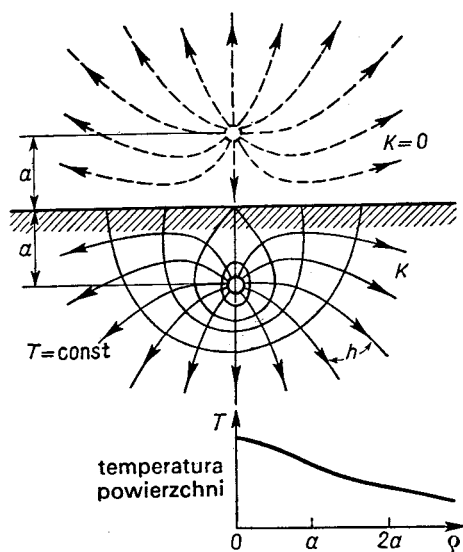
Oba problemy są takie same i mają takie same rozwiązania. Nasza znajomość elektrostatyki pozwoliła nam określić, ile ciepła traci osłonięta rurka.

Rozważmy inny przykład przepływu ciepła. Przypuśćmy, że chcemy się dowiedzieć, jaki jest przepływ ciepła w sąsiedztwie punkowego źródła, umieszczonego nieco poniżej powierzchni Ziemi lub też blisko powierzchni wielkiego bloku metalu. Tym zlokalizowanym źródłem ciepła mogłaby być bomba atomowa, która wybuchła pod ziemią. Innym przykładem mógłby być mały preparat promieniotwórczy, znajdujący się wewnątrz żelaznego bloku. Jest wiele takich możliwości.

Będziemy traktować ten problem w sposób wyidealizowany jako zagadnienie punkowego źródła ciepła o natężeniu G , umieszczonego w odległości a poniżej powierzchni nieskończonego bloku jednorodnej substancji, której przewodność cieplna wynosi K . Przewodność cieplną powietrza na zewnątrz tego bloku będziemy pomijać. Chcemy znaleźć rozkład temperatury na powierzchni bloku. Jak gorąco jest wprost nad źródłem i w innych miejscach na powierzchni bloku?

Jak będziemy rozwiązywać ten problem? Jest to problem podobny do znanego z elektrostatyki zagadnienia dwu ośrodków o różnych stałych dielektrycznych κ , stykających się wzdłuż płaszczyzny. Aha! Jest to być może analogia do ładunku punkowego w pobliżu granicy między dielektrykiem i przewodnikiem lub do czegoś w tym rodzaju. Warunek fizyczny jest taki, że składowa normalna wektora \mathbf{h} na powierzchni wynosi zero, gdyż założyliśmy, iż nie ma wypływu ciepła z bloku. Powinniśmy zapytać: w którym problemie z dziedziny elektrostatyki występuje warunek, że składowa normalna pola elektrycznego \mathbf{E} (będącego odpowiednikiem wektora \mathbf{h}) wynosi zero na powierzchni? Takiego problemu nie ma!

Jest to przykład sytuacji, którą należy analizować z wielką ostrożnością. Ze względów fizycznych mogą istnieć pewne ograniczenia warunków matematycznych występujących w poszczególnych zagadnieniach. A więc, jeżeli objęliśmy analizą równanie różniczkowe jedynie dla niektórych przypadków, mogliśmy przeoczyć pewne rodzaje rozwiązań, mogące występować w innych sytuacjach fizycznych. Tak na przykład, nie ma substancji o stałej dielektrycznej równej zero, podczas gdy próżnia ma właśnie zerową przewodność cieplną. Tak więc nie ma analogii elektrostatycznej dla doskonałego izolatora cieplnego. Możemy jednak wciąż stosować te same metody. Możemy próbować wyobrazić sobie,



12.2. Przepływ ciepła i izotermy w pobliżu punkowego źródła ciepła umieszczonego w odległości a poniżej powierzchni dobrego przewodnika ciepła. Źródło-obraz znajduje się na zewnątrz ciała, w którym mieści się źródło.

Źródło-obraz o *tych samym znaku* i o takim samym natężeniu umieszczone w odległości a ponad powierzchnią spowoduje, że pole będzie zawsze poziome na powierzchni. Składowe normalne pola pochodzącego z obu źródeł znoszą się.

Tak więc problem przepływu ciepła jest rozwiązany. Z prostej analogii wynikało, że temperatura jest w każdym punkcie taka sama, podobnie jak potencjał wywołany przez dwa równe ładunki punktowe! Temperatura T w odległości r od pojedynczego źródła punkowego G w nieskończonym ośrodku wynosi

$$T = \frac{G}{4\pi Kr}. \quad (12.13)$$

[Wzór ten, oczywiście, jest właśnie analogiczny do wzoru $\varphi = q(4\pi\epsilon_0 r)^{-1}$.] Temperatura dla źródła punkowego oraz jego źródła-obrazu wynosi

$$T = \frac{G}{4\pi Kr_1} + \frac{G}{4\pi Kr_2}. \quad (12.14)$$

Wzór ten daje nam temperaturę w każdym miejscu bloku. Kilka powierzchni izotermicznych pokazano na rys. 12.2. Pokazujemy tam także linie sił pola h , które można otrzymać z wzoru $h = -K \nabla T$.

W naszym zadaniu pytaliśmy o rozkład temperatury na powierzchni. Otóż dla punktu

co by się zdarzyło, gdyby stała dielektryczna była równa zero. (Oczywiście, stała dielektryczna w rzeczywistości nigdy nie jest równa zero. Moglibyśmy jednak mieć do czynienia z przypadkiem, w którym występuje substancja o bardzo *wielkiej* stałej dielektrycznej, tak że wolno by nam było pomijać stałą dielektryczną powietrza na zewnątrz.)

W jaki sposób szukalibyśmy pola elektrycznego, które *nie* ma składowej prostopadłej do powierzchni, tzn. takiego, które zawsze jest *styczne* do powierzchni? Zauważmy, że problem ten jest przeciwieństwem zagadnienia ładunku punkowego w pobliżu płaszczyzny przewodzącej. Tam chcieliśmy, aby pole było *prostopadłe* do powierzchni, gdyż cały przewodnik miał jednakowy potencjał. W elektrostatyce odszukaliśmy rozwiązanie, wyobrażając sobie ładunek punktowy poza płaszczyzną przewodzącą. Możemy znów pójść tą samą drogą. Próbuujemy dobrać „ładunek-obraz”, który automatycznie sprawi, że składowa normalna pola będzie znikać na powierzchni. Rozwiązanie zilustrowano na rys. 12.2.

na powierzchni w odległości ρ od osi $r_1 = r_2 = (\rho^2 + a^2)^{1/2}$, wobec czego

$$T(\text{powierzchnia}) = \frac{1}{4\pi K} \frac{2G}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}. \quad (12.15)$$

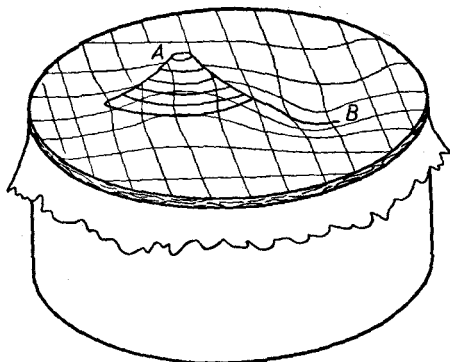
Wykres tej funkcji jest również pokazany na rysunku. Temperatura jest oczywiście wyższa wprost nad źródłem niż opodal. Problemy tego typu często muszą rozwiązywać geofizycy. Widzimy teraz, że jest to taki sam problem, jaki rozwiązywaliśmy już w przypadku elektryczności.

12.3. Napięta membrana

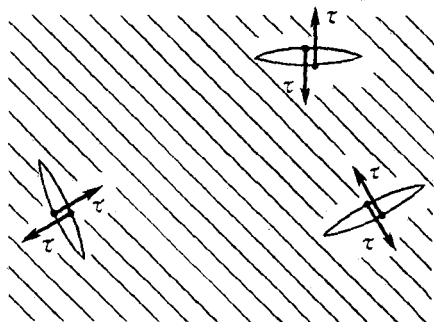
Rozważmy teraz zupełnie inną sytuację fizyczną, która jednak opisywana jest tymi samymi równaniami. Weźmy pod uwagę cienką błonę gumową, membranę, która została rozpięta na dużej ramie poziomej (jak błona bębna). Załóżmy teraz, że membranę popchnięto w jednym miejscu do góry, a w innym — na dół; pokazuje to rys. 12.3. Czy potrafimy opisać kształt powstałej powierzchni? Pokażemy jak można rozwiązać ten problem, gdy wychylenia membrany nie są zbyt wielkie.

W błonie działają siły, gdyż jest ona napięta. Gdybyśmy w którymkolwiek miejscu zrobili małe cięcie, dwa brzegi tego cięcia zostałyby rozciągnięte (patrz rys. 12.4). A więc w błonie działa *napięcie powierzchniowe*, analogiczne do jednowymiarowego napięcia w naciągniętej strunie. Definiujemy wartość napięcia powierzchniowego τ jako siłę na *jednostkę długości*, która dokładnie spina razem dwa brzegi cięcia takiego, jak jedno z tych, które widzimy na rys. 12.4.

Przypuśćmy teraz, że oglądamy pionowy przekrój membrany. Przedstawi się on nam jako krzywa, taka jak na rys. 12.5. Niech u będzie wychyleniem pionowym membrany

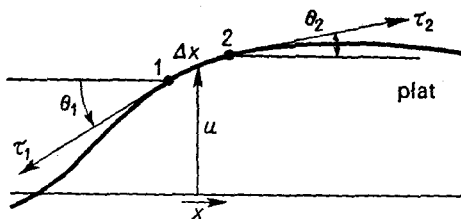


12.3. Cienki płat gumy naciągnięty na walcową ramkę (podobnie jak na bębnie). Jeżeli płat popchnięto do góry w punkcie A i do dołu w punkcie B, to jaki kształt będzie miała powierzchnia?



12.4. Napięcie powierzchniowe τ napiętego płata gumowego jest siłą działającą na jednostkę długości w poprzek linii.

12.5. Przekrój poprzeczny płata wychylonego z położenia równowagi



z jej zwykłego położenia, a x i y — niech będą współrzędnymi w płaszczyźnie poziomej. (Na rysunku przedstawiamy przekrój błony płaszczyzną pionową, równoległą do osi x .)

Rozważmy mały kawałek powierzchni o długości Δx i o szerokości Δy . Wzdłuż każdego brzegu tego kawałka będą nań działały siły pochodzące od napięcia powierzchniowego. Siła wzdłuż brzegu 1 na rysunku wyniesie $\tau_1 \Delta y$ i skierowana będzie stycznie do powierzchni, tj. pod kątem θ_1 do poziomu. Wzdłuż brzegu 2 działać będzie siła $\tau_2 \Delta y$ pod kątem θ_2 . (Podobne siły wystąpią na pozostałych dwu brzegach rozważanego kawałka, ale na chwilę zapomnijmy o nich.) Łączna siła *ku górze*, działająca na kawałek membrany, pochodząca od brzegów 1 i 2, wyniesie

$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin \theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin \theta_1.$$

Ograniczymy nasze rozważania do małych odkształceń membrany, tj. do *małych nachyleń*; możemy wówczas zastąpić $\sin \theta$ funkcją $\operatorname{tg} \theta$, a tę z kolei możemy zapisać jako $\partial u / \partial x$. Siła wynosi zatem

$$\Delta F = \left[\tau_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \tau_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right] \Delta y.$$

Wielkość w nawiasach możemy równie dobrze napisać (dla małych Δx) jako

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x;$$

a wtedy

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y.$$

Wystąpi ponadto inny wkład do ΔF od sił na dwu pozostałych brzegach; całkowita wartość ΔF równa jest oczywiście

$$\Delta F = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y. \quad (12.16)$$

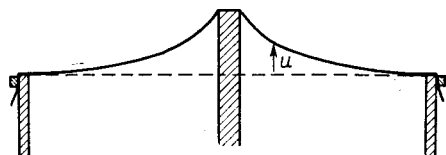
Odkształcenia membrany spowodowane są przez siły zewnętrzne. Niech f przedstawia siłę skierowaną *ku górze*, działającą na *jednostkę powierzchni* membrany (rodzaj „ciśnienia”), *związaną z siłami zewnętrznymi*. Gdy membrana jest w stanie równowagi (przyadek *statyczny*), siła ta musi być równoważona przez siłę wewnętrzną, którą dopiero co obliczyliśmy. Ma ona postać (12.16). Znaczy to, że

$$f = - \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y}.$$

Równanie (12.16) możemy zatem zapisać jako

$$f = - \nabla \cdot (\tau \nabla u), \quad (12.17)$$

12.6. Przekrój poprzeczny napiętego płata gumowego popchniętego ku górze okrągłym prętem. Funkcja $u(x, y)$ jest taka sama, jak potencjał elektryczny $\varphi(x, y)$ w pobliżu bardzo długiego naładowanego pręta.



gdzie przez ∇ rozumiemy teraz, oczywiście, dwuwymiarowy operator gradientu ($\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$). Mamy równanie różniczkowe, które wiąże funkcję $u(x, y)$ z siłami przyłożonymi $f(x, y)$ oraz z napięciem powierzchniowym $\tau(x, y)$; w ogólnym wypadku może się ono zmieniać na błonie od miejsca do miejsca. (Odształcenia w trójwymiarowym ciele sprężystym są opisywane podobnymi równaniami, pozostawimy jednak przy dwu wymiarach.) Będziemy się zajmować jedynie przypadkiem, w którym napięcie τ jest stałe w całej błonie. Możemy wówczas napisać równanie (12.17) w postaci

$$\nabla^2 u = -f/\tau. \quad (12.18)$$

Mamy jeszcze jedno równanie takie samo jak w elektrostatyce! Tym razem jest ono ograniczone do dwu wymiarów. Przeszyczenie u odpowiada potencjałowi φ , wyrażenie zaś f/τ odgrywa tę samą rolę co ρ/ϵ_0 . Tak więc cała praca wykonana przez nas w przypadku nieskończonych naładowanych płaszczyzn, czy też długich równoległych drutów, czy wreszcie naładowanych walców może być teraz wprost spożytkowana w przypadku napiętej membrany.

Przypuścmy, że wypychamy membranę w pewnych punktach do góry na określoną wysokość, to jest ustalamy wartość przeszczenia u w pewnych miejscach. Jest to analogia do ustalania w elektrostatyce określonego potencjału w odpowiednich miejscach. Tak więc możemy na przykład uczynić „potencjał” dodatnim przez wypychanie membrany do góry za pomocą przedmiotu o przekroju w takim samym kształcie, jak odpowiedni przewód walcowy. Popychając na przykład membranę okrągłym prętem nadamy powierzchni kształt pokazany na rys. 12.6. Wysokość u jest tym samym co potencjał elektrostatyczny φ naładowanego pręta walcowego. Maleje ona jak $\ln(1/r)$. (*Nachylenie*, które odpowiada polu elektrycznemu E , maleje jak $1/r$.)

Napięta membrana gumowa służyła często do rozwiązywania skomplikowanych zagadnień *elektrycznych* na drodze doświadczałnej. Analogia działa wstecz! Rozmaite pręty i sztabki wpychano w membranę aż do wysokości odpowiadających potencjałom na układzie elektrod. Pomiaru wysokości dawały wówczas wartość potencjału elektrycznego. Analogię posuwano nawet jeszcze dalej. Jeżeli się umieści na membranie małe kulki, to ruch ich odpowiada w przybliżeniu ruchowi elektronów w odpowiednim polu elektrycznym. Można więc rzeczywiście *śledzić* „elektrony” poruszające się po swych torach. Metoda ta posłużyła do zaprojektowania skomplikowanej geometrii wielu lamp w fotomnożnikach (takich jak te, które są używane w licznikach scyntylacyjnych oraz tych, które służą do regulacji przednich świateł w Cadillacach). Metoda ta jest wciąż jeszcze stosowana, ale jej dokładność jest ograniczona. W większości zagadnień, które należy rozwiązać z dużą dokładnością, lepiej jest znaleźć pola metodami numerycznymi przy użyciu wielkich elektronowych maszyn liczących.

12-4. Dyfuzja neutronów;

jednolodne źródło kuliste w jednolodnym ośrodku

Weźmy inny przykład, który daje równania tego samego rodzaju, tym razem — dyfuzję. W rozdziale 43 tomu I (cz. 2) rozważaliśmy dyfuzję jonów w chemicznie jednolod-

nym gazie oraz dyfuzję jednego gazu w innym. Tym razem rozpatrzmy inny przykład — dyfuzję neutronów w substancji takiej jak grafit. Wybraliśmy grafit (postać czystego węgla), gdyż węgiel nie pochłania powolnych neutronów. Neutrony mogą w nim swobodnie wędrować. Podróżują one po linii prostej, przebywając średnio odległość kilku centymetrów, zanim się rozproszą na jądrze i odchylą w nowym kierunku. Tak więc jeżeli mamy duży blok — o krawędziach wielometrowej długości — to neutrony znajdujące się początkowo w jednym miejscu przedyfundują do innych miejsc. Chcemy znaleźć opis ich przeciętnego zachowania się, tzn, ich *średni przepływ*.

Niech $N(x, y, z)$ ΔV będzie liczbą neutronów w elemencie objętości ΔV w punkcie (x, y, z) . Poruszając się, pewne neutrony będą opuszczać element ΔV , a inne będą tam wchodzić. Jeżeli w jednym obszarze jest więcej neutronów niż w obszarze pobliskim, z pierwszego obszaru będzie wychodzić więcej neutronów do obszaru drugiego niż odwrotnie — wystąpi więc pewien przepływ wypadkowy. Posługując się rozumowaniem prowadzonym w rozdz. 43 tomu I (cz. 2) opisujemy przepływ wektorem prądu \mathbf{J} . Jego x -wa składowa J_x jest *wypadkową* liczbą neutronów, które przechodzą w jednostce czasu przez powierzchnię jednostkową, prostopadłą do osi x . Znaleźliśmy, że

$$J_x = -D \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (12.19)$$

gdzie stała dyfuzji D dana jest przez prędkość średnią v oraz przez średnią drogę swobodną l pomiędzy kolejnymi aktami rozproszenia w następujący sposób:

$$D = \frac{1}{3} lv.$$

Równanie wektorowe na \mathbf{J} ma postać:

$$\mathbf{J} = -D \nabla N. \quad (12.20)$$

Szybkość, z jaką neutrony przepływają przez pewien element da powierzchni, wynosi $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$ (gdzie, jak zwykle, \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym). Wypływ wypadkowy z *elementu objętości* wynosi więc na mocy zwykłego argumentu gaussowskiego $\nabla \cdot \mathbf{J} dV$. Wypływ ten spowoduje z czasem zmniejszenie liczby neutronów zawartych w obszarze ΔV , jeżeli tylko nie będą one w obszarze tym wytwarzane w jakimś procesie jądrowym. Jeżeli w obszarze tym są źródła, które wytwarzają S neutronów na jednostkę czasu w jednostce objętości, to wówczas z obszaru tego ΔV wypływać będzie *netto*

$\left(S - \frac{\partial N}{\partial t}\right) \Delta V$ neutronów. Mamy więc ostatecznie

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.21)$$

Łącząc równanie (12.21) z (12.20) dostajemy *równanie dyfuzji neutronów*:

$$\nabla \cdot (-D \nabla N) = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.22)$$

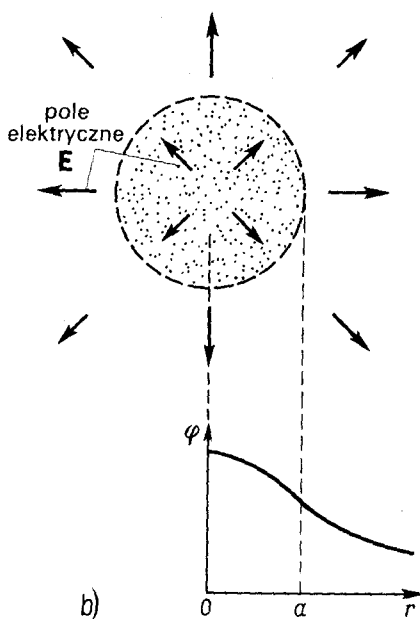
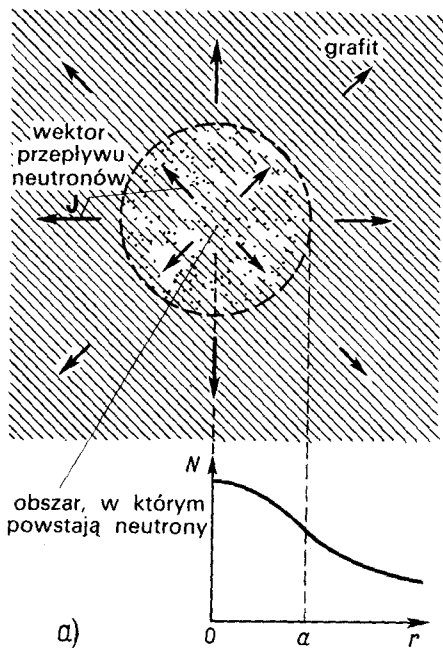
W przypadku statycznym, gdy $\partial N / \partial t = 0$, mamy znowu w całej okazałości równanie

(12.4)! Możemy więc posłużyć się naszą wiedzą w zakresie elektrostatyki, aby rozwiązywać zagadnienia dyfuzji neutronów. Rozwiążmy zatem jakiś problem. (Czytelnik ma prawo spytać: *Dlaczego* mamy się znów zajmować jakimś zagadnieniem, skoro rozwiązaliśmy już wszystkie problemy studiując elektrostatykę? Otóż możemy to teraz zrobić *szybciej*, właśnie dlatego, że zagadnienia elektrostatyczne już omówiliśmy!)

Przypuścmy, że mamy blok takiej substancji, w której neutrony są wytwarzane — powiedzmy przez rozszczepienie uranu — w sposób jednorodny w pewnym obszarze kulistym o promieniu a (rys. 12.7). Chcielibyśmy wiedzieć, jaka jest gęstość neutronów w każdym punkcie oraz jaki jest stosunek gęstości neutronów w środku kuli do tejże gęstości na powierzchni obszaru zajmowanego przez źródło neutronów? Łatwo znaleźć odpowiedź na te pytania. Gęstość źródła S_0 zastępuje gęstość ładunku ρ , wobec czego problem nasz jest taki sam jak zagadnienie kuli naładowanej ze stałą gęstością. Znalezienie N odpowiada obliczeniu potencjału φ . Obliczyliśmy już pola wewnątrz i na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli; możemy je teraz scałkować, aby uzyskać potencjał. Na zewnątrz wynosi on $Q/(4\pi\epsilon_0 r)$, przy czym ładunek całkowity Q równy jest $4\pi a^3 \rho/3$. Tak więc

$$\varphi_{\text{zewn}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (12.23)$$

12.7. a. Neutrony są wytwarzane jednostajnie w kuli o promieniu a w dużym bloku grafitu i dyfundują na zewnątrz. Gęstość neutronów N znajdujemy jako funkcję r , odległości od środka kuli. b. Analogiczna sytuacja w elektrostatyce: kula naładowana ze stałą gęstością. N odpowiada φ , a J — E .



Dla punktów wewnątrz kuli pole pochodzi jedynie od ładunku $Q(r)$ zawartego wewnątrz kuli o promieniu r , $Q(r) = 4\pi r^3 \rho / 3$, wobec czego

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \quad (12.24)$$

Pole rośnie liniowo z r . Całkując pole E , aby uzyskać potencjał φ , dostajemy

$$\varphi_{\text{wewn}} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{stała}.$$

W odległości a od centrum φ_{wewn} musi być równe φ_{zewn} , wobec czego stała musi wynosić $\rho a^2 / 2\epsilon_0$. (Zakładamy, że $\varphi = 0$ w dużej odległości od źródła, co odpowiada $N = 0$ w przypadku neutronów.) Zatem

$$\varphi_{\text{wewn}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.25)$$

Od razu wiemy, jaka w naszym problemie jest gęstość neutronów. Odpowiedź brzmi:

$$N_{\text{zewn}} = \frac{S a^3}{3D r}, \quad (12.26)$$

oraz

$$N_{\text{wewn}} = \frac{S}{3D} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.27)$$

Zależność N od r przedstawiono na rys. 12.7.

A jaki jest stosunek gęstości neutronów w centrum do tejże gęstości na brzegu? W środku ($r = 0$) gęstość proporcjonalna jest do $3a^2/2$. Na brzegu ($r = a$) natomiast jest ona proporcjonalna do $2a^2/2$, wobec czego stosunek gęstości wynosi $\frac{3}{2}$. Jednorodnie źródło nie wytwarza neutronów o jednorodnej gęstości. Jak widać, nasza wiedza w zakresie elektrostatyki zapewnia nam dobry start w fizyce reaktorów jądrowych.

Takich fizycznych zagadnień, w których zjawiska dyfuzji odgrywają wielką rolę, jest wiele. Ruch jonów w cieczy, czy też elektronów w półprzewodniku spełnia takie same równania, jakie spełnia ruch neutronów w ośrodku materialnym. Znajdujemy wciąż i wciąż takie same równania.

12-5. Bezwirowy przepływ cieczy; opływanie kuli

Rozważmy teraz przykład, który w gruncie rzeczy nie jest dobry, gdyż równania, którymi się będziemy posługiwać, nie opisują ogólnie zjawiska fizycznego, którym się chcemy zająć, a tylko pewną sztuczną, wyidealizowaną sytuację. Podejmiemy zagadnienie *przepływu wody*. W przypadku napiętej membrany równania nasze były przybliżeniem słusznym jedynie dla *małych wychyleń*. Obecnie nie dokonamy przybliżeń tego rodzaju; musimy nałożyć ograniczenia, które zupełnie nie mają zastosowania do rzeczywistej wody.

Zajmiemy się jedynie przypadkiem stacjonarnego przepływu cieczy *nieściśliwej, nielepkiej i bezwirowej*. Przepływ przedstawimy przez podanie wektora prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ jako funkcji położenia \mathbf{r} . Jeżeli ruch jest stacjonarny (jedyny przypadek, dla którego istnieje analogia do elektrostatyki), prędkość \mathbf{v} nie zależy od czasu. Jeżeli ρ jest gęstością cieczy, to wektor $\rho\mathbf{v}$ określa masę cieczy przenoszoną w ciągu jednostki czasu przez jednostkową powierzchnię. Na mocy zasady zachowania materii, dywergencja wektora $\rho\mathbf{v}$ równa będzie, w ogólnym przypadku, szybkości zmian w czasie gęstości cieczy. Założymy, że nie ma procesów ciągłego powstawania lub niknięcia materii. Zasada zachowania materii domaga się wtedy, aby $\nabla \cdot \rho\mathbf{v} = 0$. (Wielkość ta w ogólnym przypadku byłaby równa $-\partial\rho/\partial t$, ale ponieważ nasza ciecz jest nieściśliwa, gęstość ρ nie może się zmieniać.) Ponieważ gęstość ρ jest wszędzie taka sama, możemy ją usunąć z równania i wtedy przejdzie ono po prostu w równanie

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

No, dobrze! Mamy znowu elektrostatykę (bez ładunków); przecież jest to coś podobnego do równania $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Otóż nie! Elektrostatyka to *nie* jest po prostu $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Jej treść zawarta jest w *parze* równań. Jedno równanie nie mówi nam wszystkiego; potrzebujemy jeszcze równania dodatkowego. Aby więc otrzymać zgodność z elektrostatyką, powinniśmy mieć jeszcze równanie $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. To jednak na ogół nie jest słuszne dla cieczy rzeczywistych. W większości z nich występuje zazwyczaj pewne krążenie. Tak więc ograniczamy się do takich przypadków, w których nie ma krążenia w cieczy. Przepływ taki nazywamy zwykle przepływem *bezwirowym*. Tak czy owak, jeżeli zrobimy wszystkie nasze założenia, możemy wyobrazić sobie przepływ cieczy, który stanowi analogię do elektrostatyki. Bierzemy więc

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{12.28}$$

oraz

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0. \tag{12.29}$$

Chcemy podkreślić, że nie często można stosować te równania do przepływu cieczy, jednakże czasem się to zdarza. Muszą to być takie przypadki, w których możemy pominąć napięcie powierzchniowe, ściśliwość i lepkość i w których możemy założyć, że przepływ jest bezwirowy. Założenia te dla rzeczywistej wody spełnione są tak rzadko, że matematyk John von Neuman rzekł, iż ci, którzy zajmują się analizą równań (12.28) i (12.29), badają „suchą wodę”! Dokładniejszą analizę przepływu cieczy przeprowadzimy w rozdz. 40 i 41 tomu II (cz. 2).

Ponieważ zachodzi $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, prędkość „suchej wody” możemy wyrazić w postaci gradientu pewnego potencjału:

$$\mathbf{v} = -\nabla\psi. \tag{12.30}$$

Jaki jest sens fizyczny wielkości ψ ? Nie jest to coś szczególnie użytecznego. Prędkość możemy zapisać jako gradient potencjału po prostu dlatego, że przepływ jest bezwirowy. W analogii do elektrostatyki ψ nazywamy *potencjałem prędkości*, choć nie jest to wielkość związana z energią potencjalną na podobieństwo wielkości ϕ . Ponieważ dywergencja \mathbf{v} równa jest zeru, mamy

$$\nabla \cdot (\nabla\psi) = \nabla^2\psi = 0. \tag{12.31}$$

Potencjał prędkości spełnia takie samo równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał elektrostatyczny w próżni ($\rho = 0$).

Weźmy jakiś problem przepływu bezwirowego i popatrzmy, czy możemy go rozwiązać przy użyciu metod, których się nauczyliśmy. Rozważmy zagadnienie kuli opadającej w cieczy. Jeżeli porusza się ona zbyt wolno, siły lepkości, które pomijamy, będą miały duże znaczenie. Jeżeli z kolei ruch jest zbyt szybki, w ślad za kulą pojawiają się małe wiry (turbulencje) i w wodzie wystąpi pewne krążenie. Ale jeżeli kula nie porusza się ani zbyt szybko, ani zbyt wolno, jest mniej lub bardziej prawdziwe, że będą spełnione nasze założenia i że wobec tego przepływ możemy opisywać naszymi prostymi równaniami.

To, co się dzieje, wygodnie jest opisywać w układzie odniesienia *związany z kulą*. W jaki sposób woda opływa spoczywającą kulę, gdy przepływ w dużej odległości od tej kuli jest jednostajny, tzn. gdy z dala od kuli przepływ jest wszędzie taki sam? Przepływ w pobliżu kuli będzie taki, jak pokazują linie prądu z rys. 12.8. Linie te, zawsze styczne do wektora \mathbf{v} , odpowiadają liniom sił pola elektrycznego. Chcemy uzyskać ilościowy opis pola prędkości, tzn. otrzymać wyrażenie na prędkość w dowolnym punkcie P .

Prędkość możemy znaleźć z gradientu ψ , wobec czego obliczmy najpierw potencjał. Chcemy mieć potencjał, który wszędzie spełnia równanie (12.31) i który prócz tego czyni zadość dwu warunkom: 1) nie ma przepływu w obszarze kulistym wewnątrz powierzchni kuli oraz 2) przepływ jest stały na dużych odległościach. Aby spełniony był warunek 1, musi znikać składowa normalna prędkości na powierzchni kuli. Znaczy to, że $\partial\psi/\partial r$ wynosi zero dla $r = a$. Aby spełniony był warunek 2, należy przyjąć $\partial\psi/\partial z = v_0$ we wszystkich punktach, dla których $r \gg a$. Ściśle biorąc, w elektrostatyce nie ma przypadku odpowiadającego dokładnie naszemu zagadnieniu. Odpowiada on bowiem umieszczeniu kuli o stałej dielektrycznej równej zero w jednorodnym polu elektrycznym. Gdybyśmy znaleźli rozwiązanie zagadnienia kuli o stałej dielektrycznej κ w polu jednorodnym, przez przejście z κ do zera otrzymalibyśmy od razu rozwiązanie naszego problemu.

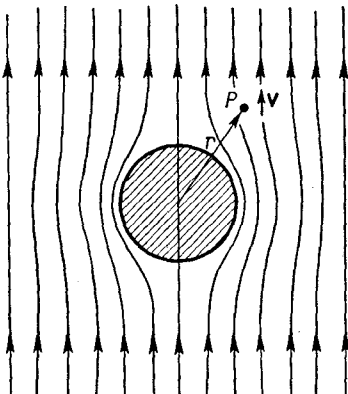
Nie opracowaliśmy dokładnie tego szczególnego problemu elektrostatycznego, lecz zrobmy to teraz. (Mogliśmybyśmy zająć się wprost zagadnieniem przepływu z prędkością \mathbf{v} i gradientem ψ , ale będziemy się posługiwać polami \mathbf{E} i φ , gdyż przyzwyczailiśmy się do nich.)

Problem jest następujący: znaleźć rozwiązanie równania $\nabla^2\varphi = 0$ takie, że $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ jest stałe, powiedzmy równe \mathbf{E}_0 dla dużych r , i takie zarazem, że składowa radialna E równa jest zero dla $r = a$. Inaczej mówiąc

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (12.32)$$

Problem nasz zawiera warunek brzegowy nowego typu, nie taki aby potencjał φ był stały na pewnej powierzchni, lecz taki, aby stałą wartość miała po-

12.8. Pole prędkości bezwirowego przepływu wokół kuli



chodna $\partial\varphi/\partial r$. Jest to coś trochę innego. Niełatwo można tu dać odpowiedź od razu. Przede wszystkim, gdyby nie było kuli, potencjał φ byłby równy $-E_0 z$. Wtedy pole \mathbf{E} miałoby kierunek osi z i wszędzie stałą wartość E_0 . Zajmowaliśmy się już przypadkiem kuli dielektrycznej jednorodnie spolaryzowanej i przekonaaliśmy się, że pole wewnątrz takiej spolaryzowanej kuli jest jednorodne, a na zewnątrz niej pole to jest takie, jakie by wytwarzał dipol punktowy umieszczony w centrum. Odgadujemy, że rozwiązanie, którego szukamy, jest superpozycją pola jednorodnego i pola dipola. Potencjał dipola (rozdz. 6) wynosi $pz/(4\pi\epsilon_0 r^3)$. Załóżmy zatem, że

$$\varphi = -E_0 z + \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (12.33)$$

Ponieważ pole dipola maleje jak r^{-3} , w dużej odległości od kuli mamy właśnie pole E_0 . Odgadnięte rozwiązanie spełnia automatycznie warunek 2 sformułowany powyżej. Co jednak mamy przyjąć za wartość momentu dipolowego p ? Aby go znaleźć, możemy się posłużyć drugim warunkiem na φ , a mianowicie równaniem (12.32). Musimy zróżniczkować φ względem r , ale oczywiście należy to zrobić przy ustalonym kącie θ , wobec czego wygodniej jest najpierw wyrazić φ przez r i θ , a nie przez z i r . Ponieważ $z = r \cos \theta$, dostajemy

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (12.34)$$

Radialna składowa pola \mathbf{E} wynosi

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = +E_0 \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (12.35)$$

Powinna ona być równa zeru dla $r = a$ i dla wszystkich θ . Będzie tak, jeżeli

$$p = -2\pi\epsilon_0 a^3 E_0. \quad (12.36)$$

Zanotujmy uważnie, że gdyby oba wyrazy w równaniu (12.35) nie wykazywały tej samej zależności od kąta θ , to nie można by było tak wybrać p , aby zależność (12.35) była spełniona dla wszystkich kątów przy $r = a$. To, że dostaliśmy dobry wynik, świadczy o tym, że dobrze odgadliśmy kształt potencjału w równaniu (12.33). Oczywiście, odgadując go spoglądaliśmy w przyszłość; wiedzieliśmy, że potrzebny jest nam inny wyraz, który po pierwsze — spełnia równanie $\nabla^2\varphi = 0$ (każde rzeczywiste pole by je spełniało), po drugie — zależy od $\cos \theta$ oraz po trzecie — maleje do zera dla dużych r . Pole dipola jest jedynym polem, które spełnia wszystkie te trzy warunki.

Korzystając z równania (12.36) zapisujemy potencjał w postaci

$$\varphi = -E_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.37)$$

Rozwiązanie problemu przepływu cieczy jest więc po prostu dane wzorem

$$\psi = -v_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.38)$$

Łatwo można znaleźć prędkość z tego potencjału. Nie będziemy się jednak tą kwestią dalej zajmować.

12-6. Jednorodne oświetlenie płaszczyzny

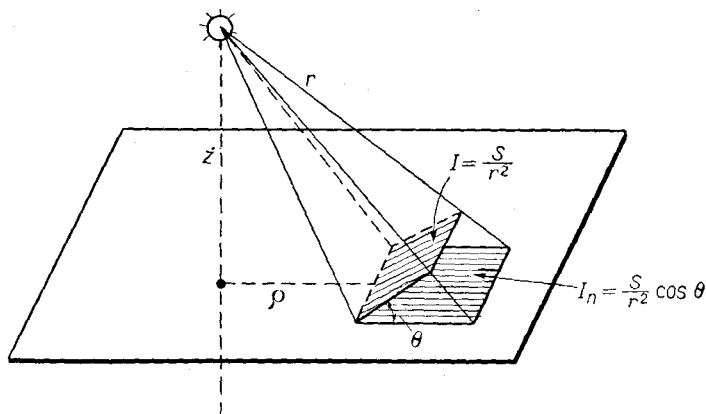
W tym paragrafie przechodzimy do rozpatrzenia zupełnie innego problemu fizycznego, chcemy bowiem przedstawić wielką różnorodność możliwych przypadków. Tym razem zajmiemy się czymś, co doprowadzi do *całki* tego samego typu, który napotkaliśmy w elektrostatyce. (Jeżeli problem matematyczny daje nam pewną całkę, to wiemy coś o jej właściwościach, jeżeli z taką całką mieliśmy już do czynienia w innym wypadku.) Weźmy przykład z techniki oświetlenia. Załóżmy, że mamy źródło światła w odległości a powyżej płaskiej powierzchni. Jakie jest oświetlenie tej powierzchni, tzn. jaka jest energia promienista na jednostkę czasu, padająca na jednostkę powierzchni tej płaszczyzny (patrz rys. 12.9)? Przypuśćmy, że źródło ma symetrię kulistą, tak że światło emitowane jest jednakowo we wszystkich kierunkach. Wówczas ilość energii promienistej, która przechodzi przez jednostkową powierzchnię *pod kątem prostym* do kierunku rozchodzenia się światła zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości. Jest oczywiste, że natężenie światła w kierunku prostopadłym do strumienia jest dane wzorem tego samego typu, co i pole elektryczne wytwarzane przez ładunek punktowy. Jeżeli promienie światła padają na powierzchnię pod kątem θ do normalnej, wówczas I , energia docierająca *do powierzchni jednostkowej*, jest $\cos \theta$ razy mniejsza, gdyż taka sama energia pada na pole większe $1/\cos \theta$ razy. Jeżeli oznaczymy natężenie naszego źródła światła literą S , wtedy I_n , oświetlenie powierzchni, wynosi

$$I_n = \frac{S}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}, \quad (12.39)$$

gdzie \mathbf{e}_r jest wektorem jednostkowym poprowadzonym ze źródła, \mathbf{n} zaś jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni. Oświetlenie I_n odpowiada składowej normalnej pola elektrycznego pochodzącego od ładunku punktowego o wielkości $\epsilon_0 S$. Wiedząc to, widzimy, że dla dowolnego rozkładu źródeł światła możemy znaleźć odpowiedź rozwiązując odpowiedni problem elektrostatyczny. Składową pionową pola elektrycznego na płaszczyźnie pochodzącego od jakiegoś rozkładu ładunków obliczamy w ten sam sposób, jak zrobilibyśmy to w przypadku źródeł światła^{*)}.

Rozważmy następujący przykład. Chcielibyśmy, aby w pewnej szczególnej sytuacji doświadczalnej górna powierzchnia stołu była oświetlona równomiernie. Mamy do dyspozycji długie rury lamp fluorescencyjnych, które promieniają jednostajnie wzdłuż swej długości. Możemy oświetlić stół umieszczając je regularnie na suficie, który się znajduje na wysokości z nad stołem. Pytanie: Jaki może być największy odstęp b między sąsiednimi rurami, które mamy użyć, jeżeli oświetlenie powierzchni ma być jednostajne z dokładnością

^{*)} Ponieważ mówimy tu o źródłach światła niespójnych, których *natężenia* zawsze się dodają liniowo-przeźto analogiczne ładunki elektryczne będą miały zawsze ten sam znak. Co więcej, nasza analogia znajduje zastosowanie tylko do energii świetlnej padającej na wierzchnią stronę powierzchni nieprzezroczystej, wobec czego w naszej całce musimy uwzględnić tylko te źródła, które świecą na powierzchnię z góry (a nie, oczywiście, źródła umieszczone pod powierzchnią!).



12.9. Oświetlenie I_n powierzchni jest to energia promienista padająca na jednostkę powierzchni oświetlanej w ciągu jednostkowego czasu.

powiedzmy do $\frac{1}{1000}$? *Odpowiedź:* Należy znaleźć pole elektryczne wytwarzane przez drucianą kratę z odstępem b między kolejnymi drutami, z których każdy jest jednostajnie naładowany, obliczyć składową pionową pola elektrycznego i wreszcie przekonać się, jaki powinien być ten odstęp b , aby wahania pola nie przekraczały jednego promille.

Widzieliśmy (rozdz. 7), że pole elektryczne pochodzące od kraty naładowanych drutów można było przedstawić w postaci sumy wyrazów, z których każdy dawał sinusoidalną zmienność pola z okresem b/n , gdzie n jest liczbą całkowitą. Amplituda każdego z tych wyrazów dana jest równaniem (7.44):

$$F_n = A_n \exp(-2\pi n z/b).$$

Wystarczy się ograniczać tylko do $n = 1$ tak długo, jak długo chcemy obliczać pole w punktach niezbyt bliskich kraty. W celu uzyskania pełnego rozwiązania musielibyśmy wyznaczać współczynniki A_n , których jeszcze nie mamy (choć rachunek ten jest łatwy). Ponieważ jednak potrzebny jest nam tylko współczynnik A_1 , możemy oszacować, że wartość jego jest z grubsza taka sama, jak średnia wartość pola. Czynniki wykładnicze dałby nam wtedy od razu *względna* amplitudę wahań pola. Jeżeli chcemy, by czynnik ten był równy 10^{-3} , znajdujemy $b = 0,91 z$. Jeżeli rozmieścimy rury w odległościach równych $\frac{3}{4}$ odległości od sufitu, czynnik wykładniczy wyniesie $\frac{1}{4000}$, wobec czego mamy margines bezpieczeństwa wyrażający się czynnikiem 4. Możemy być wtedy całkiem pewni, że oświetlenie będzie stałe z dokładnością do jednego promille. (Ścisłe obliczenie wykazałoby, że współczynnik A_1 równa się naprawdę podwojonej wartości średniej pola, wobec czego dokładna odpowiedź wynosi $b = 0,8 z$.) Jest trochę zaskakujące, że przy tak równomiernym oświetleniu odstęp między rurami jest tak duży.

12-7. „Podstawowa jedność” przyrody

W tym rozdziale chcieliśmy pokazać, że ucząc się elektrostatyki nauczyliśmy się tym samym, jak dawać sobie radę z wieloma innymi zagadnieniami fizycznymi, i że pamiętając o tym, można się nauczyć prawie całej fizyki w ograniczonej liczbie lat.

Jednakże z pewnością na końcu takich rozważań nasuwa się pytanie: *Dlaczego równania dla odmiennych zjawisk są tak do siebie podobne?* Moglibyśmy powiedzieć: „Wynika to z podstawowej jedności przyrody”. Ale co to znaczy? Co *mogłoby* znaczyć takie stwierdzenie? Mogłoby po prostu znaczyć, że równania dla odmiennych zjawisk są podobne; ale to oczywiście nie byłaby żadna odpowiedź. „Podstawowa jedność” mogłaby znaczyć, że wszystko jest zrobione z tej samej materii, wobec czego spełnia te same równania. Wygląda to na dobre wyjaśnienie, ale pomyślmy chwilę. Potencjał elektrostatyczny, dyfuzja neutronów, przepływ ciepła — czy aby rzeczywiście mamy tu do czynienia z tym samym? Czy rzeczywiście możemy sobie wyobrazić, że potencjał elektrostatyczny jest *fizycznie* tożsamy z temperaturą, czy też z gęstością cząstek? Z pewnością potencjał ϕ nie jest *dokładnie tym samym*, czym energia cieplna cząstek. Przesunięcie membrany z pewnością *nie* jest podobne do temperatury. Dlaczego zatem istnieje jakaś „podstawowa jedność”?

Blizsze spojrzenie na fizykę rozmaitych zagadnień pokazuje w rzeczywistości, że równania naprawdę nie są identyczne. Równanie, które znaleźliśmy dla dyfuzji neutronów, jest tylko przybliżeniem, słusznym wtedy, gdy odległości nas interesujące są duże w porównaniu ze średnią drogą swobodną. Jeżeli przyjrzymy się temu bliżej, stwierdzimy, że pojedynczy neutron wałęsa się tu i tam. Z pewnością ruch pojedynczego neutronu całkowicie różni się od zmiany opisywanej gładką funkcją, którą uzyskaliśmy rozwiązując równanie różniczkowe. Równanie różniczkowe jest przybliżeniem, ponieważ zakładamy, że neutrony są rozłożone „gładko” w *przestrzeni*.

Czyżby *to* był właściwy trop? Czyżby tym jedynym czynnikiem wspólnym dla wszystkich zjawisk była *przestrzeń*, ramy, w których mieści się cała fizyka? Jak długo rozważane wielkości są dostatecznie „gładkie”, tak długo znaczenie mieć będą tylko szybkości zmian poszczególnych wielkości z położeniem w przestrzeni. Z tego właśnie powodu zawsze dostajemy równanie zawierające gradient. Pochodne *muszą* występować w postaci gradientu lub dywergencji; ponieważ prawa fizyki nie zależą *od wyboru kierunku*, muszą się dać wyrazić w postaci wektorowej. Równania elektrostatyki są najprostszymi równaniami wektorowymi, jakie tylko można otrzymać, zawierającymi jedynie przestrzenne pochodne wielkości fizycznych. Każdy inny *prosty* problem — lub uproszczenie problemu skomplikowanego — musi mieć matematyczną postać zagadnienia elektrostatycznego. Co jest wspólne we wszystkich naszych problemach? To, że zawierają one *przestrzeń*, i to, że posługując się prostym równaniem różniczkowym *naśladujemy* coś, co naprawdę jest skomplikowanym zjawiskiem.

Wiedzie to nas do innego interesującego problemu: Czy twierdzenie to jest być może słuszne także dla równań *elektrostatycznych*? Czy są one poprawne tylko jako „wygładzona” imitacja znacznie bardziej w rzeczywistości skomplikowanego świata mikroskopowego? Czy nie mogłoby się zdarzyć, że rzeczywisty świat składa się z małych X-onów, które można zauważyć tylko na *bardzo* małych odległościach? I że w naszych pomiarach zawsze widzimy

wszystko w tak dużej skali, że nie możemy zaobserwować tych małych X-onów, i to właśnie jest przyczyną, dla której dostajemy równania różniczkowe?

Nasza obecnie najbardziej kompletna teoria elektrodynamiki rzeczywiście napotyka trudności rozważając bardzo małe odległości. Tak więc jest w zasadzie możliwe, że równania te są „wygładzoną” wersją innej teorii. Wydaje się, że są one poprawne aż do 10^{-14} cm, ale kto wie, czy nie są one fałszywe dla mniejszych odległości. Być może, istnieje jakiś niewykryty dotychczas „mechanizm”, i szczegóły leżące u podstaw złożoności są ukryte w „gładko” wyglądających równaniach — jak w przypadku „gładkiej” dyfuzji neutronów. Ale nikt jeszcze nie sformułował dobrej teorii, opartej na takich założeniach.

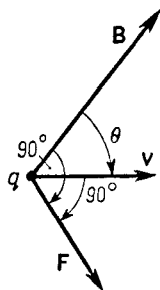
Dosyć dziwny jest fakt (który zachodzi z przyczyn nie całkiem dla nas zrozumiałych), że połączenie teorii względności i mechaniki kwantowej, o ile je znamy, zdaje się *zabraniać* wymyślenia równania, które by zasadniczo różniło się od równania (12.4) i które zarazem nie prowadziłyby do jakiegś sprzeczności. Nie po prostu do niezgodności z doświadczeniem, ale do *sprzeczności wewnętrznej*. Takiej, na przykład, jak przewidywanie, że suma prawdopodobieństw wszystkich możliwych zdarzeń nie jest równa jedności lub że energie mogą czasem przybierać wartości zespolone, czy jakiegoś innego idiotyzmu tego rodzaju. Nikt, jak dotąd, nie zbudował teorii elektryczności, w której prawo $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ rozumiane jest jako wygładzone przybliżenie jakiegoś bardziej podstawowego mechanizmu i które ostatecznie nie prowadziłyby do jakiegoś absurdalnego wniosku. Ale, dodać trzeba, jest też prawdą, że założenie, iż prawo $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ jest słuszne dla wszystkich odległości, nawet dowolnie małych, także ze swej strony prowadzi do absurdalnych wniosków (energia elektryczna elektronu jest nieskończona) — wniosków, których nikt jeszcze nie umie unikać.

 magnetostatyka

13-1. Pole magnetyczne

Siła działająca na ładunek elektryczny zależy nie tylko od tego, gdzie się on znajduje, ale także od tego, jak szybko się porusza. Każdy punkt w przestrzeni jest scharakteryzowany dwiema wielkościami wektorowymi, które wyznaczają siłę działającą na dowolny ładunek. Po pierwsze, istnieje *siła elektryczna*, która jest tą składową siły całkowitej, która nie zależy od ruchu ładunku. Siłę tę opisujemy wprowadzając pole elektryczne \mathbf{E} . Po

13.1. Zależna od prędkości składowa siły działającej na poruszający się ładunek jest prostopadła do \mathbf{v} oraz do \mathbf{B} . Jest też proporcjonalna do składowej \mathbf{v} w kierunku prostopadłym do \mathbf{B} , to znaczy do $\mathbf{v} \sin \theta$.



drugie, występuje dodatkowa siła, zwana *siłą magnetyczną*, która zależy od prędkości ładunku. Ta siła magnetyczna ma dziwny kierunek: w dowolnym punkcie przestrzeni zarówno *kierunek* siły, jak i jej *wartość* zależą od kierunku ruchu cząstki; co więcej w każdym punkcie siła zawsze jest prostopadła do pewnego *ustalonego kierunku w przestrzeni* (patrz rys. 13.1). I wreszcie, wartość siły jest proporcjonalna do wartości *składowej* prędkości, prostopadłej do tego właśnie wybranego kierunku. Wszystko to możemy opisać wprowadzając wektor pola magnetycznego \mathbf{B} , który wyznacza zarówno ów wybrany kierunek w przestrzeni, jak i stałą proporcjonalności występującą w zależności siły od prędkości. Piszemy więc siłę magnetyczną w postaci $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Całkowita siła elektromagnetyczna działająca na ładunek wynosi zatem

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (13.1)$$

Jest ona zwana *siłą Lorentza*.

Siłę magnetyczną możemy łatwo zademonstrować umieszczając namagnesowaną sztabkę w pobliżu lampy oscyloskopowej. Odchylenie wiązki elektronów wskazuje na fakt, że obecność magnesu przejawia się w działaniu na elektrony sił w kierunku prostopadłym do ich kierunku ruchu, jak to opisaliśmy w rozdz. 12 tomu I (cz. 1).

Jednostką pola magnetycznego B jest oczywiście jeden niuton razy sekunda, dzielone przez kulomb razy metr. Ta sama jednostka jest też równa jednemu woltowi razy sekunda na metr kwadratowy. Jest ona także zwana jednym *weberem na metr kwadratowy**).

13-2. Prąd elektryczny; zasada zachowania ładunku

Zastanówmy się przede wszystkim, jak możemy sobie wyobrazić działanie sił magnetycznych na przewody z prądem elektrycznym. W tym celu okreśmy, co rozumiemy przez gęstość prądu. Prądy elektryczne są to elektrony, bądź też inne ładunki znajdujące się w ruchu z pewnym wypadkowym przepływem. Przepływ ładunku możemy przedstawić za pomocą wektora, który określa ilość ładunku przechodzącą w ciągu jednostkowego czasu przez powierzchnię o jednostkowym polu, ustawioną prostopadłe do kierunku przepływu (tak jak zrobiliśmy w wypadku przepływu ciepła). Wektor ten nazywamy *gęstością prądu* i oznaczamy literą j . Skierowany jest on zgodnie z kierunkiem ruchu ładunków. Jeżeli weźmiemy małą powierzchnię ΔS w danym miejscu w ciele materialnym, to ilość ładunku przepływająca przez tę powierzchnię w jednostce czasu wynosi

$$j \cdot n \Delta S, \quad (13.2)$$

gdzie n jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni ΔS .

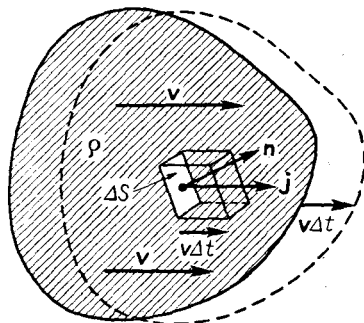
Gęstość prądu jest związana ze średnią prędkością przepływu ładunków. Przypuśćmy, że mamy rozkład ładunków, którego średni ruch odbywa się z prędkością v . Gdy ów rozkład przechodzi przez powierzchnię ΔS , ładunek Δq przechodzący przez tę powierzchnię w czasie Δt równy jest ładunkowi zawartemu w równoległościanie o podstawie ΔS i o wysokości $v \Delta t$, jak pokazuje rys. 13.2. Objętość tego równoległościanu jest rzutem powierzchni ΔS na płaszczyznę prostopadłą do prędkości v razy $v \Delta t$; pomnożenie tej objętości jeszcze przez gęstość ładunku daje Δq . Zatem

$$\Delta q = \rho v \cdot n \Delta S \Delta t.$$

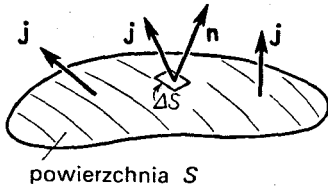
Ładunek na jednostkę czasu równa się więc $\rho v \cdot n \Delta S$, skąd dostajemy

$$j = \rho v. \quad (13.3)$$

13.2. Jeżeli rozkład ładunku o gęstości ρ porusza się z prędkością v , to ładunek na jednostkę czasu przechodzący przez powierzchnię ΔS wynosi $\rho v \cdot n \Delta S$.



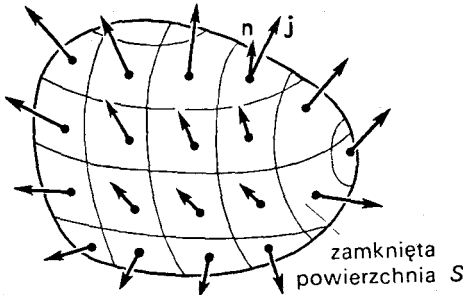
*) Albo krótko — *tesla*. (Przyp. red. wyd. polskiego.)



powierzchnia S

13.3. Natężenie prądu I przez powierzchnię S wynosi $\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$.

13.4. Całka z $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ przez powierzchnię zamkniętą równa jest szybkości zmian ładunku całkowitego Q wewnątrz tej powierzchni.

zamknięta
powierzchnia S

elektryczne mogą się przemieszczać z jednego miejsca w inne, ale nigdy nie biorą się znikąd. Mówimy więc, że *ładunek elektryczny jest zachowany*. Jeśli występuje jakiś wypadkowy wypływ poprzez powierzchnię zamkniętą, to ilość ładunku w obszarze zawartym wewnątrz tej powierzchni musi odpowiednio maleć (rys. 13.4). Możemy więc napisać zasadę zachowania ładunku w postaci

$$\int_{\text{dowolna zamknięta powierzchnia}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} (Q_{\text{wewn}}). \quad (13.6)$$

Ładunek zawarty wewnątrz tej powierzchni możemy przedstawić jako całkę przestrzenną z gęstości ładunku:

$$Q_{\text{wewn}} = \int_{\text{wewnątrz } S} \rho dV. \quad (13.7)$$

Jeżeli zastosujemy wzór (13.6) do małego obszaru ΔV , przekonamy się, że całka po lewej stronie tego wzoru równa jest $\nabla \cdot \mathbf{j} \Delta V$. Ładunek wewnątrz wynosi $\rho \Delta V$, wobec czego zasada zachowania ładunku znajduje następującą postać matematyczną:

Jeżeli rozkład ładunków składa się z pojedynczych ładunków, powiedzmy elektronów, z których każdy ma ładunek q i porusza się z prędkością v , to gęstość prądu wynosi

$$\mathbf{j} = Nq\mathbf{v}, \quad (13.4)$$

gdzie N oznacza liczbę ładunków w jednostce objętości.

Całkowity ładunek przechodzący w jednostce czasu przez jakąś powierzchnię S zwany jest *natężeniem prądu elektrycznego* I . Jest on równy całce ze składowej normalnej gęstości prądu, scałkowanej po całej rozważanej powierzchni:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (13.5)$$

(patrz rys. 13.3).

Natężenie prądu I wychodzącego z zamkniętej powierzchni S przedstawia szybkość, z jaką ładunek opuszcza obszar V otoczony powierzchnią S . Jedno z podstawowych praw fizyki głosi, że *ładunek elektryczny jest niezniszczalny*; nigdy nie ginie i nie może być stworzony. Ładunki

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (13.8)$$

(jeszcze raz matematyczna teoria Gaussa!).

13-3. Siła magnetyczna działająca na prąd

Jesteśmy teraz przygotowani do znalezienia siły działającej na przewód z prądem elektrycznym, umieszczony w polu magnetycznym. Prąd składa się z naładowanych cząstek poruszających się z prędkością \mathbf{v} wzdłuż przewodu. Każdy ładunek doznaje działania siły poprzecznej

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

(rys. 13.5a). Jeżeli w jednostce objętości jest N takich ładunków, to ich liczba w małym obszarze ΔV przewodu wynosi $N \Delta V$. Całkowita siła magnetyczna $\Delta \mathbf{F}$, działająca na obszar ΔV , jest sumą sił działających na poszczególne ładunki, czyli

$$\Delta \mathbf{F} = (N \Delta V)(q\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Ale iloczyn $Nq\mathbf{v}$ jest równy \mathbf{j} , wobec czego

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \Delta V \quad (13.9)$$

(rys. 13.5b). Siła na jednostkę objętości wynosi $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$.

Jeżeli prąd płynie ze stałą gęstością na całej powierzchni przekroju przewodu równej A , możemy wziąć jako element objętości walec o podstawie A i o długości ΔL . Wtedy

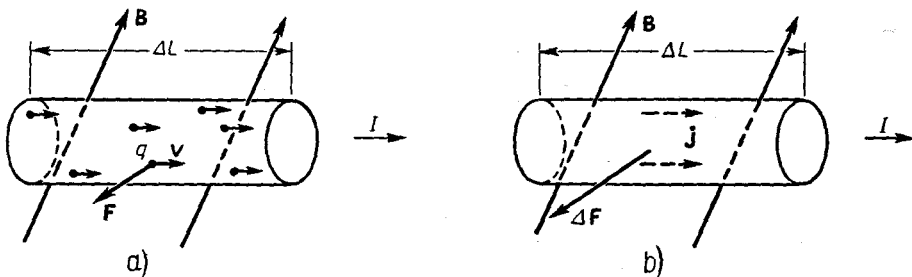
$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} A \Delta L. \quad (13.10)$$

Możemy teraz wielkość $\mathbf{j}A$ nazwać wektorem natężenia prądu \mathbf{I} . (Jego długość jest równa natężeniu prądu w przewodzie, a jego kierunek zgodny jest z kierunkiem przewodu.) Zatem

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \Delta L. \quad (13.11)$$

Siła działająca na jednostkę długości przewodu wynosi $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$.

13.5. Siła magnetyczna działająca na przewód z prądem równa jest sumie sił działających na pojedyncze poruszające się ładunki.



Równanie to wiedzie do ważnego wniosku, a mianowicie, że siła magnetyczna działająca na przewodnik, związana z ruchem ładunków w tym przewodzie, zależy jedynie od całkowitego natężenia prądu, a nie od tego, jaki ładunek niesie każda z cząstek — a nawet od tego, jaki jest znak tego ładunku! Siłę magnetyczną działającą na przewodnik umieszczony w pobliżu magnesu można łatwo zademonstrować — wystarczy obserwować jego odchylenie, gdy prąd jest włączony, jak opisaliśmy to w rozdz. 1 (patrz rys. 1.6).

13-4. Pole magnetyczne prądu stałego; prawo Ampère'a

Widzieliśmy, że na przewodnik z prądem działa siła, jeśli przewodnik ten umieścimy w polu magnetycznym, wytworzonym, powiedzmy, przez magnes. Na podstawie zasady głoszącej, że akcja równa się reakcji, moglibyśmy oczekiwać, że wystąpi także siła działająca na źródło pola magnetycznego, tj. na magnes, gdy w przewodzie płynie prąd*). Siły takie rzeczywiście istnieją, co można zaobserwować, ponieważ igła kompasu w pobliżu przewodu, w którym płynie prąd, wychyla się. Wiemy, że magnes doznaje tylko działania siły pochodzącej od innych magnesów, co znaczy, że gdy w przewodzie płynie prąd, sam przewodnik wytwarza pole magnetyczne. Wobec tego poruszające się ładunki *wytwarzają* pole magnetyczne. Chcielibyśmy teraz spróbować wykryć prawa opisujące powstawanie takich pól magnetycznych. Pytanie brzmi następująco: dany jest prąd; jakie pole magnetyczne on wytwarza? Odpowiedź na to pytanie znaleziono w trzech podstawowych doświadczeniach, a wynika ona także ze wspianego argumentu teoretycznego, podanego przez Ampère'a. Pomińmy tę interesującą kwestię rozwoju historycznego i powiemy po prostu, że bardzo wiele doświadczeń wykazało słuszność równań Maxwella. Przyjmiemy je za punkt wyjścia. Jeżeli pominiemy wyrazy zawierające pochodne czasowe w tych równaniach, dostaniemy równania *magnetostatyki*:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.12)$$

oraz

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (13.13)$$

Równania te są słuszne tylko wtedy, gdy wszystkie ładunki elektryczne mają stałą gęstość oraz gdy wszystkie prądy są stałe, tak że pola elektryczne i magnetyczne nie zmieniają się w czasie — wszystkie pola są „statyczne”.

Możemy tu zauważyć, że jest dość niebezpiecznie myśleć o czymś takim jak pole magnetyczne statyczne, gdyż przecież muszą istnieć prądy, aby w ogóle pole magnetyczne mogło powstać, a prądy pochodzą tylko od poruszających się ładunków. „Magnetostatyka” jest więc przybliżeniem. Odnosi się ona do sytuacji dynamicznych szczególnego rodzaju, gdy porusza się *wiele* ładunków, które możemy opisać w przybliżeniu jako stały przepływ ładunku. Tylko wtedy możemy mówić o gęstości prądu \mathbf{j} , która się nie zmienia w czasie.

*) Zobaczmy jednak potem, że takie założenia, ogólnie biorąc, *nie* są słuszne dla sił elektromagnetycznych!

Przedmiot, którym się zajmiemy, można by właściwiej określić jako badanie prądów stałych. Zakładając, że wszystkie pola są stałe, opuszczamy wszystkie wyrazy, takie jak $\partial \mathbf{E}/\partial t$ i $\partial \mathbf{B}/\partial t$ z pełnego układu równań Maxwella, (2.41), i uzyskujemy dwa równania, (13.12) i (13.13), napisane powyżej. Zauważmy też, że ponieważ dywergencja rotacji dowolnego wektora jest na pewno równa zeru, równanie (13.13) domaga się, aby $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Jest to prawda, na mocy równania (13.8), tylko wtedy, gdy $\partial \rho/\partial t$ jest równe zeru. Ale tak właśnie być musi, jeżeli pole \mathbf{E} nie zmienia się w czasie, wobec czego założenia nasze są spójne.

Żądanie, by $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, znaczy, że możemy mieć tylko ładunki, które poruszają się po torach zamkniętych. Mogą one, na przykład, płynąć w przewodach tworzących zamknięte pętle, zwane obwodami. Obwody mogą oczywiście zawierać prądnice lub baterie, które utrzymują przepływ ładunku, ale nie mogą zawierać kondensatorów, bez względu na to, czy ładują się one, czy rozładowują. (Później, oczywiście, rozciągniemy naszą teorię na przypadek pól dynamicznych, ale chcemy najpierw zbadać prostszy przypadek prądów stałych.)

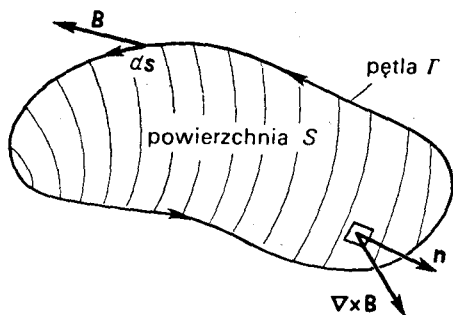
Popatrzmy teraz na równania (13.12) i (13.13), aby się przekonać, co one znaczą. Pierwsze z nich powiada, że dywergencja wektora \mathbf{B} znika. Porównując je z analogicznym równaniem w elektrostatyce, które mówi, że $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, możemy wyciągnąć wniosek, że nie ma magnetycznej analogii ładunku elektrycznego. *Nie ma ładunków magnetycznych*, z których mogłyby wychodzić linie sił pola \mathbf{B} . Jeżeli posługujemy się pojęciem „linii sił” pola wektorowego \mathbf{B} , to nie mogą się one ani zaczynać, ani też kończyć. A zatem skąd się one biorą? Pola magnetyczne pojawiają się w *obecności* prądów; mają one *rotację* proporcjonalną do gęstości prądu. Gdziekolwiek istnieją prądy, tam także występują linie sił pola magnetycznego, tworzące pętle wokół prądów. Ponieważ linie sił pola \mathbf{B} nie zaczynają się ani nie kończą, często zamykają się w sobie, tworząc zamknięte pętle. Mogą jednak występować skomplikowane przypadki, kiedy linie sił nie tworzą prostych zamkniętych pętli. W każdym jednak razie nigdy nie rozchodzą się one z punktów. Nie wykryto nigdy ładunków magnetycznych, wobec czego $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Jest to słuszne nie tylko w magnetostatyce, jest to słuszne *zawsze* — nawet dla pól dynamicznych.

Związek między polem \mathbf{B} i prądami zawarty jest w równaniu (13.13). Mamy tu sytuację nowego typu, która nader się różni od elektrostatyki, gdzie mieliśmy $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Równanie to znaczyło, że całka krzywoliniowa z pola \mathbf{E} wzdłuż dowolnej drogi zamkniętej równa się zeru:

$$\oint_{\text{pętla}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Wynik ten uzyskaliśmy z twierdzenia Stokesa, które nam mówi, że całka wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej z *dowolnego* pola wektorowego równa jest całce powierzchniowej ze składowej normalnej rotacji tego pola

13.6. Całka krzywoliniowa ze składowej stycznej wektora \mathbf{B} równa jest całce powierzchniowej ze składowej normalnej wektora $\nabla \times \mathbf{B}$.



(obliczanej na powierzchni rozpiętej na owej krzywej zamkniętej). Stosując to samo twierdzenie do wektora pola magnetycznego i posługując się symbolami podanymi na rys. 13.6, dostajemy

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (13.14)$$

Obliczając rotację \mathbf{B} z równania (13.13) mamy

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (13.15)$$

Całka z \mathbf{j} , zgodnie z wzorem (13.5), równa jest natężeniu prądu I przepływającego przez powierzchnię S . Ponieważ dla prądów stałych natężenie prądu przez powierzchnię S nie zależy od kształtu tej powierzchni, tak długo jak długo powierzchnia ta jest ograniczana przez krzywą Γ , zwykle mówimy o „prądzie przez pętlę Γ ”. Mamy zatem ogólne prawo: krążenie pola \mathbf{B} po dowolnej krzywej zamkniętej równe jest prądowi I przechodzącemu przez tę pętlę, podzielonemu przez $\epsilon_0 c^2$:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_{\text{przez pętlę } \Gamma}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.16)$$

Prawo to — zwane *prawem Ampère'a* — odgrywa taką samą rolę w magnetostatyce, jak prawo Gaussa w elektrostatyce. Prawo Ampère'a samo nie wyznacza jeszcze pola \mathbf{B} z prądów; ogólnie biorąc, potrzebne jest ponadto równanie $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Ale, jak zobaczymy w następnym paragrafie, możemy się posługiwać tym prawem do obliczania pola w specjalnych okolicznościach, które cechują pewne proste symetrie.

13-5. Pole magnetyczne przewodu prostoliniowego oraz solenoidu; prądy atomowe

Możemy zilustrować zastosowanie prawa Ampère'a znajdując pole magnetyczne w pobliżu przewodu. Pytamy: Jakie jest pole na zewnątrz długiego prostoliniowego przewodu o przekroju walcowym. Założymy coś, co wcale może nie być oczywiste, ale co mimo to jest prawdziwe, a mianowicie, że linie sił pola \mathbf{B} tworzą zamknięte okręgi wokół przewodu. Jeżeli zrobimy to założenie, to prawo Ampère'a (13.16) będzie nam mówiło, jak silne jest pole. Z symetrii problemu wynika, że pole \mathbf{B} ma tę samą wartość we wszystkich punktach położonych na całym okręgu o środku w środku przewodu (patrz rys. 13.7). Możemy zatem łatwo obliczyć całkę z wyrażenia $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$; jest ona po prostu równa wartości pola \mathbf{B} , mnożonej przez obwód koła. Jeżeli r jest jego promieniem, to

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r.$$

Całkowity prąd płynący przez pętlę jest to po prostu ten prąd, który płynie przewodem, wobec czego

$$B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2},$$

czyli

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r}. \quad (13.17)$$

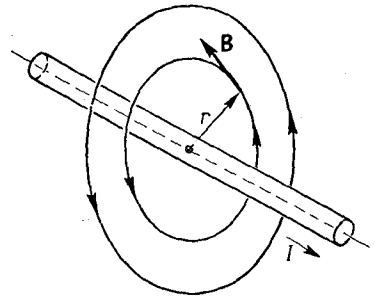
Natężenie pola magnetycznego maleje z odległością jak $1/r$, gdzie r jest odległością od osi przewodu. Możemy, jeśli mamy ochotę, zapisać równanie (13.17) w postaci wektorowej. Pamiętając, że pole \mathbf{B} jest prostopadłe zarówno do \mathbf{I} , jak i do \mathbf{r} , mamy

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\mathbf{I} \times \mathbf{e}_r}{r}. \quad (13.18)$$

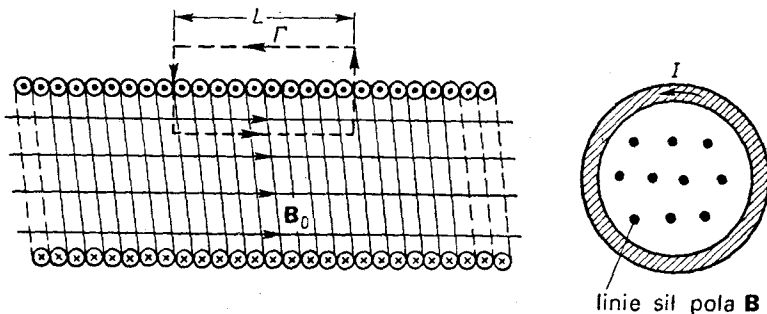
Wydzieliliśmy czynnik $1/4\pi\epsilon_0 c^2$, ponieważ pojawia się on często. Warto pamiętać, że równa się on dokładnie 10^{-7} (w układzie jednostek SI), ponieważ równanie takie jak (13.17) służy do zdefiniowania jednostki prądu, ampera. W odległości 1 m od przewodu z prądem o natężeniu 1 A pole magnetyczne wynosi $2 \cdot 10^{-7}$ Wb/m².

Ponieważ prąd wytwarza pole magnetyczne, będzie on wywierać pewną siłę na pobliski przewód, którym także płynie prąd. W rozdziale 1 opisaliśmy prosty pokaz działania sił między dwoma przewodami, w których płynie prąd. Jeśli przewody są równoległe, każdy z nich jest ustawiony prostopadłe do kierunku pola \mathbf{B} drugiego przewodu; przewody będą się wówczas wzajemnie przyciągały lub odpychały. Gdy prądy płyną w tym samym kierunku, przewody przyciągają się; kiedy zaś kierunki prądów są przeciwne, występuje odpychanie.

Weźmy teraz inny przykład, który można zbadać korzystając z prawa Ampère'a, jeżeli tylko dodamy trochę informacji dotyczących pola. Przypuśćmy, że mamy zwój drutu zwinętego wzdłuż linii śrubowej; w przekroju przedstawia to rys. 13.8. Taki zwój nazywamy *solenoidem*. W doświadczeniu obserwujemy, że gdy długość solenoidu jest duża



13.7. Pole magnetyczne na zewnątrz długiego przewodu z prądem o natężeniu I



13.8. Pole magnetyczne długiego solenoidu

w porównaniu ze średnicą, wówczas pole na zewnątrz jest bardzo małe w porównaniu z polem wewnątrz zwoju. Korzystając z tego tylko faktu i łącząc go z prawem Ampère'a, możemy obliczyć wartość pola wewnątrz zwoju.

Ponieważ pole *pozostaje* wewnątrz zwoju (i ma dywergencję równą zero), jego linie muszą biec równoległe do osi, jak pokazuje rys. 13.8. Skoro tak, możemy posłużyć się prawem Ampère'a, przyjmując za krzywą Γ prostokątną „krzywą” przedstawioną na rysunku. Ta pętla przebiega odległość L wewnątrz solenoidu, gdzie pole równe jest powiedzmy B_0 , następnie biegnie prostopadle do pola i zawraca na zewnątrz, gdzie pole można pominąć. Całka krzywoliniowa z pola \mathbf{B} wynosi dla tej krzywej po prostu $B_0 L$ i musi być równa $1/\epsilon_0 c^2$ razy całkowite natężenie prądu płynącego przez pętlę Γ , który wynosi NI , jeżeli mamy N skrętów solenoidu na długości L . Mamy

$$B_0 L = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}.$$

Przyjmując n równe liczbie zwojów solenoidu *na jednostkę długości* (czyli $n = N/L$), dostajemy

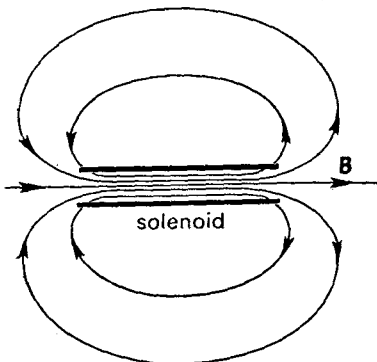
$$B_0 = \frac{nI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.19)$$

Co dzieje się z liniami sił pola \mathbf{B} , gdy wydostają się one na zewnątrz na końcach solenoidu? Zapewne rozpościerają się one jakoś i powracają, aby wejść do solenoidu jego drugim końcem, jak naszkicowaliśmy na rys. 13.9. Takie właśnie pole obserwujemy na zewnątrz magnesu sztabkowego. Ale czym w końcu *jest* magnes? Nasze równania mówią, że pole \mathbf{B} powstaje w obecności prądów. Wiemy jednakże, że zwykle sztabki żelazne (bez baterii czy generatorów) także wytwarzają pola magnetyczne. Można by oczekiwać, że po prawej stronie równań (13.12) czy (13.13) powinny występować jakieś inne wyrazy, które by reprezentowały „gęstość magnetycznego żelaza” lub inną wielkość tego rodzaju.

Jednakże takiego wyrazu nie ma. Nasza teoria mówi, że efekty magnetyczne wywołane przez żelazo pochodzą od pewnych prądów wewnętrznych, które już uwzględniliśmy w gęstości prądu \mathbf{j} .

Sprawa ta staje się bardzo skomplikowana, gdy się na nią popatrzy z punktu widzenia procesów elementarnych — co widzieliśmy, próbując zrozumieć właściwości dielektryków. Aby nie przerywać naszych obecnych rozważań, zaczekamy nieco i dopiero w następnych paragrafach zajmiemy się bardziej szczegółowo wewnętrznym mechanizmem substancji magnetycznych, takich jak żelazo. Na razie musimy się pogodzić z faktem, że cały magnetyzm jest wytwarzany przez prądy i że w magnecie stałym istnieją trwałe prądy wewnętrzne. W przypadku żelaza prądy te pochodzą od elektro-

13.9. Pole magnetyczne na zewnątrz solenoidu



nów wirujących wokół własnych osi. Każdy elektron wykonuje taki obrót, który odpowiada małowielkiemu krążącemu prądowi. Oczywiście, jeden elektron nie wytwarza dużego pola magnetycznego, ale w zwykłym kawałku żelaza istnieją miliardy i miliardy elektronów. Zwykle wirują one w sposób chaotyczny, wobec czego nie ma żadnego wypadkowego efektu. Cud polega na tym, że w bardzo niewielu substancjach, takich jak żelazo, duża część elektronów wiruje wokół osi ustawionych w tym samym kierunku — dla żelaza dwa elektrony z każdego atomu biorą udział w tym wspólnym ruchu. W sztabce magnetycznej istnieje wiele elektronów wirujących w tym samym kierunku i, jak zobaczymy, ich łączny efekt jest równoważny prądowi krążącemu po powierzchni sztabki. (Jest tu bliska analogia do sytuacji istniejącej w dielektrykach, która polega na tym, że jednostajnie spolaryzowany dielektryk jest równoważny pewnemu rozkładowi ładunków na swojej powierzchni.) Nie jest więc przypadkiem, że sztabka magnetyczna równoważna jest solenoidowi.

13-6. Względność pól magnetycznego i elektrycznego*)

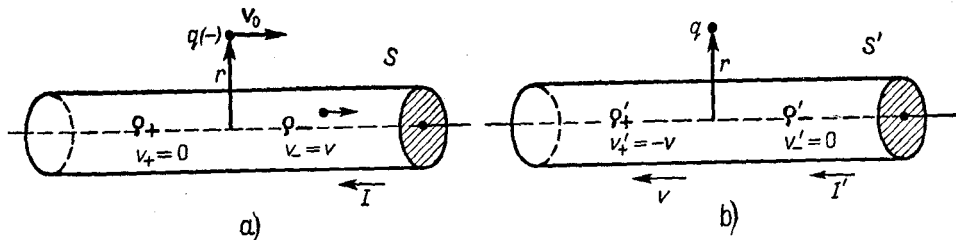
Gdy mówiliśmy, że siła magnetyczna działająca na ładunek jest proporcjonalna do jego prędkości, można się było zastanowić: „Do jakiej prędkości? Względem jakiego układu odniesienia?” Jest w gruncie rzeczy jasne z definicji pola \mathbf{B} danej na początku tego rozdziału, że będzie ona zależeć od tego, co wybierzemy za układ odniesienia, w którym będziemy mierzyć prędkości ładunków. Nie powiedzieliśmy jednak nic o tym, który układ jest właściwy do określania pola magnetycznego.

Okazuje się, że *każdy* układ inercjalny jest właściwy. Zobaczymy także, że magnetyzm i elektryczność nie są od siebie niezależne — że trzeba je zawsze łączyć w *jedno* pełne pole elektromagnetyczne. Choć w przypadku statycznym równania Maxwella dzielą się na dwie różne części — jedna z nich tworzy parę równań dla elektryczności, a druga — dla magnetyzmu, przy czym pozornie między oboma polami nie ma związku, mimo to jednak w samej przyrodzie istnieje bardzo ścisła zależność, która wynika z zasady względności. Chronologicznie rzecz biorąc, zasada względności została odkryta po równaniach Maxwella. W rzeczywistości właśnie badania elektryczności i magnetyzmu doprowadziły Einsteina ostatecznie do jego zasady względności. Ale zobaczymy, co zasada względności powie nam o siłach magnetycznych, jeżeli założymy, że stosuje się ona — a jest to prawda — do elektromagnetyzmu.

Przypuścimy, że zastanawiamy się nad tym, co się stanie, gdy ujemny ładunek będzie się poruszać z prędkością v_0 równoległą do przewodu z prądem, jak na rys 13.10. Spróbujemy zrozumieć, co się dzieje w dwu układach odniesienia: jednym, w którym spoczywa przewód, jak na rys 13.10a, oraz w drugim, w którym spoczywa cząstka, jak na rys. 13.10b. Pierwszy układ odniesienia oznaczymy literą S , a drugi — S' .

W układzie S na cząstkę działa oczywiście siła magnetyczna. Siła ta jest skierowana ku przewodowi, tak że jeżeli ładunek poruszałby się swobodnie, zobaczylibyśmy, że za-

*) Porównaj: Tom I, cz. 1, rozdz. 15 (*Szczególna teoria względności*).



13.10. Oddziaływanie przewodu z prądem i cząstki naładowanej widziane z dwu układów odniesienia. W układzie S (część a) przewód spoczywa, a w układzie S' (część b) spoczywa ładunek.

kręca on ku przewodowi. Ale w układzie S' nie może na cząstkę działać siła magnetyczna, gdyż jej prędkość znika. Czy cząstka spoczywa zatem stale w tym samym miejscu? Czy zobaczylibyśmy, że w tych dwu układach dzieje się coś innego? Zasada względności orzekłaby, że także w układzie S' powinniśmy widzieć, że cząstka zbliża się do przewodu. Musimy postarać się zrozumieć, dlaczego się to zdarzy.

Powróćmy do naszego atomowego opisu przewodu z prądem. W zwykłym przewodniku, np. w miedzi, prądy elektryczne pochodzą od ruchu pewnych elektronów ujemnie naładowanych, zwanych elektronami przewodnictwa, podczas gdy dodatnie ładunki jąder oraz pozostałe elektrony zostają w ustalonych miejscach w przewodzie. Niech gęstość elektronów przewodnictwa wynosi ρ_- , a ich prędkość w układzie S niech będzie równa v . Gęstość ładunków w spoczynku w układzie S jest równa ρ_+ i musi być równa ρ_- z przeciwnym znakiem, gdyż rozważamy przewód, który jako całość nie jest naładowany. Nie ma zatem pola elektrycznego na zewnątrz przewodu i siła działająca na poruszającą się cząstkę wynosi po prostu

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}.$$

Korzystając z wyniku przedstawionego zależnością (13.18) dla pola magnetycznego w odległości r od osi przewodu, wnioskujemy, że siła działająca na cząstkę jest skierowana ku przewodowi i ma wartość

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2Iqv_0}{r}.$$

Korzystając z równań (13.4) i (13.5) możemy napisać natężenie prądu I jako $\rho_- vA$, gdzie A jest polem powierzchni przekroju drutu. Zatem

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2q\rho_- Avv_0}{r}. \quad (13.20)$$

Moglibyśmy dalej prowadzić nasze rozważania dla ogólnego przypadku dowolnych prędkości v i v_0 , ale równie dobrze będzie przyrzeć się przypadkowi szczególnemu, dla którego prędkość v_0 cząstki jest taka sama jak prędkość v elektronów przewodnictwa. Tak więc piszemy $v_0 = v$ i równanie (13.20) przybiera postać

$$F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{r} \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.21)$$

Zwróćmy teraz naszą uwagę na to, co się dzieje w układzie S' , w którym cząstka jest w spoczynku, a przewód porusza się wstecz (w lewą stronę na rys. 10b) z prędkością v . Ładunki dodatnie poruszające się wraz z przewodem wytworzą pewne pole magnetyczne \mathbf{B} , działające na cząstkę. Ale teraz cząstka *spoczywa*, wobec czego nie działa na nią siła *magnetyczna*! Jeżeli jest jakaś siła, która na nią działa, musi pochodzić od pola elektrycznego. Widocznie poruszający się przewód wytworzył jakieś pole elektryczne. Ale mogło to nastąpić tylko pod tym warunkiem, że stał się on *naładowany*, a więc obojętny przewód z prądem musi się stawać naładowany w czasie ruchu.

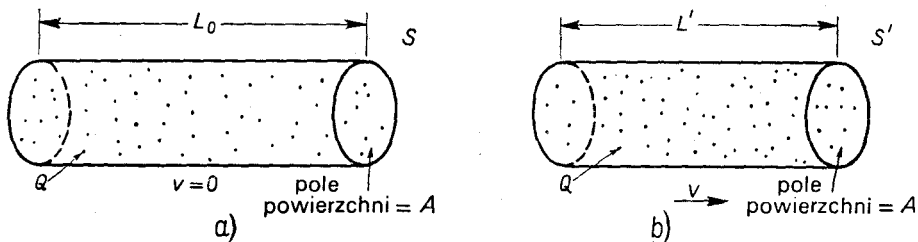
Musimy się temu przyjrzeć bliżej. Musimy spróbować obliczyć gęstość ładunku w przewodzie w układzie S' na podstawie tego, co wiemy o niej w układzie S . Można by w pierwszej chwili pomyśleć, że są one takie same; ale wiemy, że długości w obu układach S i S' są inne [patrz rozdz. 15 tomu I (cz. 1)], wobec czego zmieniają się także objętości. Ponieważ gęstości ładunku zależą od objętości wypełnionej ładunkiem, zatem gęstości także się zmieniają.

Zanim będziemy mogli zdecydować, jakie są gęstości ładunku w układzie S' , musimy wiedzieć, co się dzieje z ładunkiem elektrycznym wiązki elektronów, gdy elektrony te się poruszają. Wiemy, że masa pozorna cząstki zmienia się o czynnik $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Czy ładunek jej zmienia się w ten sam sposób? Nie! Ładunki są zawsze *takie same*, bez względu na to, czy się poruszają, czy nie. W innym wypadku nie moglibyśmy stwierdzić, że zasada zachowania całkowitego ładunku jest słuszna.

Przypuśćmy, że mamy bryłę materialną, powiedzmy przewodzącą, która początkowo nie jest naładowana. Następnie podgrzejmy ją. Ponieważ elektrony mają inną masę niż protony, przeto prędkości elektronów i protonów zmieniają się w rozmaity sposób. Gdyby ładunek cząstki zależał od prędkości tej cząstki, w ogrzanej bryle ładunki elektronów i protonów nie bilansowałyby się. Bryła ładowałaby się przy ogrzewaniu. Jak widzieliśmy poprzednio, bardzo mała zmiana ładunku wszystkich elektronów w bloku dawałaby wkład do niezmiernie silnych pól elektrycznych. Żaden efekt tego rodzaju nie został zaobserwowany.

Co więcej, wskaźmy, że średnia prędkość elektronów w materii zależy od jej składu chemicznego. Gdyby ładunek elektronu zmieniał się w zależności od prędkości, wypadkowy ładunek kawałka jakiejś substancji ulegałby zmianie w czasie reakcji chemicznej. Znowu łatwy rachunek wykazuje, że nawet bardzo słaba zależność ładunku od prędkości powodowałaby powstanie bardzo silnych pól z najprostszych reakcji chemicznych. Żaden efekt tego rodzaju nie został zaobserwowany, wnioskujemy zatem, że ładunek elektryczny pojedynczej cząstki nie zależy od jej stanu ruchu.

Wobec tego ładunek q cząstki jest niezmienniczą wielkością skalarną, niezależną od wyboru układu odniesienia. Znaczy to, że w dowolnym układzie odniesienia gęstość ładunków pewnego rozkładu elektronów jest po prostu proporcjonalna do liczby elektronów na jednostkę objętości. Musimy jedynie pamiętać o tym, że objętość *może* się zmieniać wskutek relatywistycznego skracania odległości.



13.11. Jeśli rozkład naładowanych cząstek w spoczynku ma gęstość ładunku ρ_0 , to te same ładunki mieć będą gęstość $\rho_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$, kiedy się je będzie obserwować z układu poruszającego się względem nich z prędkością względną v .

Zastosujemy teraz te idee do naszego poruszającego się przewodu. Jeżeli weźmiemy długość L_0 tego przewodu, w której mamy gęstość ładunku *stacjonarnego* ρ_0 , to ten odcinek przewodu będzie zawierał całkowity ładunek $Q = \rho_0 L_0 A_0$. Jeżeli te same ładunki obserwowane są w innym układzie odniesienia, w którym poruszają się one z prędkością v , to znajdziemy je w kawałku przewodu o *mniej* długości

$$L = L_0 \sqrt{1-v^2/c^2}, \quad (13.22)$$

ale o tej samej podstawie A_0 (gdyż rozmiary poprzeczne do kierunku ruchu nie ulegają zmianie). (Patrz rys. 13.11).

Jeżeli oznaczymy literą ρ gęstość ładunków w układzie, w którym się one poruszają, to ładunek całkowity Q wyniesie $\rho L A_0$. Wyrażenie to musi być równe $\rho_0 L_0 A_0$, gdyż ładunek ten jest taki sam we wszystkich układach, wobec czego $\rho L = \rho_0 L_0$, czyli z wzoru (13.22) mamy

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.23)$$

Gęstość ładunku poruszającego się *rozkładu* ładunków zmienia się tak samo jak relatywistyczna masa cząstki.

Zastosujemy teraz ten ogólny wynik do gęstości ładunku dodatniego ρ_+ naszego przewodu. Ładunki te są w spoczynku w układzie S . W układzie S' , jednakże, gęstość ładunku dodatniego przybiera wartość

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.24)$$

Ładunki *ujemne* są w układzie S' w spoczynku. Mają więc one swoją „gęstość spoczynkową” ρ_0 w tymże układzie. W równaniu (13.23) $\rho_0 = \rho'_-$, ponieważ ładunki mają gęstość ρ'_- , kiedy *drut* spoczywa, tj. w układzie S , w którym prędkość ładunków ujemnych wynosi v . Dla elektronów przewodnictwa mamy więc

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (13.25)$$

czyli

$$e'_- = e_- \sqrt{1-v^2/c^2}. \quad (13.26)$$

Możemy teraz zobaczyć, dlaczego w układzie S' wystąpią pola elektryczne: ponieważ w układzie tym przewod ma gęstość wypadkową e' daną wzorem

$$e' = e'_+ + e'_-.$$

Korzystając z równań (13.24) i (13.26) mamy

$$e' = \frac{e_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e_- \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Ponieważ drut spoczywający nie jest naładowany, $e_- = -e_+$, mamy

$$e' = e_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.27)$$

Poruszający się przewod jest naładowany dodatnio i wytworzy pole elektryczne E' , działające na cząstkę znajdującą się na zewnątrz. Rozwiązaliśmy już zagadnienie elektrostatyczne walca naładowanego ładunkiem o stałej gęstości. Pole elektryczne w odległości r od osi tego walca wynosi

$$E' = \frac{e'_+ A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{e_+ A v^2/c^2}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.28)$$

Siła działająca na ujemnie naładowaną cząstkę skierowana jest ku przewodowi. Z obu punktów widzenia mamy więc do czynienia z siłą działającą w tym samym kierunku; siła elektryczna w układzie S' ma ten sam kierunek, co siła magnetyczna w układzie S .

Wartość siły w układzie S' wynosi

$$F' = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{e_+ A}{r} \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.29)$$

Porównując ten wynik dla siły F' z wynikiem dla siły F danym wyrażeniem (13.21), widzimy, że wartości sił są prawie identyczne z obu punktów widzenia. Rzeczywiście

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (13.30)$$

tak że dla małych prędkości, które poprzednio rozważaliśmy, obie siły są sobie równe. Możemy powiedzieć, że przynajmniej dla małych prędkości wiemy, że magnetyzm i elektryczność są po prostu „dwoma sposobami patrzenia na tę samą rzecz”.

Ale w rzeczywistości sytuacja jest nawet lepsza. Jeżeli weźmiemy pod uwagę fakt, że siły także się transformują przy przejściu od jednego układu do innego, przekonamy się, że dwa sposoby patrzenia na to, co się dzieje naprawdę, dają ten sam wynik *fizyczny* dla dowolnej prędkości.

Aby się o tym przekonać, możemy np. zadać pytanie w rodzaju: jaki poprzeczny pęd

będzie mieć cząstka po zakończeniu krótkotrwałego działania siły? Wiemy z rozdz. 16 tomu I (cz. 1), że pęd poprzeczny cząstki powinien być taki sam w obu układach S i S' . Oznaczając poprzeczną współrzędną y , chcemy porównać Δp_y i $\Delta p'_y$. Posługując się poprawnymi relatywistycznie równaniami ruchu, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, oczekujemy, że po czasie Δt nasza cząstka będzie mieć w układzie S pęd poprzeczny Δp_y , dany następującym wzorem:

$$\Delta p_y = F \Delta t. \quad (13.31)$$

W układzie S' pęd poprzeczny będzie wynosić

$$\Delta p'_y = F' \Delta t'. \quad (13.32)$$

Musimy oczywiście porównać Δp_y z $\Delta p'_y$ dla odpowiednich przedziałów czasowych Δt i $\Delta t'$. Widzieliśmy z rozdz. 15 tomu I (cz. 1), że przedziały czasu odnoszące się do *poruszającej się* cząstki będą *dłuższe* niż te przedziały, które mierzymy w układzie spoczynkowym cząstki. Ponieważ nasza cząstka znajduje się początkowo w spoczynku w układzie S' , oczekujemy, że dla małych przedziałów czasowych Δt

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13.33)$$

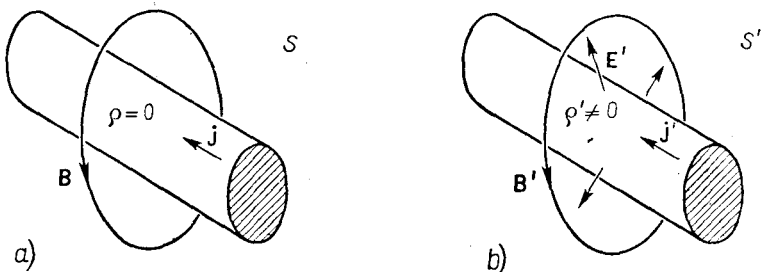
i wszystko jest jak trzeba. Z równań (13.31) i (13.32) wynika, że

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta p_y} = \frac{F' \Delta t'}{F \Delta t},$$

co jest dokładnie równe 1, jeżeli połączymy równania (13.30) oraz (13.33).

Przekonaliśmy się, że dostajemy ten sam wynik fizyczny, bez względu na to, czy analizujemy ruch cząstki poruszającej się wzdłuż przewodu w układzie współrzędnych, w którym przewód ten spoczywa, czy też w układzie spoczynkowym cząstki. W pierwszym wypadku siła była czysto „magnetyczna”, a w drugim — czysto „elektryczna”. Te dwa punkty widzenia są przedstawione na rys. 13.12 (choć nadal w drugim układzie istnieje pole magnetyczne B' , nie wywiera ono żadnej siły na spoczywającą cząstkę).

13.12. W układzie S gęstość ładunku wynosi zero, a gęstość prądu j . Występuje tylko pole magnetyczne. W S' jest gęstość ładunku ρ' oraz inna gęstość prądu j' . Pole magnetyczne B' jest inne i pojawia się pole elektryczne E' .



Gdybyśmy wybrali jeszcze inny układ, przekonalibyśmy się, że na cząstkę działa siła pochodząca od innej mieszaniny pól \mathbf{E} i \mathbf{B} . Siły elektryczne i magnetyczne są częściami *jednego* fizycznego zjawiska — elektromagnetycznego oddziaływania cząstek. Podział tego oddziaływania na dwie części — elektryczną i magnetyczną — zależy bardzo od wyboru układu odniesienia, w którym dokonujemy opisu zjawisk. Jednakże pełny opis elektromagnetyczny jest niezmienniczy; elektryczność i magnetyzm wzięte razem są zgodne z einsteinowską teorią względności.

Ponieważ pola elektryczne i magnetyczne są ze sobą rozmaicie zmieszane, przeto jeżeli zmieniamy układ odniesienia, musimy być ostrożni formułując, co w danym układzie uważamy za każde z tych pól. „Liniiom sił” pól \mathbf{E} i \mathbf{B} nie wolno nam przypisywać zbyt wiele realności. Linie te mogą zniknąć, kiedy próbujemy je obserwować z innego układu odniesienia. Tak na przykład w układzie S' istnieją linie sił pola elektrycznego, o których *nie* możemy powiedzieć, że „poruszają się z prędkością v w układzie S ”. W układzie S nie ma bowiem tych linii w ogóle! Nie ma więc sensu takie na przykład zdanie: Kiedy poruszam magnesem, unosi on ze sobą swoje pole, wobec czego linie sił pola \mathbf{B} także się poruszają. Nie ma sposobu, ogólnie biorąc, aby nadać sens idei „prędkości poruszającej się linii sił pola”. Pola są naszym sposobem opisu tego, co się dzieje w pewnym punkcie przestrzeni. W szczególności pola \mathbf{E} i \mathbf{B} mówią nam coś o siłach działających na poruszającą się cząstkę. Pytanie: „jaką siłą działa na ładunek *poruszające się* pole magnetyczne?” nie ma, ściśle rzecz biorąc, żadnego sensu. Siła wywierana przez pola \mathbf{E} i \mathbf{B} na ładunek oraz wzór (13.1) ma się nie zmieniać, jeżeli *źródło* pól \mathbf{E} i \mathbf{B} się porusza (zmienia się natomiast skutek tego ruchu wartości pól \mathbf{E} i \mathbf{B}). Nasz opis matematyczny zajmuje się tylko polami jako funkcjami x, y, z i t *względem pewnego układu inercjalnego*.

Będziemy dalej mówić o „fali pól elektromagnetycznego i elektrycznego, poruszającej się w przestrzeni”, jak np. fala świetlna. Ale mówiąc np. o *fali* poruszającej się po strunie, nie mamy na myśli, że pewna część *struny* porusza się w kierunku ruchu fali, rozumiemy natomiast, że *przemieszczenie* struny zachodzi najpierw w jednym miejscu, a potem w innym. Podobnie w przypadku fali elektromagnetycznej: *fala* porusza się, ale natężenia pól *się zmieniają*. Tak więc, kiedy w przyszłości my — albo ktoś inny — będzie mówić o „poruszającym się” polu, należy to sobie wyobrażać jako poręczny i krótki sposób opisu pól zmieniających się w pewnych okolicznościach.

13-7. Przekształcenie prądów i ładunków

Można by się zaniepokoić uproszczeniem wprowadzonym powyżej, gdy przyjeśliśmy tę samą prędkość v dla cząstki i dla elektronów przewodnictwa. Moglibyśmy się cofnąć w naszych rozważaniach i przeprowadzić całe rozumowanie znowu dla dwu różnych prędkości, ale łatwiej jest po prostu zauważyć, że gęstości ładunku i prądu są składowymi pewnego czterowektora [patrz rozdz. 17, tom I (cz. 1)].

Widzieliśmy, że jeżeli ρ_0 jest gęstością ładunków w ich układzie spoczynkowym, to w układzie, w którym się one poruszają z prędkością v , gęstość ta wynosi

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

W tym układzie gęstość prądu wynosi

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{\rho_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.34)$$

Wiemy z kolei, że energia U i pęd \mathbf{p} cząstki poruszającej się z prędkością \mathbf{v} dane są wyrażeniami

$$U = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

gdzie m_0 jest masą spoczynkową cząstki. Wiemy także, że wielkości U i \mathbf{p} tworzą relatywistyczny czterowektor. Ponieważ ρ i \mathbf{j} zależą od prędkości dokładnie w ten sam sposób co U i \mathbf{p} , możemy wyciągnąć stąd wniosek, że ρ i \mathbf{j} są także składowymi relatywistycznego czterowektora. Ta właściwość jest kluczem do ogólnej analizy pola przewodu poruszającego się z dowolną prędkością; analizę tę musielibyśmy wykonać w przypadku, w którym prędkość \mathbf{v}_0 cząstki byłaby różna od prędkości elektronów przewodnictwa.

Jeżeli chcemy przekształcić ρ i \mathbf{j} do układu odniesienia poruszającego się z prędkością u w kierunku x , wiemy, że transformują się one dokładnie tak, jak t i (x, y, z) , wobec czego mamy [patrz rozdz. 15, tom I (cz. 1)]

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, & j'_x &= \frac{j_x-u\rho}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ y' &= y, & j'_y &= j_y, \\ z' &= z, & j'_z &= j_z, \\ t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, & \rho' &= \frac{\rho-uj_x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Za pomocą tych równości możemy powiązać ładunki i prądy w jednym układzie odniesienia z tymi wielkościami w innym układzie. Biorąc ładunki i prądy w dowolnym układzie możemy rozwiązać zagadnienie elektrostatyczne w tym układzie, posługując się równaniami Maxwella. Wynik, który otrzymujemy dla ruchu cząstek, będzie taki sam, bez względu na to, który układ odniesienia wybierzemy. Wrócimy później do zagadnienia relatywistycznego przekształcania pól elektromagnetycznych.

13-8. Zasada superpozycji; reguła prawej ręki

Zakończymy ten rozdział dwiema dalszymi uwagami dotyczącymi magnetostatyki. Pierwsza uwaga: nasze podstawowe równania dla pola magnetycznego

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/c^2 \epsilon_0,$$

zawierają wektory \mathbf{B} i \mathbf{j} liniowo. Znaczy to, że zasada superpozycji ma zastosowanie także do pól magnetycznych. Pole wytworzone przez dwa różne prądy stałe jest sumą pól pochodzących od każdego z tych prądów z osobna. Nasza druga uwaga dotyczy reguł prawej ręki, które napotkaliśmy (takich jak reguła prawej ręki dla pola magnetycznego wytworzonego przez prąd). Zauważyliśmy też, że magnetyzację żelaznego magnesu należy rozumieć jako wynik rotacji elektronów w tej substancji. Kierunek pola magnetycznego wirującego elektronu wiąże się z kierunkiem osi obrotu regułą prawej ręki. Ponieważ kierunek pola \mathbf{B} wyznaczony jest przez zasadę preferującą pewną skrętność — zawiera ona albo iloczyn wektorowy albo rotację — nazywamy je wektorem *osiowym* lub pseudowektorem. (Wektory, których kierunek w przestrzeni nie zależy od tego, czy układ odniesienia jest lewo- czy prawoskrętny, nazywamy wektorami *biegunowymi* lub — krótko — wektorami. Przesunięcie, prędkość, siła i pole elektryczne \mathbf{E} są, na przykład, wektorami biegunowymi.)

W nauce o elektromagnetyzmie wielkości *obserwowalne fizycznie* nie są jednak prawoczy też lewoskrętne. Oddziaływania elektromagnetyczne są symetryczne względem odbicia [patrz rozdz. 52, tom I (cz. 2)]. Ilekroć obliczamy siły magnetyczne działające między dwoma prądami, wynik, który uzyskujemy, nie zależy od wyboru skrętności układu. Równania nasze wiedzą niezależnie od takiej konwencji do wyniku, że prądy równoległe przyciągają się, a przeciwrównoległe — odpychają. (Można spróbować wyznaczyć siłę używając przeciwnej konwencji — lewoskrętnej). Przyciąganie lub odpychanie jest wektorem biegunowym. Dzieje się tak, ponieważ opisując całkowite oddziaływanie posługujemy się zasadą prawoskrętności dwukrotnie: jeden raz, by znaleźć pole \mathbf{B} z prądów, i drugi raz, by obliczyć siłę, z którą pole \mathbf{B} działa na drugi prąd. Dwukrotne wykorzystanie zasady prawoskrętności daje ten sam wynik, co dwukrotne posłużenie się zasadą lewoskrętności. Gdybyśmy zmienili układ na lewoskrętny, wszystkie pola \mathbf{B} zmieniłyby znak, ale wszystkie siły — lub, co jest być może bardziej istotne, obserwowane przyspieszenia obiektów fizycznych — nie uległyby zmianie.

Chociaż fizycy ostatnio ku swojemu zdumieniu przekonali się, że *nie wszystkie* prawa natury są zawsze niezmiennicze względem odbić zwierciadlanych, prawa elektromagnetyzmu na pewno wykazują tę podstawową symetrię.

różne przykłady pola magnetycznego

14-1. Potencjał wektorowy

W rozdziale tym kontynuujemy nasze rozważania nad polami magnetycznymi związanymi z prądami stałymi — a więc zajmujemy się magnetostatyką. Pole magnetyczne jest związane z prądami elektrycznymi naszymi podstawowymi równaniami:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (14.1)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}. \quad (14.2)$$

Chcemy teraz rozwiązać te równania matematycznie w *ogólny* sposób, to jest bez odgadywania lub zakładania jakiejś szczególnej symetrii. Przekonaliśmy się, że w elektrostatyce istnieje metoda bezpośredniego obliczania pola, jeżeli znane są położenia wszystkich ładunków elektrycznych: należy po prostu znaleźć potencjał skalarny φ obliczając całkę po ładunkach — jak w równaniu (4.25). Następnie, chcąc mieć pole elektryczne, otrzymuje się je, różniczkując potencjał φ . Pokażemy teraz, że istnieje odpowiednia procedura obliczania pola magnetycznego \mathbf{B} , jeżeli znana jest gęstość prądu \mathbf{j} wszystkich poruszających się ładunków.

Widzieliśmy, że w elektrostatyce możliwe jest przedstawienie pola \mathbf{E} w postaci gradientu pola skalarnego φ , ponieważ rotacja \mathbf{E} zawsze jest równa zeru. Teraz rotacja \mathbf{B} *nie* zawsze jest równa zeru, wobec czego na ogół nie można tego pola przedstawić jako gradientu. Jednakże *dywergencja* \mathbf{B} *jest* zawsze równa zeru, a to znaczy, że zawsze możemy przedstawić pole \mathbf{B} w postaci *rotacji* innego pola wektorowego. Widzieliśmy bowiem (§ 2-8), że dywergencja rotacji jest zawsze równa zeru. Możemy zatem powiązać pole \mathbf{B} z innym polem, które nazwiemy \mathbf{A} , w następujący sposób:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (14.3)$$

Pisząc to wyrażenie w składowych dostajemy:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ B_y &= (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

Zapis ten gwarantuje, że spełnione jest równanie (14.1), ponieważ musi zachodzić związek:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

Pole \mathbf{A} nazywamy *potencjałem wektorowym*.

Pamiętamy, że potencjał skalarny φ nie był określony całkowicie przez swoją definicję. Jeżeli obliczyliśmy potencjał φ dla pewnego zagadnienia, to zawsze możemy znaleźć inny, równie dobry potencjał przez dodanie stałej:

$$\varphi' = \varphi + C.$$

Nowy potencjał φ' daje te same pola elektryczne, gdyż gradient ∇C jest równy zeru; φ i φ' przedstawiają tę samą sytuację fizyczną.

Podobnie jest w przypadku potencjału wektorowego: możemy uzyskać różne potencjały wektorowe \mathbf{A} , które dają te same pola magnetyczne. Znowu, ponieważ pole \mathbf{B} otrzymujemy z potencjału \mathbf{A} przez różniczkowanie, dodanie stałej do \mathbf{A} nie zmienia wielkości fizycznych. Ale tu jest nawet więcej swobody w wyborze \mathbf{A} . Możemy dodać do \mathbf{A} dowolne pole, które jest gradientem pewnego pola skalarnego i żadne wielkości fizyczne nie ulegną zmianie. Możemy to wykazać w następujący sposób. Przypuśćmy, że mamy jakiś potencjał wektorowy \mathbf{A} , który daje poprawne pole magnetyczne \mathbf{B} opisujące pewną rzeczywistą sytuację, i pytamy, w jakich okolicznościach pewien nowy potencjał wektorowy \mathbf{A}' da *to samo* pole \mathbf{B} po podstawieniu do wzoru (14.3). Znaczący to, że potencjały \mathbf{A} i \mathbf{A}' muszą mieć tę samą rotację:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Wobec tego

$$\nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0.$$

Ale jeżeli rotacja wektora jest równa zeru, to musi być on gradientem pewnego pola skalarnego, powiedzmy ψ , tak że $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla \psi$. Znaczący to, że jeżeli \mathbf{A} jest zadowalającym potencjałem wektorowym dla jakiegoś problemu, to dla wszystkich funkcji skalarnych wektor

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (14.5)$$

będzie równie dobrym potencjałem wektorowym, wiodącym do tego samego pola \mathbf{B} .

Zwykle dogodnie jest odebrać część swobody polu \mathbf{A} przez arbitralne nałożenie na potencjał wektorowy pewnego innego warunku (w dużej mierze w ten sam sposób, jak

dogodnie jest często wybierać potencjał φ tak, aby był on równy zeru w dużych odległościach. Możemy na przykład ograniczyć potencjał wektorowy \mathbf{A} przez dowolne ustalenie wartości dywergencji tej wielkości. Możemy to zawsze zrobić bez naruszenia pola \mathbf{B} . Dzieje się tak, ponieważ potencjały \mathbf{A} i \mathbf{A}' nie muszą mieć tej samej dywergencji, chociaż mają tę samą rotację i dają to samo pole \mathbf{B} . Rzeczywiście, $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi$ i przez odpowiedni wybór funkcji ψ możemy nadać wielkości $\nabla \cdot \mathbf{A}'$ dowolną wartość.

Co powinniśmy wybrać na $\nabla \cdot \mathbf{A}$? Wybór powinien być taki, aby można było uzyskać wyrażenia najdogodniejsze z matematycznego punktu widzenia; będzie on zależał od problemu, którym się aktualnie będziemy zajmować. W przypadku *magnetostatyki* wybierzemy po prostu

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (14.6)$$

(Potem, kiedy podejmiemy zagadnienia elektrodynamiki, dokonamy innego wyboru.) Nasza pełna definicja potencjału wektorowego \mathbf{A} brzmi więc na razie następująco: $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ oraz $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0^*$.

Aby zdobyć pewne doświadczenie w posługiwaniu się potencjałem wektorowym, zbadajmy wpraw, jaką on ma postać w przypadku jednorodnego pola magnetycznego \mathbf{B}_0 . Wybierając oś z w kierunku pola \mathbf{B}_0 musimy mieć

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0. \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

Widzimy zatem, że jednym z *możliwych* rozwiązań tych równań jest

$$A_y = xB_0, \quad A_x = 0 \quad \text{oraz} \quad A_z = 0.$$

Moglibyśmy równie dobrze przyjąć

$$A_x = -yB_0, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

Jeszcze innym rozwiązaniem jest kombinacja liniowa obu powyższych rozwiązań:

$$A_x = -\frac{1}{2}yB_0, \quad A_y = \frac{1}{2}xB_0, \quad A_z = 0 \quad (14.8)$$

Jest rzeczą jasną, że w przypadku dowolnego, lecz ustalonego z góry pola \mathbf{B} potencjał wektorowy \mathbf{A} nie jest określony jednoznacznie; mamy tu wiele możliwości.

Trzecie rozwiązanie, opisane wzorem (14.8), ma pewne interesujące właściwości. Ponieważ składowa x -owa jest proporcjonalna do $-y$, składowa zaś y -owa jest proporcjo-

*¹) Nasza definicja nadal nie wyznacza jednoznacznie pola \mathbf{A} . Aby uzyskać *jednoznaczne* określenie pola \mathbf{A} , powinniśmy także powiedzieć coś o tym, jak pole \mathbf{A} zachowuje się na brzegu danego obszaru lub w nieskończoności. Wygodnie jest czasem, na przykład, tak wybrać potencjał \mathbf{A} , aby właśnie zniknął on w nieskończoności.

nalna do $+x$, zatem pole \mathbf{A} musi być prostopadłe do wektora poprowadzonego do danego punktu od osi z ; wektor ten oznaczymy \mathbf{r}' (znak prim ma nam przypominać, że wektor ten *nie* jest wektorem przesunięcia z początku układu odniesienia). Podobnie wielkość A jest proporcjonalna do $\sqrt{x^2+y^2}$ i wobec tego do r' . Tak więc możemy (dla pola jednorodnego) napisać po prostu

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}' \quad (14.9)$$

Potencjał wektorowy \mathbf{A} ma wartość $Br'/2$ i obraca się wokół osi z , jak pokazuje rys. 14.1. Jeżeli na przykład pole \mathbf{B} jest polem skierowanym wzdłuż osi solenoidu, to potencjał wektorowy obraca się w tym samym kierunku, co i prądu w solenoidzie.

Potencjał wektorowy dla pola jednorodnego możemy obliczyć w inny sposób. Krażenie potencjału wektorowego \mathbf{A} po dowolnej krzywej zamkniętej Γ możemy związać z całką powierzchniową z rotacji \mathbf{A} na mocy twierdzenia Stokesa [wzór (3.38)]:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{wewnątrz } \Gamma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da \quad (14.10)$$

Ale całka po prawej stronie równania jest równa strumieniowi pola \mathbf{B} przez pętlę Γ , wobec czego

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{wewnątrz } \Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (14.11)$$

Tak więc krażenie potencjału wektorowego \mathbf{A} wokół *dowolnej* pętli równe jest strumieniowi pola \mathbf{B} przez tę pętlę. Jeżeli weźmiemy pętlę kołową o promieniu r' w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola \mathbf{B} , to strumień pola będzie wynosić

$$\pi r'^2 B.$$

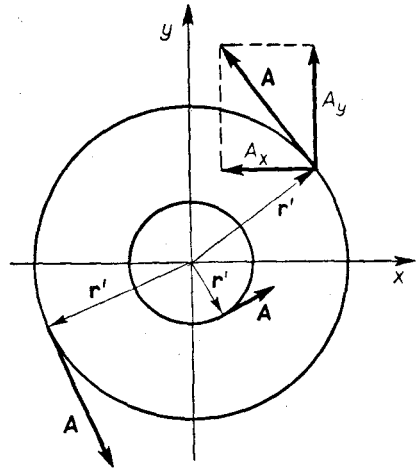
Jeżeli wybierzemy początek układu odniesienia na osi symetrii, tak że możemy przyjąć, iż wektor \mathbf{A} jest styczny do obwodu i zależy jedynie od r' , to krażenie wyniesie

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r' A = \pi r'^2 B.$$

Dostajemy, jak poprzednio:

$$A = \frac{Br'}{2}.$$

W podanym przed chwilą przykładzie obliczyliśmy potencjał wektorowy z pola magne-



14.1. Jednorodne pole magnetyczne \mathbf{B} w kierunku osi z odpowiada potencjałowi wektorowemu \mathbf{A} , obracającemu się dookoła osi z , z wartością $A = Br'/2$ (r' jest odległością od osi z).

tycznego, zazwyczaj jednak postępujemy odwrotnie. W skomplikowanych problemach zwykle jest łatwiej rozwiązać równania dla potencjału wektorowego, a dopiero potem obliczyć pole magnetyczne. Pokażemy teraz, jak to można zrobić.

14.2. Potencjał wektorowy znanych prądów

Ponieważ pole \mathbf{B} jest wyznaczone przez prądy, więc to samo dotyczy także potencjału wektorowego \mathbf{A} . Chcemy teraz obliczyć potencjał wektorowy \mathbf{A} z danych prądów. Punktem wyjścia będą równania podstawowe (14.2):

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / \epsilon_0,$$

co znaczy oczywiście, że

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{j} / \epsilon_0. \quad (14.12)$$

Równanie to jest dla magnetostatyki tym, czym dla elektrostatyki jest równanie

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = -\rho / \epsilon_0. \quad (14.13)$$

Nasze równanie (14.12) dla potencjału wektorowego stanie się nawet jeszcze bardziej podobne do równania dla φ , jeżeli przepiszemy wyrażenie $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ [korzystając z wzoru (2.58)] w postaci:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (14.14)$$

Ponieważ wybraliśmy $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (i teraz widać, dlaczego), równanie (14.12) przybiera postać

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{j} / \epsilon_0 c^2. \quad (14.15)$$

To równanie wektorowe zawiera w sobie oczywiście trzy równania:

$$\nabla^2 A_x = -\frac{j_x}{\epsilon_0 c^2}, \quad \nabla^2 A_y = -\frac{j_y}{\epsilon_0 c^2}, \quad \nabla^2 A_z = -\frac{j_z}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.16)$$

Każde zaś z tych równań jest *matematycznie identyczne* z równaniem

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_0. \quad (14.17)$$

A więc wszystko, co wiemy o obliczaniu potencjałów, gdy gęstość ładunku ρ jest znana, możemy zastosować do obliczania potencjału wektorowego \mathbf{A} , gdy znana jest gęstość prądu \mathbf{j} !

Z rozdziału 4 dowiedzieliśmy się, że ogólnym rozwiązaniem równania elektrostatycznego (14.17) jest

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) dV_2}{r_{12}}.$$

Wiemy więc od razu, że ogólne rozwiązanie dla składowej A_x ma postać

$$A_x(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_x(2) dV_2}{r_{12}}, \quad (14.18)$$

i podobnie dla A_y i A_z . (Rysunek 14.2 przypomina naszą umowę dotyczącą wielkości r_{12} i dV_2 .) Te trzy rozwiązania możemy zapisać łącznie w postaci wektorowej:

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (14.19)$$

(Jeśli tylko zechcecie, możecie sprawdzić przez zwykłe różniczkowanie składowych, że ta całka dla potencjału wektorowego \mathbf{A} spełnia równanie $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, jeżeli $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, co jak widzieliśmy, musi zachodzić dla prądów stałych.)

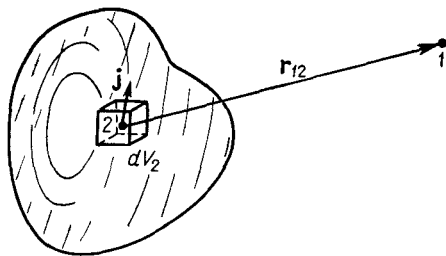
Mamy zatem ogólną metodę obliczania pola magnetycznego prądów stałych: x -owa składowa potencjału wektorowego wynikającego z gęstości prądu \mathbf{j} jest taka sama, jak potencjał elektryczny φ , który by był wytworzony przez gęstość ładunku równą j_x/c^2 — i podobnie dla składowych y -owej i z -owej. (Jest to słuszne tylko dla składowych w ustalonych kierunkach, np. składowej „radialnej” potencjału \mathbf{A} nie można w ten sposób uzyskać ze składowej „radialnej” prądu \mathbf{j} .) Tak więc z wektora gęstości prądu \mathbf{j} możemy obliczyć potencjał \mathbf{A} , posługując się wyrażeniem (14.19), tzn. obliczamy każdą składową wektora \mathbf{A} rozwiązując trzy fikcyjne zagadnienia elektrostatyczne dla rozkładów ładunku $\rho_1 = j_x/c^2$, $\rho_2 = j_y/c^2$ oraz $\rho_3 = j_z/c^2$. Następnie obliczamy pole \mathbf{B} biorąc odpowiednie pochodne w celu uzyskania wyrażenia $\nabla \times \mathbf{A}$. Jest to trochę bardziej skomplikowane niż w elektrostatyce, ale zasada jest ta sama. Zilustrujemy teraz tę teorię rozwiązując równania dla potencjału wektorowego w kilku szczególnych przypadkach.

14-3. Przewód prostoliniowy

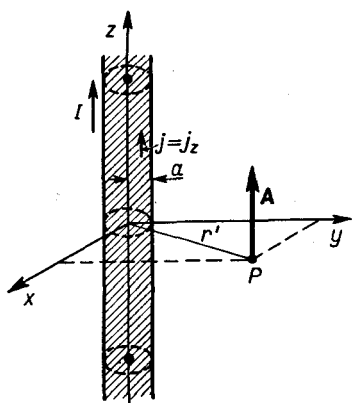
Naszym pierwszym przykładem będzie pole magnetyczne wytworzone przez prąd płynący w prostoliniowym przewodzie — zagadnienie to rozwiązaliśmy już w poprzednim rozdziale korzystając z równania (14.2) i z pewnych argumentów opartych na symetrii problemu. Bierzemy długi przewód prostoliniowy (o promieniu a), którym płynie prąd stały o natężeniu I . Stały prąd w przewodzie jest rozłożony równomiernie na całym przekroju poprzecznym przewodu w odróżnieniu od rozkładu ładunku na przewodniku w elektrostatyce. Jeżeli wybierzemy układ współrzędnych tak, jak pokazuje rys. 14.3, to wektor gęstości prądu \mathbf{j} będzie miał tylko składową z -ową. Jego długość wynosi

$$j_z = \frac{I}{\pi a^2} \quad (14.20)$$

wewnątrz przewodu, a zero na zewnątrz.



14.2. Potencjał wektorowy \mathbf{A} w punkcie 1 dany jest całką po elementach prądu $\mathbf{j} dV$ we wszystkich punktach 2.



14.3. Długi drut walcowy umieszczony wzdłuż osi z ze stałą gęstością prądu j .

Ponieważ składowe j_x i j_y są równe zero, otrzymujemy od razu

$$A_x = 0, \quad A_y = 0.$$

Aby otrzymać składową A_z potencjału wektorowego, możemy posłużyć się rozwiązaniem dla potencjału elektrostatycznego φ przewodu naładowanego jednostajnie ładunkiem o stałej gęstości $\rho = j_z/c^2$. Dla punktów zewnętrznych w stosunku do nieskończonego długiego naładowanego walca potencjał elektrostatyczny wynosi

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r',$$

gdzie $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$, a λ jest ładunkiem na jednostkę długości, $\pi a^2 \rho$. Tak więc składowa A_z potencjału musi być równa

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'$$

dla punktów znajdujących się na zewnątrz długiego przewodu z prądem stałym. Ponieważ $\pi a^2 j_z = I$, możemy też napisać

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'. \quad (14.21)$$

Teraz możemy obliczyć pole \mathbf{B} korzystając z zależności (14.4). Jedynie dwie z sześciu pochodnych nie są równe zero. Dostajemy

$$B_x = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \ln r' = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{r'^2}, \quad (14.22)$$

$$B_y = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln r' = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{r'^2}, \quad (14.23)$$

$$B_z = 0.$$

Dostajemy ten sam wynik, co poprzednio: pole \mathbf{B} okrąża przewód i ma wartość równą

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r'}. \quad (14.24)$$

14-4. Długi solenoid

Jako następny przykład rozważmy znowu nieskończonego długiego solenoid z płynącym po nim prądem o natężeniu nI na jednostkę długości solenoidu. (Wyobrażamy sobie, że mamy n zwojów przewodu na jednostkę długości, przy czym w przewodzie płynie prąd o natężeniu I i pomijamy małe nachylenie uzwojenia.)

Podobnie jak zdefiniowaliśmy „gęstość ładunku powierzchniowego” σ , określimy teraz „powierzchniową gęstość prądu” \mathbf{J} , równą prądowi na jednostkę powierzchni solenoidu (wielkość ta równa jest po prostu średniej wartości \mathbf{j} pomnożonej przez grubość cienkiego uzwojenia). Wartość \mathbf{J} , wynosi tu zatem nI . Ten prąd powierzchniowy (patrz rys. 14.4) ma składowe

$$J_x = -J \sin \varphi, \quad J_y = J \cos \varphi, \quad J_z = 0.$$

Musimy teraz znaleźć pole \mathbf{A} dla takiego rozkładu prądów.

Przede wszystkim chcemy znaleźć składową A_x pola dla punktów znajdujących się na zewnątrz solenoidu. Wynik jest taki sam, jak dla potencjału elektrostatycznego na zewnątrz walca naładowanego ze stałą gęstością powierzchniową:

$$\sigma = \sigma_0 \sin \varphi,$$

przy czym $\sigma_0 = J/c^2$. Nie rozwiązaliśmy jeszcze zagadnienia elektrostatycznego dla takiego rozkładu ładunku, zrobiliśmy jednakże coś podobnego. Taki rozkład ładunku jest bowiem elektrycznie równoważny ładunkowi *wypełniającemu* dwa walce, z których jeden jest naładowany dodatnio, a drugi — ujemnie, przy czym osie tych walców są nieco przesunięte w kierunku osi y . Potencjał takiej pary walców jest proporcjonalny do pochodnej względem y potencjału pojedynczego, jednostajnie naładowanego walca. Moglibyśmy znaleźć stałą proporcjonalności, ale na razie dajmy temu spokój.

Potencjał walca naładowanego jest proporcjonalny do $\ln r'$; potencjał pary walców wynosi więc

$$\varphi \sim \frac{\partial \ln r'}{\partial y} = \frac{y}{r'^2}.$$

Wiemy zatem, że

$$A_x = -K \frac{y}{r'^2}, \quad (14.25)$$

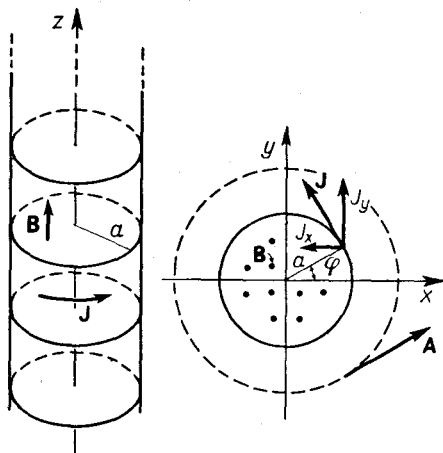
gdzie K jest pewną stałą. Rozumując dalej tak samo przekonalibyśmy się, że

$$A_y = K \frac{x}{r'^2}, \quad (14.26)$$

Choć powiedzieliśmy poprzednio, że na zewnątrz solenoidu nie ma pola *magnetycznego*, przekonujemy się teraz, że *występuje* tu pole \mathbf{A} , krążące wokół osi z , jak przedstawia rys. 14.4. Pytanie brzmi: czy jego rotacja jest równa zeru?

Oczywiście, składowe B_x i B_y pola są równe zeru, a składowa

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{x}{r'^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-K \frac{y}{r'^2} \right) = K \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{2x^2}{r'^4} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2y^2}{r'^4} \right) = 0.$$



14.4. Długi solenoid z prądem o gęstości powierzchniowej \mathbf{J}

Tak więc pole magnetyczne na zewnątrz bardzo długiego solenoidu jest rzeczywiście równe zeru, pomimo że potencjał wektorowy nie znika.

Możemy sprawdzić nasz wynik porównując go z czymś, co już znamy: krążenie potencjału wektorowego dookoła solenoidu powinno być równe strumieniowi pola \mathbf{B} wewnątrz cewki [równanie (14.11)]. Krążenie to wynosi $A \cdot 2\pi r'$, czyli ponieważ $A = K/r'$, krążenie wynosi $2\pi K$. Zauważmy, że nie zależy ono od r' . Tak właśnie powinno być, jeżeli na zewnątrz solenoidu nie ma pola \mathbf{B} , gdyż strumień wynosi właśnie πa^2 mnożone przez długość wektora pola \mathbf{B} wewnątrz solenoidu. Jest on taki sam dla wszystkich kół o promieniu $r > a$. W poprzednim rozdziale obliczyliśmy, że pole wewnątrz solenoidu wynosi $nI/\varepsilon_0 c^2$, wobec czego możemy znaleźć stałą K :

$$2\pi K = \pi a^2 \frac{nI}{\varepsilon_0 c^2},$$

czyli

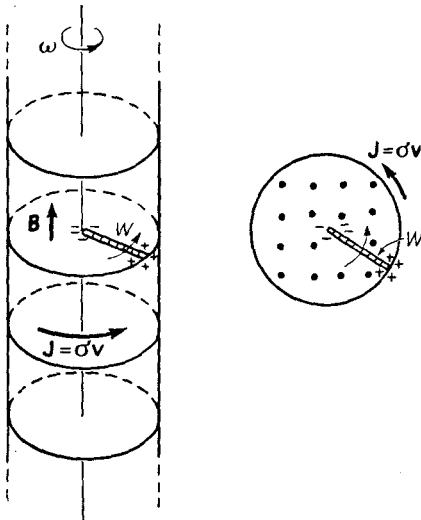
$$K = \frac{nIa^2}{2\varepsilon_0 c^2}.$$

Tak więc potencjał wektorowy na zewnątrz ma wartość

$$A = \frac{nIa^2}{2\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r'} \quad (14.27)$$

i jest zawsze proporcjonalny do wektora r' .

14.5. Obracający się naładowany walec wytwarza wewnątrz pole magnetyczne. Krótki drut skierowany wzdłuż promienia i obracający się razem z walcem ma na swoich końcach indukowany ładunek.



Rozważaliśmy solenoidalną cewkę z prądem, ale te same pola wytworzylibyśmy obracając długi walec naładowany elektrycznie na powierzchni. Jeżeli mamy cieką lupinę walcową o ładunku powierzchniowym rozłożonym na niej z gęstością σ , to obracając walec uzyskujemy prąd powierzchniowy $J = \sigma v$, gdzie $v = a\omega$ jest prędkością ładunku powierzchniowego. Będziemy mieli wtedy pole magnetyczne $B = 2\pi a^2 \sigma \omega / \varepsilon_0 c^2$ wewnątrz walca.

Możemy teraz wysunąć interesującą kwestię. Przypuśćmy, że wkładamy krótki odcinek przewodu W prostopadle do osi walca, tak by rozciągał się on od osi aż do powierzchni tego walca i był przymocowany do niego tak, aby się wraz z nim obracał, jak przedstawia rys. 14.5. Przewód ten porusza się w polu magnetycznym, wobec czego siły $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ spowodują naładowanie się końców tego przewodu (będą się one łądować dopóty, dopóki pole \mathbf{E} pochodzące od tych ładunków nie zrównoważy

waży siły $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$). Jeżeli walec jest naładowany dodatnio, to koniec przewodu znajdujący się na osi będzie mieć ładunek dodatni. Mierząc ten ładunek moglibyśmy mierzyć prędkość obrotu układu. Mielibyśmy zatem przyrząd do pomiaru prędkości kątowej!

Ale zdziwieni zapytacie: „Co będzie, jeśli się znajdziemy w układzie odniesienia związanym z obracającym się walcem? Wówczas mamy po prostu do czynienia ze spoczywającym naładowanym walcem, a równania elektrostatyki mówią przecież, że wewnątrz takiego walca pola elektrycznego *nie* będzie, wobec czego nie będzie także siły odpychającej ładunki ku środkowi. A więc coś tu jest nie w porządku”. Jednakże wszystko jest w porządku. Nie ma „względności dla obrotów”. Układ obracający się *nie* jest układem inercjalnym i prawa fizyki są tu inne. Musimy być pewni, że posługujemy się równaniami elektromagnetyzmu tylko w układach inercjalnych.

Byłoby dobrze, gdybyśmy mogli zmierzyć bezwzględny obrót Ziemi posługując się takim oto naładowanym walcem, ale na nieszczęście efekt ten jest o wiele za mały, aby można go było zaobserwować stosując nawet najczulsze instrumenty, jakimi obecnie rozporządzamy.

14-5. Pole małej pętli; dipol magnetyczny

Posłużymy się teraz metodą potencjału wektorowego w celu znalezienia pola magnetycznego małej pętli z prądem. Jak zwykle, mówiąc „mała” mamy na myśli po prostu fakt, że interesują nas pola jedynie w odległości dużej w porównaniu z rozmiarami pętli. Okaże się, że każda mała pętla jest „dipolem magnetycznym”. Znaczy to, że wytwarza ona pole *magnetyczne* takie, jak pole elektryczne pochodzące od dipola elektrycznego.

Weźmy najpierw pętlę prostokątną i wybierzmy nasze współrzędne tak, jak wskazuje rys. 14.6. Nie ma prądu w kierunku osi z , wobec czego składowa A_z pola jest równa zeru. Istnieją prądy w kierunku osi x na dwu bokach o długości a . W każdym odcinku pętli gęstość prądu jest jednakowa (tak jak i natężenie prądu). Zatem rozwiązanie dla A_x jest dokładnie takie samo jak dla potencjału elektrostatycznego pochodzącego od dwu naładowanych prętów (patrz rys. 14.7). Ponieważ pręty mają ładunki przeciwnego znaku, ich potencjał elektrostatyczny na dużych odległościach będzie równy po prostu potencjałowi dipola (§ 6-5). W punkcie P na rys. 14.6 potencjał wyniesie

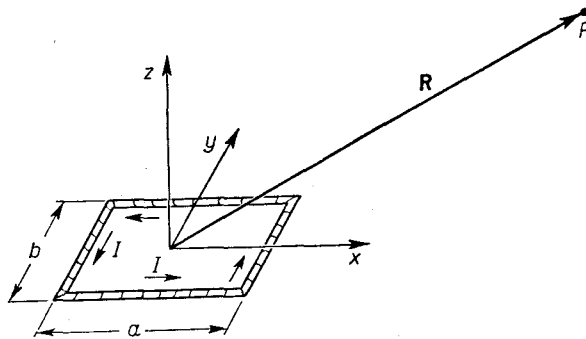
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}, \quad (14.28)$$

gdzie \mathbf{p} jest momentem dipolowym rozkładu ładunku. Moment dipolowy jest w tym przypadku równy całkowitemu ładunkowi na przecie, mnożonemu przez odległość między prętami:

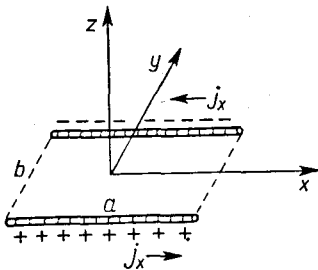
$$p = \lambda ab. \quad (14.29)$$

Moment dipolowy wskazuje ujemny kierunek osi y , wobec czego cosinus kąta między wektorami \mathbf{R} i \mathbf{p} wynosi $-y/R$ (gdzie y jest współrzędną punktu P). Mamy więc

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ab}{R^2} \frac{y}{R}.$$

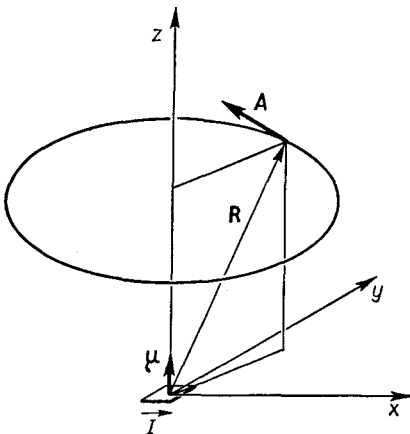


14.6. Prostokątna pętla z prądem I . Jakie pole magnetyczne mamy w punkcie P ? ($R \gg a$ oraz $R \gg b$.)



14.7. Rozkład składowej gęstości prądu j_x w pętli z rys. z rys. 14.6

14.8. Potencjał wektorowy małej pętli z prądem umieszczonej w środku układu (w płaszczyźnie xy); pole dipola magnetycznego



Stąd zaś dostajemy składową A_x zastępując po prostu wielkość λ wielkością I/c^2 :

$$A_x = -\frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{R^3}. \quad (14.30)$$

To samo rozumowanie prowadzi do wyrażenia dla A_y :

$$A_y = \frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3}. \quad (14.31)$$

Tu znowu A_y jest proporcjonalne do x , zaś A_x do $-y$, wobec czego potencjał wektorowy (w dużych odległościach) obiega po kołach oś z , poruszając się w tym samym kierunku, co i prąd I w pętli, jak pokazuje rys. 14.8.

Długość wektora A jest proporcjonalna do Iab , tzn. do natężenia prądu mnożonego przez pole powierzchni pętli. Iloczyn ten nazywamy *magnetycznym momentem dipolowym* (lub często po prostu „momentem magnetycznym”) pętli. Oznaczamy go literą μ :

$$\mu = Iab. \quad (14.32)$$

Potencjał wektorowy małej płaskiej pętli o dowolnym kształcie (kolistej, trójkątnej itp.) jest także dany równaniem (14.30) i (14.31) pod warunkiem, że Iab zastąpimy wyrażeniem

$$\mu = I \cdot (\text{pole powierzchni pętli}). \quad (14.33)$$

Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Możemy przedstawić nasze równanie w postaci wektorowej, jeżeli zdefiniujemy kierunek wektora $\boldsymbol{\mu}$ jako normalną do płaszczyzny pętli, przy czym zwrot określony jest regułą śruby prawoskrętnej (rys. 14.8). Możemy zatem napisać

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{e}_R}{R^2}. \quad (14.34)$$

Musimy jeszcze znaleźć pole \mathbf{B} . Korzystając z zależności (14.33) i (14.34) oraz (14.4) dostajemy

$$B_x = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3} = \dots \frac{3xz}{R^5} \quad (14.35)$$

[gdzie przez ... rozumiemy $\mu/(4\pi\epsilon_0 c^2)$],

$$B_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\dots \frac{y}{R^3} \right) = \dots \frac{3yz}{R^5}, \quad (14.36)$$

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(\dots \frac{x}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\dots \frac{y}{R^3} \right) = \dots \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5} \right).$$

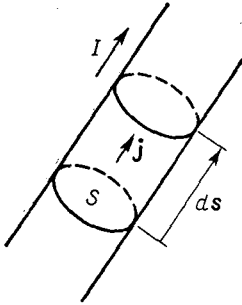
Składowe pola \mathbf{B} zachowują się dokładnie tak samo jak składowe pola \mathbf{E} pochodzącego od dipola skierowanego wzdłuż osi z . [Patrz równania (6.14) i (6.15), a także rys. 6.5]. Dlatego właśnie pętlę nazywamy dipolem magnetycznym. Słowo „dipol” jest nieco mylące, gdy się je stosuje do pola magnetycznego, ponieważ *nie* ma pojedynczych ładunków magnetycznych, z których dipol taki mógłby być utworzony na podobieństwo dipola elektrycznego. Magnetyczne „pole dipolowe” nie jest wytwarzane przez dwa „ładunki”, ale przez elementarną pętlę z prądem.

Mimo to jest ciekawe, że startując z dwu zupełnie odmiennych praw, a mianowicie $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ oraz $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$, możemy dojść ostatecznie do pola tego samego rodzaju. Dlaczego tak być powinno? Dzieje się tak, ponieważ pola dipola występują tylko wtedy, gdy jesteśmy daleko od wszystkich ładunków czy też prądów. Tak więc w przeważającym obszarze przestrzeni równania dla pól \mathbf{E} i \mathbf{B} są identyczne: oba pola mają zerową dywergencję i rotację. Mają więc one takie same rozwiązania. Jednakże *źródła*, których konfigurację podsumowujemy używając momentów dipolowych, są fizycznie całkiem odmienne — w jednym wypadku jest to krążący prąd, w innym zaś para ładunków: jeden powyżej, a drugi poniżej płaszczyzny pętli dla odpowiedniego pola.

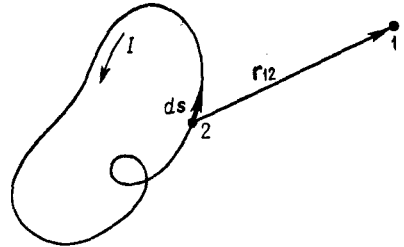
14-6. Potencjał wektorowy obwodu

Interesują nas często pola magnetyczne wytwarzane przez obwody złożone z przewodów o średnicy bardzo małej w porównaniu z rozmiarami całego układu. W takich przypadkach możemy uprościć równania dla pola magnetycznego. Dla cienkiego przewodu możemy napisać nasz element objętości w postaci

$$dV = S ds,$$



14.9. Dla cienkiego drutu $j dV$ jest takie samo jak $I ds$.



14.10. Pole magnetyczne drutu można uzyskać z całki po obwodzie.

gdzie S jest polem powierzchni przekroju drutu, a ds jest elementem odległości wzdłuż drutu. Ponieważ wektor ds ma ten sam kierunek co i wektor j , jak pokazuje rys. 14.9 (a zakładamy, że j jest stałe na całej powierzchni przekroju przewodu), możemy napisać równanie wektorowe:

$$j dV = jS ds. \quad (14.37)$$

Ale jS jest właśnie tym, co nazywamy natężeniem prądu (I) w przewodzie i całka dla potencjału wektorowego (14.19) przybierze postać

$$A(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I ds_2}{r_{12}} \quad (14.38)$$

(patrz rys. 14.10). (Zakładamy, że natężenie I jest takie samo wzdłuż całego przewodu. Gdyby istniało wiele rozgałęzień o różnych natężeniach prądu, należałoby oczywiście posługiwać się odpowiednim prądem I w każdym odgałęzieniu.)

Tu znowu możemy obliczyć pola z wzoru (14.38) albo całkując wprost, albo rozwiązując odpowiednie problemy elektrostatyczne.

14-7. Prawo Biota-Savarta

Studiując elektrostatykę przekonaliśmy się, że pole elektryczne pochodzące od danego rozkładu ładunków możemy obliczyć wprost z całki [równanie (4.16)]:

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12} dV_2}{r_{12}^2}.$$

Jak widzieliśmy, zwykle większego trudu wymaga obliczenie tej całki — są tu naprawdę trzy całki, po jednej dla każdej składowej — aniżeli obliczenie całki dla potencjału i znalezienie jej gradientu.

Istnieje podobna całka, która wiąże ze sobą pole magnetyczne i prądy. Mieliliśmy już całkę dla potencjału wektorowego \mathbf{A} [równanie (14.19)]; całkę dla pola \mathbf{B} możemy znaleźć obliczając rotację z obu stron tej równości:

$$\mathbf{B}(\mathbf{l}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{l}) = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{2}) dV_2}{r_{12}} \right]. \quad (14.39)$$

Musimy teraz być ostrożni: operator rotacji oznacza obliczanie pochodnych funkcji $\mathbf{A}(\mathbf{l})$, a więc działa on tylko na współrzędne (x_1, y_1, z_1) . Możemy więc wnieść operator $\nabla \times$ pod znak całki, gdyż zmienne o wskaźniku 1 oczywiście występują jedynie w

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}. \quad (14.40)$$

Dla x -owej składowej pola \mathbf{B} mamy

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) - j_y \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) \right] dV_2 = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - j_y \frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3} \right] dV_2. \end{aligned} \quad (14.41)$$

Wielkość w nawiasach jest równa x -owej składowej wielkości

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}.$$

Odpowiednie wyniki znajdziemy również dla dwu pozostałych składowych, wobec czego mamy

$$\mathbf{B}(\mathbf{l}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{2}) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (14.42)$$

Całka ta daje bezpośrednio pole \mathbf{B} wiążąc je ze znanymi prądami. Oznaczenia są zgodne z rys. 14.2.

Jeśli prądy istnieją jedynie w obwodach składających się z cienkich przewodów, możemy od razu obliczyć całkę po przekroju poprzecznym przewodu, tak jak zrobiliśmy to w poprzednim paragrafie, zastępując $\mathbf{j} dV$ przez $I ds$, gdzie ds jest elementem długości przewodu. Wówczas, posługując się oznaczeniami z rys. 14.10, mamy

$$\mathbf{B}(\mathbf{l}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I \mathbf{e}_{12} \times ds_2}{r_{12}^2}. \quad (14.43)$$

(Znak minus pojawia się tu, gdyż odwróciliśmy kolejność czynników w iloczynie wektorowym.) Równość ta zwana jest *prawem Biota-Savarta*, od nazwisk jej odkrywców. Daje ona wzór pozwalający na obliczanie pola magnetycznego wprost ze znajomości prądów przewodzonych w obwodach.

Można zapytać: „Jaką mamy korzyść z wprowadzenia potencjału wektorowego, skoro możemy znaleźć pole \mathbf{B} bezpośrednio z całki wektorowej? Ostatecznie potencjał wektorowy \mathbf{A} także wymaga obliczenia trzech całek!” Odpowiedź brzmi: Ponieważ we wzorze na pole \mathbf{B} występuje iloczyn wektorowy, całki te są zwykle bardziej skomplikowane, jak widać z równania (14.41). Co więcej, ponieważ całki dla potencjału \mathbf{A} są takie, jak całki występujące w elektrostatyce, może się zdarzyć, że już je znamy. Wreszcie, zobaczymy później, że potencjał wektorowy odgrywa ważną rolę w teorii względności, a także w bardziej zaawansowanym sformułowaniu praw mechaniki (zasada najmniejszego działania), czy wreszcie w mechanice kwantowej.

potencjał wektorowy

15-1. Siły działające na pętlę z prądem; energia dipola

W poprzednim rozdziale rozważaliśmy pole magnetyczne wytworzone przez małą prostokątną pętlę z prądem. Przekonaaliśmy się, że jest to pole dipola, przy czym moment dipolowy dany jest wzorem

$$\mu = IA, \quad (15.1)$$

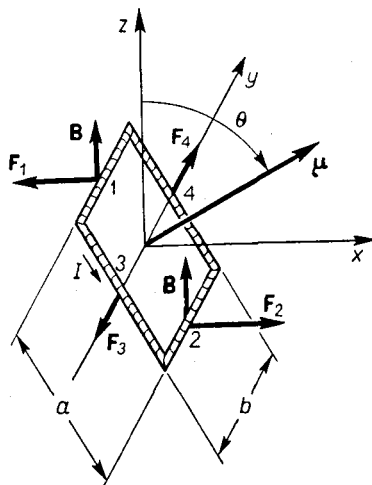
gdzie I jest prądem, a A — powierzchnią pętli. Kierunek tego momentu jest prostopadły do płaszczyzny pętli, wobec czego możemy napisać także

$$\mu = IAn,$$

gdzie \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni A .

Pętla z prądem, czyli dipol magnetyczny, nie tylko wytwarza pole magnetyczne, ale może także doznać działania sił, gdy się ją umieści w polu magnetycznym wytwarzanym przez inne prądy. Popatrzmy najpierw, jakie siły działają na prostokątną pętlę umieszczoną w jednorodnym polu magnetycznym. Niech oś z będzie skierowana zgodnie z kierunkiem pola, a płaszczyzna pętli niech przechodzi przez oś y , tworząc kąt θ z płaszczyzną xy , jak wskazuje rys. 15.1. Wtedy moment magnetyczny pętli, który ma kierunek prostopadły do pętli, utworzy kąt θ z kierunkiem pola magnetycznego.

15.1. Prostokątna pętla z prądem I , umieszczona w jednorodnym polu \mathbf{B} (skierowanym wzdłuż osi z). Moment siły działający na pętlę wynosi $\tau = \mu \times \mathbf{B}$, gdzie moment magnetyczny $\mu = Iab$.



Ponieważ prądy płyną w przeciwnych kierunkach po przeciwległych bokach pętli, więc siły są także przeciwne, tak że na pętlę nie działa żadna siła wypadkowa (gdy pole jest jednorodne). Siły te jednak działając na dwa boki oznaczone 1 i 2 na rys. 15.1 dają pewien moment siły, który zmierza do obrócenia pętli wokół osi y . Wartość tych sił F_1 i F_2 wynosi

$$F_1 = F_2 = IBb.$$

Ramię momentu tych sił równe jest

$$a \sin \theta,$$

wobec czego moment siły wynosi

$$\tau = Iab B \sin \theta,$$

czyli skoro Iab jest momentem magnetycznym pętli,

$$\tau = \mu B \sin \theta.$$

Moment ten możemy zapisać w postaci wektorowej:

$$\tau = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (15.2)$$

Choć wykazaliśmy, że moment siły dany jest równością (15.2) tylko w jednym raczej szczególnym przypadku, wynik jest słuszny dla każdej małej pętli dowolnego kształtu, jak zobaczymy za chwilę. Pamiętajmy, że związek tego samego rodzaju znaleźliśmy także dla momentu siły działającej na dipol elektryczny:

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

Spytajmy teraz, jaką wartość ma energia mechaniczna naszej pętli z prądem. Ponieważ działa moment siły, energia zależy oczywiście od ustawienia pętli. Zasada prac wirtualnych mówi, że moment siły jest szybkością zmian energii ze zmianą kąta, wobec czego możemy napisać

$$dU = -\tau d\theta.$$

Podstawiając $\tau = -\mu B \sin \theta$ i całkując, możemy napisać następujący wzór dla energii:

$$U = -\mu B \cos \theta + \text{const}. \quad (15.3)$$

(Znak jest tu ujemny, gdyż moment skręcający próbuje ustawić moment magnetyczny zgodnie z kierunkiem pola; energia jest najmniejsza, gdy wektory $\boldsymbol{\mu}$ i \mathbf{B} są równoległe.)

Z przyczyn, które omówimy później, energia ta *nie* jest równa całkowitej energii pętli z prądem. (Dla przykładu — nie wzięliśmy jeszcze pod uwagę energii potrzebnej do podtrzymywania prądu w pętli.) Oznaczmy zatem tę energię U_{mech} , żeby pamiętać, iż jest to tylko część energii. Ponieważ zaś tak czy owak opuszczamy część energii, stałą całkowania w równaniu (15.3) możemy przyrównać do zera. Przepisujemy więc równanie w postaci:

$$U_{\text{mech}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (15.4)$$

Jeszcze raz napotykamy tu odpowiedniość z wzorem uzyskanym poprzednio dla dipola elektrycznego:

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (15.5)$$

Energia elektrostatyczna U we wzorze (15.5) jest energią prawdziwą, w przeciwieństwie do energii U_{mech} danej wzorem (15.4). Tą ostatnią możemy jednak posłużyć się w celu obliczenia sił przy wykorzystaniu zasady prac wirtualnych, jeżeli założymy, że prąd w pętli — lub co najmniej μ — jest stałe.

Możemy też wykazać dla naszej prostokątnej pętli, że U_{mech} odpowiada pracy mechanicznej wykonanej przy wprowadzaniu pętli w pole. Całkowita siła działająca na pętlę jest równa zero w polu jednorodnym; w polu niejednorodnym *istnieją* siły wypadkowe działające na pętlę z prądem. Umieszczając pętlę w obszarze, w którym istnieje pole, musimy przejść przez takie obszary, w których pole nie jest jednorodne, a zatem wykonujemy pracę. Dla uproszczenia obliczeń wyobraźmy sobie, że umieszczamy pętlę w polu w ten sposób, że jej moment jest skierowany zgodnie z polem. (Możemy go obrócić do jego ostatecznego położenia po wprowadzeniu pętli na właściwe miejsce.)

Wyobraźmy sobie, że chcemy przesunąć pętlę w kierunku osi x — ku obszarowi silniejszego pola — i że pętla jest ustawiona, jak pokazuje rys. 15.2. Zaczynamy przesuwanie od miejsca, gdzie pole jest równe zero, i całkujemy siłę mnożoną przez odległość wzdłuż drogi, po której przenosimy pętlę do obszaru zajmowanego przez pole.

Obliczamy najpierw pracę wykonaną przez siłę działającą na każdy bok pętli z osobna, a potem zsumujemy poszczególne przyczynki (zamiast dodawać siły przed scałkowaniem). Siły działające na boki 3 i 4 są skierowane pod kątem prostym do kierunku ruchu, wobec czego nie wykonują one żadnej pracy. Siła działająca na bok 2 wynosi $Ib B(x)$ w kierunku osi x i, aby znaleźć pracę wykonaną przeciw siłom magnetycznym, musimy scałkować tę wielkość od pewnego x , gdzie pole jest równe zero, powiedzmy w punkcie $x = -\infty$, do x_2 , obecnego położenia pętli:

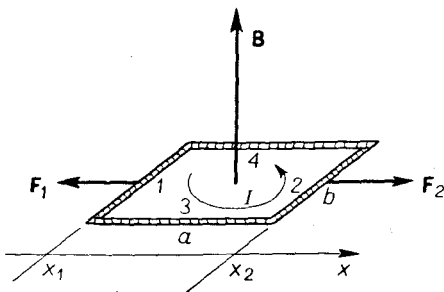
$$W_2 = - \int_{-\infty}^{x_2} F_2 dx = -Ib \int_{-\infty}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.6)$$

Podobnie, praca wykonana przeciw siłom działającym na bok 1 wynosi

$$W_1 = - \int_{-\infty}^{x_1} F_1 dx = Ib \int_{-\infty}^{x_1} B(x) dx. \quad (15.7)$$

Aby obliczyć każdą z całek, musimy wiedzieć, jak $B(x)$ zależy od x . Ale zauważmy, że bok 1 postępuje dokładnie za bokiem 2, tak że odpowiednia całka (15.7) zawiera w sobie większą część pracy wykonywanej na boku 2. Rzeczywiście, suma (15.6) i (15.7) wynosi

$$W = -Ib \int_{x_1}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.8)$$



15.2. Pętla przenoszona jest w kierunku osi x przez pole \mathbf{B} skierowane prostopadle do x .

Jeżeli jednak jesteśmy w obszarze, w którym pole B jest prawie takie samo na obu bokach 1 i 2, możemy napisać tę całkę w postaci

$$\int_{x_1}^{x_2} B(x) dx = (x_2 - x_1)B = aB,$$

gdzie B jest wartością pola w środku pętli. Całkowita energia mechaniczna włożona przez nas wynosi zatem

$$U_{\text{mech}} = W = -IabB = -\mu B. \quad (15.9)$$

Wynik ten zgodny jest z wzorem dla energii, którą wzięliśmy pisząc równanie (15.4).

Dostalibyśmy oczywiście ten sam wynik, gdybyśmy dodali siły działające na pętlę przed scałkowaniem. Jeżeli oznaczymy symbolem B_1 pole na boku 1, a symbolem B_2 — na boku 2, to siła całkowita w kierunku x będzie miała postać

$$F_x = Ib(B_2 - B_1).$$

Jeżeli pętla jest „mała”, tj. jeżeli pola B_2 i B_1 nie różnią się zbyt od siebie, możemy napisać

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} a.$$

Tak więc siła równa jest

$$F_x = Iab \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (15.10)$$

Całkowita praca wykonana na pętli przez siły zewnętrzne wynosi

$$- \int_{-\infty}^x F_x dx = -Iab \int \frac{\partial B}{\partial x} dx = -IabB,$$

co znów równe jest dokładnie $-\mu B$. Dopiero teraz widzimy, dlaczego siła działająca na małą pętlę z prądem jest proporcjonalna do pochodnej pola magnetycznego, jak oczekivalibyśmy znając wzór

$$F_x \Delta x = -\Delta U_{\text{mech}} = -\Delta(-\mu \cdot \mathbf{B}). \quad (15.11)$$

Nasz wynik zatem mówi, że mimo iż $U_{\text{mech}} = -\mu \cdot \mathbf{B}$ może nie obejmować całej energii układu — jest swego rodzaju imitacją energii — możemy się nią posługiwać przy zastosowaniu zasady prac wirtualnych w celu znajdowania sił działających na pętlę z prądem stałym.

15-2. Energia mechaniczna i elektryczna

Chcemy teraz pokazać, dlaczego energia U_{mech} rozważana w poprzednim paragrafie nie jest poprawną energią związaną z prądami stałymi. Bierze się to stąd, że nie zawiera ona jeszcze całkowitej energii w świecie. Co prawda, podkreślaliśmy, że możemy się nią

posługiwać jak energią przy obliczaniu sił z zasady prac wirtualnych, *pod warunkiem*, że prąd w pętli (i wszystkie *inne* prądy) nie ulegają zmianom. Zobaczmy, dlaczego nie powoduje to żadnych trudności.

Wyobraźmy sobie, że pętla z rys. 15.2 porusza się w kierunku $+x$ i wybierzmy oś z zgodnie z kierunkiem pola \mathbf{B} . Elektron-y przewodnictwa na boku 2 doznają działania siły skierowanej wzdłuż drutu, w kierunku y . Ale w związku z ich przepływem — w postaci prądu elektrycznego — istnieje składowa ich ruchu skierowana zgodnie z siłą. Nad każdym elektronem jest więc wykonywana praca $F_y v_y$, na jednostkę czasu, gdzie v_y jest składową prędkości elektronu wzdłuż przewodu. Nazwiemy tę pracę wykonaną na elektronach pracą *elektryczną*. Okazuje się, że jeżeli pętla porusza się w polu *jednorodnym*, to całkowita praca elektryczna równa jest zeru, gdyż na pewnej części tej pętli wykonana jest praca dodatnia, podczas gdy na innych częściach wykonana jest taka sama praca, lecz o przeciwnym znaku. Nie jest to jednak słuszne, jeżeli obwód porusza się w polu *niejednorodnym* — wówczas na elektronach *zostanie* wykonana pewna praca wypadkowa. Ogólnie biorąc, praca ta zostałaby spożytkowana na zmianę przepływu elektronów, ale jeżeli prąd był utrzymywany stale przy tej samej wartości, pewna energia musiała być pochłonięta lub wydatkowana z baterii lub innego źródła, które podtrzymuje stały przepływ prądu. Energia ta nie została włączona w wartość U_{mech} obliczoną w wyrażeniu (15.9), gdyż obliczenia te uwzględniały tylko działanie sił mechanicznych na przewód jako całość.

Można by sądzić, że skoro siła działająca na elektrony zależy od tego, jak *szybko* porusza się przewód, to być może, możemy pominąć energię elektryczną, jeżeli drut porusza się dostatecznie powoli. Prawdą jest, że *szybkość*, z którą dostarczana jest energia elektryczna, jest proporcjonalna do szybkości przewodu, ale *całkowita* energia dostarczona jest proporcjonalna także do *czasu*, w ciągu którego energia ta była dostarczona. Zatem całkowita energia elektryczna jest proporcjonalna do szybkości mnożonej przez czas, co równa się po prostu przebytej odległości. Po przebyciu tej samej odległości w polu wykonana jest taka sama praca elektryczna.

Rozważmy prostoliniowy odcinek przewodu o długości jednostkowej, w którym płynie prąd o natężeniu I , i załóżmy, że przewód ten porusza się w kierunku prostopadłym do kierunku tego przewodu, a także do pola magnetycznego \mathbf{B} z prędkością v_{drutu} . W związku z przepływem prądu elektrony będą też miały pewną prędkość przepływu $v_{\text{unoszenia}}$, skierowaną wzdłuż przewodu. Składowa siły magnetycznej działającej na każdy elektron w kierunku unoszenia wynosi $q_e v_{\text{drutu}} B$. Tak więc praca elektryczna na jednostkę czasu wynosi $F v_{\text{unoszenia}} = (q_e v_{\text{drutu}} B) v_{\text{unoszenia}}$. Jeżeli w przewodzie istnieje N elektronów przewodnictwa na jednostkę długości przewodu, to w jednostce czasu całkowita praca elektryczna wynosi

$$\frac{dU_{\text{elektr}}}{dt} = N q_e v_{\text{drutu}} B v_{\text{unoszenia}}.$$

Ale $N q_e v_{\text{unoszenia}} = I$, natężeniu prądu w przewodzie, wobec czego

$$\frac{dU_{\text{elektr}}}{dt} = I v_{\text{drutu}} B.$$

Ponieważ jednak utrzymujemy stałe natężenie prądu, siły działające na elektrony przewodnictwa nie przyspieszają ich; energia elektryczna nie przechodzi do elektronów, lecz do źródła podtrzymującego stałe natężenie prądu.

Ale zauważmy, że siła działająca na *przewód* wynosi IB , wobec czego IBv_{drutu} jest równa także *pracy mechanicznej* wykonywanej w jednostce czasu na przewodzie, $dU_{\text{mech}}/dt = = IBv_{\text{drutu}}$. Wnioskujemy, że praca mechaniczna wykonywana nad przewodem jest dokładnie równa pracy elektrycznej wykonanej nad źródłem prądu, wobec czego energia pętli *jest stała!*

Nie jest to przypadkiem, ale konsekwencją prawa, które już znamy. Całkowita siła działająca na każdy ładunek w przewodzie wynosi

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Moc wynosi więc

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]. \quad (15.12)$$

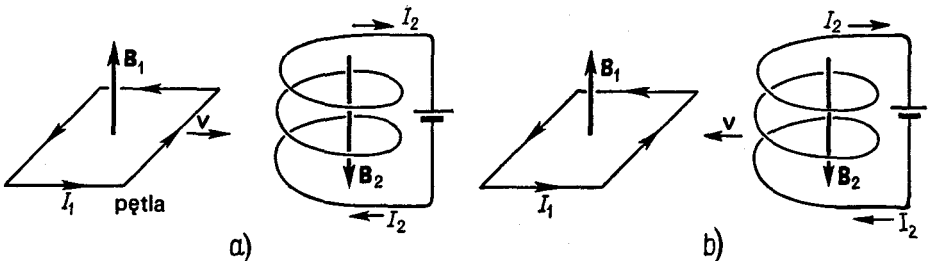
Jeżeli nie ma pól elektrycznych, mamy tylko drugi wyraz, który jest zawsze równy zeru. Zobaczymy później, że *zmienne* pola magnetyczne wytwarzają pola elektryczne, wobec czego rozumowanie nasze znajduje zastosowanie jedynie do przewodów poruszających się w stałych polach magnetycznych.

Jak się zatem dzieje, że zasada prac wirtualnych daje poprawną odpowiedź? Otóż dlatego, że *wciąż* jeszcze nie wzięliśmy pod uwagę *całkowitej* energii w świecie. Nie włączyliśmy energii prądów, które *wytwarzają* zewnętrzne (w stosunku do pętli) pola magnetyczne.

Wyobraźmy sobie pełny układ, jak na rys. 15.3a, przy czym poruszamy naszą pętlę z prądem I w polu magnetycznym \mathbf{B}_1 wytworzonym przez prąd I_2 w cewce. Teraz prąd I_1 w pętli będzie też wytwarzać pewne pole magnetyczne \mathbf{B}_2 w cewce. Jeżeli pętla się porusza, pole \mathbf{B}_2 będzie się zmieniać. Jak się dowiemy z następnego rozdziału, zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne \mathbf{E} ; a to pole \mathbf{E} będzie wykonywać pracę nad ładunkami w cewce. Energię tę trzeba także włączyć do naszego bilansu całkowitej energii.

Moglibyśmy zaczekać do następnego rozdziału, aby znaleźć ten nowy wyraz w energii układu, ale możemy już teraz zobaczyć, jaki on będzie, posługując się w następujący sposób zasadą względności. Gdy poruszamy pętlę w polu wytwarzanym przez cewkę zaj-

15.3. Obliczanie energii małej pętli umieszczonej w polu magnetycznym



mującą ustalone położenie, wiemy, że jej energia elektryczna będzie dokładnie równa co do wartości, lecz przeciwnego znaku do wykonanej pracy mechanicznej. Tak więc

$$U_{\text{mech}} + U_{\text{elektr}}(\text{pętli}) = 0.$$

Przypuśćmy teraz, że patrzymy na to, co się dzieje, z innego punktu widzenia: niech teraz pętla spoczywa, a cewka niech się porusza ku niej. Cewka porusza się wtedy w polu wytworzonym przez pętlę. Te same argumenty doprowadziłyby nas do wniosku, że

$$U_{\text{mech}} + U_{\text{elektr}}(\text{cewki}) = 0.$$

Energia mechaniczna jest taka sama w obu przypadkach, gdyż bierze się ona z siły działającej między dwoma obwodami.

Suma tych dwu równań daje

$$2U_{\text{mech}} + U_{\text{elektr}}(\text{pętli}) + U_{\text{elektr}}(\text{cewki}) = 0.$$

Całkowita energia pełnego układu jest oczywiście równa sumie dwu energii elektrycznych plus energii mechanicznej wziętej tylko *jeden raz*. Mamy więc

$$U_{\text{całk}} = U_{\text{elektr}}(\text{pętli}) + U_{\text{elektr}}(\text{cewki}) + U_{\text{mech}} = -U_{\text{mech}}. \quad (15.13)$$

Całkowita energia świata równa jest więc rzeczywiście energii mechanicznej U_{mech} wziętej z *przeciwnym znakiem*. Jeżeli potrzebna jest nam prawdziwa energia, np. dipola magnetycznego, powinniśmy napisać

$$U_{\text{całk}} = +\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}.$$

Tylko wtedy, gdy nałożymy warunek, że wszystkie prądy są stałe, możemy się posługiwać jedynie częścią energii U_{mech} (która jest zawsze równa minus energii prawdziwej) w celu znajdowania sił mechanicznych. W zagadnieniach ogólniejszych musimy zwracać uwagę na to, by włączyć wszystkie energie.

Podobną sytuację spotkalimy w elektrostatyce. Pokazaliśmy, że energia kondensatora równa jest $Q^2/2C$. Gdy posługujemy się zasadą prac wirtualnych przy obliczaniu siły działającej między płytami kondensatora, zmiana energii równa jest $Q^2/2$, pomnożone przez zmianę $1/C$. To znaczy

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{Q^2}{2} \frac{\Delta C}{C^2}. \quad (15.14)$$

Przypuśćmy teraz, że mamy obliczyć pracę potrzebną do zmiany położenia dwóch przewodników, na które nałożyliśmy inny warunek — że występuje między nimi stałe napięcie. Wówczas możemy dostać poprawne odpowiedzi dla siły z zasady prac wirtualnych, postępując jak poniżej. Ponieważ $Q = CV$, przeto rzeczywista energia równa jest $\frac{1}{2}CV^2$. Wprowadzimy jednak pewną „energię” równą $-\frac{1}{2}CV^2$; wówczas możemy się posłużyć zasadą prac wirtualnych do obliczenia sił, przyrównując zmianę tej „energii” do pracy mechanicznej, przy założeniu, że napięcie V jest stałe. Wówczas

$$\Delta U_{\text{mech}} = \Delta \left(-\frac{CV^2}{2} \right) = -\frac{V^2}{2} \Delta C; \quad (15.15)$$

równanie to jest takie samo jak (15.14). Dostajemy poprawny wynik, chociaż pomijamy pracę wykonaną przez układ elektryczny na podtrzymanie stałego napięcia. Tutaj znowu energia elektryczna jest dokładnie dwa razy większa od energii mechanicznej, lecz ma przeciwny znak.

Tak więc jeżeli wykonujemy rachunki w sposób niezbyt poprawny, pomijając fakt, że źródło potencjału musi wykonać pracę na podtrzymanie stałego napięcia, dostajemy poprawną odpowiedź. Jest to sytuacja dokładnie taka sama jak w magnetostatyce.

15-3. Energia prądów stałych

Możemy teraz, aby znaleźć prawdziwą energię stałych prądów w polach magnetycznych, wykorzystać fakt, że $U_{\text{całk}} = -U_{\text{mech}}$. Możemy zacząć od obliczenia prawdziwej energii małej pętli z prądem. Oznaczamy $U_{\text{całk}}$ po prostu jako U ; możemy wtedy napisać

$$U = \mu \cdot \mathbf{B}. \quad (15.16)$$

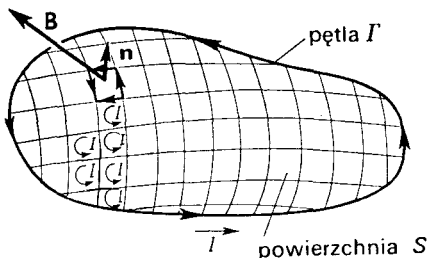
Chociaż obliczyliśmy tę energię dla płaskiej pętli prostokątnej, wynik ten pozostaje słuszny dla małej płaskiej pętli dowolnego kształtu.

Energię obwodu o dowolnym kształcie możemy obliczyć wyobrażając sobie, że jest on wykonany z małych pętli z prądem. Powiedzmy, że mamy drut w kształcie pętli Γ (jak na rys. 15.4). Na krzywej tej rozepnijmy powierzchnię S , a na tej powierzchni zaznaczmy większą liczbę mniejszych pętli, z których każdą możemy uważać za płaską. Jeżeli założymy, że prąd o natężeniu I krąży wokół *każdej* z małych pętli, wynik sumaryczny będzie taki sam jak dla prądu krążącego wokół pętli Γ , ponieważ prądy na wszystkich liniach wewnątrz pętli Γ znoszą się. Układ małych pętli z prądem z punktu widzenia fizyki jest nieodróżnialny od obwodu oryginalnego. Energia musi być także taka sama, a więc jest ona równa po prostu sumie energii małych pętli.

Jeżeli pole powierzchni każdej z małych pętli wynosi Δa , jej energia równa jest $I \Delta a B_n$, gdzie B_n jest składową pola, prostopadłą do Δa . Energia całkowita wynosi

$$U = \sum IB_n \Delta a.$$

15.4. Energię dużej pętli w polu magnetycznym można rozpatrywać jako sumę energii mniejszych pętli.



Przechodząc do granicy z polem powierzchni pętli nieskończenie małych otrzymujemy całkę zamiast sumy, wobec czego

$$U = I \int B_n da = I \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da, \quad (15.17)$$

gdzie \mathbf{n} jest wektorem prostopadłym do ds .

Podstawiając $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ możemy powiązać całkę powierzchniową z całką krzywoliniową korzystając przy tym z twierdzenia Stokesa

$$I \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da = I \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.18)$$

gdzie $d\mathbf{s}$ jest skierowanym elementem łuku wzdłuż krzywej Γ . Mamy zatem dla energii obwodu o dowolnym kształcie następujące wyrażenie:

$$U = I \oint_{\text{obwód}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.19)$$

W wyrażeniu tym \mathbf{A} odnosi się oczywiście do potencjału wektorowego, wytworzonego przez te prądy (inne niż prąd I w drucie), które wytwarzają pole \mathbf{B} w przewodzie.

Z kolei dowolny rozkład prądów stacjonarnych możemy sobie wyobrazić w postaci wiązki drucików przebiegających równoległe do linii prądu. Dla każdej pary takich obwodów energia dana jest wzorem (15.19), gdzie całkujemy po jednym obwodzie, posługując się potencjałem wektorowym pochodzącym od drugiego obwodu. W wyrażeniu na energię całkowitą wejdzie suma wszystkich takich par. Jeżeli zamiast pamiętać o poszczególnych parach, obliczymy pełną sumę po wszystkich takich drucikach, obliczymy całą energię podwójnie (podobny efekt dostrzegliśmy w elektrostatyce), wobec czego możemy napisać całkowitą energię w postaci

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \, dV. \quad (15.20)$$

Wzór ten odpowiada wynikowi, który uzyskaliśmy w przypadku energii elektrostatycznej:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi \, dV. \quad (15.21)$$

Tak więc możemy, jeśli mamy ochotę, uważać \mathbf{A} za rodzaj energii potencjalnej dla prądów w magnetostatyce. Na nieszczęście, idea ta nie jest zbyt pożyteczna, gdyż słuszna jest tylko dla pól statycznych. W rzeczywistości ani wyrażenie (15.20), ani wyrażenie (15.21) nie daje poprawnej wartości energii, gdy pola zmieniają się w czasie.

15-4. Pole \mathbf{B} a pole \mathbf{A}

W tym paragrafie chcielibyśmy zastanowić się nad odpowiedzią na następujące pytania: Czy potencjał wektorowy jest tylko pojęciem potrzebnym do podania przepisu użytecznego przy wykonywaniu obliczeń — tak jak potencjał skalarny użyteczny jest w elektrostatyce — czy też jest to „rzeczywiste” pole? Czy to nie pole magnetyczne jest owym „rzeczywistym” polem, gdyż ono jest odpowiedzialne za siłę działającą na poruszającą się cząstkę? Przede wszystkim musimy powiedzieć, że zwrot „pole rzeczywiste” nie ma zbyt wielkiego sensu. Nikt prawdopodobnie nie odczuwa pola magnetycznego jako coś bardzo rzeczywistego, gdyż w ogóle cała idea pola jest raczej abstrakcyjna. Nie można wyciągnąć ręki i poczuć pola magnetycznego. Co więcej, wartość pola magnetycznego nie jest zbyt dobrze określona; dobierając poruszający się odpowiednio układ odniesienia możemy sprawdzić, że pole magnetyczne w określonym punkcie zniknie.

To, co mamy tu na myśli mówiąc „rzeczywiste” pole, znaczy: pole rzeczywiste jest

pewną funkcją matematyczną, którą posługujemy się, aby uniknąć idei oddziaływania na odległość. Jeżeli mamy naładowaną cząstkę w punkcie P , to inne ładunki umieszczone w pewnej odległości od tego punktu wywierają na tę cząstkę pewien wpływ. Jeden ze sposobów opisu takiego oddziaływania polega na założeniu, że inne ładunki stwarzają pewne „warunki” — czymkolwiek te warunki są — w otoczeniu punktu P . Jeżeli znamy te warunki, które opisujemy wprowadzając pola elektryczne i magnetyczne, to możemy całkowicie określić zachowanie się cząstki, bez dalszego zastanawiania się, jak te warunki powstają.

Innymi słowy, gdyby wszystkie te inne ładunki zostały w jakiś sposób zmienione, ale tak, żeby warunki w punkcie P opisane przez pole elektryczne i magnetyczne pozostały takie same, to także ruch ładunku byłby taki sam. „Rzeczywiste” pole jest więc układem liczb, które określamy w taki sposób, aby to, co się dzieje w punkcie, zależało jedynie od liczb dla tego właśnie punktu. Nie potrzebujemy wiedzieć, co dzieje się w innych miejscach. W tym właśnie sensie zastanowimy się, czy potencjał wektorowy jest polem „rzeczywistym”.

Można by się zapytać, czy nie sprawia jakiegoś kłopotu fakt, że potencjał wektorowy nie jest określony jednoznacznie, to znaczy, że możemy go zmienić przez dodanie gradientu dowolnego skalaru, nie wprowadzając przez to żadnych zmian w siłach działających na cząstkę. Nie ma to jednak nic wspólnego z zagadnieniem „realności” w tym sensie, w którym je omówiliśmy powyżej. Tak na przykład, pole magnetyczne również jest jakoś zmieniane relatywistycznie (podobnie jak \mathbf{E} i \mathbf{A}). Ale nie przejmujemy się tym, co się dzieje, jeżeli pola mogą się w ten sposób zmieniać. W gruncie rzeczy nie ma tu żadnej różnicy; nie ma to też nic wspólnego z tym, czy potencjał wektorowy jest właściwym polem „rzeczywiście” opisującym efekty magnetyczne, czy też jest to tylko użyteczne narzędzie matematyczne.

Powinniśmy także powiedzieć kilka słów na temat użyteczności potencjału wektorowego \mathbf{A} . Widzieliśmy, że możemy się nim posługiwać przy obliczaniu pól magnetycznych znanych prądów, tak jak możemy używać potencjału φ do obliczania pól elektrycznych. W elektrostatyce potencjał φ dany był całką skalarną

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q(2)}{r_{12}} dV_2. \quad (15.22)$$

Z tego wyrażenia na φ dostajemy trzy składowe pola \mathbf{E} za pomocą trzech operacji różniczkowych. Procedura ta jest zwykle łatwiejsza od obliczania trzech całek we wzorze wektorowym

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q(2) \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.23)$$

Po pierwsze, są trzy całki; po drugie zaś, każda z nich jest na ogół trochę trudniejsza do obliczenia.

Korzyści te są znacznie mniej widoczne w przypadku magnetostatyki. Całka dla potencjału wektorowego \mathbf{A} jest już całką wektorową:

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}}, \quad (15.24)$$

która oczywiście zawiera trzy całki. Co więcej, gdy obliczamy rot \mathbf{A} , aby dostać pole \mathbf{B} , mamy do znalezienia i połączenia w pary sześć pochodnych. Nie widać z góry, czy w większości zagadnień procedura ta rzeczywiście jest łatwiejsza niż obliczanie pola \mathbf{B} wprost z wzoru

$$\mathbf{B}(\mathbf{1}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{2}) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.25)$$

W wielu prostych zagadnieniach posługiwanie się potencjałem wektorowym jest często trudniejsze z następujących powodów. Przypuśćmy, że interesuje nas tylko pole magnetyczne \mathbf{B} w jednym punkcie i że problem ma jakąś ładną symetrię — powiedzmy, że chcemy obliczyć pole w jakimś punkcie na osi pierścienia z prądem. Ze względu na symetrię problemu możemy bez trudu znaleźć pole \mathbf{B} obliczając całkę (15.25). Gdybyśmy jednak chcieli najpierw znaleźć pole \mathbf{A} , musielibyśmy obliczać pole \mathbf{B} jako *pochodną* \mathbf{A} , a więc musielibyśmy znać potencjał w całym *otoczeniu* punktów, które nas interesują. Większość tych punktów jest zaś poza osią symetrii, wobec czego całka służąca do obliczania \mathbf{A} staje się skomplikowana. W zagadnieniu pierścienia na przykład musielibyśmy posługiwać się całkami eliptycznymi. W zagadnieniach tego rodzaju oczywiście pole \mathbf{A} nie jest bardzo użyteczne. Jest prawdą, że w wielu skomplikowanych zagadnieniach łatwiej jest posługiwać się polem \mathbf{A} , ale trudno by było argumentować, że ta techniczna łatwość usprawiedliwia wprowadzenie jednego jeszcze pola wektorowego.

Wprowadziliśmy pole \mathbf{A} , gdyż ma ono *naprawdę* ważny sens fizyczny. Nie tylko wiąże się z energiami prądów, jak widzieliśmy w poprzednim paragrafie, ale jest też „rzeczywistym” polem fizycznym w powyżej opisanym sensie. Jest rzeczą jasną, że w mechanice klasycznej możemy zapisać siłę działającą na cząstkę w postaci

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (15.26)$$

tak że jeżeli dane są siły, cały ruch jest wyznaczony. W dowolnym obszarze, gdzie pole $\mathbf{B} = 0$, nawet jeśli pole \mathbf{A} nie jest równe zeru, tak jak na przykład na zewnątrz solenoidu, pole \mathbf{A} nie wywiera żadnego dostrzegalnego wpływu na ruch. Wobec tego wierzone przez długi czas, że \mathbf{A} nie jest polem „rzeczywistym”. Okazuje się jednak, że są takie zjawiska kwantowe, które wykazują, że pole \mathbf{A} jest naprawdę polem „rzeczywistym”, w powyżej określonym znaczeniu. W następnym paragrafie pokażemy, na czym to polega.

15-5. Potencjał wektorowy a mechanika kwantowa

Gdy przechodzimy od mechaniki klasycznej do kwantowej pewne pojęcia tracą, a inne zyskują na znaczeniu. Omówiliśmy już niektóre z takich zmian w I tomie. W szczególności pojęcie siły stopniowo zanika, podczas gdy pojęcia energii i pędu nabierają ogromnego znaczenia. Pamiętamy, że zamiast ruchów cząstek rozważamy amplitudy prawdopodobieństwa, które się zmieniają w przestrzeni i w czasie. Amplitudy te przedstawiają fale o długościach związanych z pędami i o częstościach związanych z energiami. Pędy i energie określające fazy funkcji falowej są więc ważne z punktu widzenia mechaniki kwantowej.

Zamiast rozważać siły zastanawiamy się, w jaki sposób oddziaływania zmieniają długość fal. Pojęcie siły staje się wtórne, jeżeli w ogóle ma ono jeszcze jakieś znaczenie. Gdy mówimy na przykład o siłach jądrowych, analizujemy zazwyczaj i posługujemy się energiami oddziaływania dwu nukleonów, a nie siłą działającą między nimi. Nikt nigdy nie różniczuje energii, aby sprawdzić, jak ta siła wygląda. W paragrafie tym chcemy pokazać, jak potencjał wektorowy i skalarny wchodzi do równań mechaniki kwantowej. W gruncie rzeczy, właśnie dlatego, że pęd i energia odgrywają w mechanice kwantowej główną rolę, potencjały \mathbf{A} i φ zapewniają nam najłatwiejszy sposób wprowadzenia efektów elektromagnetycznych do opisu kwantowego.

Musimy raz jeszcze przypatrzeć się, jak funkcjonuje formalizm mechaniki kwantowej. Rozważmy znowu doświadczenie myślowe opisane w rozdz. 37 tomu I (cz. 2); omawialiśmy tam uginanie się elektronów w dwu szczelinach. Urządzenie, które do tego służy, przedstawiono ponownie na rys. 15.5. Elektrony, z których wszystkie mają w przybliżeniu tę samą energię, opuszczają źródło i podróżują w kierunku ściany z dwiema wąskimi szczelinami. Poza ścianą znajduje się „siatka” z ruchomym detektorem. Mierzy on liczbę elektronów docierających do małego obszaru siatki w odległości x od osi symetrii. Tę liczbę charakteryzuje się stosunkiem, który oznaczymy przez I , do liczby elektronów padających. Stosunek I jest proporcjonalny do prawdopodobieństwa, że pojedynczy elektron opuszczający źródło dotrze do tego właśnie obszaru siatki. Prawdopodobieństwo to ma postać dość skomplikowaną, którą rozumiemy jako wynik interferencji dwu amplitud, pochodzących od każdej z dwu szczelin. Interferencja tych dwu amplitud zależy od ich różnicy w fazie. Znaczący to, że jeżeli amplitudy wynoszą $C_1 \exp(i\Phi_1)$ oraz $C_2 \exp(i\Phi_2)$, to różnica faz $\delta = \Phi_1 - \Phi_2$ określa obraz interferencyjny [patrz równanie (29.12) w tomie I (cz. 2)]. Jeżeli odległość między ekranem a szczelinami wynosi L i jeżeli różnica w długościach drogi przebytej przez oba elektrony wynosi a , jak pokazuje rysunek, to różnica fazy dwu fal wynosi

$$\delta = \frac{a}{\lambda}. \quad (15.27)$$

Jak zwykle oznaczamy $\lambda = \lambda/2\pi$, gdzie λ jest długością fali amplitudy prawdopodobieństwa. Dla uproszczenia będziemy rozważać tylko takie wartości x , które są znacznie mniejsze od L . Możemy wówczas napisać

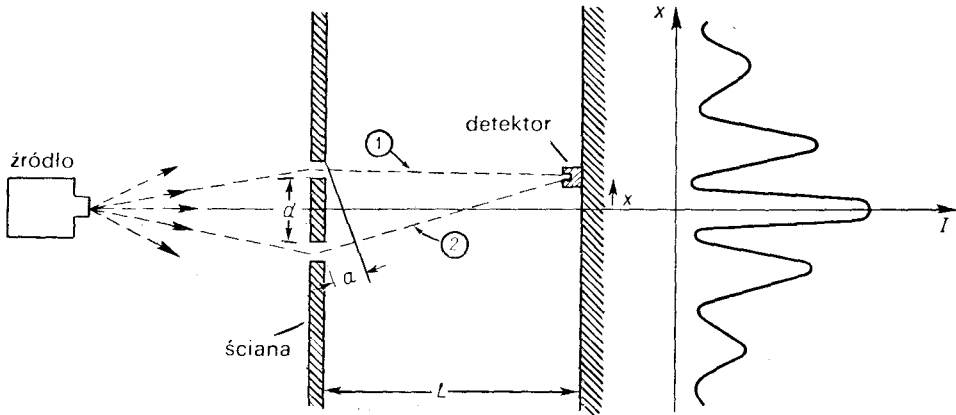
$$a = \frac{x}{L} d,$$

oraz

$$\delta = \frac{x}{L} \frac{d}{\lambda}. \quad (15.28)$$

Gdy $x = 0$, $\delta = 0$. Fale są wtedy w zgodnej fazie i prawdopodobieństwo osiąga maksimum. Gdy $\delta = \pi$, fale mają przeciwne fazy i interferują destrukcyjnie, wobec czego prawdopodobieństwo jest minimalne. W wyniku tej interferencji dostajemy falisty rozkład natężenia elektronów.

Chcielibyśmy teraz podać prawo, którym mechanika kwantowa zastępuje prawo



15.5. Doświadczenie interferencyjne z elektronami [patrz też rozdz. 37 tomu I (cz. 2)]

$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Będzie to prawo określające zachowanie się cząstki kwantowej w polu elektromagnetycznym. Ponieważ wszystko musi być wyrażone poprzez amplitudy, prawo to musi nam powiedzieć, jak siły magnetyczne zmieniają amplitudy; nie mamy już więcej do czynienia z przyspieszeniem cząstki. Prawo to brzmi następująco: faza amplitudy fali przybywającej po dowolnej drodze zmienia się wskutek obecności pola magnetycznego o wielkość równą całce z potencjału wektorowego wzdłuż całego toru, pomnożonej przez ładunek cząstki i podzielonej przez stałą Plancka. Znaczy to, że

$$\text{zmiana fazy pod wpływem pola magnetycznego} = \frac{q}{\hbar} \int_{\text{tor}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.29)$$

Gdyby nie było pola magnetycznego, wystąpiłaby pewna faza w fali nadbiegającej. Jeżeli wszędzie jest pole magnetyczne, faza fali nadbiegającej zmieniona jest o całkę we wzorze (15.29).

Choć nie będziemy z tego na razie korzystać, zauważmy, że efekt pola elektrostatycznego polega na wytworzeniu różnicy faz danej przez *minus* całkę po czasie z potencjału skalarnego φ :

$$\text{zmiana fazy pod wpływem pola elektrycznego} = -\frac{q}{\hbar} \int \varphi dt.$$

Te dwa wyrażenia są słuszne jedynie dla pól statycznych, ale ich suma daje poprawny wynik dla dowolnego pola elektromagnetycznego, statycznego czy dynamicznego. To właśnie prawo zastępuje prawo $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Chcemy jednak na razie rozważać tylko statyczne pole magnetyczne.

Przypuśćmy, że w doświadczeniu z dwiema szczelinami występuje pewne pole magnetyczne. Chcemy zapytać, jaka jest faza fali nadbiegającej do ekranu dla dwu fal, których drogi przechodzą przez dwie szczeliny. Ich interferencja określa położenie maksimów prawdopodobieństwa. Możemy fazę fali poruszającej się po torze (1) oznaczyć Φ_1 . Jeżeli

$\Phi_1(B=0)$ jest fazą bez pola magnetycznego, to po włączeniu pola faza wyniesie

$$\Phi_1 = \Phi_1(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.30)$$

Podobnie, faza dla toru (2) wyniesie

$$\Phi_2 = \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.31)$$

Interferencja fal w detektorze zależy od różnicy faz:

$$\delta = \Phi_1(B=0) - \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.32)$$

Różnicę faz występującą wówczas, gdy nie ma pola, oznaczymy $\delta(B=0)$; jest to właśnie ta różnica faz, którą obliczyliśmy powyżej we wzorze (15.28). Zanotujmy także, że dwie całki możemy zapisać jako *jedną* całkę po drodze biegnącej ku przodowi wzdłuż odcinka (1) i wstecz wzdłuż odcinka (2); tę zamkniętą drogę oznaczymy (1-2). Mamy zatem

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.33)$$

Równanie to mówi nam, jak ruch elektronu zmienia się wskutek istnienia pola magnetycznego. Za jego pomocą możemy znaleźć nowe położenia maksimów i minimów w rozkładzie natężenia na siatce.

Zanim jednak przystąpimy do tego obliczenia, chcemy przedstawić następujący ważny i interesujący problem. Pamiętamy, że funkcja określająca potencjał wektorowy zawiera pewną dowolność. Dwie różne funkcje \mathbf{A} i \mathbf{A}' , których różnica jest gradientem pewnej funkcji skalarnej $\nabla\psi$, reprezentują równie dobrze to samo pole magnetyczne, gdyż rotacja gradientu równa jest zeru. Dają one zatem tę samą klasyczną siłę $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Jeżeli w mechanice kwantowej wynik zależy od potencjału wektorowego, *która* z wielu możliwych funkcji \mathbf{A} jest poprawna?

Odpowiedź na to pytanie jest następująca: w mechanice kwantowej utrzymuje się ta sama dowolność w funkcji \mathbf{A} . Jeżeli we wzorze (15.33) zmienimy funkcję \mathbf{A} na $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$, całka wyniesie

$$\oint_{(1-2)} \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{s} = \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{(1-2)} \nabla\psi \cdot d\mathbf{s}.$$

Całkę po $\nabla\psi$ obliczamy wzdłuż drogi *zamkniętej* (1-2), ale przecież całka po składowej stycznej gradientu wzdłuż drogi zamkniętej zawsze równa jest zeru, na mocy twierdzenia Stokesa. Wobec tego obie funkcje \mathbf{A} i \mathbf{A}' dają tę samą różnicę faz i te same kwantowe efekty interferencyjne. Zarówno w mechanice klasycznej, jak i mechanice kwantowej liczy się tylko rotacja \mathbf{A} ; dowolny wybór funkcji \mathbf{A} , która ma poprawną wartość rotacji, daje też poprawne wyniki fizyczne.

Ten sam wniosek wynika od razu z wyników uzyskanych w § 14-1. Przekonaliśmy się

tam, że całka krzywoliniowa z pola \mathbf{A} po drodze zamkniętej jest równa strumieniowi pola \mathbf{B} przez powierzchnię rozpiętą na krzywej, a ten z kolei jest tu równy strumieniowi między drogami (1) i (2). Równanie (15.33) możemy też zapisać jako

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} \left[\text{strumień pola } \mathbf{B} \text{ między drogami (1) i (2)} \right], \quad (15.34)$$

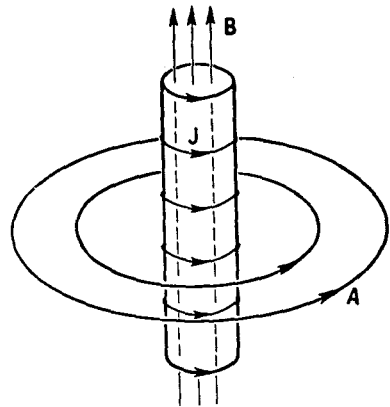
gdzie przez strumień pola \mathbf{B} rozumiemy jak zwykle całkę powierzchniową z normalnej składowej pola \mathbf{B} . Wynik zależy tylko od pola \mathbf{B} , a więc tylko od rotacji \mathbf{A} .

Skoro jednak można zapisać nasz wynik równie dobrze posługując się polem \mathbf{B} jak i \mathbf{A} , mogliśmy sądzić, że pole \mathbf{B} zachowuje swoją pozycję jako pole „rzeczywiste” i że pole \mathbf{A} można w dalszym ciągu uważać za sztuczną konstrukcję. Ale definicja pola „rzeczywistego”, którą zaproponowaliśmy, oparta była na idei, że takie „rzeczywiste” pole nie będzie działać na cząstkę na odległość. Możemy zaś podać przykład, w którym pole \mathbf{B} będzie równe zero — a przynajmniej przybierać będzie dowolnie małe wartości — w dowolnym miejscu, w którym jest jakakolwiek szansa znalezienia cząstki, wobec czego nie możemy uważać, że pole to działa *bezpośrednio* na tę cząstkę.

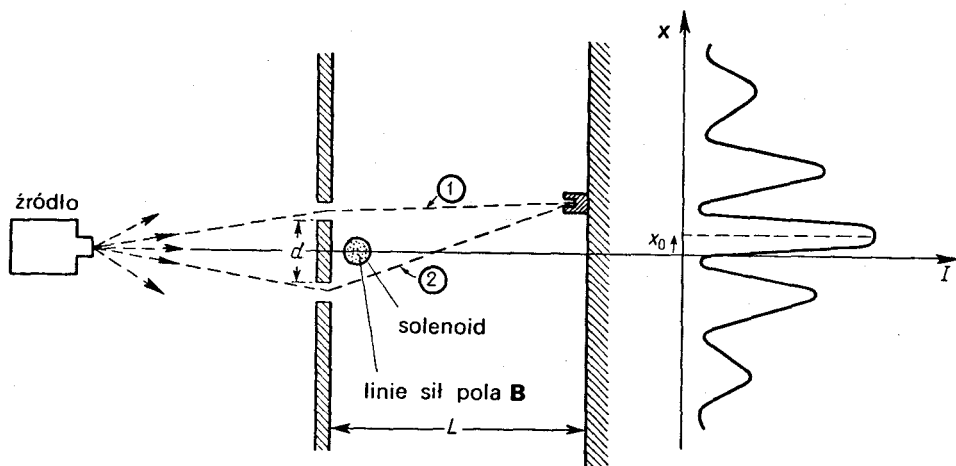
Pamiętamy, że dla długiego solenoidu z prądem elektrycznym istnieje pewne pole \mathbf{B} wewnątrz tego solenoidu, ale pole to znika na zewnątrz, jak pokazuje rys. 15.6. Jeżeli doprowadzimy do powstania takiej sytuacji, w której elektrony można będzie znaleźć jedynie *na zewnątrz* solenoidu — tam gdzie jest tylko pole \mathbf{A} — wciąż będzie występować pewien wpływ pola na ruch, zgodnie z równaniem (15.33). W rozumieniu fizyki klasycznej jest to niemożliwe. W rozumieniu fizyki klasycznej siła zależy tylko od pola \mathbf{B} ; aby się przekonać, czy przez solenoid płynie jakiś prąd, należałoby przepuścić cząstkę przez jego wnętrze. Ale z punktu widzenia mechaniki kwantowej można się przekonać, że pole magnetyczne istnieje wewnątrz solenoidu obchodząc ten solenoid *dookoła* — bez zbliżania się do niego!

Przypuścmy, że bardzo długi solenoid o małej średnicy umieściliśmy dokładnie za ścianą, a między obiema szczelinami, jak pokazuje rys. 15.7. Średnica solenoidu ma być znacznie mniejsza od odległości d między szczelinami. W tej sytuacji dyfrakcja elektronów na szczelinie zachodzi w ten sposób, że prawdopodobieństwo zbliżenia się elektronu do solenoidu jest nieznaczne. Jaki będzie wynik naszego doświadczenia interferencyjnego?

Porównujemy sytuację z prądem w solenoidzie i bez tego prądu. Jeżeli nie ma prądu, nie mamy ani pola \mathbf{A} , ani \mathbf{B} i dostajemy taki sam jak poprzednio obraz interferencyjny na siatce. Jeżeli włączymy prąd w solenoidzie i wytworzymy pole magnetyczne \mathbf{B} wewnątrz, to na zewnątrz będzie występować pewne pole \mathbf{A} . Wystąpi zatem pewne przesunięcie w różnicy faz, proporcjonalne do krążenia \mathbf{A} na zewnątrz solenoidu, co znaczy, że obraz



15.6. Pole magnetyczne i potencjał wektorowy długiego solenoidu



15.7. Pole magnetyczne może zmienić ruch elektronów nawet wtedy, gdy istnieje ono tylko w pewnych obszarach, w których prawdopodobieństwo znalezienia elektronów jest dowolnie małe.

maksimów i minimów zostanie przesunięty do nowego położenia. W rzeczywistości, ponieważ strumień \mathbf{B} wewnątrz jest stały dla dwu dowolnych dróg, także krążenie \mathbf{A} jest takie samo. Dla każdego punktu na ekranie wystąpi ta sama różnica faz, co odpowiada przesunięciu całego obrazu interferencyjnego w punkcie x o pewną stałą wartość, powiedzmy x_0 , którą możemy bez trudu obliczyć. Maksimum natężenia będzie się teraz znajdować tam, gdzie różnica faz między dwiema falami będzie równa zero. Posługując się wzorami (15.32) i (15.33) dla δ , a także (15.28) dla $\delta(B=0)$ dostajemy

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.35)$$

czyli

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{\hbar} [\text{strumień pola } \mathbf{B} \text{ między drogami (1) i (2)}]. \quad (15.36)$$

Obraz interferencyjny po umieszczeniu solenoidu będzie taki, jak na rys. 15.7*). Tak przynajmniej przewiduje mechanika kwantowa.

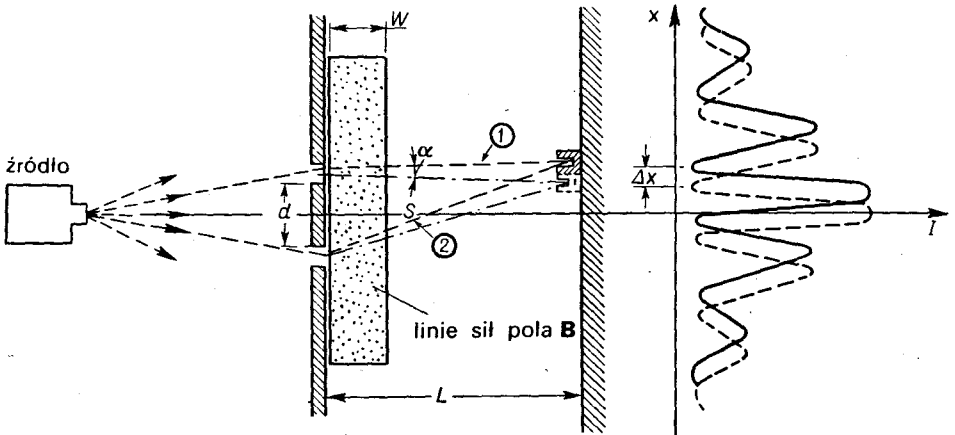
To właśnie doświadczenie zostało dopiero niedawno wykonane. Jest to doświadczenie niezwykle trudne. Ponieważ długość fali elektronu jest niewielka, aparatura musiała być odpowiednio zminiaturyzowana, aby można było zaobserwować różnicę. Szczeliny musiały być bardzo blisko siebie, a to znaczy, że potrzebny był niezmiernie mały solenoid. Okazało się, że w pewnych okolicznościach kryształy żelaza rosną w postaci bardzo długich, mikroskopowo cienkich włókien, zwanych wąsami. Gdy namagnesujemy te żelazne wąsy, stają się one czymś w rodzaju cienkich solenoidów i na zewnątrz nie

*) Jeżeli pole \mathbf{B} wychodzi z płaszczyzny rysunku, strumień jest ujemny, zgodnie z podaną przez nas definicją, a x_0 jest dodatnie.

ma pola, z wyjątkiem obszarów w pobliżu końców. Wykonano doświadczenie nad interferencją elektronów i zaobserwowano przewidywane przemieszczenie obrazu interferencyjnego.

Zatem w naszym sensie pole \mathbf{A} jest „rzeczywiste”. Można by powiedzieć: „Ale przecież *było* tam pewne pole magnetyczne”. Było, ale przypomnijmy sobie naszą początkową ideę, że pole jest „rzeczywiste”, jeżeli podanie jego wartości *w miejscu*, w którym znajduje się cząstka, wystarcza, aby uzyskać ruch. Pole \mathbf{B} w wąsę działa na odległość. Jeżeli chcemy opisać jego wpływ nie przez oddziaływanie na odległość, musimy posłużyć się potencjałem wektorowym. Zagadnienie to ma interesującą historię. Teoria, którą tu przedstawiliśmy, była znana od początku istnienia mechaniki kwantowej, tj. od roku 1926. Fakt, że potencjał wektorowy występował w równaniu falowym mechaniki kwantowej (zwanym równaniem Schrödingera) był oczywisty od dnia, w którym równanie to zostało napisane. Że nie można go zastąpić polem magnetycznym w żaden łatwy sposób, było dostrzegane po kolei przez wszystkich, którzy próbowali tego dokonać. Jest to także jasne z naszego przykładu elektronów poruszających się w obszarze, w którym pole znika, a mimo to ruch elektronów jest naruszony. Ale ponieważ nie wydaje się, aby w mechanice klasycznej pole \mathbf{A} mogło mieć jakieś bezpośrednie znaczenie, i co więcej, ponieważ można by je zmienić przez dodanie gradientu, ciągle powtarzano, że pole \mathbf{A} nie ma bezpośredniego sensu fizycznego — że tylko pola magnetyczne i elektryczne mają prawo obywatelstwa nawet w mechanice kwantowej. Wydaje się dziwne, z perspektywy czasu, że nikt nie pomyślał o rozważeniu tego doświadczenia, aż do roku 1956, gdy Bohm i Aharonov po raz pierwszy zasugerowali je i doprowadzili do tego, że cały problem stał się przejrzysty. Wniosek tkwił tam przez cały czas, ale nikt nie zwrócił nań uwagi. Wielu ludzi doznało szoku, gdy podniesiono tę kwestię. Oto dlaczego ktoś pomyślał, że dobrze by było przeprowadzić doświadczenie, aby zobaczyć, że rozumowanie to jest rzeczywiście poprawne, i to pomimo że mechanika kwantowa, w którą wierzone przez tyle już lat, dawała niedwuznaczną odpowiedź. Interesujące jest to, że można napotykać coś takiego przez 30 lat, ale z powodu pewnych przesądów dotyczących tego, co ma i co nie ma znaczenia, cała sprawa wciąż jest ignorowana.

Chcemy teraz posunąć naszą analizę nieco dalej. Wykażemy, że istnieje związek między wzorem kwantowym i klasycznym — aby pokazać, dlaczego okazuje się, że jeżeli oglądamy zjawiska w dostatecznie dużej skali, to przedstawiają się nam one tak, jakby na cząstki działała siła równa $q\mathbf{v} \times \text{rotacja pola } \mathbf{A}$. Aby przejść od mechaniki klasycznej do kwantowej, musimy wziąć pod uwagę przypadek, kiedy długości fal są bardzo małe w porównaniu z odległościami, na których zewnętrzne warunki, takie jak pola, zmieniają się w dostrzegalny sposób. Nie udowodnimy wyniku w sposób ogólny, ale posłużymy się bardzo prostym przykładem, aby pokazać, jak przebiega rozumowanie. Rozważmy znowu ten sam eksperyment ze szczelinami. Zamiast jednak skupiać całe pole magnetyczne w bardzo niewielkim obszarze pomiędzy szczelinami, wyobraźmy sobie, że pole to rozciąga się w znacznie większym obszarze poza szczelinami, jak przedstawia to rys. 15.8. Weźmy pod uwagę przypadek wyidealizowany, w którym pole magnetyczne jest jednorodne w wąskim pasku o szerokości w , którą uważamy za małą w porównaniu z L . (Możemy to uzyskać bez trudu; siatkę możemy odsunąć tak daleko, jak tylko chcemy.) Aby obliczyć zmianę



15.8. Przesunięcie obrazu interferencyjnego związane z istnieniem pasa pola magnetycznego

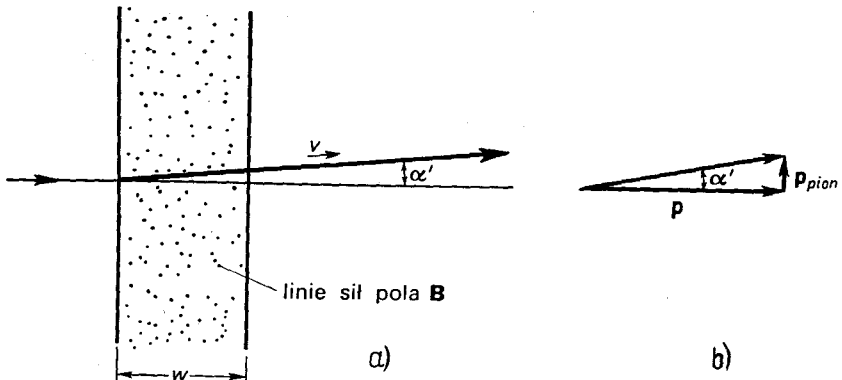
fazy, musimy obliczyć dwie całki z pola A wzdłuż dwu trajektorii (1) i (2). Różnią się one, jak widzieliśmy, tylko strumieniem pola B , zawartym między tymi torami. W naszym przybliżeniu strumień ten wynosi Bwd . Różnica fazy na dwu drogach wynosi zatem

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar} Bwd. \quad (15.37)$$

Zauważmy, że w naszym przybliżeniu zmiana fazy nie zależy od kąta. Tak więc znowu efekt polegać będzie na tym, że cały obraz interferencyjny przesunie się w górę o pewną odległość Δx . Posługując się wyrażeniem (15.28) dostajemy

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d} \Delta\delta = \frac{L\lambda}{d} [\delta - \delta(B = 0)].$$

15.9. Odchylenie cząstki związane z jej przejściem przez pas pola magnetycznego



Korzystając z kolei z wzoru (15.37) dla $\delta - \delta(B = 0)$ mamy

$$\Delta x = L\lambda \frac{q}{\hbar} Bw. \quad (15.38)$$

Takie przesunięcie równoważne jest odchyleniu wszystkich trajektorii o mały kąt α (patrz rys. 15.8), gdzie

$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{\hbar} qBw. \quad (15.39)$$

W ramach fizyki klasycznej także oczekiwaliśmy, że wąski pasek pola magnetycznego odchyli wszystkie trajektorie o pewien mały kąt, powiedzmy α' , jak pokazuje rys. 15.9a. Gdy elektrony przechodzą przez pole magnetyczne, doznają działania poprzecznej siły $qv \times \mathbf{B}$, która działa przez czas w/v . Zmiana pędu poprzecznego jest dokładnie równa temu impulsowi, wobec czego

$$\Delta p_x = qwB. \quad (15.40)$$

Odchylenie kątowe (rys. 15.9b) równe jest stosunkowi tego poprzecznego pędu do pędu całkowitego p . Dostajemy wynik

$$\alpha' = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{qwB}{p}, \quad (15.41)$$

który możemy porównać z wzorem (15.39). Związek mechaniki klasycznej z mechaniką kwantową jest następujący: cząstka o pędzie p odpowiada amplitudzie kwantowej zmieniającej się w przestrzeni z długością fali $\lambda = \hbar/p$. Biorąc pod uwagę tę zależność, widzimy, że kąty α i α' są identyczne; obliczenia kwantowe i klasyczne prowadzą do tego samego wyniku.

Z powyższej analizy widzimy, jak to się dzieje, że potencjał wektorowy, który w mechanice kwantowej występuje w jawnej postaci, wytwarza siłę znaną już z fizyki klasycznej, zależną jedynie od pochodnych tego potencjału. To, co się liczy w mechanice kwantowej, to interferencja między pobliskimi drogami; zawsze okazuje się, że efekty zależą jedynie od tego, jak pole A zmienia się od punktu do punktu, a więc zależą od pochodnych \mathbf{A} , nie zaś od samego \mathbf{A} . Mimo to jednak potencjał wektorowy \mathbf{A} (wraz z potencjałem skalarnym φ , który mu towarzyszy) okazuje się najbardziej bezpośrednim opisem zjawisk fizycznych. Staje się to tym bardziej widoczne, im dalej posuwamy się w teorii kwantowej. W ogólnej teorii elektrodynamiki kwantowej potencjały wektorowy i skalarny przyjmujemy za podstawowe wielkości w układzie równań, którymi zastępujemy równania Maxwella. Pola \mathbf{E} i \mathbf{B} z wolna znikają ze współczesnych sformułowań praw fizycznych; zastępujemy je potencjałami \mathbf{A} i φ .

15-6. To, co jest słuszne w statyce, nie jest słuszne w dynamice

Dotarliśmy do końca naszych rozważań, dotyczących zagadnień związanych z polami statycznymi. Już w tym rozdziale znaleźliśmy się niebezpiecznie blisko punktu, w którym trzeba się zastanowić, co się dzieje, gdy pola zmieniają się z upływem czasu. Z trudnością

uniknęliśmy tego w czasie naszych rozważań dotyczących energii pola magnetycznego, chroniąc się pod osłoną argumentu relatywistycznego. Nawet wtedy nasze podejście do zagadnienia energii było nieco sztuczne i być może tajemnicze, gdyż pominęliśmy fakt, że poruszające się cewki muszą w gruncie rzeczy wytwarzać zmienne pola. Nadszedł czas, by podjąć zagadnienie pól zmieniających się z upływem czasu — a więc przedmiot zainteresowań elektrodynamiki. Uczynimy to w następnym rozdziale. Chcielibyśmy jednak przede wszystkim podkreślić kilka punktów.

Choć rozpoczęliśmy ten wykład od przedstawienia pełnego i poprawnego układu równań elektromagnetyzmu, początkowo badaliśmy pewną jego część, gdyż to było prostsze. Bardzo korzystnie jest zacząć wykład od prostszej teorii pól statycznych i przejść dopiero potem do bardziej skomplikowanej teorii, która obejmuje pola dynamiczne. Wtedy mniej się trzeba nauczyć na raz i ma się czas na wyrobienie sobie „intelektualnych mięśni”, przygotowując się do większego zadania.

Ale jest też pewne niebezpieczeństwo tkwiące w tym procesie, a polegające na tym, że zanim osiągniemy pełny obraz, prawdy niezupełne wyuczone po drodze mogą zostać wpojone i przyjęte jako cała prawda — tak że to, co jest prawdziwe, i to co jest tylko czasem prawdziwe, zostanie pomieszczone. Tak więc w tab. 15.1 przedstawiamy podsumowanie ważnych wzorów, którymi się zajmowaliśmy, oddzielając te z nich, które są słuszne w ogólnym przypadku, od tych, które są wprawdzie słuszne w statyce, ale tracą wartość w dynamice. Podsumowanie to pokazuje też częściowo, dokąd zmierzamy, gdyż w miarę jak będziemy rozważać dynamikę, przedstawimy szczegółowo to, co tu musimy po prostu stwierdzić bez dowodu.

Być może, warto wypowiedzieć kilka uwag na temat tabeli. Przede wszystkim należy zwrócić uwagę na to, że równania, z których wystartowaliśmy, są *prawdziwymi* równaniami. Wyrażenie na siłę elektromagnetyczną (zwaną często *siłą Lorentza*) $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ jest *poprawne*. Tylko prawo Coulomba jest fałszywe i można go używać jedynie w statyce. Cztery równania Maxwella dla pól \mathbf{E} i \mathbf{B} też są prawdziwe. Równania przyjęte dla statyki oczywiście są fałszywe, gdyż opuściliśmy w nich wszystkie wyrazy z pochodnymi czasowymi.

Prawo Gaussa, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, pozostaje, ale rotacja pola \mathbf{E} nie jest równa zeru w ogólnym przypadku. Tak więc nie zawsze możemy pole \mathbf{E} przyrównać do gradientu pewnego skalaru — potencjału elektrostatycznego. Zobaczymy, że potencjał skalarny nadal pozostanie, ale jako funkcja zmieniająca się w czasie, którą musimy się posługiwać obok potencjałów wektorowych, aby uzyskać zupełny opis pola elektrycznego. Równania rządzące tym nowym potencjałem skalarnym muszą być także czymś nowym.

Musimy też wyrzec się idei, że pole \mathbf{E} jest równe zeru wewnątrz przewodników. Gdy pola się zmieniają, ładunki w przewodnikach na ogół nie mają czasu na takie przemieszczenia, które by sprawiły, że pole zniknie. Znajdują się one w ruchu, ale nigdy nie osiągają równowagi. Jedyne stwierdzenie ogólne mówi, że pola elektryczne w przewodnikach wytwarzają prądy. Tak więc w zmiennych polach przewodnik *nie* jest ekwipotencjalny. Wynika stąd także, że idea pojemności nie jest już dobrze określona.

Ponieważ nie ma ładunków magnetycznych, dywergencja pola \mathbf{B} jest zawsze równa zeru. Zawsze możemy więc przyrównać \mathbf{B} do $\nabla \times \mathbf{A}$. (Nie wszystko się zmienia!) Ale pole \mathbf{B}

Tabela 15.1

Niesłuszne w ogólnym przypadku (słuszne tylko w statyce)	Słuszne zawsze
$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{prawo Coulomba})$	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{siła Lorentza})$ $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{prawo Gaussa})$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ $\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(2)\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$ <p>W przewodnikach $\mathbf{E} = 0$, $\varphi = \text{const}$, $Q = CV$.</p>	$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{prawo Faradaya})$ $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ <p>W przewodnikach pole \mathbf{E} wytwarza prądy.</p>
$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \quad (\text{prawo Ampère'a})$ $\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$	$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{nie istnieją ładunki magnetyczne})$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\rightarrow c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{równanie Poissona})$ $\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \\ \text{wraz z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{oraz} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \\ \text{wraz z} \\ c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$
$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q(2)}{r_{12}} dV_2$ $\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2)}{r_{12}} dV_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q(2, t')}{r_{12}} dV_2 \\ \text{oraz} \\ \mathbf{A}(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2, t')}{r_{12}} dV_2, \end{array} \right.$ <p>gdzie</p> $t' = t - \frac{r_{12}}{c}$
$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV + \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV$	$U = \int \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV$

Równania oznaczone strzałką (\rightarrow) są równaniami Maxwella w próżni.

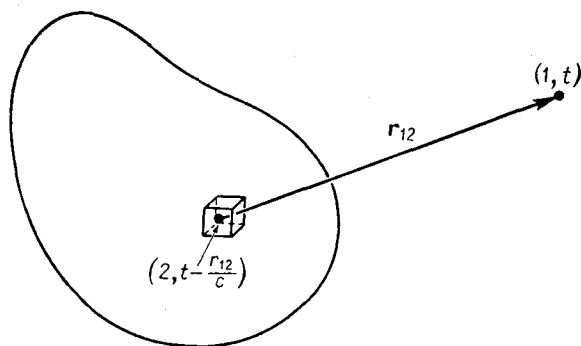
może być wytwarzane nie tylko przez prądy; $\nabla \times \mathbf{B}$ jest proporcjonalne do gęstości prądu plus nowy wyraz $\partial \mathbf{E} / \partial t$. Znaczy to, że potencjał wektorowy \mathbf{A} wiąże się z prądami w nowy sposób. Jest on także powiązany z φ . Jeżeli skorzystamy ze swobody w wyborze $\nabla \cdot \mathbf{A}$ dla naszej własnej wygody, możemy nadać równaniom dla \mathbf{A} i φ prostą i elegancką postać. Nałożymy zatem na potencjały warunek $c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = -\partial \varphi / \partial t$ i uzyskamy równania różniczkowe dla wielkości \mathbf{A} i φ , jak pokazuje tabela.

Nadal możemy obliczać φ i \mathbf{A} całkując prądy i ładunki, ale całki te są *inne* w przypadku statycznym. Cudowne jest to, że prawdziwe całki są jednak podobne do całek statycznych, z jedną tylko i przemawiającą do fizycznej wyobraźni zmianą. Gdy obliczymy całki, aby znaleźć potencjały w pewnym punkcie, powiedzmy w punkcie (1) na rys. 15.10, musimy posłużyć się wartościami \mathbf{j} i ϱ w punkcie (2) w chwili *wcześniejszej* $t' = t - r_{12}/c$. Jak można by oczekiwać, zmiany propagują się od punktu (2) do punktu (1) z prędkością c . Z tą małą zmianą możemy znaleźć rozwiązanie dla pól wytwarzanych przez prądy i ładunki zmieniające się w czasie, gdyż po znalezieniu \mathbf{A} i φ dostajemy \mathbf{B} z $\nabla \times \mathbf{A}$, jak poprzednio, oraz \mathbf{E} z $-\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t$.

Zauważmy na zakończenie, że pewne uzyskane poprzednio wyniki — na przykład, że gęstość energii w polu elektrycznym wynosi $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ — słuszne są w elektrodynamice równie dobrze jak w statyce. Nie należy błędnie sądzić, że wszystko to jest „naturalne”. Słuszność dowolnego wzoru wyprowadzonego w przypadku statycznym należy znów wykazać w przypadku dynamicznym. Kontrprzykładem jest tu wyrażenie na energię elektrostatyczną w postaci całki objętościowej z $\varrho \varphi$. Wynik ten jest słuszny *tylko* w statyce.

Wszystkie te zagadnienia będziemy szczegółowo rozważać we właściwym czasie, ale będzie być może użyteczne zachować w pamięci to podsumowanie, aby wiedzieć, co można zapamiętać, a co trzeba pamiętać jako zawsze prawdziwe.

15.10. Potencjały w punkcie (1) i w chwili t dane są w postaci sumy wkładów pochodzących od każdego elementu źródła w blążącym się punkcie (2), przy użyciu ładunków i prądów, które istniały w chwili wcześniejszej ($t - r_{12}/c$).



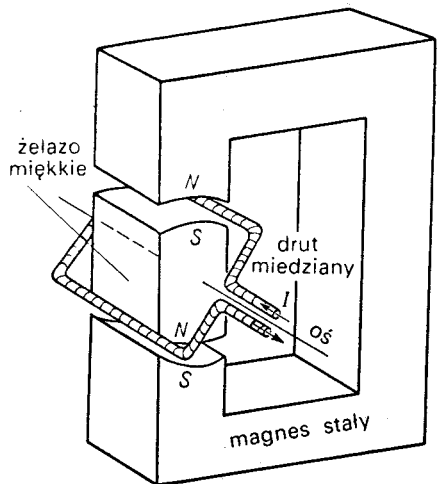
 prądy indukowane

16-1. Silniki i prądnice

Odkrycie dokonane w roku 1820, że istnieje ścisły związek między elektrycznością i magnetyzmem, było bardzo pasjonujące — do owego czasu uważano oba rodzaje zjawisk za zupełnie niezależne. Najpierw odkryto, że prąd płynący w przewodzie wytwarza wokół tego przewodu pole magnetyczne. Następnie, w tym samym roku, stwierdzono, że przewody z prądem umieszczone w polu magnetycznym doznają działania sił.

Zawsze jedną z pasjonujących konsekwencji odkrycia występowania nowej siły mechanicznej jest możliwość zastosowania jej w maszynie do wykonywania pracy. Prawie natychmiast po tym odkryciu zaczęto projektować silniki elektryczne wykorzystujące siły działające na przewody z prądem. Zasada działania silnika elektromagnetycznego przedstawiona jest w ogólnym zarysie na rys. 16.1. Stały magnes — zwykle składający się z dwu kawałków miękkiego żelaza — służy do wytworzenia pola magnetycznego w dwu otworach. Po obu stronach każdego otworu istnieje biegun południowy i północny, jak pokazuje rysunek. Następnie umieszczamy w każdym z tych otworów jeden z dwu równoległych przewodów wchodzących w skład prostokątnej miedzianej pętli. Gdy przez pętlę płynie prąd, w każdym z dwu otwo-

16.1. Schemat prostego silnika elektromagnetycznego



rów ma on inny kierunek, wobec czego siły mają także przeciwne zwroty. Prowadzi to do powstania momentu skręcającego, działającego na pętlę w ten sposób, że może się ona obracać, a po sprzężeniu z blokami czy przekładniami może wykonywać pracę.

Z tej samej idei możemy skorzystać w celu wykonania czułego przyrządu do pomiarów elektrycznych. Tak więc z chwilą wykrycia prawa działania sił znacznie wzrosła dokładność pomiarów elektrycznych. Przede wszystkim moment skręcający takiego silnika może być znacznie większy przy tym samym prądzie, jeżeli sprawimy, że prąd ten opływa wiele zwojów zamiast po prostu jednego. Następnie możemy tak zbudować cewkę, żeby obracała się ona już pod wpływem bardzo małego momentu siły — albo przez umieszczenie jej osi na bardzo delikatnych podporach z kamieni szlachetnych, albo też przez zawieszenie cewki na bardzo cienkim drucie z włókna kwarcowego. Wtedy nawet niezmiernie słaby prąd wywoła obrót cewki i dla małych kątów obrót ten będzie proporcjonalny do prądu. Kąt taki możemy zmierzyć dołączając do cewki wskazówkę albo też, w przypadku najczulszych przyrządów, umieszczając małe zwierciadelko na cewce i obserwując następnie przesunięcie obrazu na pewnej skali. Takie przyrządy zwane są galwanometrami. Woltomierze i amperomierze działają na tej samej zasadzie.

Te same pomysły możemy zastosować na dużą skalę do budowy dużych silników dostarczających siły mechanicznej. Możemy sprawić, że cewka będzie się stale obracać w tę samą stronę, zmieniając styki z cewką po każdym półobrocie za pomocą kontaktów umieszczonych na osi. Wówczas moment siły działa stale w tym samym kierunku. Małe silniki na prąd stały działają właśnie w ten sposób. Większe silniki, na prąd stały czy zmienny, często wykonuje się w ten sposób, że magnes zastępuje się elektromagnesem, zasilanym ze źródła energii elektrycznej.

Po uświadomieniu sobie, że prądy elektryczne wytwarzają pola magnetyczne, zasugerowano natychmiast, że w ten czy w inny sposób magnesy mogłyby wytwarzać pola elektryczne. Wykonywano rozmaite doświadczenia. Umieszczano na przykład dwa przewody równoległe i przepuszczano prąd przez jeden z nich w nadziei, że w drugim także powstanie prąd. Myśl była w tym taka, że pole magnetyczne mogłoby jakoś wlec elektrony wzdłuż drugiego drutu, zgodnie z jakimś prawem typu „podobne wolą się poruszać niepodobnie”. Jednakże przy najsilniejszych osiągalnych prądach i przy najczulszych galwanometrach mogących wykryć prąd indukowany, wynik był negatywny. Wielkie magnesy umieszczone w pobliżu przewodów także nie powodowały żadnych dostrzegalnych efektów. Ostatecznie Faraday w roku 1840 wykrył istotny brakujący dotychczas element: efekty elektryczne powstają tylko wtedy, gdy coś się *zmienia*. Jeżeli jednym z pary przewodów płynie prąd *zmienny*, w drugim indukuje się pewien prąd. Jeżeli magnes *porusza się* w pobliżu obwodu elektrycznego, w obwodzie tym wystąpi prąd. Mówimy, że prądy te są *indukowane*. Było to właśnie zjawisko indukcji wykryte przez Faradaya. Odkrycie to przekształciło niezbyt interesujące zagadnienie pól statycznych w pasjonujący problem dynamiczny, obejmujący ogromnie dużo cudownych zjawisk. Rozdział ten jest poświęcony jakościowemu opisowi niektórych z tych zjawisk. Jak zobaczymy, można szybko znaleźć się w nader skomplikowanej sytuacji, której wszystkie szczegóły trudno jest przeanalizować ilościowo. Ale nic nie szkodzi, głównym celem, jaki sobie stawiamy w tym rozdziale, jest zapoznać czytelnika z występującymi tu zjawiskami. Szczegółową ich analizę podejmiemy później.

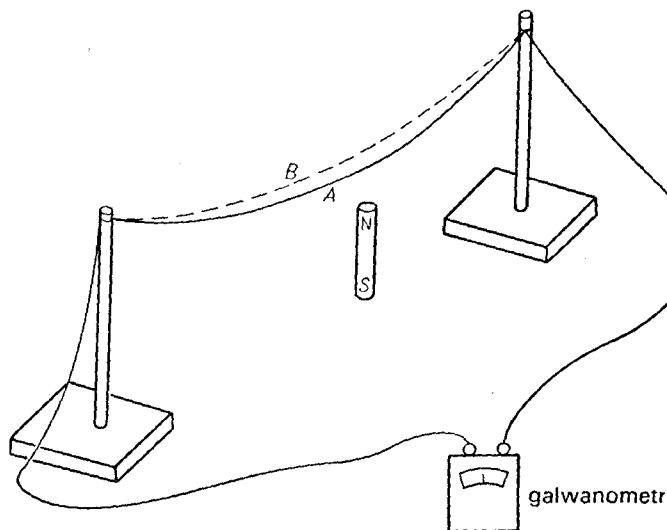
To, co już wiemy, pozwala nam pojąć jedną z cech indukcji magnetycznej, która nie była jeszcze znana w czasach Faradaya. Chodzi tu o siłę $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, działającą na poruszający się ładunek, która jest proporcjonalna do prędkości tego ładunku w polu magnetycznym. Przypuśćmy, że mamy przewód przechodzący w pobliżu jakiegoś magnesu, jak pokazuje rys. 16.2, i że łączymy końce tego przewodu z galwanometrem. Jeżeli poruszamy przewodem w poprzek końcówki magnesu, wskazówka galwanometru się wychyla.

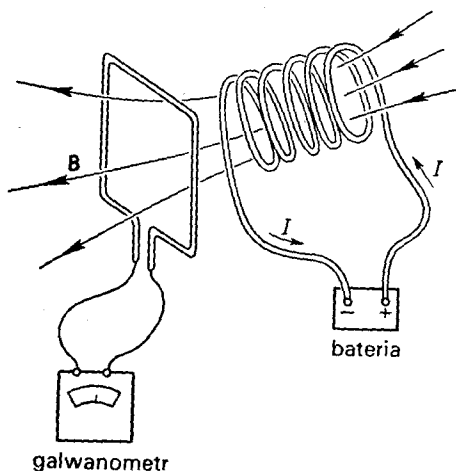
Magnes wytwarza pewne pionowe pole magnetyczne i wtedy, gdy przesuujemy przewód w poprzek pola, elektrony w tym przewodzie doznają działania siły *poprzecznej* — prostopadłej do pola i do kierunku ruchu. Siła ta popycha elektrony wzdłuż przewodu. Ale dlaczego uruchamia to także galwanometr, który — jak dotąd — znajdował się z dala od obszaru działania sił? Dzieje się tak, ponieważ wtedy, gdy elektrony poddane działaniu siły próbują się poruszyć, popychają one — wskutek odpychania elektrycznego — dalsze elektrony; te zaś z kolei popychają inne elektrony i tak dalej wzdłuż całego przewodu. Zaskakujące!

Było to też tak zaskakujące dla Gaussa i Webera, którzy zbudowali pierwszy galwanometr, że spróbowali sprawdzić, na jaką odległość siły w przewodzie mogłyby jeszcze działać. Przeciągnęli oni przewód przez całe miasto. Na jednym krańcu miasta pan Gauss połączył przewody z baterią (baterie znane były wcześniej niż prądnice), a pan Weber, na drugim krańcu miasta, oglądał ruchy galwanometru. I tak oto znaleźli oni sposób porozumiewania się na duże odległości; był to początek telegrafu! Oczywiście, nie ma to bezpośrednio nic wspólnego z indukcją — wiąże się to ze sposobem przewodzenia prądu w drucie, bez względu na to, czy prądy popychane są przez indukcję czy nie.

Przypuśćmy teraz, że w zestawie przedstawionym na rys. 16.2 zostawiamy drut w spokoju, a poruszamy magnesem. Wciąż będziemy obserwować pewien efekt na galwanometrze.

16.2. Poruszając przewodem w polu magnetycznym wytwarzamy prąd, jak wskazuje galwanometr.





16.3. Cewka z prądem wytwarza prąd w drugiej cewce, jeżeli poruszamy pierwszą cewkę albo też zmieniamy w niej prąd.

drutu. Ale oto nowa pasjonująca obserwacja: jeżeli zmieniamy pole magnetyczne cewki *nie* przez poruszanie nią, ale przez *zmianę prądu*, który w *niej* płynie, znów wywrze to pewien wpływ na galwanometr. Jeżeli na przykład mamy pętlę drutu w pobliżu cewki, jak pokazujemy na rys. 16.3, i jeżeli utrzymujemy zarówno pętlę jak i cewkę w spoczynku, ale wyłączamy prąd, galwanometr zanotuje pewien impuls prądu. Gdy znowu włączamy prąd w cewce, wskazówka galwanometru odskoczy w przeciwnym kierunku.

Ilekcją przez galwanometr w sytuacji takiej, jaką pokazujemy na rys. 16.2 lub 16.3, przepływa prąd, znaczy to, że występuje pewne wypadkowe popchnięcie elektronów w przewodzie, skierowane w określonym kierunku wzdłuż przewodu. W rozmaitych miejscach przewodu mogą występować pchnięcia w różnych kierunkach, ale więcej jest tych pchnięć w jedną stronę niż w pozostałe. To, co się liczy, to właśnie takie pchnięcie zsumowane wokół całego obwodu. Nazwiemy to zsumowane pchnięcie *siłą elektromotoryczną* (w skrócie SEM) obwodu. Dokładniej, SEM jest zdefiniowana jako siła styczna do obwodu, działająca na jednostkę ładunku, scałkowana wzdłuż przewodu jeden raz dookoła pełnego obwodu. Pełne odkrycie Faradaya polegało na stwierdzeniu, że siła elektromotoryczna może powstać w obwodzie na trzy sposoby: albo przez poruszanie przewodem, albo przez poruszanie magnesem w pobliżu przewodu, albo przez zmianę prądu w pobliskim przewodzie.

Rozważmy znów proste urządzenie przedstawione na rys. 16.1, ale teraz zamiast przepuszczać prąd przez przewód w celu spowodowania jego obrotu obracajmy pętlę działającą na nią jakąś siłą zewnętrzną, np. ręcznie albo kołem wodnym. Gdy pętla się obraca, przewód porusza się w polu magnetycznym i zaobserwujemy w obwodzie pewną SEM. Silnik stał się prądnicą.

SEM cewki prądniczy pochodzi z jej ruchu. Wielkość tej SEM określona jest prostą

Jak odkrył Faraday, poruszenie magnesem pod przewodem — w pewnym kierunku — wywiera ten sam wpływ na galwanometr, co poruszanie drutem nad magnesem — w kierunku przeciwnym. Ale gdy porusza się magnes, nie mamy już żadnej siły $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ działającej na elektrony w przewodzie. Jest to nowe zjawisko odkryte przez Faradaya. Dziś moglibyśmy mieć nadzieję na zrozumienie go na podstawie argumentów zaczerpniętych z teorii względności.

Rozumiemy już, że pole magnetyczne magnesu pochodzi od jego prądów wewnętrznych. Oczekujemy zatem powstania tego samego zjawiska, jeżeli zamiast magnesem, jak na rys. 16.2, posłużymy się cewką z prądem. Jeżeli poruszamy przewodem koło cewki, przez galwanometr popłynie pewien prąd, jak również gdy poruszamy cewką w pobliżu

regułą wykrytą przez Faradaya. Teraz sformułujemy ją tylko, a jej szczegółową analizę odłożymy na potem. Reguła ta mówi, że gdy strumień pola magnetycznego przechodzący przez pętlę (strumień ten jest równy składowej normalnej pola B , scałkowanej po powierzchni pętli) zmienia się w czasie, to SEM równa jest szybkości zmian tego strumienia. Będziemy się na to powoływać jako na „regułę strumienia”. Widzimy, że gdy obracamy cewkę (rys. 16.1), strumień przez tę cewkę ulega zmianie. Początkowo pewien strumień przechodzi w jedną stronę; potem — gdy obrócimy cewkę o 180° — ten sam strumień przechodzi w przeciwną stronę. Jeżeli będziemy obracać cewkę nieprzerwanie, to strumień będzie najpierw dodatni, potem ujemny, a potem znów dodatni i tak dalej. Szybkość zmian strumienia musi się także zmieniać. W cewce istnieje więc zmienna SEM. Jeżeli połączymy dwa końce cewki z zewnętrznymi drutami poprzez pewne ślizgowe kontakty, zwane pierścieniami kontaktowymi lub kolektorem (po prostu tak, aby druty się nie poplątały), otrzymamy prądnicę prądu zmiennego.

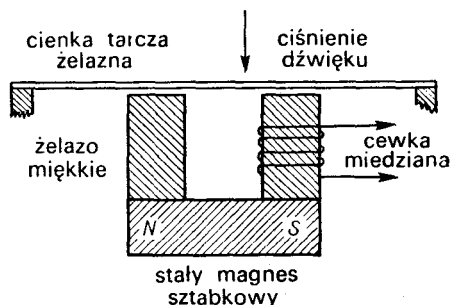
Możemy też całe urządzenie tak zbudować, posługując się odpowiednimi kontaktami ślizgowymi, żeby po każdym półobrocie połączenia między końcami cewki i zewnętrznymi przewodami zostały odwrócone. Wówczas gdy SEM zmienia swój kierunek, wymieniają się też połączenia i pulsacje SEM będą zawsze popychać prądy przez obwód zewnętrzny w tym samym kierunku. Otrzymujemy więc prądnicę prądu stałego.

Urządzenie przedstawione na rys. 16.1 może być albo silnikiem, albo prądnicą. To, że silniki i prądnice są urządzeniami w pewnym sensie odwrotnymi względem siebie, wykazuje ładne doświadczenie z dwoma identycznymi „silnikami” prądu stałego z magnesami stałymi, których cewki są połączone dwoma miedzianymi przewodami. Gdy obracamy mechanicznie wał jednego z nich, urządzenie to staje się prądnicą i napędza drugie urządzenie jako silnik. Jeżeli obracamy wał drugiego urządzenia, ono z kolei staje się prądnicą i napędza pierwsze jako silnik. Tak więc mamy tu interesujący przykład nowej równowagi: silnik i prądnicę są równoważne. Ilościowa równowaga jest w gruncie rzeczy nie całkiem przypadkowa. Wiąże się ona z zasadą zachowania energii.

Innym przykładem urządzenia, które może albo działać jako prądnicę SEM, albo podlegać jej działaniu, jest słuchawka zwykłego telefonu. Zbudowany przez Bella telefon składał się z dwu takich słuchawek połączonych dwoma długimi przewodami. Zasadę budowy telefonu przedstawiamy na rys. 16.4.

Stały magnes wytwarza pole magnetyczne w dwu jarzmach wykonanych z miękkiego żelaza oraz w cienkiej błonie, która porusza się pod ciśnieniem dźwięku. Gdy błona się porusza, strumień pola magnetycznego w jarzmach ulega zmianie. Wobec tego strumień pola płynący przez cewkę nawiniętą dookoła jednego z jarzm zmienia się, gdy fala głosowa uderza w błonę. W rezultacie w cewce wystąpi pewna SEM. Jeżeli końce cewki połączymy z obwodem, powstanie w nim prąd, będący elektrycznym przedstawieniem dźwięku.

16.4. Nadajnik lub odbiornik telefonu



Jeżeli końce cewki z rys. 16.4 połączymy dwoma przewodami z drugim takim samym przyrządkiem, w jego cewce popłynie zmienny prąd. Prąd ten wytworzy zmienne pole magnetyczne i zmienną siłą będzie działać na żelazną błonę. Błona będzie drgać i wytworzy fale głosowe podobne w przybliżeniu do fal, które poruszały pierwszą błonę. A więc używając kilku kawałków żelaza i miedzi można przenieść głos ludzki przewodami!

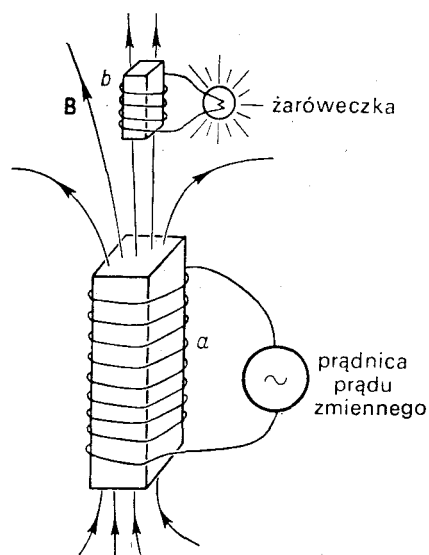
(Obecnie używane telefony zawierają odbiorniki podobne do tego, który tu opisaliśmy, ale ich nadajniki są silniejsze. Nadajnikiem jest mikrofon węglowy: przetwarza on ciśnienie fal głosowych na zmiany prądu elektrycznego pochodzącego z baterii.)

16-2. Transformatory i indukcji

Jednym z najbardziej interesujących odkryć Faradaya było stwierdzenie, że pewna SEM pojawia się w cewce nie tylko w wyniku ruchu tej cewki — co moglibyśmy zrozumieć w oparciu o znajomość siły magnetycznej $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ — ale także w wyniku przepływu prądu zmiennego w innej cewce. Co więcej, ku naszemu zdumieniu wielkość SEM indukowanej w drugiej cewce określona jest tą samą „regułą strumienia”: SEM równa jest szybkości zmian strumienia magnetycznego w cewce. Załóżmy, że mamy dwie cewki, z których każda nawinięta jest wokół oddzielnego pęku żelaznych blaszek (to pomaga w uzyskaniu silniejszego pola magnetycznego), jak przedstawiamy na rys. 16.5. Połączymy teraz jedną z cewek — cewkę a — z prądnicą prądu zmiennego. Nieustannie zmieniający się prąd wytwarza nieustannie zmieniające się pole magnetyczne. Zmienne pole generuje zmienną

SEM w drugiej cewce — cewce b . Ta SEM może na przykład wystarczać do podtrzymywania świecenia żarówki.

16.5. Dwie cewki nawinięte wokół wiązki płatów żelaza wystarczają do zapalenia żarówki przez prądnicę, mimo braku bezpośredniego połączenia.



SEM w cewce b zmienia się z częstością równą oczywiście częstości prądnicę. Ale prąd w cewce b może być większy lub mniejszy od prądu w cewce a . Prąd w cewce b zależy od SEM w niej indukowanej i od oporności i indukcyjności pozostałej części obwodu. SEM może być mniejsza od SEM prądnicę, jeżeli na przykład strumień nie wiele się zmienia. Ale możemy też uzyskać w cewce b SEM o znacznie większej wartości, jeżeli cewkę tę nawiniemy wielokrotnie, tak że będzie ona miała wiele zwojów, gdyż w ten sposób w danym polu magnetycznym zwiększamy strumień przechodzący przez cewkę. (Jeżeli chcecie, można na to spojrzeć inaczej: SEM jest taka sama w każdym zwoju, a ponieważ całkowita SEM jest równa sumie SEM poszczególnych zwojów, wiele kolejnych zwojów wytworzy dużą SEM.)

Takie połączenie dwu cewek — zwykle przy

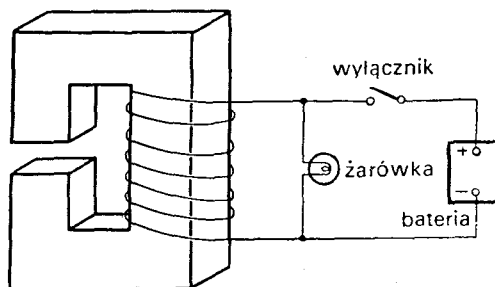
użyciu rdzeni z żelaznych blaszek prowadzących pole magnetyczne — nazywamy *transformatorem*. Może on transformować jedną SEM (zwaną też napięciem) w inną.

Efekty indukcyjne występują także w pojedynczej cewce. Tak na przykład w urządzeniu przedstawionym na rys. 16.5 występuje zmienny strumień nie tylko w cewce *b*, która rozżarza drucik w żarówce, ale także w cewce *a*. Zmienny prąd w cewce *a* wytwarza zmienne pole magnetyczne w tejże cewce i strumień tego pola nieustannie się zmienia, tak że w cewce *a* powstaje SEM *samoindukcji*. Zawsze występuje pewna SEM działająca na prąd, kiedy buduje on pole magnetyczne — lub, ogólniej, gdy jego pole jakoś się zmienia. Zjawisko to nosi nazwę *samoindukcji*.

Gdy formułowaliśmy „regułę strumienia” mówiącą, że SEM równa jest szybkości zmian strumienia, nie określiliśmy bliżej kierunku tej SEM. Istnieje prosta reguła, zwana regułą Lenza, która pomaga w wyobrażeniu sobie, w jakim kierunku działać będzie owa SEM: SEM indukowana *próbuję przeciwstawić się* wszelkim zmianom strumienia. Znaczy to, że kierunek indukowanej SEM jest zawsze taki, że gdyby prąd płynął w kierunku tej siły, wytworzyłby strumień *B*, przeciwstawiający się tym zmianom *B*, które wytworzyły SEM. Reguła Lenza może posłużyć do znalezienia kierunku SEM w prądniczy przedstawionej na rys. 16.1 lub w uzwojeniu transformatora na rys. 16.3.

W szczególności jeżeli występuje prąd zmienny w pojedynczej cewce (lub w jakimkolwiek przewodzie), w tym samym obwodzie działa pewna SEM „wstecz”. Siła ta działa na ładunki płynące w cewce *a* (rys. 16.5), tak aby przeciwstawić się zmianom prądu. Próbuje ona zachować stały przepływ prądu; sprzeciwia się ona prądowi, gdy prąd ten wzrasta, i skierowana jest zgodnie z prądem, gdy prąd ten maleje. Prąd samoindukcji ma pewną „bezwładność”, gdyż efekty indukcyjne próbują go utrzymać na stałym poziomie, podobnie jak bezwładność mechaniczna próbuje zachować stałą wartość prędkości poruszającego się ciała.

Każdy duży elektromagnes ma dużą indukcyjność własną. Przypuśćmy, że z cewką dużego elektromagnesu połączona jest bateria, jak przedstawia rys. 16.6, i że powstało silne pole magnetyczne. (Prąd osiąga stałą wartość określoną przez napięcie baterii i oporność przewodu cewki.) Ale przypuśćmy teraz, że chcemy odłączyć baterię przez otwarcie wyłącznika. Gdybyśmy rzeczywiście otworzyli obwód, prąd szybko by znikł i czyniąc to wytworzyłby ogromną SEM. W większości wypadków ta SEM byłaby dostatecznie duża, by mogła wytworzyć huk pomiędzy stykami wyłącznika. Wysokie napięcie mogłoby także uszkodzić izolację cewki — lub wyrzucić Ci krzywdę, jeżeli to Ty akurat otwierałeś wyłącznik! Dlatego właśnie elektromagnesy są zwykle połączone w obwody takie, jakie pokazujemy na rys. 16.6. Gdy otwieramy wyłącznik, prąd nie zmienia się szybko, lecz pozostaje stały płynąc przez żarówkę, do czego go zmusza SEM samoindukcji cewki.



16.6. Obwód elektromagnesu. Żarówka pozwala na przepływ prądu w czasie otwierania wyłącznika w celu uniknięcia nadmiernej SEM.

16-3. Siły działające na prądy indukowane

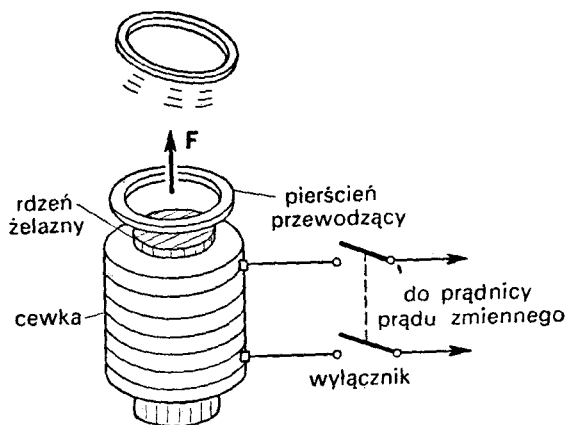
Każdy widział prawdopodobnie zaskakującą demonstrację reguły Lenza przy użyciu przyrządku pokazanego na rys. 16.7. Jest to taki właśnie elektromagnes jak cewka a z rys. 16.5. Na końcu magnesu umieszczamy aluminiowy pierścień. Gdy cewkę połączymy z prądnicą prądu zmiennego przez zamknięcie wyłącznika, pierścień wyfruwa w powietrze. Siła pochodzi oczywiście od prądów indukowanych w pierścieniu. Fakt, że pierścień odfruwa, świadczy o tym, że prądy indukowane w tym pierścieniu przeciwstawiają się zachodzącym w nim zmianom pola. Gdy magnes zwrócony jest biegunem północnym ku górze, prąd indukowany w pierścieniu powoduje, że pierścień ten staje się magnesem z biegunem północnym zwróconym ku dołowi. Pierścień i cewka odpychają się tak, jak dwa magnesy zbliżane do siebie jednoimiennymi biegunami. Jeżeli w pierścieniu wytniemy wąską szczelinę wzdłuż promienia, siła zaniknie, co świadczy o tym, że pochodzi ona rzeczywiście od prądów w pierścieniu.

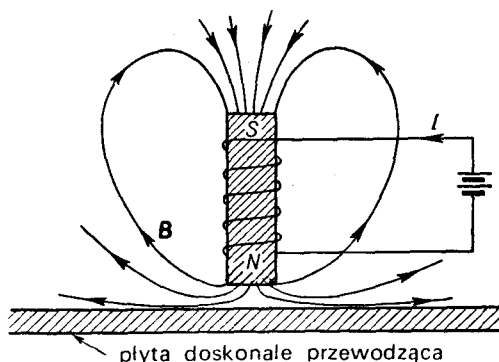
Jeżeli zamiast pierścienia umieścimy na końcu elektromagnesu z rys. 16.7 tarczę aluminiową lub miedzianą, będzie ona także odpychana; prądy indukowane krążą w tarczy i znowu wywołują odpychanie.

Interesujące zjawisko podobnej natury występuje w płacie doskonałego przewodnika. W „przewodniku doskonałym” prąd nie napotyka żadnego oporu. Tak więc jeżeli są w nim wytworzone prądy, to będą one w nim płynąć zawsze. Istotnie, nawet *najmniejsza* SEM wytworzy dowolnie wielki prąd — co w rzeczywistości znaczy, iż nie może tam być w ogóle żadnej SEM. Wszelka próba wytworzenia strumienia magnetycznego, który by przechodził przez taki płat, prowadzi do powstania prądów generujących przeciwne pola B — wszystkie o nieskończenie małej SEM; w rezultacie żaden strumień tam się nie będzie mógł dostać.

Jeżeli mamy płat doskonałego przewodnika i umieszczamy w pobliżu niego elektromagnes, to po włączeniu prądu w elektromagnesie w płacie powstaną takie prądy, zwane

16.7. Pierścień przewodzący jest silnie odpychany przez elektromagnes z prądem zmiennym.





16.8. Elektromagnes w pobliżu płaszczyzny doskonale przewodzącej

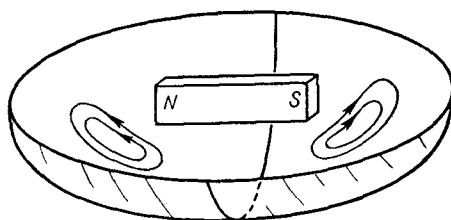
prądami wirowymi, że do wnętrza przewodnika strumień pola magnetycznego w ogóle nie wejdzie. Linie pola wyglądać będą tak, jak przedstawia to rys. 16.8. To samo zjawisko zachodzi oczywiście, jeżeli w pobliżu doskonałego przewodnika umieszczamy sztabkę magnetyczną. Ponieważ prądy wirowe wytwarzają pola przeciwnego znaku, magnes jest odpychany od przewodnika. Umożliwia to zawieszenie sztabki magnetycznej w powietrzu ponad doskonałym przewodnikiem, któremu nadana została postać czaszy, jak to pokazujemy na rys. 16.9. Magnes ten jest podtrzymywany siłą odpychania pochodzącą od indukowanych prądów wirowych w przewodniku. W zwykłych temperaturach przewodniki doskonałe nie istnieją, ale pewne substancje stają się nimi w dostatecznie niskiej temperaturze. Tak na przykład cyna przewodzi prąd w ten sposób w temperaturze poniżej $3,8^{\circ}\text{K}$. Nazywamy ją wtedy nadprzewodnikiem.

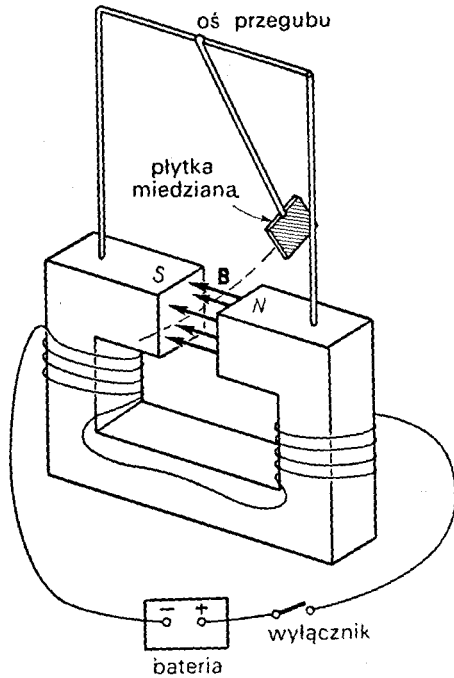
Jeżeli przewodnik z rys. 16.8 nie jest w pełni doskonały, prądy wirowe będą w nim napotykać pewien opór. Będą więc one stopniowo zanikać i magnes powoli opadnie. Prądy wirowe w przewodniku niedoskonałym wymagają do swego podtrzymywania pewnej SEM. Ażeby mieć tę SEM, musimy nieustannie zmieniać strumień. Strumień pola magnetycznego stopniowo przenika do przewodnika.

W zwykłym przewodniku występują nie tylko siły odpychania pochodzące od prądów wirowych, ale powstaną także siły w kierunku poprzecznym. Jeżeli na przykład będziemy poruszać magnesem wzdłuż powierzchni przewodnika, to prądy wirowe wytworzą także siłę hamującą, gdyż prądy indukowane sprzeciwiają się zmianom położenia strumienia. Siły te są proporcjonalne do prędkości i przypominają siłę lepkości.

Zjawiska te możemy dobrze zaobserwować dzięki przyrządowi pokazanemu na

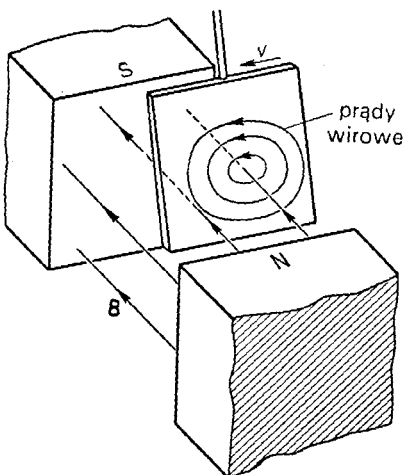
16.9. Magnes sztabkowy zawieszony nad czaszą nadprzewodzącą i podtrzymywany przez prądy wirowe



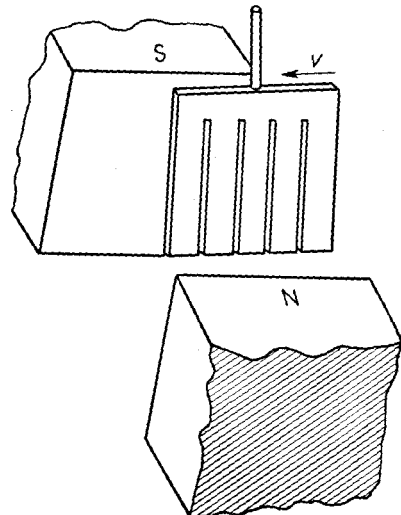


16.10. Hamowanie ruchu wahadła wykazuje działanie sił związanych z prądami wirowymi.

16.11. Prądy wirowe w wahadle miedzianym

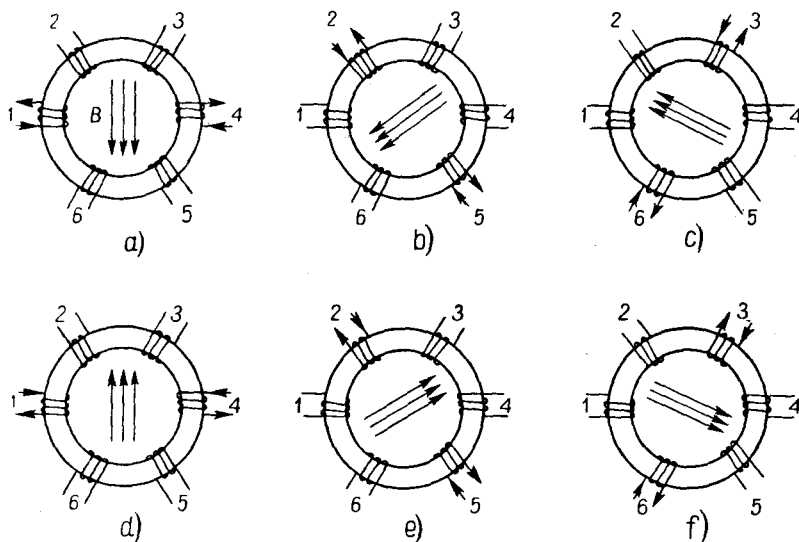


16.12. Efekty działania prądów wirowych są ogromnie zmniejszone w wyniku wycięcia szczelin w płycie.



rys. 16.10. Kwadratowa blaszka miedziana zawieszona jest na końcu sztabki, tworząc wahadło. Blaszka ta porusza się w przód i w tył pomiędzy biegunami elektromagnesu. Gdy włączymy magnes, ruch wahadła zostaje w nagły sposób zatrzymany. Gdy blaszka wchodzi w szczelinę magnesu, indukuje się w niej prąd, który działa tak, aby sprzeciwić się zmianie strumienia. Gdyby blaszka była wykonana z przewodnika doskonałego, prądy byłyby tak wielkie, że znów wypchnęłyby ją, a więc odchyliłyby się ona z powrotem. Jednakże w blaszce miedzianej istnieje pewien opór, wobec czego prądy przede wszystkim prawie całkowicie ją zatrzymują, gdy zaczyna ona wchodzić do pola. Następnie, gdy prądy te zamierają, położenie blaszki w polu magnetycznym powoli się ustala.

Naturę prądów wirowych w miedzianym wahadle można śledzić na rys. 16.11. Natężenie i rozmieszczenie prądów są dość czułe na zmianę kształtu blaszki. Jeżeli na przykład

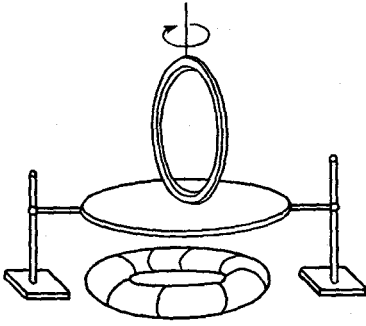


16.13. Wytwarzanie obracającego się pola magnetycznego

blaszke miedzianą zastąpimy inną blaszką, w której wycięliśmy kilka wąskich szczelin, jak pokazuje to rys. 16.12, to efekty związane z prądami wirowymi zostają ogromnie zmniejszone. Wahadło waha się w polu magnetycznym z niewielkim tylko opóźnieniem. Powód jest ten, że prądy w każdej z części miedzianej blaszki są napędzane przez mniejszy strumień, wobec czego prąd napotyka w każdej pętli większy opór. Prądy są słabsze i siła hamująca mniejsza. Podobieństwo jej do siły lepkości możemy zaobserwować nawet jeszcze lepiej umieszczając blaszkę miedzianą między biegunami magnesu i następnie puszczając ją swobodnie (rys. 16.10). Blaszka nie spada; po prostu powoli spływa ku dołowi. Silne prądy wirowe sprzeciwiają się ruchowi — podobnie jak siły lepkości w miodzie.

Jeżeli zamiast przeciągać przewodnik przez magnes będziemy próbowali obracać nim w polu magnetycznym, to powstanie moment siły przeciwstawiający się ruchowi. Pochodzenie tego momentu siły będzie takie samo jak poprzednio. I odwrotnie — jeżeli będziemy obracać magnes w pobliżu przewodzącej płyty lub pierścienia, pierścień będzie pociągany i zacznie się obracać; prądy w pierścieniu wytworzą moment siły, który będzie zmierzał do wywołania obrotu pierścienia w ślad za magnesem.

Takie właśnie pole, jak pole obracającego się magnesu, możemy wytworzyć przez odpowiedni układ cewek, tak jak pokazujemy to na rys. 16.13. Bierzymy torus żelazny (tzn. pierścień żelazny podobny do obarzanka) i nawijamy na nim 6 cewek. Jeżeli przez cewki te przepuścimy prąd, jak pokazujemy na rysunku a), przez uzwojenia 1 i 4, wystąpi pole magnetyczne w kierunku przedstawionym na rysunku. Jeżeli następnie przełączymy prąd tak, by płynął on w uzwojeniach 2 i 5, wystąpi pole magnetyczne w nowym kierunku, jak widać na części b) naszego rysunku. Kontynuując to postępowanie uzyskujemy ciąg pól przedstawiony na pozostałych częściach rysunku. Jeżeli proces ten zachodzi w sposób



16.14. Obracające się pole z rys. 16.12 wykorzystane do wytworzenia momentu siły działającej na przewodzący pierścień

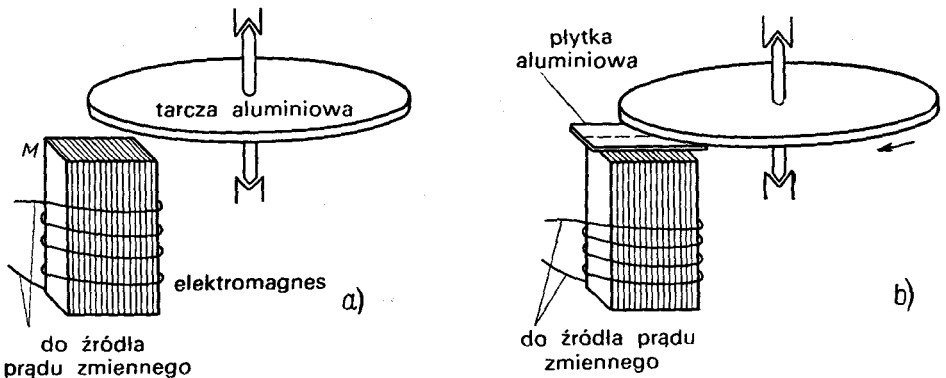
obracającym się polu możemy łatwo dostrzec ustawiając pierścień metalowy na izolującej płycie dokładnie ponad torusem, jak przedstawia to rys. 16.14. Obracające się pole zmusza pierścień do wirowania wokół pionowej osi. Podstawowe elementy, które tu występują, są dokładnie takie same jak te, które odgrywają rolę w dużych silnikach indukcyjnych trójfazowych stosowanych w przemyśle.

Inną postać silnika indukcyjnego przedstawia rys. 16.15. Nie jest ona dogodna do zastosowania w praktyce, gdybyśmy chcieli uzyskać dużą wydajność; nam jednak idzie o ilustrację zasady działania. Elektromagnes M o rdzeniu składającym się z wiązki wyklepanych cienko blaszek żelaznych i owiniętym solenoidalną cewką, zasilany jest prądem zmiennym pochodzącym z prądnicy. Magnes wytwarza zmienny strumień pola B przechodzący przez tarczę aluminiową. Jeżeli mamy do dyspozycji te dwa elementy, nie mamy jeszcze silnika [część a) rysunku]. W tarczy występują prądy wirowe, ale są one rozmieszczone symetrycz-

ciągly, dostajemy „obracające się” pole magnetyczne. Możemy łatwo wytworzyć potrzebny ciąg prądów przyłączając cewki do linii prądu trójfazowego, który dostarcza nam prądów w takiej właśnie kolejności. „Prąd trójfazowy” wytwarzany jest w prądnicy, której działanie oparte jest na zasadzie zilustrowanej na rys. 16.1, z tym, że są tam trzy pętle umocowane wspólnie na tej samej osi w sposób całkowicie symetryczny, tzn. tak, że kąty między pętlami są równe 120° . Gdy cewki obracają się jako całość, SEM przybiera maksymalną wartość kolejno w poszczególnych pętlach. Ze stosowania takiego trójfazowego prądu wynika wiele praktycznych korzyści. Jedną z nich jest właśnie możliwość wytworzenia obracającego się pola magnetycznego.

Moment siły działający na przewodnik w takim

16.15. Prosty przykład silnika indukcyjnego z osłanianym biegunem



nie i nie dają żadnego momentu siły. (Tarcza także nagrzej się w wyniku przepływu prądów indukowanych.) Jeżeli następnie pokryjemy płytką aluminiową tylko połowę bieguna magnesu, jak pokazujemy na części b) rysunku, tarcza zaczyna się obracać i oto mamy silnik. Operacja ta zależy od *dwu* efektów prądów wirowych. Przede wszystkim — prądy wirowe w płytce aluminiowej sprzeciwiają się zmianie strumienia przechodzącego przez tę płytkę, wobec czego pole magnetyczne nad płytką zawsze opóźnia się w stosunku do pola nad tą częścią bieguna, która nie została przez nas zasłonięta. Ten tak zwany efekt „osłoniętego bieguna” prowadzi do powstania pola, które w obszarze „cienia” zmienia się w podobny sposób, jak w obszarze „niezacienionym”, z tą różnicą, że jest ono opóźnione o pewien stały czas. Całe zjawisko zachodzi tak, jak gdybyśmy mieli do czynienia z magnesem w połowie tak szerokim jak prawdziwy magnes, a który jest stale przesuwany z obszaru niezacienionego do zacienionego. Wówczas zmienne pola oddziałują z prądami wirowymi w tarczy i powodują powstanie momentu siły.

16-4. Elektrotechnika

Gdy Faraday po raz pierwszy obwieścił swoje znakomite odkrycie, że zmienny strumień pola magnetycznego wytwarza SEM, zapytano go (jak każdego, kto wykrył nowe zjawisko w przyrodzie): „Jaki jest pożytek z tego odkrycia?” Wszystko bowiem, co znalazł, to osobliwość polegająca na tym, że niewielki prąd powstaje w drucie poruszonym w pobliżu magnesu. Jaki mógłby być z tego pożytek? Faraday odpowiedział: „A jaki jest pożytek z noworodka?”

Ale pomyślmy o niezliczonych zastosowaniach praktycznych, na które pozwala odkrycie Faradaya. Te urządzenia, które powyżej opisaliśmy, to nie są zabawki, ale przykłady wybrane w większości przypadków tak, by przedstawiały zasadę działania pewnej maszyny już używanej w praktyce. Tak na przykład obracający się pierścień w wirującym polu jest silnikiem indukcyjnym. Oczywiście, między takim pierścieniem a stosowanym w praktyce silnikiem indukcyjnym są pewne różnice. Na pierścień działa bardzo niewielki moment siły: pierścień można więc zatrzymać ręką. W dobrym silniku wszystko musi być ze sobą połączone ściślej; nie powinno być tam tyle „marnującego się” pola magnetycznego na zewnątrz — w powietrzu. Po pierwsze więc pole jest skupione w żelazie. Nie zastanawialiśmy się jeszcze nad tym, jak żelazo to robi, ale faktem jest, że żelazo może wzmocnić pole magnetyczne dziesiątki tysięcy razy więcej, niż mogłyby to sprawić same tylko miedziane cewki. Po drugie, wykonuje się bardzo małe szczeliny między kawałkami żelaza; aby tego dokonać, wbudowuje się nawet trochę żelaza do obracającego się pierścienia. Wszystko jest tak urządzone, by dawało możliwie największe siły i największą wydajność — tj. przemianę siły elektrycznej w mechaniczną — aż wreszcie nie można już zatrzymać pierścienia ręką.

Zagadnienie zmniejszania szczelin i w ogóle budowania przyrządów sprawnie działających — to już sprawy *inżynierii*. Wymaga ona poważnych badań w zakresie projektowania, choć nie napotyka się tu jakichś nowych podstawowych zasad dynamiki. Ale jest jeszcze daleka droga od podstawowych zasad do ekonomicznego i praktycznego projektu.

A przecież takie właśnie dokładne projekty inżynieryjne umożliwiły powstanie tak wspaniałej rzeczy jak zapora wodna Boulder Dam^{*)} i wszystkiego, co jej towarzyszy.

Co to takiego ta zapora Boulder Dam? Wielka rzeka wstrzymana zostaje ścianą z betonu. Ale cóż to za ściana! Ukształtowana jest ona wedle tak doskonałej krzywej, aby możliwie najmniejsza ilość betonu mogła zatrzymać napór rzeki. Pogrubia się ona na dnie przybierając tak cudowny kształt, że mogą go ocenić tylko tacy artyści jak inżynierowie, gdyż oni wiedzą, że takie zgrubienie wiąże się ze wzrostem ciśnienia w miarę jak wzrasta głębokość wody. Ale oddalamy się od naszego tematu — elektryczności.

A zatem wodę rzeki kieruje się do olbrzymiej rury. Jest to piękne osiągnięcie inżynieryjne samo w sobie. Rura doprowadza wodę na „koło wodne” — ogromną turbinę — co powoduje obrót koła. (Następny wyczyn inżynieryjny.) Ale po co obracać koła? Otóż są one sprzężone z niezmiernie złożoną masą miedzi i żelaza. Wszystko to poplątane i przeplecione. Są tam dwie części — jedna się obraca, a druga nie. Wszystko to jest skomplikowaną mieszaniną kilku materiałów, głównie miedzi i żelaza, ale jest tam także trochę papieru i szelaku do celów izolacyjnych. Monstrualny obracający się przedmiot. Prądnica. Gdzieś tam z masy miedzi i żelaza wychodzi kilka specjalnych kawałków miedzi. Zapora, turbina, żelazo, miedź, wszystko to zestawione tak, by zdarzyło się coś szczególnego w kilku prętach miedzianych — by powstała SEM. Wtedy pręty miedziane przebywają krótką drogę i okrążają kilka razy inny kawałek żelaza w transformatorze; wówczas zadanie ich jest spełnione.

Ale wokół tego samego kawałka żelaza owija się inny kabel miedziany, który nie ma żadnego połączenia z prętami prądnicy: zmienił je sam fakt przejścia w jego pobliżu — i uzyskują pewną inną SEM. Transformator przekształca prąd o stosunkowo niskim napięciu wymaganym do zaprojektowania wydajnej prądnicy na napięcia bardzo wysokie, które są najdogodniejsze, jeżeli chce się przesyłać energię elektryczną długimi kablami.

A wszystko to musi być niezmiernie wydajne — nie może tu być żadnego marnotrawstwa, żadnych strat. Dlaczego? Przechodzi tędy prąd zasilający jakąś metropolię. Gdyby choć mała jego część została zagubiona — 1 czy 2% — cóż za energia byłaby stracona! Gdyby 1% energii zaginął w transformatorze, energia ta musiałaby być jakoś stamtąd usunięta. Gdyby przejawiała się ona w postaci ciepła, wkrótce stopiłaby całe urządzenie. Oczywiście, są tu pewne straty, ale wszystko, co nam jest potrzebne, to kilka pomp tłoczących olej przez radiator, aby przeszkodzić w nagrzewaniu się transformatora.

Z zapory Boulder Dam wybiega kilka tuzinów miedzianych prętów — długich, długich, długich prętów o grubości być może takiej jak ręka ludzka w przegubie, które idą setki mil we wszystkich kierunkach. Małe pręty miedziane niosące w sobie energię gigantycznej rzeki. Następnie pręty te dzielą się na więcej prętów..., potem wbiegają do nowych transformatorów..., czasami do wielkich prądnic, które odtwarzają prąd w innej postaci..., czasami do maszyn działających dla potrzeb wielkiego przemysłu..., do innych jeszcze transformatorów..., znów dzielą się i rozpościerają..., dopóki rzeka nie popłynie w całym mieście — obracając silniki, ogrzewając, oświetlając, napędzając rozmaite me-

^{*)} Boulder Dam, obecna nazwa Hoover Dam, wielka zapora wodna w USA na rzece Kolorado, na granicy stanów Arizona i Nevada, wys. 222 m, dł. 391 m. (Przyp. red. wyd. polskiego)

chanizmy. Cud gorących światel pochodzących z zimnej rzeki odległej o 600 mil — wszystko to zrobione ze specjalnie zestawionych kawałków miedzi i żelaza. Wielkie maszyny do walcowania stali oraz małe silniczki w gabinecie dentysty. Tysiące małych kół, obracających się w odpowiedzi na obrót wielkiego koła w zaporze Boulder Dam. Zatrzymajcie to wielkie koło, a staną wszystkie inne; światła pogasną. One są naprawdę powiązane z sobą.

A przecież to nie wszystko. Te same zjawiska, które pozwalają pobrać potężną energię rzeki i rozprowadzać ją po kraju, dopóki kilka jej kropeł nie zaczną obracać wiertła dentysty, występują znów przy budowie niezmiernie czułych przyrządów..., przy wykrywaniu niewiarygodnie słabych prądów..., przy przenoszeniu głosu, muzyki i obrazów..., przy obliczeniach..., przy maszynach automatycznych o fantastycznej precyzji.

Wszystko to jest możliwe wskutek dokładnego zaprojektowania urządzenia z miedzi i żelaza — wydajnie wytworzonych pól magnetycznych..., bloków obracającego się żelaza o dwumetrowej średnicy, wirujących z prześwitem półtoramilimetrowym..., dokładnych proporcji miedzi o optymalnej wydajności..., dziwnych kształtów, które wszystkie służą pewnemu celowi; jednym z nich jest krzywizna zapory.

Możemy odgadnąć, że jeżeli jakiś przyszły archeolog odkryje zaporę Boulder Dam, będzie podziwiał piękno jej krzywizn. Ale także odkrywcy z jakiejś wielkiej przyszłej cywilizacji popatrzą na prądnice i transformatory i powiedzą: „Zauważ, że każdy kawałek żelaza ma wspaniale dobrany kształt, by pracował jak najwydajniej. Zastanów się nad myślą, która tkwi w każdym kawałku miedzi!”

To jest właśnie potęga inżynierii i pieczołowitych metod projektowania naszej elektrotechniki. W prądnicy powstało coś, czego nigdzie nie stworzyła natura. Prawdą jest, że są miejsca, gdzie działają siły indukcji. Z pewnością gdzieś wokół Słońca czy gwiazd występują zjawiska wywołane indukcją elektromagnetyczną. Być może, także (choć nie mamy pewności) pole magnetyczne Ziemi podtrzymywane jest przez jakąś analogię prądnicy elektrycznej, która działa w oparciu o prądy krążące we wnętrzu Ziemi. Ale nigdzie nie było dotąd części połączonych ze sobą ruchomo w taki sposób, by wytwarzały energię elektryczną tak właśnie, jak to się dzieje w prądnicy — z wielką wydajnością i regularnością.

Mógłby ktoś pomyśleć, że zaprojektowanie prądnic elektrycznych nie jest już interesującym zagadnieniem, że jest to problem martwy, gdyż wszystkie prądnice zostały już zaprojektowane. Prawie doskonałe prądnice czy silniki możemy zdjąć prosto z półki. Nawet gdyby to była prawda, możemy podziwiał cudowne zakończenie zagadnienia rozwiązanego w sposóbomalże doskonały. Ale zostaje jeszcze wiele zagadnień nie rozwiązanych. Nawet projektowanie prądnic i silników powraca jako problem. Prawdopodobnie cała fizyka niskich temperatur i nadprzewodnictwa będzie wkrótce zastosowana do zagadnień rozprowadzania energii elektrycznej. Będą musiały powstać nowe projekty optymalne w naszym problemie, skoro się pojawi radykalnie nowy czynnik. Sieci zasilania w przyszłości mogą niewiele przypominać sieci dzisiejsze.

Łatwo dostrzec, że jest nieskończona liczba zastosowań i problemów, które można by podjąć badając prawa indukcji. Zagadnienia projektowania maszyn elektrycznych mogą stać się treścią całego życia. Nie możemy tu się posunąć bardzo daleko w tym kierunku, ale powinniśmy sobie uświadomić, że gdy odkryliśmy prawo indukcji, nagle powiązaliśmy naszą teorię z ogromnym postępem praktycznym. Musimy jednak pozostawić

to zagadnienie inżynierom i osobom zajmującym się wiedzą stosowaną, których interesują szczegóły pewnych konkretnych rozwiązań. Fizyka jedynie dostarcza bazy — podstawowych zasad, które trzeba zastosować, bez względu na to jak. (Jeszcze nie zbudowaliśmy tej bazy w całości, gdyż musimy rozważyć szczegółowo właściwości miedzi i żelaza. Fizyka ma i tu coś do powiedzenia, jak zobaczymy nieco później.)

Współczesna elektrotechnika rozpoczęła się od odkryć Faradaya. Bezżyteczne nie-mowlę okazało się cudownym dzieckiem i zmieniło oblicze Ziemi tak, że jego dumny ojciec nie mógłby sobie tego nigdy wyobrazić.

prawa indukcji

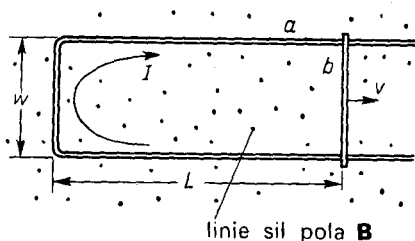
17-1. Fizyka indukcji

W poprzednim rozdziale wykazaliśmy na przykładach, że zjawiska, będące skutkami indukcji, są dość skomplikowane i interesujące. Chcemy teraz omówić podstawowe zasady rządzące tymi zjawiskami. Zdefiniowaliśmy już SEM obwodu przewodzącego jako całkowitą siłę działającą na ładunki wzdłuż całej długości pętli. Dokładniej, jest to składowa styczna siły działającej na ładunek jednostkowy, scałkowana jeden raz wokół całego obwodu. Wielkość ta zatem jest równa całkowitej pracy wykonanej nad jednostkowym ładunkiem, który przemieszcza się wokół obwodu.

Podaliśmy także „regulę strumienia”, która mówi, że SEM równa jest szybkości zmian strumienia magnetycznego przez taki przewodzący obwód. Popatrzmy, czy jesteśmy w stanie zrozumieć, dlaczego tak może być. Przede wszystkim rozważmy przypadek, kiedy strumień zmienia się, ponieważ obwód porusza się w stałym polu.

Na rysunku 17.1 przedstawiliśmy prostą pętlę z drutu, której rozmiary można dowolnie zmieniać. Pętla składa się z dwu części: a — stałej w kształcie litery U, oraz b — ruchomej poprzeczki, która może się ślizgać wzdłuż obu ramion U. Jest to zawsze pełny obwód, ale jego powierzchnia jest zmienna. Przypuśćmy teraz, że umieszczamy pętlę w stałym jednorodnym polu magnetycznym skierowanym prostopadle do płaszczyzny pętli. Zgodnie z naszą regułą, gdy poprzeczka się porusza, w pętli powinna powstać skutek indukcji pewna SEM, proporcjonalna do zmian stru-

17.1. SEM jest indukowana w pętli, jeżeli zmieniamy strumień zmieniając powierzchnię obwodu.



mienia płynącego przez pętlę. SEM wywoła przepływ prądu przez pętlę. Założymy, że oporność pętli jest dostatecznie duża, aby prądy były słabe. Wówczas będziemy mogli pominąć pole magnetyczne tych prądów.

Strumień przez pętlę wynosi wLB ; „reguła strumienia” mówi nam więc, że SEM, którą oznaczymy literą \mathcal{E} , wynosi

$$\mathcal{E} = -wB \frac{dL}{dt} = -wBv,$$

gdzie v jest prędkością przesuwania poprzeczki.

Wynik ten powinien być zrozumiały na podstawie znajomości siły magnetycznej $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, działającej na ładunki znajdujące się w poruszanej poprzeczce. Ładunki te doznają działania siły stycznej do drutu, równej vB na jednostkę ładunku. Jest to wielkość stała wzdłuż całej długości w poprzeczki i równa zeru wszędzie indziej, wobec czego całka wynosi

$$\mathcal{E} = -wvB,$$

a więc wynik uzyskany pokrywa się z wynikiem na szybkość zmiany strumienia.

Przeprowadzone przed chwilą rozumowanie możemy rozciągnąć na każdy przypadek, w którym mamy stałe pole magnetyczne i poruszające się druty. Można ogólnie udowodnić, że dla dowolnego obwodu, którego części poruszają się w stałym polu magnetycznym, SEM jest równa pochodnej względem czasu ze strumienia, niezależnie od tego, jaki jest kształt obwodu.

Z drugiej strony, co się dzieje, gdy pętla znajduje się w ustalonym położeniu, a zmienia się pole magnetyczne? Odpowiedzi na to pytanie nie możemy udzielić na podstawie tego samego rozumowania co poprzednio. To właśnie Faraday odkrył — opierając się na doświadczeniu — że ta sama „reguła strumienia” jest zawsze słuszna, bez względu na to, w jaki sposób dochodzi do zmiany strumienia. Siła działająca na ładunki elektryczne jest dana w zupełnie ogólnej postaci wyrażeniem $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$; nie ma tu więc żadnych nowych szczególnych „sił związanych ze zmiennymi polami magnetycznymi”. Wszystkie siły działające na spoczywający ładunek w stacjonarnym przewodzie pochodzą od pola \mathbf{E} . Spostrzeżenia Faradaya doprowadziły do odkrycia, że pola elektryczne i magnetyczne łączy nowe prawo: w obszarze, w którym istnieje pole magnetyczne zmienne w czasie, powstaje pole elektryczne. Właśnie to powstające pole elektryczne popycha elektrony wokół przewodu, a więc jest odpowiedzialne za SEM w obwodzie stacjonarnym, gdy istnieje zmienny strumień magnetyczny.

Ogólne prawo opisujące pole elektryczne stowarzyszone ze zmiennym polem magnetycznym mówi, że

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (17.1)$$

Nazwiemy je prawem Faradaya. Zostało ono wykryte przez Faradaya, ale zapisał je po raz pierwszy Maxwell w postaci różniczkowej jako jedno ze swych równań. Zobaczmy, jak z tego prawa wynika „reguła strumienia” dla obwodów.

Korzystając z twierdzenia Stokesa możemy prawo to przepisać w postaci całkowej

w następujący sposób:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} da = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da, \quad (17.2)$$

gdzie, jak zwykle, Γ jest dowolną krzywą zamkniętą, a S jest powierzchnią rozpiętą na tej krzywej. Pamiętajmy, że Γ jest tu *matematyczną* krzywą w przestrzeni, a S jest ustaloną powierzchnią. Wówczas możemy wyciągnąć pochodną czasową przed znak całki i dostajemy

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} (\text{strumień przez powierzchnię } S). \end{aligned} \quad (17.3)$$

Stosując ten związek w przypadku krzywej Γ , która przebiega wzdłuż *ustalonego* obwodu przewodzącego, dostajemy jeszcze raz „regulę strumienia”. Całka po lewej stronie przedstawia SEM, a po prawej stronie równania mamy szybkość zmian strumienia zawartego w obwodzie, wziętą ze znakiem minus. Tak więc równanie (17.1) zastosowane do ustalonego obwodu równoważne jest „regule strumienia”.

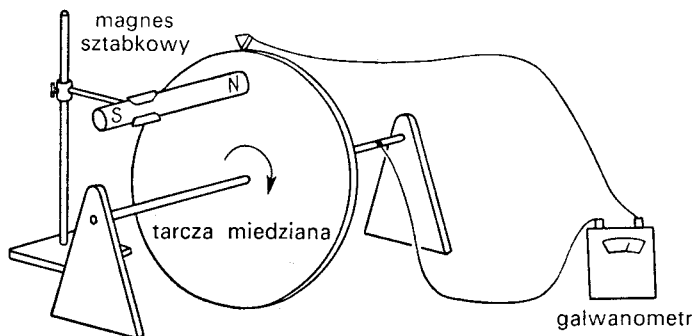
„Reguła strumienia” mówiąca, że SEM w obwodzie jest proporcjonalna do szybkości zmian strumienia magnetycznego przez obwód, jest słuszna — bez względu na to, czy pole się zmienia, czy porusza się obwód, czy też z obu tych przyczyn naraz. Obie możliwości — „obwód się porusza” oraz „pole się zmienia” — nie są wyróżnione w sformułowaniu twierdzenia. A mimo to w naszym wyjaśnieniu tej reguły korzystaliśmy z dwu całkowicie odmiennych praw w obu wypadkach: $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ dla „obwód się porusza” oraz $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ dla „pole się zmienia”.

Wiemy, że nigdy w fizyce się nie zdarza, aby taka prosta i dokładna zasada ogólna wymagała do swego zrozumienia analizy *dwu różnych zjawisk*. Zwykle takie piękne uogólnienie pochodzi z prostej i głębokiej podstawowej zasady. Mimo to jednak w tym przypadku nie wydaje się, aby takie głębsze wyjaśnienie istniało. Musimy rozumieć tę „regulę” jako łączny efekt dwu całkiem odmiennych zjawisk.

Na „regulę strumienia” musimy patrzeć w następujący sposób. W ogólnym przypadku siła na ładunek jednostkowy wynosi $\mathbf{F}/q = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. W poruszających się przewodach działa siła odpowiadająca drugiemu wyrazowi. Poza tym istnieje także pole \mathbf{E} , jeżeli gdziekolwiek w przestrzeni zmienia się pole magnetyczne. Są to zjawiska niezależne, ale SEM wokół pętli przewodzącej jest zawsze równa szybkości zmian strumienia magnetycznego przez tę pętlę.

17-2. Wyjątki od „reguły strumienia”

Podamy teraz kilka przykładów, które częściowo zawdzięczamy Faradayowi i które wykazują, jak ważne jest dokładne rozróżnianie obu efektów wywołujących indukowaną SEM. Nasze przykłady obejmują takie sytuacje, w których nie można zastosować

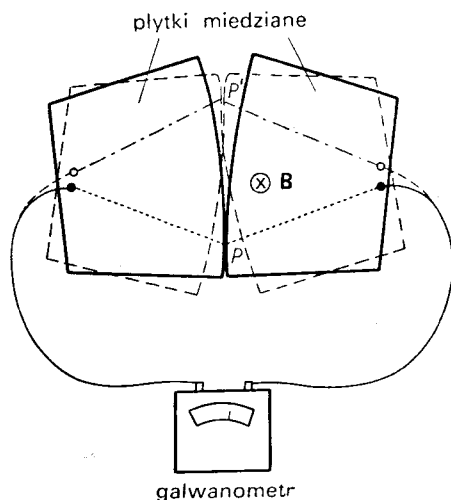


17.2. Gdy tarcza się obraca, istnieje SEM pochodząca z $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, ale nie ma zmiany strumienia przez obwód.

„reguły strumienia” — albo dlatego, że nie ma w ogóle przewodu, albo też dlatego, że droga, którą przebywają prądy indukowane, znajduje się wewnątrz dużego obszaru przestrzennego przewodnika.

Zacniemy od ważnej uwagi. Część SEM pochodząca od pola \mathbf{E} nie zależy od istnienia fizycznego przewodu (jak to ma miejsce z częścią $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$). Pole \mathbf{E} może istnieć w próżni i całka z tego pola wokół dowolnej pomyślanej krzywej zamkniętej w przestrzeni równa jest szybkości zmian strumienia pola \mathbf{B} przez tę krzywą. (Zauważmy, że tak nie jest w przypadku pola \mathbf{E} wytworzonego przez statyczne ładunki, gdyż wtedy całka krzywoliniowa z pola \mathbf{E} po zamkniętej krzywej jest zawsze równa zeru.)

17.3. Gdy płyty kołyszą się w jednorodnym polu magnetycznym, może powstawać duża zmiana strumienia bez wytworzenia SEM.



Opiszemy teraz taką sytuację, w której strumień przez obwód nie ulega zmianie, a mimo to występuje pewna siła elektromotoryczna. Rysunek 17.2 przedstawia tarczę przewodzącą, którą możemy obracać wokół ustalonej osi w obecności pola magnetycznego. Jeden styk umieszczamy na osi, a drugi trze o zewnętrzną krawędź tarczy. Obwód uzupełniamy galwanometrem. Gdy tarcza wiruje, „obwód”, w sensie miejsca w przestrzeni, w którym istnieją prądy, jest zawsze ten sam. Ale część obwodu, która znajduje się w tarczy, porusza się. Choć strumień przez „obwód” jest stały, występuje jednak pewna SEM, co można zaobserwować na galwanometrze. Oczywiście, to właśnie siła $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ w poruszającej się tarczy daje wkład do SEM, której wobec tego nie możemy przyrównać do zmiany strumienia.

Jako przeciwny przykład rozważmy nieco niezwykłą sytuację, w której strumień przez

„obwód” (znów rozumiany w sensie miejsca w przestrzeni, w którym znajduje się prąd) zmienia się, ale mimo to *nie* pojawia się żadna SEM. Wyobraźmy sobie dwie metalowe płyty o nieco zakrzywionych krawędziach, jak pokazujemy na rys. 17.3, umieszczone w jednorodnym polu magnetycznym prostopadłym do ich powierzchni. Każda płyta jest połączona z jednym z końców galwanometru, jak przedstawia rysunek. Płyty stykają się w jednym punkcie P , tak że powstaje pełny obwód. Jeżeli teraz przechylimy płyty o pewien mały kąt, punkt styku tych płyt przemieści się do punktu P' . Jeżeli wyobraźmy sobie, że obwód jest utworzony w ten sposób, jak to pokazują linie kropkowane na rysunku, strumień magnetyczny poważnie się zmieni, gdy płyty będą kołysane w tę i z powrotem. Kołysanie to możemy jednak wykonywać powoli, tak że wyrażenie $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ jest bardzo niewielkie i praktycznie nie ma żadnej SEM. „Reguła strumienia” tu zawodzi. Wolno ją stosować jedynie do obwodów zbudowanych z tego samego *materiału*. Gdy zmienia się materiał, musimy powrócić do naszych praw podstawowych. *Poprawna* fizyka ujęta jest zawsze w dwa równania podstawowe:

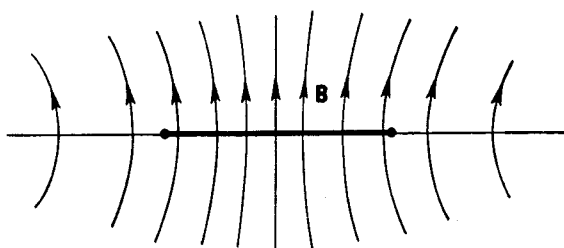
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

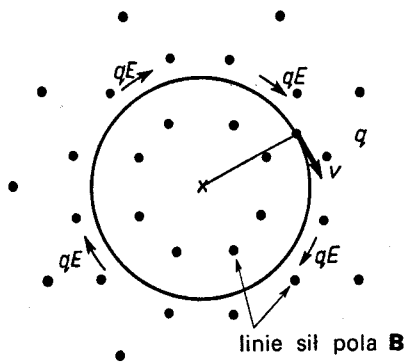
17-3. Przyspieszanie cząstek w indukowanym polu elektrycznym; betatron

Powiedzieliśmy już, że siła elektromotoryczna wytworzona przez zmienne pole magnetyczne może istnieć nawet wtedy, gdy nie ma przewodników; znaczy to, że indukcja magnetyczna zachodzi także bez przewodów. Możemy nadal wyobrażać sobie siłę elektromotoryczną wzdłuż dowolnej matematycznej krzywej w przestrzeni. Prawo Faradaya mówi, że ta całka krzywoliniowa równa jest prędkości zmian strumienia magnetycznego przez krzywą zamkniętą [patrz wzór (17.3)].

17.4. Elektron przyspieszony w zmiennym w czasie polu magnetycznym o symetrii osiowej



widok z boku



widok z góry

Jako przykład działania takiego indukowanego pola elektrycznego chcemy teraz rozważyć ruch elektronu w zmiennym polu magnetycznym. Wyobraźmy sobie pole magnetyczne, które w każdym punkcie na płaszczyźnie jest skierowane pionowo, jak pokazuje rys. 17.4. Pole magnetyczne jest wytwarzane przez elektromagnes, ale nie będziemy się zajmować szczegółami. Wyobraźmy sobie, że pole magnetyczne jest symetryczne względem pewnej osi, tzn. że natężenie pola magnetycznego zależy jedynie od odległości od osi. Pole magnetyczne także zmienia się w czasie. Wyobraźmy sobie teraz elektron poruszający się w tym polu po drodze, która stanowi okrąg o stałym promieniu ze środkiem na osi pola. (Zobaczymy potem, jak taki ruch można wywołać.) Ponieważ pole magnetyczne się zmienia, powstanie pole elektryczne \mathbf{E} styczne do orbity elektronu, które go będzie popychać wokół okręgu. Ze względu na symetrię problemu pole elektryczne będzie mieć tę samą wartość wszędzie na okręgu. Jeżeli orbita elektronu ma promień r , to całka krzywoliniowa z pola \mathbf{E} wokół orbity równa jest szybkości zmian strumienia magnetycznego przez okrąg. Całka krzywoliniowa z pola \mathbf{E} jest równa właśnie wielkości tej szybkości razy powierzchnia koła, tj. $2\pi r$. Strumień magnetyczny musi w ogólnym przypadku być obliczony z jakiejś całki. Tymczasem oznaczmy przez B_{sr} średnią wartość pola magnetycznego wewnątrz koła; wtedy strumień jest równy temu właśnie średniemu polu mnożonemu przez powierzchnię koła. Mamy

$$2\pi r E = - \frac{\partial}{\partial t} (B_{sr} \cdot \pi r^2).$$

Skoro założyliśmy, że r jest stałe, E jest proporcjonalne do pochodnej czasowej pola średniego:

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB_{sr}}{dt}. \quad (17.4)$$

Elektron dozna działania siły $q\mathbf{E}$ i będzie przez nią przyspieszany. Pamiętając poprawną relatywistycznie postać równania ruchu (szybkość zmiany pędu jest proporcjonalna do siły) dostajemy

$$q\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (17.5)$$

Dla orbity kołowej, którą założyliśmy, siła elektryczna działająca na elektron jest zawsze skierowana zgodnie z kierunkiem ruchu, tak że jego całkowity pęd będzie rósł z szybkością określoną wzorem (17.5). Łącząc wzory (17.5) i (17.4) możemy powiązać szybkość zmiany pędu ze zmianą średniego pola magnetycznego:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} q r \frac{dB_{sr}}{dt}. \quad (17.6)$$

Całkując to względem t znajdujemy pęd elektronu:

$$p = p_0 + \frac{qr}{2} \Delta B_{sr}, \quad (17.7)$$

gdzie p_0 jest pędem początkowym elektronu, ΔB_{sr} zaś jest zmianą, która zaszła w wartości

B_{sr} . Działanie *betatronu* — maszyny przyspieszającej elektrony do bardzo wysokich energii — oparte jest na tej właśnie idei.

Aby zbadać szczegółowo, jak działa betatron, musimy się teraz zastanowić, w jaki sposób możemy zmusić elektron do poruszania się po okręgu. Omawialiśmy w rozdz. 11 tomu I (cz. 1) zasadę, którą się tu posługujemy. Jeżeli uda nam się wytworzyć na orbicie elektronu pole magnetyczne \mathbf{B} , to wystąpi poprzeczna siła $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, która, jeżeli pole \mathbf{B} jest odpowiednio dobrane, może utrzymać elektron na założonej z góry orbicie. W betatronie ta poprzeczna siła zmusza elektron do ruchu po orbicie kołowej o stałym promieniu. Możemy obliczyć, jakie pole musi występować na orbicie, posługując się znowu relatywistycznym równaniem ruchu, ale tym razem dla składowej poprzecznej siły. W betatronie (patrz rys. 17.4) pole \mathbf{B} jest skierowane prostopadle do prędkości \mathbf{v} , tak więc siła poprzeczna wynosi qvB . Jest ona zarazem równa szybkości zmian składowej poprzecznej pędu:

$$qvB = \frac{dp_t}{dt}. \quad (17.8)$$

Gdy cząstka porusza się po *okregu*, szybkość zmian składowej poprzecznej pędu równa jest wielkości pędu całkowitego pomnożonej przez ω , to jest przez prędkość kątową obrotu [zgodnie z argumentami zaczerpniętymi z rozdz. 11 tomu I (cz. 1)]:

$$\frac{dp_t}{dt} = \omega p, \quad (17.9)$$

gdzie ponieważ ruch jest kołowy,

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (17.10)$$

Przyrównując siłę magnetyczną do przyspieszenia poprzecznego dostajemy

$$qvB_{\text{orbit}} = p \frac{v}{r}, \quad (17.11)$$

gdzie B_{orbit} jest polem na odległości r od centrum.

Gdy betatron działa, pęd elektronu rośnie proporcjonalnie do B_{sr} , zgodnie z wzorem (17.7), i jeżeli elektron ma nadal poruszać się po swoim właściwym okręgu, zależność (17.11) musi być ciągle spełniana w miarę wzrostu pędu p . Wielkość B_{orbit} musi wzrastać proporcjonalnie do pędu p . Porównując wzory (17.11) i (17.7) określające p , widzimy, że musi zachodzić następujący związek między B_{sr} , średnim polem magnetycznym *wewnątrz* orbity o promieniu r , oraz polem magnetycznym B_{orbit} na samej orbicie:

$$\Delta B_{sr} = 2 \Delta B_{\text{orbit}}. \quad (17.12)$$

Poprawne działanie betatronu wymaga, aby średnie pole magnetyczne wewnątrz orbity wzrastało dwukrotnie szybciej niż pole magnetyczne na samej orbicie. W tych warunkach w miarę wzrostu energii cząstki wskutek działania pola elektrycznego, indukowanego polem magnetycznym, pole magnetyczne na orbicie zwiększa się właśnie tak szybko, jak potrzeba, aby cząstka stale poruszała się po kole.

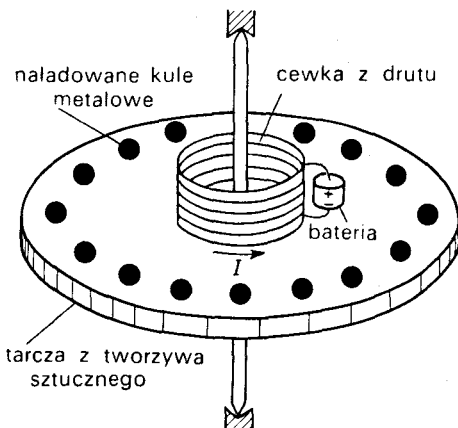
Betatronu używamy do nadawania elektronom energii dziesiątków milionów woltów lub nawet setek milionów woltów. Jednakże przestaje on mieć praktyczne znaczenie, jeżeli przyspieszamy elektrony do energii znacznie przekraczających kilkaset milionów woltów. Dzieje się tak z kilku powodów. Jeden z nich to praktyczna trudność uzyskania potrzebnej dużej wartości pola magnetycznego wewnątrz orbity. Inny wiąże się z faktem, że równanie (17.6) przestaje być słuszne dla bardzo wysokich energii, gdyż nie obejmuje ono strat energii cząstki na promieniowanie elektromagnetyczne [tak zwane promieniowanie synchrotronowe omawiane w rozdz. 36 tomu I (cz. 2)]. Z tych powodów przyspieszamy elektrony do najwyższych energii — wielu miliardów elektronowoltów — w maszynach innego rodzaju, zwanych *synchrotronami*.

17-4. Pewien paradoks

Chcielibyśmy teraz opisać pewien pozorny paradoks. Paradoksem jest taka sytuacja, w której uzyskujemy jedną odpowiedź analizując zagadnienie w pewien sposób, a całkiem inną, jeżeli analizę przeprowadzamy inaczej, tak że w końcu nie wiemy, co się w gruncie rzeczy dzieje. Oczywiście, w fizyce nie ma nigdy żadnych rzeczywistych paradoksów, ponieważ jest tylko jedna poprawna odpowiedź na każde pytanie; przynajmniej wierzymy, że Natura będzie działać tylko w jeden sposób (i to jest właśnie ten *sposób poprawny*). Tak więc w fizyce paradoks może powstać tylko wskutek zamieszania w naszym własnym rozumieniu problemu. A oto paradoks, o którym chcemy mówić.

Wyobraźmy sobie, że konstruujemy urządzenie takie, jakie przedstawia rys. 17.5. Jest to cienka, kolista tarcza plastikowa podtrzymywana na osi koncentrycznej tak doskona-

17.5. Czy tarcza będzie się obracać po zatrzymaniu przepływu prądu?



le, że może się całkiem swobodnie obracać. Na tarczy znajduje się cewka z prądem w kształcie krótkiego solenoidu współosiowego z osią obrotu. Solenoid ten przewodzi stały prąd I , doprowadzany z małej baterii, także umieszczonej na tarczy. W pobliżu brzegu tarczy rozmieszczono jednostajnie wokół jej obwodu pewną liczbę małych metalowych kulek, izolowanych od siebie nawzajem i od solenoidu samą tarczą. Każda z tych małych przewodzących kul jest naładowana tym samym ładunkiem elektrycznym Q . Urządzenie to jest w zupełności stacjonarne i tarcza spoczywa. Przypuśćmy teraz, że jakoś przypadkiem — który mógł być uprzednio zaplanowany — prąd w solenoidzie zostanie przerwany, jednakże bez żadnej interwencji z zewnątrz. Tak długo, jak długo prąd płynął,

przez solenoid przepływał pewien strumień pola magnetycznego, mniej więcej równoległy do osi tarczy. Gdy prąd zostanie przerwany, strumień ten musi zaniknąć. Wystąpi zatem pewne pole elektryczne indukowane, które będzie krążyć tak, że jego linie będą kołami współśrodkowymi z osią tarczy. Naładowane kulki na obwodzie tarczy doznają działania pewnej siły elektrycznej, stycznej do obwodu. Ta siła elektryczna jest skierowana jednakowo dla wszystkich kulek i wobec tego wywrze pewien moment siły na tarczę. Na podstawie tego rozumowania moglibyśmy oczekiwać, że gdy prąd w solenoidzie zaniknie, tarcza zacznie się obracać. Gdybyśmy znali moment bezwładności tarczy, natężenie prądu w solenoidzie oraz ładunki na małych kulkach, potrafilibyśmy obliczyć prędkość kątową tego obrotu.

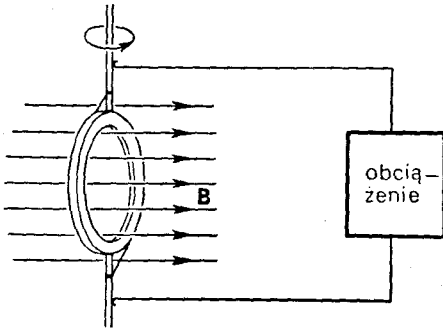
Moglibyśmy jednak także przeprowadzić inne rozumowanie. Korzystając z zasady zachowania momentu pędu, moglibyśmy powiedzieć, że moment pędu tarczy (wraz z całym jej wyposażeniem) jest początkowo równy zeru, a więc moment pędu całości powinien stać się równy zeru. Nie powinno więc być żadnego obrotu, gdy przerwiemy przepływ prądu. Które rozumowanie jest poprawne? Czy tarcza zacznie się obracać, czy nie? Pozostawiamy ten problem czytelnikowi do przemyślenia.

Ostrzegamy, że poprawna odpowiedź nie zależy od jakichś nieistotnych czynników, takich na przykład jak asymetryczne położenie baterii. Istotnie, można sobie wyobrazić sytuację idealną, kiedy solenoid wykonany jest z drutu nadprzewodzącego, w którym płynie pewien prąd. Po starannym ustawieniu tarczy w spoczynku pozwalamy z wolna na podniesienie się temperatury przewodu. Gdy drut osiągnie temperaturę przejścia między nadprzewodnictwem a zwykłym przewodnictwem, prąd w solenoidzie zaniknie wskutek oporu drutu. Strumień, jak poprzednio, zaniknie i powstanie pole elektryczne wokół osi. Ostrzegamy także, że rozwiązanie nie jest łatwe, ani też nie polega na jakimś triku. Kiedy się je wymyśli, wykryje się pewną ważną zasadę elektromagnetyzmu.

17-5. Prądnicą prądu zmiennego

W rozważaniach pozostałej części tego rozdziału posłużymy się zasadami przedstawionymi w § 17-1, aby przeanalizować zjawiska, o których mówiliśmy w rozdz. 16. Przede wszystkim przyjrzyjmy się bliżej prądnicą prądu zmiennego. Taka prądnicą składa się w zasadzie z cewki obracającej się w stałym jednorodnym polu magnetycznym. Ten sam wynik można by także uzyskać posługując się stałą cewką umieszczoną w polu magnetycznym, którego kierunek obraca się w sposób opisany w poprzednim rozdziale. Będziemy tu rozważać jedynie ten pierwszy wypadek. Przypuśćmy, że mamy kołową cewkę, którą możemy obracać na osi wzdłuż jednej z jej średnic. Cewkę tę umieszczamy w jednorodnym polu magnetycznym prostopadłym do osi obrotu, jak pokazuje rys. 17.6. Wyobrażamy sobie także, że dwa końce cewki są połączone z końcówkami zewnętrznymi za pomocą jakichś styków ślizgowych.

Wskutek obrotu cewki strumień magnetyczny przez tę cewkę będzie się zmieniał. Obwód cewki wykaże więc pewną SEM. Niech S będzie polem powierzchni cewki, θ —



17.6. Cewka z prądem obracająca się w jednorodnym polu magnetycznym — podstawowy pomysł, na którym opiera się budowa prądnicy prądu zmiennego.

kątem między kierunkiem pola magnetycznego i normalną do płaszczyzny cewki^{*)}. Strumień przez cewkę wynosi

$$BS \cos \theta. \quad (17.13)$$

Jeżeli cewka obraca się ze stałą prędkością kątową ω , kąt θ zmienia się w czasie jak $\theta = \omega t$. SEM w cewce wynosi zatem

$$\mathcal{E} = - \frac{d}{dt} (\text{strumień}) = - \frac{d}{dt} (BS \cos \omega t),$$

czyli

$$\mathcal{E} = BS\omega \sin \omega t. \quad (17.14)$$

Jeżeli poprowadzimy przewody z prądnicy do jakiegoś punktu położonego w pewnej odległości od obracającej się cewki, gdzie pole magnetyczne jest już równe zero, a co najmniej nie zmienia się w czasie, rotacja pola \mathbf{E} w tym obszarze znika i możemy tam zdefiniować potencjał elektryczny. Istotnie, jeżeli nie pobiera się żadnego prądu z prądnicy, to różnica potencjałów V między dwoma drutami równa będzie SEM obracającej się cewki. Znaczy to, że

$$V = BS\omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t.$$

Różnica potencjałów między drutami zmienia się w czasie jak $\sin \omega t$. Taka zmienna różnica potencjałów nosi nazwę napięcia zmiennego.

Ponieważ między przewodami istnieje pewne pole elektryczne, muszą one być naładowane elektrycznie. Jest rzeczą jasną, że SEM prądnicy wypchnęła pewien nadmierny ładunek do przewodu, tak aby dokładnie zrównoważyć pochodzącym od tego ładunku polem elektrycznym siłę indukcji. Widziane z zewnątrz prądnicy dwa przewody przedstawiają się tak, jakby zostały naładowane elektrycznie do różnicy potencjałów V , i jakby ładunek na nich ulegał zmianom w czasie tak, aby powstała zmienna różnica potencjałów. Jest tu jeszcze inna różnica w porównaniu z sytuacją w elektrostatyce. Jeżeli połączymy prądnicę z obwodem zewnętrznym, który pozwala na przepływ prądu, przekonujemy się, że SEM nie pozwala drutom na rozładowanie się, ale wciąż dostarcza ładunku do przewodów, w miarę jak prąd jest z nich pobierany, starając się utrzymać druty stale na tej samej różnicy potencjałów. Jeżeli prądnica jest połączona z obwodem, którego całkowita oporność wynosi R , to prąd płynący przez obwód będzie proporcjonalny do SEM prądnicy i odwrotnie proporcjonalny do oporności R . Ponieważ SEM zmienia się sinusoidalnie w czasie, to także natężenie prądu wykaże taką zależność. Istnieje więc tu prąd zmienny

^{*)} Ponieważ posługujemy się teraz literą A na oznaczenie potencjału wektorowego, wolimy posługiwać się dla oznaczenia pola powierzchni literą S .

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t.$$

Schemat takiego obwodu przedstawiono na rys. 17.7.

Możemy także dostrzec, że SEM determinuje ilość energii dostarczanej z prądnicy. Każdy ładunek w drucie uzyskuje energię w ilości $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ na jednostkę czasu, gdzie \mathbf{F} jest siłą działającą na ładunek, a \mathbf{v} — jego prędkością. Niech liczba ładunków na jednostkę długości przewodu wynosi n ; wówczas moc dostarczana do dowolnego elementu ds przewodu wynosi

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} n ds.$$

Dla drutu \mathbf{v} jest zawsze równoległe do ds , wobec czego możemy tę moc przepisać w postaci

$$n\mathbf{F} \cdot ds.$$

Całkowita moc dostarczana do pełnego obwodu jest całką z tego wyrażenia po całej pętli:

$$\text{moc} = \oint n\mathbf{F} \cdot ds. \quad (17.15)$$

Pamiętamy jednak, że $q\mathbf{v}$ jest to prąd I i że siła elektromotoryczna jest zdefiniowana jako całka z F/q po obwodzie. Dostajemy wynik

$$\text{moc z prądnicy} = \mathcal{E}I. \quad (17.16)$$

Gdy w cewce prądnicy płynie prąd, działają na nią również siły mechaniczne. Rzeczywiście, wiemy, że moment siły działający na cewkę będzie proporcjonalny do jej momentu magnetycznego, do natężenia pola magnetycznego B oraz do sinusa kąta pomiędzy tymi dwoma wektorami. Moment magnetyczny jest równy natężeniu prądu w cewce, mnożonemu przez jej pole powierzchni. Zatem moment siły wynosi

$$\tau = ISB \sin \theta. \quad (17.17)$$

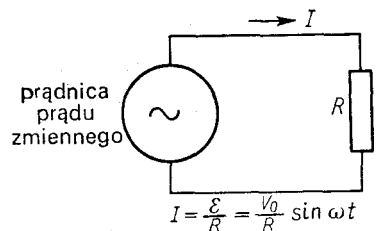
Aby podtrzymywać obrót cewki, należy na jednostkę czasu wykonywać następującą pracę mechaniczną:

$$\frac{dW}{dt} = \omega\tau = \omega ISB \sin \theta \quad (17.18)$$

(prędkość kątowna mnożona przez moment siły). Porównując to równanie z wzorem (17.14) widzimy, że praca mechaniczna powinna być wykonywana dla podtrzymywania obrotu cewki wbrew działającym siłom magnetycznym z prędkością równą dokładnie $\mathcal{E}I$, a więc równą mocy elektrycznej, dostarczanej przez prądnicę. Cała energia mechaniczna zużyta w prądnicy pojawia się jako energia elektryczna w obwodzie.

Innym przykładem prądów i sił pochodzących od indukowanej SEM niech będzie zestaw opisany w rozdz. 12 i przedstawiony na rys. 17.1. Są tam

17.7. Obwód z prądnicą prądu zmiennego i oporność



dwa równoległe przewody oraz ślizgająca się poprzeczka; wszystko to umieszczone w jednorodnym polu magnetycznym prostopadłym do płaszczyzny, w której znajdują się druty. Przypuśćmy, że „dno” U (po lewej stronie rysunku) jest wykonane z przewodów o bardzo dużej oporności, podczas gdy dwa boczne druty zrobione są z dobrego przewodnika, takiego jak miedź, a wtedy nie będziemy się musieli przejmować zmianą oporności obwodu w miarę poruszania się poprzeczki. Jak poprzednio, SEM obwodu wynosi

$$\mathcal{E} = -vBw. \quad (17.19)$$

Prąd w obwodzie jest proporcjonalny do tej SEM i odwrotnie proporcjonalny do oporności obwodu:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{vBw}{R}. \quad (17.20)$$

Ponieważ płynie prąd, na poprzeczkę działać będzie siła magnetyczna proporcjonalna do długości poprzeczki, do natężenia prądu oraz do natężenia pola magnetycznego, a więc dana wzorem

$$F = BIw. \quad (17.21)$$

Podstawiając tu I dane wzorem (17.20) dostajemy następujące wyrażenie dla siły:

$$F = -\frac{B^2w^2}{R}v. \quad (17.22)$$

Widzimy, że siła jest proporcjonalna do prędkości poprzeczki. Kierunek siły, jak łatwo dostrzec, jest przeciwny do kierunku prędkości. Taka siła „proporcjonalna do prędkości”, podobna do siły lepkości, działa zawsze, gdy wytwarzamy prądy indukowane przez poruszanie przewodnikami w polu magnetycznym. Przykłady prądów wirowych podaliśmy już w poprzednim rozdziale; prądy te także wytwarzały siły (działające na przewodniki) proporcjonalne do prędkości przewodnika, bez względu na to, że w takich sytuacjach rozkład prądów jest na ogół bardzo skomplikowany i trudno go przeanalizować.

Przy projektowaniu układów mechanicznych często dogodnie jest mieć do dyspozycji siły tłumiące, proporcjonalne do prędkości. Siły związane z istnieniem prądów wirowych dostarczają nam jednego z najwygodniejszych sposobów uzyskania takich sił.

Przykładem zastosowania takiej siły jest zwykły domowy licznik energii elektrycznej. Znajduje się w nim cienka tarcza aluminiowa obracająca się między biegunami magnesu stałego. Tarcza ta jest napędzana małym silnikiem elektrycznym, którego moment siły jest proporcjonalny do siły zużywanej w domowym obwodzie elektrycznym. Ponieważ prądy wirowe w tarczy dają siłę oporu proporcjonalną do prędkości, przeto w stanie równowagi prędkość ta jest proporcjonalna do pobieranej mocy. Posługując się licznikiem połączonym z obracającą się tarczą możemy notować liczbę obrotów, która z kolei wskazuje nam, jaka całkowita energia została pobrana, tzn. ile watogodzin zostało zużytych.

Dodajmy, że wzór (17.22) pokazuje, iż siła pochodząca od prądów indukowanych, tzn. od prądów wirowych, jest odwrotnie proporcjonalna do oporu. Im większa będzie

ta siła, tym lepsza będzie przewodność danego materiału. Powód oczywiście jest tu ten, że SEM wytwarza silniejszy prąd, jeżeli oporność jest niska, a silniejsze prądy dają większe siły mechaniczne.

Z naszych wzorów możemy też wyciągnąć wniosek co do tego, jak energia mechaniczna jest przemieniana w energię elektryczną. Tak jak poprzednio, energia elektryczna dostarczona w oporności obwodu równa jest iloczynowi $\mathcal{E}I$. Moc zużywana przy poruszaniu przewodzącej poprzeczki równa jest sile działającej, mnożonej przez prędkość. Posługując się równaniem (17.21) na siłę dostajemy moc tę w postaci

$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2 B^2 w^2}{R}.$$

Widzimy, że rzeczywiście jest to równe iloczynowi $\mathcal{E}I$, który byśmy dostali wprost ze wzorów (17.19) i (17.20). I znowu praca mechaniczna ujawnia się jako energia elektryczna.

17-6. Indukcja wzajemna

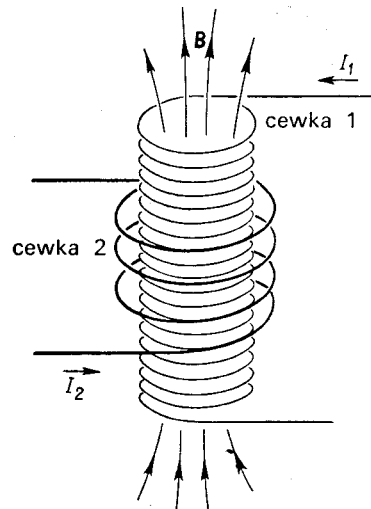
Chcemy się teraz zastanowić nad sytuacją, w której mamy nieruchome cewki, ale zmienne pola magnetyczne. Gdy opisywaliśmy wytwarzanie pól magnetycznych przez prądy, interesowaliśmy się jedynie prądami stałymi. Ale tak długo, jak długo prądy są wolnozmiennie, w każdej chwili pole magnetyczne jest w przybliżeniu takie samo jak pole magnetyczne pochodzące od prądu stałego. W tym paragrafie założymy, że prądy zawsze zmieniają się dostatecznie wolno, aby założenie to było spełnione.

Na rysunku 17.8 pokazaliśmy zestaw dwu cewek, który może posłużyć do pokazania podstawowych zjawisk, od których zależy działanie transformatora. Cewka 1 składa się z drutu przewodzącego, nawiniętego w kształcie długiego solenoidu. Dookoła tej cewki — i od niej odizolowana — znajduje się druga cewka, składająca się tylko z kilku zwojów drutu. Jeżeli przez cewkę 1 przepływa prąd, to, jak wiemy, wewnątrz niej pojawi się pole magnetyczne. Pole to będzie także przechodzić przez cewkę 2. Gdy zmieniamy prąd w cewce 1, zmienia się także strumień pola magnetycznego i w cewce 2 powstanie indukowana SEM. Obliczmy ją teraz.

Z § 13-5 dowiedzieliśmy się, że pole magnetyczne wewnątrz długiego solenoidu jest jednorodne i ma natężenie

$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{N_1 I_1}{l}, \quad (17.23)$$

17.8. Prąd w cewce 1 wytwarza pole magnetyczne w cewce 2.



gdzie N_1 oznacza liczbę zwojów w cewce 1, I_1 — natężenie prądu, który przez nią przepływa, a l — jej długość. Powiedzmy, że pole przekroju cewki 1 wynosi S ; wówczas strumień pola magnetycznego wynosi B razy S . Jeżeli cewka 2 ma N_2 zwojów, to strumień ten przecina cewkę 2 N_2 razy. Wobec tego SEM w cewce 2 dana jest wzorem

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt}. \quad (17.24)$$

Jedyną wielkością we wzorze (17.23), która zmienia się w czasie, jest I_1 . SEM jest więc dana przez

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_1 N_2 S}{\epsilon_0 c^2 l} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.25)$$

Widzimy, że SEM w cewce 2 jest proporcjonalna do szybkości zmian prądu w cewce 1. Stała proporcjonalności, która w zasadzie jest czynnikiem zależnym tylko od kształtu obu cewek, zwana jest *indukcyjnością wzajemną* i zwykle oznaczana symbolem \mathfrak{M}_{21} . Równanie (17.25) możemy więc przepisać w postaci

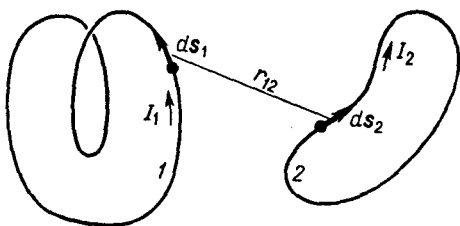
$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{M}_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.26)$$

Przypuśćmy teraz, że mamy przepuścić prąd przez cewkę 2 i pytamy, jaka SEM powstanie w cewce 1. Obliczylibyśmy pole magnetyczne, które jest wszędzie proporcjonalne do prądu I_2 . Strumień pola przecinającego cewkę 1 zależałby znów od kształtu i ustawienia cewek, ale byłby proporcjonalny do natężenia prądu I_2 . SEM w cewce 1 byłaby wobec tego znowu proporcjonalna do dI_2/dt . Możemy więc napisać:

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.27)$$

Obliczenie \mathfrak{M}_{12} byłoby trudniejsze niż obliczenie wykonane przed chwilą dla \mathfrak{M}_{21} . Nie będziemy teraz tego robić, gdyż pokażemy później w tym rozdziale, że \mathfrak{M}_{12} musi być równe \mathfrak{M}_{21} .

17.9. Dwie dowolne cewki mają indukcyjność wzajemną \mathfrak{M} , proporcjonalną do całki z $ds_1 \cdot ds_2 / r_{12}$.



Ponieważ pole dowolnej cewki jest proporcjonalne do natężenia prądu, który przez nią przepływa, zatem podobny wynik otrzymalibyśmy dla dwu dowolnych cewek. Równości (17.26) i (17.27) miałyby tę samą postać; jedynie stałe \mathfrak{M}_{21} i \mathfrak{M}_{12} byłyby inne. Wartości tych stałych zależą od kształtów cewek i od ich względnych położzeń.

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć indukcyjność wzajemną dwu dowolnych cewek, na przykład tych, które pokazujemy na rys. 17.9. Wiemy, że ogólne wyrażenie dla SEM w cew-

ce 1 może być zapisane następująco:

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d}{dt} \int_{(1)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da,$$

gdzie \mathbf{B} jest natężeniem pola magnetycznego, a całkę obliczamy po powierzchni ograniczonej obwodem 1. Widzieliśmy (§ 14-1), że taka całka powierzchniowa z \mathbf{B} wiąże się z całką krzywoliniową z potencjału wektorowego. W szczególności

$$\int_{(1)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1,$$

gdzie \mathbf{A} oznacza potencjał wektorowy, a $d\mathbf{s}_1$ jest elementem obwodu 1. Całkę krzywoliniową należy obliczać wzdłuż obwodu 1. SEM w cewce 1 wynosi więc

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1. \quad (17.28)$$

Załóżmy teraz, że potencjał wektorowy w obwodzie 1 pochodzi od prądów płynących w obwodzie 2. Możemy go wówczas zapisać w postaci całki wzdłuż obwodu 2:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_2 \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}}, \quad (17.29)$$

gdzie I_2 jest prądem w obwodzie 2, zaś r_{12} oznacza odległość od elementu obwodu $d\mathbf{s}_2$ do punktu na obwodzie 1, w którym obliczamy potencjał wektorowy (patrz rys. 17.9). Kombinując równania (17.28) i (17.29) możemy wyrazić SEM w obwodzie 1 w postaci całki podwójnej krzywoliniowej:

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \cdot d\mathbf{s}_1.$$

W wyrażeniu tym wszystkie całki obliczamy z prądów stacjonarnych. Jediną zmienną wielkością jest prąd I_2 , który nie zależy od zmiennych całkowania. Możemy go zatem wyciągnąć przed znak całki. SEM wynosi zatem

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

gdzie współczynnik \mathfrak{M}_{12} określony jest wzorem

$$\mathfrak{M}_{12} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1}{r_{12}}. \quad (17.30)$$

Widzimy stąd, że współczynnik \mathfrak{M}_{12} zależy jedynie od kształtu obwodów. Zależy on od swoistego średniego oddalenia dwu obwodów, przy czym średnia ta jest ważona w ten sposób, że z największą wagą wchodzi równoległe segmenty dwu cewek. Równością tą

możemy się posługiwać do obliczenia indukcyjności wzajemnej dwu obwodów dowolnego kształtu. Wynik ten pokazuje także, iż całka dla \mathfrak{M}_{12} jest identyczna z całką dla \mathfrak{M}_{21} . Pokazaliśmy wobec tego, że te dwa współczynniki są sobie równe. Dla układu, który składa się tylko z dwu cewek, współczynniki \mathfrak{M}_{12} i \mathfrak{M}_{21} często oznaczane są symbolem \mathfrak{M} bez żadnych wskaźników i nazywane *indukcyjnością wzajemną*:

$$\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}_{21} = \mathfrak{M}.$$

17-7. Samoindukcja

Omawiając indukowane SEM w dwu cewkach (rys. 17.8 lub 17.9) rozważaliśmy tylko taki przypadek, w którym prąd płynie w jednej albo w drugiej cewce. Jeżeli prądy płyną naraz w obu cewkach, strumień magnetyczny przecinający obie cewki będzie sumą dwu strumieni, które istnieją niezależnie od siebie, ponieważ do pól magnetycznych można stosować zasadę superpozycji. SEM w każdej z cewek będzie zatem proporcjonalna nie tylko do zmiany prądu w innej cewce, ale także do zmiany prądu w samej cewce. Tak więc całkowita SEM w cewce 2 powinna mieć postać*)

$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{M}_{21} \frac{dI_1}{dt} + \mathfrak{M}_{22} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.31)$$

Podobnie SEM w cewce 1 zależeć będzie nie tylko od zmiennego prądu w cewce 2, ale także od zmieniającego się prądu w tejże cewce:

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12} \frac{dI_2}{dt} + \mathfrak{M}_{11} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.32)$$

Współczynniki \mathfrak{M}_{22} i \mathfrak{M}_{11} są zawsze liczbami ujemnymi. Zwykle piszemy

$$\mathfrak{M}_{11} = -\mathcal{L}_1, \quad \mathfrak{M}_{22} = -\mathcal{L}_2, \quad (17.33)$$

gdzie \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_2 nazywane są *indukcyjnościami własnymi* dwu cewek.

Indukowana SEM wystąpi oczywiście nawet wtedy, gdy będziemy mieli do czynienia z jedną tylko cewką. Każda cewka sama przez się ma pewną indukcyjność własną. SEM będzie proporcjonalna do szybkości zmian prądu w tej cewce. Dla pojedynczej cewki zwykle przyjmuje się umowę, że SEM i prąd uważamy za dodatnie, jeżeli skierowane są one zgodnie. Przy takiej umowie możemy napisać wyrażenie dla SEM pojedynczej cewki w następującej postaci:

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L} \frac{dI}{dt}. \quad (17.34)$$

Znak minus wskazuje na to, że SEM i prąd są skierowane przeciwnie.

*) Znak współczynników \mathfrak{M}_{12} i \mathfrak{M}_{21} we wzorach (17.31) i (17.32) zależy od wyboru kierunku dodatniego prądu w dwu cewkach.

Ponieważ dowolna cewka ma pewną indukcyjność własną, która się sprzeciwia zmianom prądu, zatem prąd w cewce wykazuje swoistą bezwładność. I rzeczywiście, jeżeli chcemy zmienić prąd w cewce, musimy przezwyciężyć tę bezwładność łącząc cewkę z pewnym zewnętrznym źródłem prądu, takim jak bateria czy prądnica, jak pokazujemy na schemacie (rys. 17.10a). W obwodzie takim prąd I zależy od napięcia \mathcal{V} zgodnie z wzorem

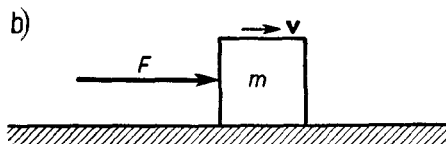
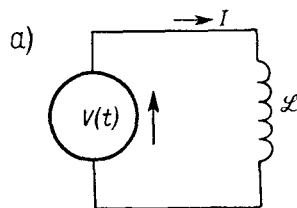
$$\mathcal{V} = \mathcal{L} \frac{dI}{dt}. \quad (17.35)$$

Równanie to ma taką samą postać jak newtonowskie prawo jednowymiarowego ruchu cząstki. Możemy wobec tego badać je korzystając z zasady, że „takie same równania mają takie same rozwiązania”. Tak więc jeżeli przyporządkujemy zewnętrzne napięcia \mathcal{V} zewnętrznej sile F , a prąd w cewce — prędkości v cząstki, to indukcyjność \mathcal{L} cewki odpowiadać będzie masie m cząstki^{*)} (patrz rys. 17.10b). Możemy wykonać następujące zestawienie odpowiadających sobie nawzajem wielkości:

Cząstka	Cewka
F (siła)	\mathcal{V} (różnica potencjałów)
v (prędkość)	I (natężenie prądu)
x (przesunięcie)	q (ładunek)
$F = m \frac{dv}{dt}$	$\mathcal{V} = \mathcal{L} \frac{dI}{dt}$
mv (pęd)	$\mathcal{L}I$
$\frac{1}{2}mv^2$ (energia kinetyczna)	$\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$ (energia magnetyczna)

17-8. Indukcyjność a energia magnetyczna

Rozszerzając analogię z poprzedniego paragrafu oczekiwaliśmy, że odpowiednio do wielkości mechanicznej — pędu $p = mv$, którego szybkość zmian równa jest przyłożonej sile, powinna istnieć też wielkość elektryczna $\mathcal{L}I$, której szybkość zmian wynosi \mathcal{V} . Nie mamy prawa oczywiście powiedzieć, że $\mathcal{L}I$ jest rzeczywistym pędem obwodu; i re-



17.10. a. Obwód ze źródłem napięcia i indukcyjnością. b. Analogiczny układ mechaniczny

^{*)} Nie jest to, nawiasem mówiąc, *jedyny* sposób ustalenia odpowiedniości między wielkościami elektrycznymi i mechanicznymi.

czywiście, nie jest. Cały obwód może być nieruchomy i nie mieć pędu. Wielkość $\mathcal{L}I$ jest analogiczna do wielkości mv jedynie w tym sensie, że spełnia odpowiednie równanie. W tym samym sensie energii kinetycznej $\frac{1}{2}mv^2$ odpowiada analogiczna wielkość $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$. Ale tu czeka nas niespodzianka. Ta wielkość, $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$, jest rzeczywiście energią w przypadku elektrycznym. Dzieje się tak dlatego, że moc wykonywanej pracy nad indukcyjnością wynosi $\mathcal{V}I$, a w układzie mechanicznym — Fv , co jest odpowiednią wielkością z naszego zestawienia. Zatem w przypadku energii wielkości te nie tylko sobie odpowiadają matematycznie, ale także mają ten sam sens fizyczny.

Przyjrzyjmy się temu bardziej dokładnie. Jak przekonaliśmy się poprzednio [patrz wzór (17.16)], moc pracy elektrycznej wykonywanej przez siły indukowane jest równa iloczynowi SEM przez prąd:

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I.$$

Zastępując w tym wyrażeniu \mathcal{E} wzorem (17.34) dostajemy

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{L}I \frac{dI}{dt}. \quad (17.36)$$

Całkując to równanie przekonujemy się, iż energia potrzebna do pobrania z zewnętrznego źródła, aby pokonać SEM w samoindukcyjności podczas powstawania prądu*) (która musi być równa zmagazynowanej energii, U), wynosi

$$-W = U = \frac{1}{2} \mathcal{L}I^2. \quad (17.37)$$

A zatem energia zmagazynowana w indukcyjności wynosi $\frac{1}{2} \mathcal{L}I^2$.

Stosując to samo rozumowanie do pary cewek, takich jak na rys. 17.8 czy 17.9, możemy wykazać, iż całkowita energia elektryczna układu wynosi

$$U = \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 I_1^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 I_2^2 - \mathfrak{M} I_1 I_2. \quad (17.38)$$

Jest tak, ponieważ startując ze stanu, w którym w obu cewkach były prądy równe zeru, moglibyśmy najpierw włączyć prąd I_1 w cewce 1, przyjmując wciąż $I_2 = 0$. Wykonana praca wynosi $\frac{1}{2} \mathcal{L}_1 I_1^2$. Ale teraz włączając prąd I_2 wykonujemy nie tylko pracę $\frac{1}{2} \mathcal{L}_2 I_2^2$ przeciw SEM w obwodzie 2, ale także dodatkową pracę $-\mathfrak{M} I_1 I_2$, która równa jest całce z SEM $\left[\mathfrak{M} \left(\frac{dI_2}{dt} \right) \right]$ w obwodzie 1 razy nowy stały prąd I_1 w tym obwodzie.

Przypuśćmy, że chcemy teraz obliczyć siłę działającą między dowolnymi dwiema cewkami z prądami I_1 i I_2 . W pierwszej chwili oczekivalibyśmy, że można by skorzystać z zasady prac wirtualnych, obliczając zmianę energii we wzorze (17.38). Musimy oczywiście pamiętać, że gdy zmienimy położenia względne cewek, jedyną zmienną wielkością jest indukcyjność wzajemna \mathfrak{M} . Moglibyśmy wobec tego napisać równanie wyrażające za-

*) Pomijamy tu wszystkie straty energii na wydzielenie ciepła w związku z oporem cewki. Straty te wymagają wydatkowania dodatkowej energii ze źródła, ale nie zmieniają energii, która przeznaczona jest na pokonanie SEM samoindukcji.

sadę prac wirtualnych w postaci:

$$-F \Delta x = \Delta U = -I_1 I_2 \Delta \mathfrak{M} \quad (\text{źle}).$$

Ale równanie to jest fałszywe, ponieważ, jak widzieliśmy poprzednio, uwzględnia ono jedynie zmianę energii dwu cewek, a nie uwzględnia zmiany energii źródeł, które podtrzymują prądy I_1 i I_2 , tak by miały one stałą wartość. Rozumiemy teraz, że te źródła muszą zasilać energię cewki działając przeciw SEM indukowanej, w miarę jak cewki te się poruszają. Jeżeli chcemy poprawnie zastosować zasadę prac wirtualnych, musimy włączyć także te energie. Jak widzieliśmy jednak, zadanie to możemy sobie uprościć i skorzystać z zasady prac wirtualnych, pamiętając, że całkowita energia jest równa (ze znakiem przeciwnym) temu, co nazwaliśmy energią mechaniczną U_{mech} . Możemy zatem napisać wyrażenie dla siły:

$$-F \Delta x = \Delta U_{\text{mech}} = -\Delta U. \quad (17.39)$$

Siła działająca między dwiema cewkami wynosi

$$F \Delta x = -I_1 I_2 \Delta \mathfrak{M}.$$

Równanie (17.38) dla energii układu dwu cewek można zastosować do wykazania interesującej nierówności, która istnieje między indukcyjnością wzajemną \mathfrak{M} oraz indukcyjnościami własnymi \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_2 dwu cewek. Jasne jest, że energia dwu cewek musi być dodatnia. Jeżeli zaczynamy od prądów zerowych w cewkach i powiększamy te prądy aż do pewnych wartości, znaczy to, że zwiększyliśmy energię całego układu o pewną wartość. Gdyby tak nie było, prądy spontanicznie narastałyby z uwolnieniem energii i przekazywaniem jej reszcie świata — co jest rzeczą nieprawdopodobną! Obecnie nasze równanie dla energii (17.38) możemy równie dobrze przepisać w następującej postaci:

$$U = \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 \left(I_1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{L}_1} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathcal{L}_1} \right) I_2^2. \quad (17.40)$$

Jest to po prostu pewne przekształcenie algebraiczne. Wielkość ta musi być zawsze dodatnia dla dowolnych wartości I_1 i I_2 . Między innymi musi być ona dodatnia wtedy, gdy I_2 przybiera szczególną wartość

$$I_2 = \frac{\mathcal{L}_1}{\mathfrak{M}} I_1. \quad (17.41)$$

Ale jeżeli I_2 ma tę wartość, to pierwszy wyraz w równaniu (17.40) znika. Jeżeli energia ma być dodatnia, to ostatni wyraz w równaniu (17.40) musi być większy od zera. Mamy więc warunek:

$$\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 > \mathfrak{M}^2.$$

Udowodniliśmy w ten sposób ogólny wynik, mówiący, że wartość bezwzględna indukcyjności wzajemnej \mathfrak{M} dwu dowolnych cewek musi być mniejsza od średniej geometrycznej z ich dwu indukcyjności własnych. (Współczynnik \mathfrak{M} może być dodatni lub ujemny, zależnie od przyjętej konwencji co do znaku przy I_1 i I_2 .)

$$|\mathfrak{M}| < \sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}. \quad (17.42)$$

Związek między współczynnikami \mathfrak{M} i indukcyjnościami własnymi zapisujemy zazwyczaj w postaci

$$\mathfrak{M} = k\sqrt{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}. \quad (17.43)$$

Stała k nosi nazwę współczynnika sprzężenia. Jeżeli większa część strumienia pochodzącego z jednej cewki przecina zwoje drugiej, to współczynnik ten jest prawie równy jedności; mówimy, że cewki są „sprzężone ściśle”. Jeżeli cewki są od siebie oddalone albo też zestawione w taki sposób, że występuje bardzo niewielkie wzajemne sprzężenie, to współczynnik sprzężenia jest bliski zera i indukcyjność wzajemna jest bardzo mała.

W celu obliczenia indukcyjności wzajemnej dwu cewek podaliśmy wzór (17.30), który zawiera podwójną całkę krzywoliniową wzdłuż obu obwodów. Moglibyśmy sądzić, że taki sam wzór można by też zastosować do obliczania indukcyjności własnej pojedynczej cewki, gdybyśmy oba całkowania wykonywali wzdłuż tej samej cewki. Tak jednak nie jest, gdyż całkując wzdłuż obu cewek napotkalibyśmy punkt, w którym mianownik r_{12} w wyrażeniu podcałkowym znikałby, co się dzieje wtedy, gdy dwa elementy liniowe znajdują się dokładnie w tym samym miejscu. Z powyższego wzoru wynikałoby wtedy, że indukcyjność własna jest nieskończona. Powodem jest to, że wzór ten stanowi przybliżenie, które jest słuszne tylko wtedy, gdy przekroje poprzeczne drutów w obu obwodach są małe w porównaniu z odległością od jednego obwodu do drugiego. Oczywiście, przybliżenie to nie jest poprawne w przypadku pojedynczej cewki. Jest prawdą, że indukcyjność własna cewki zmierza do nieskończoności logarytmicznie, gdy średnica przewodu maleje do zera.

Musimy zatem na zagadnienie obliczania indukcyjności własnej pojedynczej cewki spojrzeć inaczej. Należy wziąć pod uwagę rozkład prądów w przewodzie, ponieważ rozmiary tego przewodu stanowią ważny parametr. Powinniśmy zatem pytać nie o to, jaka jest indukcyjność „obwodu”, ale jaka jest indukcyjność *rozkładu* prądów. Być może, najłatwiej obliczyć tę indukcyjność korzystając z wyrażenia na energię magnetyczną. Obliczyliśmy poprzednio, w § 15-3, że energia magnetyczna wyraża się następująco przez rozkład prądów stacjonarnych:

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \, dV. \quad (17.44)$$

Jeżeli znamy rozkład gęstości prądu \mathbf{j} , możemy obliczyć potencjał wektorowy \mathbf{A} , a następnie obliczyć całkę (17.44), aby dostać wyrażenie na energię. Energia ta jest równa energii magnetycznej obwodu z indukcyjnością własną, $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$. Przyrównując te dwie wielkości dostajemy wyrażenie na indukcyjność:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{I^2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \, dV. \quad (17.45)$$

Oczywiście, oczekujemy takiego wyniku, który by wykazał, że indukcyjność własna zależy jedynie od kształtu obwodu, a nie od prądu I w tym obwodzie. Wzór (17.15) rzeczywiście prowadzi do takiego wyniku, ponieważ całka w tym równaniu jest proporcjonalna do kwadratu natężenia prądu — natężenie to pojawia się w wyrażeniu podcałkowym raz w wektorze \mathbf{j} i raz jeszcze w potencjale wektorowym \mathbf{A} . Całka ta po podzieleniu przez I^2 zależeć będzie od kształtu obwodu, ale nie od prądu I .

Zależność (17.44) dla energii rozkładu prądów może być zapisana w całkiem innej postaci, która niekiedy jest bardziej dogodna przy obliczeniach. Co więcej, jak zobaczymy potem, będzie to postać, która ma znaczenie także dlatego, iż jest ważna w jeszcze bardziej ogólnych przypadkach. W wyrażeniu na energię (17.44) zarówno wielkość \mathbf{A} , jak i \mathbf{j} możemy powiązać z polem \mathbf{B} , wobec czego można mieć nadzieję na utworzenie wyrażenia na energię posługując się jedynie pojęciem pola magnetycznego, tak jak mogliśmy to zrobić dla pola elektrycznego. Zaczynamy od zastąpienia \mathbf{j} wyrażeniem $\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B}$. Nie możemy zastąpić wielkości \mathbf{A} tak łatwo wielkością \mathbf{B} , gdyż wzoru $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ nie można odwrócić w celu wyrażenia \mathbf{A} poprzez \mathbf{B} . Mimo to jednak możemy napisać

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} dV. \quad (17.46)$$

Interesujące jest to, że z pewnymi zastrzeżeniami całkę tę możemy napisać w postaci:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \int \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV. \quad (17.47)$$

Aby to zobaczyć, napiszemy dokładniej typowy wyraz. Przypuśćmy, że bierzemy pod uwagę wyraz $(\nabla \times \mathbf{B})_z A_z$, który występuje w całce (17.46). Pisząc go w składowych dostajemy

$$\int \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) A_z dx dy dz.$$

(Istnieją oczywiście jeszcze dwie całki tego typu.) Całkujemy teraz pierwszy wyraz względem x przez części, tzn. piszemy

$$\int \frac{\partial B_y}{\partial x} A_z dx = B_y A_z - \int B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} dx.$$

Założmy teraz, że nasz układ, składający się z pól i źródeł, jest skończony, to znaczy, gdy oddalimy się do nieskończoności, wszystkie pola zanikają. W takim wypadku po obliczeniu wszystkich całek po całej przestrzeni wyraz $B_y A_z$ w granicach całkowania daje zero. Zostaje nam jedynie wyraz $B_y (\partial A_z / \partial x)$, który oczywiście stanowi część wyrażenia $B_y (\nabla \times \mathbf{A})_z$, a zatem także $\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$. Rozważając pozostałe wyrazy (jest ich 5) przekonujemy się, że wzór (17.47) jest rzeczywiście równoważny wyrażeniu (17.46).

Ale teraz możemy zastąpić iloczyn $\nabla \times \mathbf{A}$ wielkością \mathbf{B} , po czym dostajemy

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (17.48)$$

Wyraziliśmy więc energię pewnego układu magnetostaticznego wyłącznie przez pole magnetyczne. Wyrażenie to odpowiada ściśle wzorowi dla energii elektrostatycznej:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (17.49)$$

Jednym z powodów, dla których kładziemy taki nacisk na te dwa wzory, jest to, że niekiedy są one bardzo wygodne w zastosowaniach. Ważniejsze jednak jest to, że okazuje się, iż dla pól dynamicznych (gdy pola \mathbf{E} i \mathbf{B} zmieniają się w czasie) te dwa wyrażenia,

(17.48) i (17.49), pozostają w mocy, podczas gdy inne wzory, które podawaliśmy dla energii elektrycznej i magnetycznej, przestają być słuszne — są słuszne jedynie dla pól statycznych.

Jeżeli znamy pole magnetyczne pojedynczej cewki, możemy znaleźć indukcyjność własną przyrównując wyrażenie na energię (17.48) do $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$. Zobaczmy, jak to działa, obliczając indukcyjność własną długiego solenoidu. Widzieliśmy poprzednio, że pole magnetyczne wewnątrz solenoidu jest jednorodne, a na zewnątrz solenoidu znika. Wartość bezwzględna pola wewnętrznego wynosi $B = nI/\varepsilon_0 c^2$, gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości, a I jest prądem. Jeżeli promień cewki wynosi r , a jej długość L (przyjmujemy, że L jest bardzo duże, tak że $L \gg r$), objętość zawarta wewnątrz cewki wynosi $\pi r^2 L$. Energia magnetyczna wynosi zatem

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2 \cdot (\text{objętość}) = \frac{n^2 I^2}{2\varepsilon_0 c^2} \pi r^2 L,$$

co ma być równe $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$, czyli

$$\mathcal{L} = \frac{\pi r^2 n^2}{\varepsilon_0 c^2} L. \quad (17.50)$$

równania Maxwella

18-1. Równania Maxwella

W rozdziale tym powrócimy do rozważań nad pełnym układem czterech równań Maxwella, które przyjęliśmy za nasz punkt wyjścia w rozdz. 1. Jak dotąd, rozważaliśmy jedynie fragmenty równań Maxwella; czas teraz dodać do tych równań ostatnią część i złożyć je razem. Będziemy mieli wówczas zupełny i poprawny opis pól elektromagnetycznych, które mogą się dowolnie zmieniać w czasie. Cokolwiek powiemy w tym rozdziale, jest słuszne, a coś, co było powiedziane poprzednio, przestaje być słuszne, gdyby się znalazło w sprzeczności z tym, co powiemy teraz; nasze poprzednie rozważania dotyczyły bowiem pewnych szczególnych sytuacji, jak np. prądów stałych lub spoczywających ładunków. Choć za każdym razem, gdy pisaliśmy jakieś równanie, staraliśmy się wszędzie podkreślać, że nasze wnioski mają wartość ograniczoną, to jednak łatwo o tym było zapomnieć i zbyt dobrze przyswoić sobie fałszywe równania. Obecnie gotowi jesteśmy przedstawić całą prawdę, bez żadnych ograniczeń (albo prawie bez żadnych).

Pełny układ równań Maxwella zawiera tab. 18.1. Są one tu sformułowane słownie i przy użyciu symboli matematycznych. To, że sformułowania słowne są równoważne równaniom, powinno już być wiadome — czytelnik powinien umieć przechodzić od jednej formy do drugiej, i odwrotnie.

Pierwsze równanie — dywergencja \mathbf{E} jest równa gęstości ładunku dzielonej przez ϵ_0 — jest słuszne ogólnie. W dynamice, równie dobrze jak w statyce, prawo Gaussa jest zawsze prawdziwe. Strumień pola \mathbf{E} przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest proporcjonalny do zawartego wewnątrz niej ładunku. Trzecie równanie jest odpowiednim ogólnym prawem dla pól magnetycznych. Ponieważ nie ma ładunków magnetycznych, strumień pola \mathbf{B} przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest zawsze równy zeru. Drugie równanie orzeka, że rotacja \mathbf{E} wynosi $-\partial\mathbf{B}/\partial t$; jest to prawo Faradaya, które omawialiśmy w dwu ostatnich rozdziałach. Jest ono także ogólnie słuszne. Ostatnie równanie zawiera coś nowego. Po-

Tabela 18.1. Fizyka klasyczna

Równania Maxwella	
I. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(strumień pola \mathbf{E} przez powierzchnię zamkniętą) = (ładunek wewnątrz tej powierzchni)/ ϵ_0
II. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(całka krzywoliniowa z pola \mathbf{E} wzdłuż pewnej pętli) = = $-\frac{d}{dt}$ (strumień pola \mathbf{B} przez tę pętlę)
III. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(strumień pola \mathbf{B} przez powierzchnię zamkniętą) = 0.
IV. $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	c^2 (całka z pola \mathbf{B} po zamkniętej pętli) = (prąd przez tę pętlę)/ ϵ_0 + + $\frac{\partial}{\partial t}$ (strumień pola \mathbf{E} przez pętlę)
Zasada zachowania ładunku	
$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	(strumień prądu przez powierzchnię zamkniętą) = $-\frac{\partial}{\partial t}$ (ładunek wewnątrz tej powierzchni)
Wyrażenie na siłę	
$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	
Prawo ruchu	
$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}$, gdzie $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (prawo Newtona z modyfikacją Einsteina)	
Grawitacja	
$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$	

przednio poznaliśmy tylko jego część, która odpowiada prądom stałym. W tym wypadku mieliśmy rotację \mathbf{B} równą $\mathbf{j}/(\epsilon_0 c^2)$. Jednakże wzór ogólnie prawdziwy zawiera nowy składnik, który został odkryty przez Maxwella.

Do chwili ukazania się pracy Maxwella znanymi prawami elektryczności i magnetyzmu były prawa omawiane przez nas w rozdz. od 3 do 17. W szczególności równanie dla pola magnetycznego prądów stałych znane było tylko w postaci

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.1)$$

Maxwell rozpoczął swoje rozważania od zastanowienia się nad tymi właśnie znanymi prawami i nad wyrażeniem ich w postaci równań różniczkowych, tak jak my to zrobiliśmy powyżej. (Choć oznaczenia ∇ jeszcze wtedy nie wymyślono, głównie dzięki Maxwellowi stało się jasne znaczenie pewnych kombinacji pochodnych, które dziś nazywamy dywergencją i rotacją.) Zauważył on wtedy, że jest coś dziwnego w równaniu (18.1). Jeżeli obliczymy dywergencję z obu stron tego równania, to lewa strona da zero, gdyż dywergencja

z rotacji jest zawsze równa zeru. Wobec tego równanie to domaga się, aby dywergencja \mathbf{j} była także równa zeru. Ale jeżeli dywergencja \mathbf{j} jest równa zeru, to całkowity wypływ prądu z zamkniętej powierzchni równy jest także zeru.

Wypływ prądu z powierzchni zamkniętej wiąże się z ubytkiem ładunku wewnątrz tej powierzchni. Takie prawo z pewnością nie mogłoby być ogólnie słuszne, bo przecież wiemy, że ładunki mogą się przenosić z miejsca na miejsce. Równanie

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (18.2)$$

było w gruncie rzeczy niemal naszą definicją \mathbf{j} . Równanie to wyraża bardzo podstawową zasadę zachowania ładunku elektrycznego — wszelki przepływ ładunku musi brać się z pewnego źródła. Maxwell docenił tę trudność i zaproponował pewien sposób uniknięcia jej — przez dodanie wyrazu $\partial \mathbf{E} / \partial t$ po prawej stronie równania (18.1); dostał on w ten sposób czwarte równanie z tab. 18.1:

$$\text{IV.} \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

W czasach Maxwella nie było jeszcze zwyczaju przeprowadzać rozumowań w języku abstrakcyjnych pól. Maxwell rozważał swoje idee w języku pewnego modelu, w którym próżnia była jakby ciałem stałym sprężystym. Próbował on także wyjaśnić, jakie znaczenie ma jego nowe równanie w języku tego mechanicznego modelu. Jego teorię przyjmowano opornie, po pierwsze ze względu na używany przez niego model, a po drugie dlatego, że nie było dla tej teorii eksperymentalnego uzasadnienia. Dziś rozumiemy lepiej, że to, co się liczy, to są same równania, a nie model, którym posługiwał się Maxwell, aby je otrzymać. Możemy jedynie zapytać, czy równania są słuszne, czy nie. Na takie pytania odpowiada się wykonując doświadczenia, a niezliczona liczba doświadczeń potwierdziła równania Maxwella. Jeżeli odrzucimy rusztowanie, którym posłużył się Maxwell, aby uzyskać swoją teorię, stanie ona przed nami jako piękny gmach sam w sobie. Maxwell zebrał razem wszystkie prawa elektryczności i magnetyzmu i uczynił z nich jedną pełną i piękną teorię.

Pokażmy, że ów dodatkowy wyraz jest właśnie tym, co jest potrzebne, aby uchronić nas od wykrytej przez Maxwella trudności. Obliczając dywergencję z obu stron równania IV w tab. 18.1 musimy dostać dywergencję prawej strony równą zeru:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (18.3)$$

W drugim wyrazie kolejność pochodnych względem zmiennych przestrzennych i czasu nie jest istotna i możemy ją odwrócić, wobec czego można przepisać to równanie w postaci

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (18.4)$$

Ale pierwsze równanie Maxwella mówi nam, że dywergencja \mathbf{E} wynosi ρ / ϵ_0 . Wstawiając tę wartość do równania (18.4) dostajemy znów równanie (18.2), co jak wiemy, jest słuszne.

I odwrotnie, jeżeli przyjmiemy równania Maxwella — a czynimy to, gdyż nikt nigdy nie wykonał doświadczenia, które by dawało wynik z równaniami tymi niezgodny — musimy wywnioskować, że ładunek jest zawsze zachowany.

Prawa fizyki nie dają odpowiedzi na pytanie: „Co się stanie, jeżeli w tym oto punkcie będzie nagle stworzony jakiś ładunek — jakie zjawiska elektromagnetyczne temu będą towarzyszyć?” Nie można zaś dać takiej odpowiedzi, gdyż nasze równania mówią, że taki wypadek się nie zdarza. Gdyby się *zdarzał*, potrzebne by nam były nowe prawa, ale nie możemy powiedzieć jakie. Nie mieliśmy nigdy okazji zaobserwować, jak zachowywałby się świat bez zasady zachowania ładunku. Zgodnie z naszymi równaniami, jeżeli ktoś chce nagle umieścić ładunek w pewnym miejscu, musi go zabrać skądinąd. W tym wypadku możemy już powiedzieć, co się zdarzy.

Gdy dodaliśmy nowy wyraz do równania dla rotacji \mathbf{E} , przekonaliśmy się, że opisujemy w ten sposób nową obszerną klasę zjawisk. Zobaczmy, że mały dodatek wprowadzony przez Maxwella do równania dla rot \mathbf{B} ma także dalekosiężne konsekwencje. W rozdziale tym możemy zaledwie poruszyć kilka z nich.

18-2. Jaki sens ma nowy wyraz

Jako pierwszy nasz przykład rozważmy, co się zdarzy z kulistosymetrycznym rozkładem prądu. Wyobraźmy sobie małą kule pokrytą substancją promieniotwórczą. Substancja ta emituje trochę naładowanych cząstek. (Możemy też sobie wyobrazić dużą bryłę żelatyny, z wydrążoną w niej małą dziurą, do której środka wstrzyknęliśmy pewien ładunek, powoli z niej teraz wyciekający.) W każdym razie będziemy mieli prąd, który wszędzie

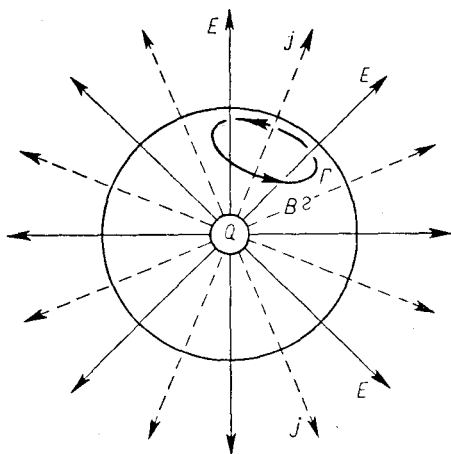
jest skierowany wzdłuż promienia na zewnątrz. Założymy, że ma on takie samo natężenie we wszystkich kierunkach.

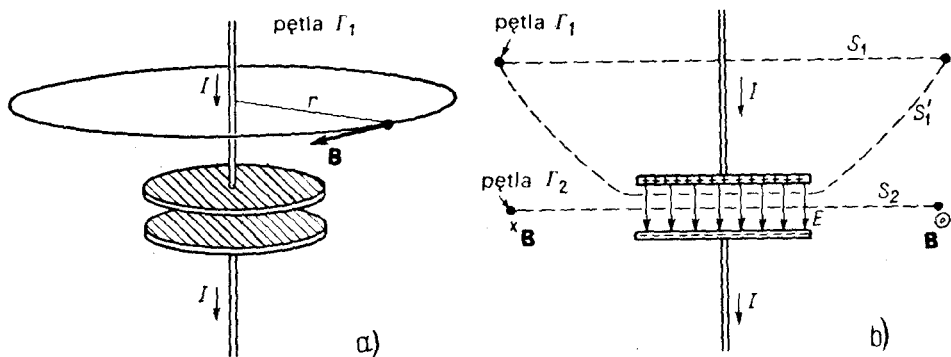
18.1. Jakie jest pole magnetyczne prądu o symetrii kulistej?

Niech ładunek całkowity wewnątrz kuli o promieniu r wynosi $Q(r)$. Jeżeli radialna gęstość prądu na powierzchni takiej kuli wynosi $\mathbf{j}(r)$, to wzór (18.2) domaga się, aby Q malało z szybkością

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r). \quad (18.5)$$

Zapytajmy teraz, jakie pole magnetyczne wytwarzają prądy w takim przypadku. Przypuśćmy, że narysowaliśmy pewną pętlę Γ na kuli o promieniu r , jak pokazano na rys. 18.1. Przez tę pętlę przepływa pewien prąd, wobec czego moglibyśmy oczekiwać wystąpienia pewnego pola magnetycznego krążącego w kierunku oznaczonym na rysunku.





18.2. Pole magnetyczne w pobliżu ładującego się kondensatora

Ale już mamy trudność. Bo jak pole B może mieć jakikolwiek określony kierunek na powierzchni kuli? Inny wybór pętli Γ pozwoliłby nam na stwierdzenie, że kierunek tego pola musi być dokładnie przeciwny do kierunku przedstawionego na rysunku. A więc jak może tu w ogóle występować jakieś krążenie B wokół prądów?

Ratuje nas równanie Maxwella. Krążenie B zależy nie tylko do całkowitego prądu płynącego przez pętlę Γ , ale także od szybkości zmian w czasie strumienia pola elektrycznego przez tę krzywą. Te dwa wyrazy muszą się skracać. Zobaczmy, czy tak jest.

Pole elektryczne na kuli o promieniu r musi wynosić $Q(r)/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ — tak długo, jak długo utrzymuje się kulistosymetryczny rozkład ładunku, co właśnie zakładamy. Jest ono radialne, a szybkość jego zmian wynosi

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (18.6)$$

Porównując to z równaniem (18.5) widzimy, że na kuli o dowolnym promieniu

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\epsilon_0}. \quad (18.7)$$

W równaniu IV (tab. 18.1) dwa wyrazy opisujące źródła pola znoszą się i rotacja B jest zawsze równa zero. W naszym przykładzie pole magnetyczne nie występuje.

Jako drugi przykład rozważmy pole magnetyczne przewodu używanego do naładowania kondensatora płaskiego (rys. 18.2). Jeżeli ładunek Q na płytach zmienia się w czasie (ale niezbyt szybko), to prąd w przewodach równy jest dQ/dt . Oczekiwalibyśmy, że prąd ten wytworzy pole magnetyczne, które otoczy przewód. Oczywiście, prąd w pobliżu przewodu musi wytworzyć zwykle pole magnetyczne — nie może ono zależeć od tego, którądy płynie prąd.

Przypuśćmy, że bierzemy pętlę Γ_1 , która jest okręgiem o promieniu r , jak pokazujemy na rysunku [część a)]. Całka krzywoliniowa z pola magnetycznego powinna być równa prądowi I , podzielonemu przez $\epsilon_0 c^2$. Mamy

$$2\pi rB = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.7)$$

Ten właśnie wynik dostalibyśmy dla prądu stałego, ale jest on poprawny także przy uwzględnieniu poprawki maxwellovskiej, ponieważ jeżeli rozważamy płaską powierzchnię zawartą wewnątrz koła, nie ma na niej pola elektrycznego (zakładając, że drut wykonany jest z bardzo dobrego przewodnika). Całka powierzchniowa z $\partial E/\partial t$ wynosi zero.

Załóżmy jednak, że obecnie krzywą Γ przesuwamy powoli w dół. Dostajemy zawsze ten sam wynik, dopóki nie zrównamy się z płytami kondensatora. Wtedy prąd I maleje do zera. Czy pole magnetyczne znika? Byłoby to bardzo dziwne. Popatrzmy, co mówi nam równanie Maxwella dla krzywej Γ_2 , która stanowi okrąg o promieniu r , położony w płaszczyźnie przechodzącej między płytami kondensatora (rys. 18.2b). Całka krzywoliniowa z pola \mathbf{B} wzdłuż tej krzywej musi być równa $2\pi rB$. To zaś ma być równe pochodnej cząsteczki ze strumienia \mathbf{E} przez płaską powierzchnię S_2 . Ten strumień pola \mathbf{E} znamy z prawa Gaussa: wynosi on $1/\epsilon_0$ razy ładunek Q na jednej z płyt kondensatora. Mamy więc

$$c^2 \cdot 2\pi rB = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right). \quad (18.8)$$

To bardzo dobrze. Jest to ten sam wynik, który znaleźliśmy jako wzór (18.8). Całkując zmienne pole elektryczne otrzymujemy to samo pole magnetyczne, co całkując prąd w drucie. Oczywiście, o tym będzie nam mówić równanie Maxwella. Łatwo dostrzec, że tak musi być zawsze, jeżeli zastosujemy nasze rozumowanie do dwu powierzchni S_1 i S'_1 ograniczonych tą samą krzywą Γ_1 z rys. 18.2b. Przez powierzchnię S_1 płynie prąd I , ale nie ma strumienia pola elektrycznego. Natomiast przez powierzchnię S'_1 nie ma prądu, ale występuje tu strumień pola elektrycznego, zmieniający się w czasie jak I/ϵ_0 . To samo pole \mathbf{B} otrzymujemy z równania IV, bez względu na to, którą powierzchnią się posłużymy.

Z naszych dotychczasowych rozważań nad nowym wyrazem maxwellovskim nie wynika jeszcze, jak wiele on dodaje do dawnych równań — można by sądzić, że po prostu ustala on równania w takiej postaci, jakiej już przedtem oczekiwaliśmy. Prawdą jest, że jeżeli równanie IV rozważamy *samo w sobie*, nie uzyskamy z niego niczego szczególnie nowego. Słowa „*samo w sobie*” mają tu jednak zasadnicze znaczenie. Mała zmiana wprowadzona przez Maxwella do równania IV prowadzi do wielu nowych i ważnych wniosków, gdy *połączy się je z innymi* równaniami. Zanim przejdziemy do tych kwestii, chcemy jeszcze powiedzieć coś więcej o tab. 18.1.

18-3. Całość fizyki klasycznej

W tabeli 18.1 zebraliśmy wszystko, co wiedziano na temat podstaw fizyki *klasycznej*, to jest tej fizyki, która znana była około roku 1905. Tu mamy ją w całości, w jednej tabeli. Posługując się równaniami, które są w niej zawarte, możemy zrozumieć cały zakres fizyki klasycznej.

Przede wszystkim mamy tu równania Maxwella — napisane zarówno w postaci rozwiniętej, jak i w zwężonej formie matematycznej. Następnie jest tam zasada zachowania

ładunku, która nawet została napisana w nawiasie, gdyż z chwilą kiedy mamy pełny układ równań Maxwella, możemy tę zasadę z nich wydedukować. Tak więc tabela jest nawet nieco za bardzo rozbudowana i zawiera elementy zbyteczne. Następnie napisaliśmy tam prawo określające siłę działającą na ładunki, ponieważ mając wszystkie pola elektryczne i magnetyczne, nie wiemy jeszcze, co one robią z ładunkami. Znając pola \mathbf{E} i \mathbf{B} możemy jednak znaleźć siłę działającą na jakiś obiekt obdarzony ładunkiem q i poruszający się z prędkością \mathbf{v} . Wreszcie znajomość siły też nam niczego nie daje, dopóki nie wiemy, co się dzieje, gdy siła ta działa na coś; potrzebne jest nam prawo ruchu, które orzeka, iż siła równa jest szybkości zmian pędu. (Pamiętacie? Była o tym mowa w tomie I.) Włączyliśmy tu nawet efekty relatywistyczne pisząc pęd w postaci $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

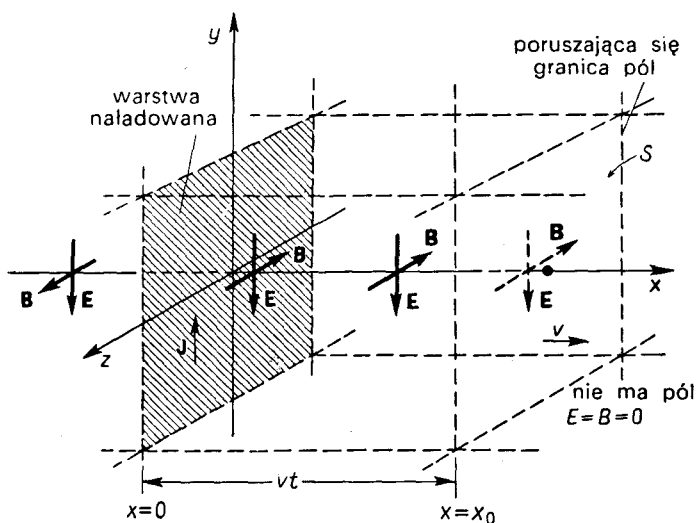
Jeżeli rzeczywiście chcemy zakończyć dzieło, powinniśmy dodać jeszcze jedno prawo — newtonowskie prawo ciężenia — a więc umieściliśmy je na końcu.

A zatem w małej tabeli zawarliśmy wszystkie podstawowe prawa fizyki klasycznej, zostało nawet nieco miejsca na napisanie ich w postaci słownej oraz na trochę zbytecznych powtórzeń. Jest to wielka chwila. Wspięliśmy się na wielki szczyt. Jesteśmy na wierzchołku K-2, niemal gotowi do zdobycia Mount Everest, którym jest mechanika kwantowa. Osiągnęliśmy wierzchołek działu wód Pacyfik-Atlantyk i teraz możemy schodzić na drugą stronę.

Próbowaliśmy głównie nauczyć się, jak trzeba rozumieć równania. Teraz, skoro mamy już wszystko zebrane przed oczami, będziemy zastanawiać się, co te równania znaczą — o czym nowym nam mówią, czego jeszcze nie wiedzieliśmy. Ciężko pracowaliśmy, aby osiągnąć ten punkt. Był to wielki wysiłek, ale teraz mamy przyjemny zjazd z góry, skoro widzimy wszystkie konsekwencje naszego wyczynu.

18-4. Podróżujące pole

A teraz do nowych wniosków. Wynikają one z połączenia wszystkich równań Maxwella. Przede wszystkim zobaczymy, co się dzieje w pewnej sytuacji, którą wybierzemy w szczególności prosty sposób. Zakładając, że wszystkie wielkości zależą tylko od jednej współrzędnej, dostaniemy zagadnienie jednowymiarowe. Sytuację tę ilustruje rys. 18.3. Mamy tu warstwę ładunku umieszczoną na płaszczyźnie yz . Warstwa ta najpierw spoczywa, a następnie nagle nabywa prędkość u w kierunku y i porusza się z tą stałą prędkością. Można by zastanawiać się nad tym, czy takie „nieskończone” przyspieszenie ma jakiś sens, ale to naprawdę nie ma żadnego znaczenia; po prostu wyobraźmy sobie, że uruchomienie warstwy ładunku z prędkością u następuje bardzo szybko. Tak więc uzyskujemy nagle prąd powierzchniowy o gęstości J (J jest prądem na jednostkę szerokości w kierunku z). Aby problem nie stracił na prostocie, założmy, że istnieje także nieruchoma warstwa ładunku przeciwnego znaku, nałożona na płaszczyznę yz , tak że nie ma żadnych efektów elektrostatycznych. Choć na rysunku pokazujemy to tylko, co się dzieje w skończonym obszarze, wyobraźmy sobie także, że warstwa ładunku rozciąga się do \pm nieskończoności wzdłuż osi y i z . Innymi słowy, mamy tu taką sytuację, w której nie ma prądu, a potem nagle pojawia się warstwa jednorodnego prądu. Co się wtedy dzieje?



18.3. Nieskończonej warstwie naładowanej nagle nadajemy pewną prędkość w kierunku równoległym do jej powierzchni. Powstają pola elektryczne i magnetyczne odrywające się od warstwy ze stałą szybkością.

Oczywiście, gdy mamy warstwę prądu płynącego w kierunku dodatnim osi y , występuje, jak wiemy, pole magnetyczne wytwarzane przez ten prąd, które skierowane jest w kierunku $-z$ dla $x > 0$, a w przeciwnym kierunku dla $x < 0$. Moglibyśmy obliczyć wartość pola B korzystając z tego, że całka krzywoliniowa z pola magnetycznego równa się prądowi podzielonemu przez $\epsilon_0 c^2$. Stwierdzilibyśmy że $B = J/(2\epsilon_0 c^2)$ (ponieważ prąd I w pasie o szerokości w wynosi Jw , a całka z B daje $2Bw$).

Wzór ten daje nam pole w pobliżu warstwy ładunku — dla małych x — ale ponieważ mamy przed oczami warstwę nieskończoną, oczekiwalibyśmy, że ten argument da nam wartość pola magnetycznego nawet dla większych wartości x . Jednakże to by znaczyło, że w chwili włączenia prądu pole magnetyczne zmienia się nagle od zera do jakiejś skończonej wartości wszędzie. Ale uwaga! Jeżeli pole magnetyczne gwałtownie się zmienia, wytwarza ogromne pola elektryczne. (Efekty elektryczne występują przy *każdej* zmianie pola magnetycznego.) Tak więc skoro poruszyliśmy warstwę ładunku, wytworzyliśmy zmienne pole magnetyczne, a wobec tego musiały powstać zmienne pola elektryczne. Skoro zaś wytworzyliśmy pole elektryczne, to musiało ono wzrastać od zera do jakiejś innej wartości. Wystąpi zatem jakieś $\partial E/\partial t$, które da swój wkład do produkcji pola magnetycznego na równi z prądem J . Tak więc oba równania Maxwella prowadzą do wniosku, że pola mieszają się i wobec tego musimy próbować rozwiązać problem dla wszystkich pól jednocześnie.

Przyglądając się samym tylko równaniom Maxwella nie widzimy od razu, jak takie rozwiązanie uzyskać. Pokażemy zatem najpierw, jaki jest wynik i wtedy sprawdzimy, że rzeczywiście spełnia on równania. Wynik jest następujący: pole B , które obliczyliśmy, jest rzeczywiście w pobliżu warstwy ładunku z prądem wytworzone od razu (dla małych x). Musi tak być, bo jeżeli zrobimy małą pętlę wokół warstwy ładunku, nie zostawiamy miejsca

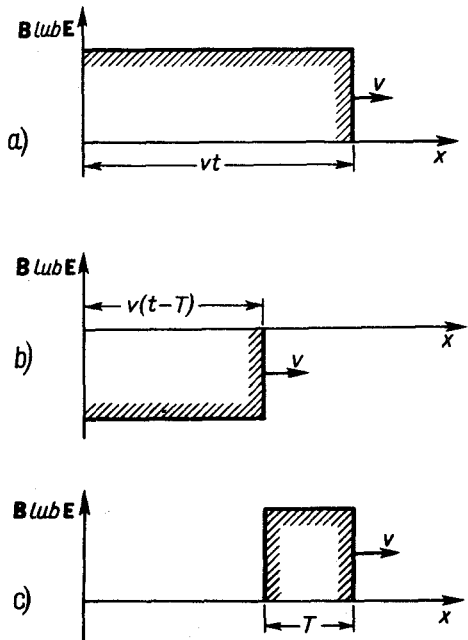
na przepływ żadnego strumienia elektrycznego przez tę pętlę. Ale nieco dalej — dla dużych x — pole \mathbf{B} jest początkowo równe zero. Ma ono tę wartość przez chwilę, a potem nagle się włącza. Mówiąc krótko, włączamy prąd i bezpośrednio potem włącza się pole magnetyczne, osiągając stałą wartość \mathbf{B} ; następnie ten efekt włączania się pola \mathbf{B} rozchodzi się z obszaru zajmowanego przez źródło. Po jakimś czasie wszędzie aż do pewnej wartości x mamy jednorodne pole \mathbf{B} , a dla x większych — pole $\mathbf{B} = 0$. Ze względu na symetrię rozchodzi się ono jednakowo w obie strony — ku plus i minus x .

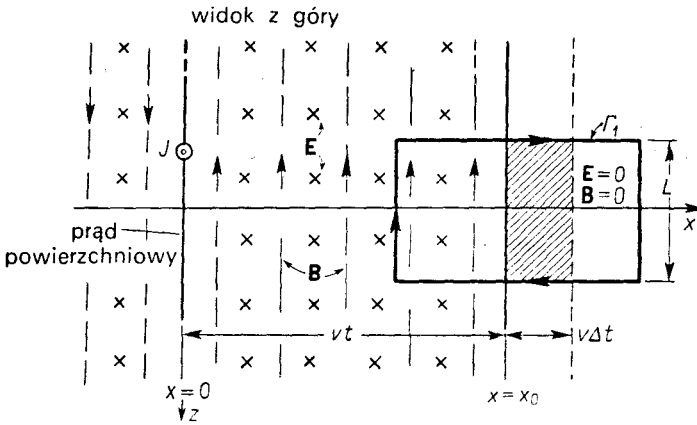
Pole \mathbf{E} czyni to samo. Przed chwilą $t = 0$ (kiedy to włączamy prąd) pole to jest wszędzie równe zero. Następnie, po czasie t , zarówno pole \mathbf{E} jak i \mathbf{B} są jednorodne aż do odległości $x = \pm vt$ i równe zero wszędzie dalej. Pola przesuwają się ku przodowi jak fala przyływu, z czołem poruszającym się ze stałą prędkością, która, jak się okaże, wynosi c , ale na chwilę oznaczmy ją v . Wykres zależności wartości \mathbf{E} i \mathbf{B} od x w chwili t pokazujemy na rys. 18.4a. Spoglądając znowu na rys. 18.3 widzimy, że w chwili t obszar pomiędzy $x = \pm vt$ „wypełniony” jest polami, które się jeszcze nie wydostały na zewnątrz. Jeszcze raz podkreślamy, że zakładamy, iż nasze prądy powierzchniowe, a wobec tego także pola \mathbf{E} i \mathbf{B} rozciągają się nieskończenie daleko w kierunkach y i z . (Ponieważ nie możemy narysować nieskończonej warstwy ładunku, pokazujemy to tylko, co się dzieje w obszarze skończonym.)

Chcemy teraz zbadać ilościowo, co się stało. Aby to zrobić, przyjrzyjmy się dwu rysunkom w przekroju, przedstawiającym widok z góry (patrząc wzdłuż osi y , jak przedstawia rys. 18.5) oraz widok z boku (patrząc wzdłuż osi z , jak pokazuje rys. 18.6). Zaczniemy od obejrzenia tego właśnie widoku z boku. Widzimy naładowaną warstwę ładunku poruszającą się w górę; pole magnetyczne skierowane jest do płaszczyzny rysunku dla $+x$, a od płaszczyzny rysunku dla $-x$, natomiast pole elektryczne skierowane jest wszędzie ku dołowi — aż do $x = \pm vt$.

Popatrzmy teraz, czy pola takie są zgodne z równaniami Maxwella. Narysujmy przede wszystkim jedną z tych pętli, którymi się posługiwaliśmy w celu obliczenia całki krzywoliniowej. Weźmy powiedzmy prostokąt Γ_2 przedstawiony na rys. 18.6. Zauważmy, że jeden bok tego prostokąta znajduje się w obszarze, w którym są pola, ale drugi — tam, dokąd pola jeszcze nie dotarły. Przez tę pętlę przepływa pewien strumień magnetyczny. Jeżeli się on zmienia, pojawi się pewna SEM wzdłuż konturu. Jeżeli czoło fali się porusza, mamy zmienny strumień magnetyczny, po-

18.4. a. Wartość pola \mathbf{B} (lub \mathbf{E}) jako funkcja x w chwili t po uruchomieniu naładowanej warstwy. b. Pola pochodzące od naładowanej warstwy uruchomionej w ujemnym kierunku osi y i dla $t = T$. c. Suma pól a) i b)





18.5. Widok z góry rys. 18.3

niemżeż obszar, w którym istnieje pole \mathbf{B} , stopniowo wzrasta z prędkością v . Strumień wewnątrz pętli Γ_2 wynosi B razy ta część pola powierzchni wewnątrz krzywej Γ_2 , w której istnieje pole magnetyczne. Szybkość zmian strumienia, skoro pole \mathbf{B} jest stałe, równa jest szybkości zmiany owego pola powierzchni. Ale to łatwo obliczyć. Jeżeli szerokość prostokąta wynosi L , to pole powierzchni, w której istnieje już pole magnetyczne \mathbf{B} , zmienia się w ciągu czasu Δt o $Lv \Delta t$ (patrz rys. 18.6). Szybkość zmiany strumienia wynosi zatem BLv . Zgodnie z prawem Faradaya powinno to być równe całce po obwodzie (a więc po krzywej Γ_2) z pola \mathbf{E} , co daje po prostu EL . Mamy więc równanie

$$E = vB. \quad (18.10)$$

Tak więc jeżeli stosunek pola \mathbf{E} do \mathbf{B} wynosi v , to pola przez nas wprowadzone spełniają równanie Faradaya.

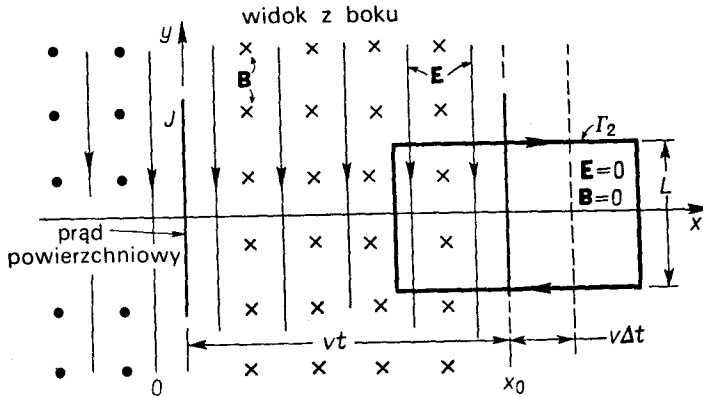
Ale nie jest to jedyne równanie; mamy jeszcze jeden związek między polami \mathbf{E} i \mathbf{B} :

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (18.11)$$

Aby skorzystać z tego równania, popatrzmy teraz na rysunek przedstawiający widok z góry (rys. 18.5). Widzieliśmy, że to równanie daje nam wartość pola \mathbf{B} w pobliżu warstwy z prądem. Dla dowolnej pętli narysowanej na zewnątrz warstwy, ale za czołem fali, rotacja pola \mathbf{B} znika i nie ma też żadnego prądu \mathbf{j} , który mógłby zmieniać pole \mathbf{E} , wobec czego równanie jest tam spełnione. Popatrzmy teraz, co się dzieje w przypadku, gdy krzywa Γ_1 przecina czoło fali, jak przedstawia rys. 18.5. Tu nie ma prądu, wobec czego możemy napisać równanie (18.11) w postaci całkowej jako

$$c^2 \oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{\text{wewnątrz } \Gamma_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (18.12)$$

Całka krzywoliniowa z pola \mathbf{B} wynosi po prostu BL . Szybkość zmiany strumienia \mathbf{E} wy-



18.6. Widok z boku rys. 18.3

nika jedynie z posuwania się czoła naprzód. Pole powierzchni wewnątrz Γ_1 , gdzie \mathbf{E} nie jest równe zero, wzrasta z szybkością vL . Prawa strona równania (18.12) wynosi zatem vLE . Równanie to daje

$$c^2 B = Ev. \quad (18.13)$$

Mamy więc rozwiązanie, w którym uzyskaliśmy stałe pole \mathbf{E} i stałe \mathbf{B} poza czołem, oba skierowane prostopadle do kierunku poruszania się czoła i prostopadle do siebie. Równania Maxwella określają stosunek pola E do B . Z równań (18.10) i (18.13) dostajemy

$$E = vB \quad \text{oraz} \quad E = \frac{c^2}{v} B.$$

Ale chwileczkę! Otrzymaliśmy dwa *różne* rozwiązania dla stosunku E/B . Czy takie pole może istnieć w rzeczywistości? Oczywiście, jest jedna tylko prędkość v , dla której oba te równania są jednocześnie spełnione, a mianowicie $v = c$. Czoło fali musi więc podróżować z prędkością c . Mamy tu przykład zjawiska, w którym zaburzenie elektryczne, pochodzące od prądu, przemieszcza się z pewną skończoną prędkością c .

Zapytajmy teraz, co się dzieje, jeżeli nagle zatrzymamy ruch naładowanej warstwy po krótkiej chwili T . Możemy to odtworzyć korzystając z zasady superpozycji. Mamy prąd, który był równy zero, a potem został nagle włączony. Znamy rozwiązanie dla tego przypadku. Obecnie chcemy do niego dodać inny układ pól. Bierzymy inną warstwę naładowaną i nagle uruchamiamy ją w przeciwnym kierunku, lecz z tą samą prędkością, a tylko w czasie o T późniejszym od chwili włączenia pierwszego prądu. Całkowity prąd dwu dodanych warstw jest najpierw równy zero, potem zostaje włączony na czas T , a potem znowu wyłączony, gdyż dwa prądy się znoszą. Mamy tu kwadratowy „impuls” prądu.

Nowy ujemny prąd wytwarza takie same pola, co i dodatni, a jedyną różnicą będzie to, że ich znaki zostaną odwrócone i oczywiście opóźnione o T . Czoło fali znów podróżuje z prędkością c . W chwili t osiągnęło ono odległość $x = \pm c(t-T)$, jak przedstawia rys. 18.4b. Mamy więc dwa „bloki” pól biegnących z prędkością c , jak na rys. 18.4a i b. Dodane pola

przedstawia część c tego rysunku. Te pola równe są zeru dla $x > ct$, stałe (z wartością obliczoną powyżej) dla x zawartych między $c(t-T)$ oraz ct , i znowu równe zeru dla $x < c(t-T)$.

Mówiąc krótko, mamy tu mały kawałek pola — blok o grubości cT — który opuścił warstwę z prądem i podróżuje w przestrzeni sam przez się. Pola zostały „oderwane”; przemieszczają się one swobodnie w przestrzeni, nie powiązane już z żadnym źródłem. Gąsienica przeobraziła się w motyla!

Jakże ta wiązka pól magnetycznego i elektrycznego może sama siebie podtrzymywać? Odpowiedź brzmi: przez połączone działanie prawa Faradaya, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, oraz nowy wyraz Maxwella, $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$. Nie mogą one przestać się podtrzymywać. Przypuśćmy, że znika pole magnetyczne. Wystąpiłoby zmienne pole magnetyczne, które by wytworzyło pole elektryczne. Gdyby to pole elektryczne chciało się oddalić, zmienne pole elektryczne wytworzyłoby znowu pole magnetyczne. Tak więc wskutek ciągłej wymiany ról — przez błyskawiczne przechodzenie od jednego pola do drugiego — muszą się one posuwać wiecznie. Nie mogą zaniknąć^{*)}. Podtrzymują się nawzajem w czymś w rodzaju tańca — pierwsze wytwarza drugie, drugie wytwarza pierwsze, przemieszczając się naprzód w przestrzeni.

18-5. Prędkość światła

Mamy więc falę, która opuszcza swe materialne źródło i wybiega z prędkością c ; prędkość ta jest równa prędkości światła. Ale cofnijmy się na chwilę. Z historycznego punktu widzenia, nie było wiadomo, że współczynnik c w równaniach Maxwella był także równy prędkości rozchodzenia się światła. To była po prostu stała w równaniach. Nazwalimy ją c od samego początku, gdyż wiedzieliśmy, czym się ona okaże. Nie sądziliśmy, że miałoby jakikolwiek sens uczenie się wzorów z inną stałą, a następnie powracanie do c i wstawianie go tam wszędzie, gdzie by to było potrzebne. Z punktu widzenia teorii elektryczności i magnetyzmu wystartowaliśmy jednak z dwiema stałymi, ϵ_0 i c^2 , które pojawiają się w równaniach elektrostatyki i magnetostatyki:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18.14)$$

oraz

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.15)$$

Jeżeli przyjmiemy dowolną definicję jednostki ładunku, możemy wyznaczyć doświadczalnie stałą ϵ_0 potrzebną w równaniu (18.14) — powiedzmy mierząc siłę działającą między

^{*)} Oczywiście, nie całkiem. Pola mogą być „pochłonięte”, jeżeli dostaną się do takiego obszaru, w którym są ładunki. Rozumiemy przez to, że mogą być wytworzone inne pola gdzieś w przestrzeni, które nakładają się na nasze pola i „znoszą” je wskutek destruktywnej interferencji [patrz rozdz. 31 tomu I (cz. 2)].

dwoma jednostkowymi spoczywającymi ładunkami posługując się prawem Coulomba. Musimy także wyznaczyć doświadczalnie stałą $\epsilon_0 c^2$, występującą w równaniu (18.15), co możemy zrobić na przykład mierząc siłę działającą między dwoma jednostkowymi prądami. (Prąd jednostkowy oznacza ładunek jednostkowy na sekundę.) Stosunek tych dwu stałych doświadczalnych wynosi dokładnie c^2 — która jest inną „stałą elektromagnetyczną”.

Zauważmy teraz, że ta stała c^2 jest zawsze taka sama, bez względu na to, co wybraliśmy na naszą jednostkę ładunku. Jeżeli weźmiemy dwa razy więcej „ładunku” — powiedzmy dwa razy tyle ładunków protonowych — do naszej jednostki ładunku, to ϵ_0 będzie musiało być cztery razy mniejsze. Gdy przepuścimy dwie takie jednostki ładunku dwoma przewodami, w każdym przewodzie będzie płynąć dwa razy tyle „ładunku” na sekundę, wobec czego siła działająca między tymi przewodami będzie cztery razy większa. Stałą $\epsilon_0 c^2$ należy więc zmniejszyć cztery razy. Jednakże stosunek $\epsilon_0 c^2 / \epsilon_0$ pozostaje niezmienny.

Tak więc po prostu wykonując doświadczenia nad ładunkami i prądami znaleźliśmy pewną liczbę c^2 , która, jak się okazuje, jest kwadratem prędkości posuwania się zaburzeń elektromagnetycznych. Z pomiarów statycznych — przez mierzenie sił działających między dwoma ładunkami i między dwoma prądami — przekonujemy się, że $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Gdy Maxwell po raz pierwszy wykonał te obliczenia, posługując się swymi równaniami, powiedział, że wiązki pól elektrycznych i magnetycznych powinny się rozchodzić z tą właśnie prędkością. Zauważył on także pewną tajemniczą zgodność — była to bowiem wielkość równa prędkości światła. „Nie możemy uniknąć wniosku — powiedział Maxwell — że światło polega na poprzecznych drganiach tego samego ośrodka, które jest powodem występowania zjawisk elektrycznych i magnetycznych.”

Tak Maxwell dokonał jednego z wielkich ujednocień w dziejach fizyki. Do jego czasów było światło, była też elektryczność i magnetyzm. Te dwie ostatnie klasy zjawisk zostały już połączone w wyniku badań doświadczalnych Faradaya, Oersteda i Ampère'a. A potem, nagle, światło przestało być „czymś innym”, a stało się elektrycznością i magnetyzmem w tej właśnie nowej postaci — małych fragmentów pola elektrycznego i magnetycznego, które poruszają się w przestrzeni na własną rękę.

Zwróciliśmy tu uwagę Czytelnika na pewne cechy charakterystyczne tego szczególnego rozwiązania, które są słuszne jednakże dla *dowolnej* fali elektromagnetycznej: a mianowicie to, że pole magnetyczne jest prostopadłe do kierunku ruchu czoła fali; że pole elektryczne, podobnie, jest do tego kierunku prostopadłe; i że dwa wektory \mathbf{E} i \mathbf{B} są prostopadłe do siebie nawzajem. Dalej, wartość pola elektrycznego \mathbf{E} jest równa c razy wartość pola magnetycznego \mathbf{B} . Te trzy fakty — że oba pola są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali, że pole \mathbf{B} jest prostopadłe do pola \mathbf{E} oraz że $E = cB$ — są ogólnie słuszne dla dowolnej fali elektromagnetycznej. Nasz przykład jest dobry — pokazuje on wszystkie główne cechy fal elektromagnetycznych.

18-6. Rozwiązywanie równań Maxwella; potencjały i równanie falowe

Chcielibyśmy teraz zająć się matematyką; chcemy napisać równania Maxwella w prostej postaci. Czytelnik mógłby sądzić, że je komplikujemy, ale jeśli będzie cierpliwy przez

krótką chwilę, przekona się, że nagle okaza się one prostsze. Choć do tego czasu każdy już głęboko się przywiązał do każdego z równań Maxwella z osobna, to jednak jest tam jeszcze wiele szczegółów, które należy ze sobą powiązać. Oto właśnie, co chcemy zrobić.

Zacznijmy od najprostszego równania : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Wiemy, że wynika z niego, iż \mathbf{B} jest rotacją jakiegoś nowego pola. Tak więc pisząc

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (18.16)$$

rozwiązaliśmy już jedno z równań Maxwella. (Przy okazji należy docenić fakt, że nadal jest słuszne, iż inny wektor \mathbf{A}' byłby tu równie dobry, pod warunkiem, że $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$, gdzie ψ jest dowolnym polem skalarnym, ponieważ rotacja $\nabla\psi$ jest równa zeru i \mathbf{B} nadal jest takie samo. Mówiliśmy już o tym poprzednio.)

Jako następne rozważmy prawo Faradaya, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, gdyż nie zawiera ono ani ładunków, ani prądów. Jeżeli zapiszemy pole \mathbf{B} jako $\nabla \times \mathbf{A}$ i zróżniczkujemy względem czasu, możemy prawo Faradaya nadać postać

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}.$$

Ponieważ możemy różniczkować najpierw albo względem czasu, albo względem współrzędnych przestrzennych, możemy też napisać to równanie jako

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (18.17)$$

Widzimy, że $\mathbf{E} + (\partial\mathbf{A}/\partial t)$ jest wektorem, którego rotacja równa jest zeru. Wektor ten jest zatem gradientem pewnego pola. Gdy rozważaliśmy elektrostatykę, mieliśmy $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ i wtedy zdecydowaliśmy, że samo pole \mathbf{E} jest gradientem jakiejś wielkości. Przyjęliśmy, że jest ono równe gradientowi potencjału $-\varphi$ (minus ze względów praktycznych). Zrobimy to samo dla wektora $\mathbf{E} + (\partial\mathbf{A}/\partial t)$ przyjmując

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi. \quad (18.18)$$

Posługujemy się tu tym samym symbolem φ , tak więc w przypadku elektrostycznym, gdzie nic się nie zmienia w czasie i wyraz $\partial\mathbf{A}/\partial t$ znika, pole \mathbf{E} będzie naszym starym $-\nabla\varphi$. Wobec tego równanie Faradaya możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (18.19)$$

Rozwiązaliśmy już dwa równania Maxwella i przekonaliśmy się, że aby opisać pola elektromagnetyczne \mathbf{E} i \mathbf{B} , potrzebujemy czterech funkcji potencjalnych: skalarnego potencjału φ oraz potencjału wektorowego \mathbf{A} , który oczywiście jest zespołem trzech funkcji.

Skoro teraz pole \mathbf{A} wyznacza część pola \mathbf{E} , równie dobrze jak \mathbf{B} , co się dzieje gdy prze-

chodzimy od \mathbf{A} do $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$? W ogólnym wypadku pole \mathbf{E} zmieniłoby się, gdybyśmy nie zastosowali specjalnych środków ostrożności. Możemy jednak nadal pozwolić na takie zmiany \mathbf{A} bez naruszania pól \mathbf{E} i \mathbf{B} , tzn. bez zmiany fizyki — jeżeli zawsze zmieniamy łącznie \mathbf{A} i φ zgodnie z zasadą

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (18.20)$$

Wtedy ani pole \mathbf{B} , ani \mathbf{E} , uzyskane z równania (18.19), nie zmienia się.

Poprzednio wybraliśmy warunek $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, który nieco upraszczał równania statyki. Nie będziemy teraz tego robić; chcemy dokonać innego wyboru. Ale zaczekamy trochę, zanim powiemy, jaki to jest wybór, gdyż wtedy stanie się jasne, jakimi motywami się kierujemy.

Wróćmy teraz do dwu pozostałych równań Maxwella, które nam dają związki między potencjałami i źródłami ρ i \mathbf{j} . Jeżeli uda nam się znaleźć równanie określające potencjały \mathbf{A} i φ na podstawie ρ i \mathbf{j} , możemy zawsze dostać \mathbf{E} i \mathbf{B} z równań (18.16) i (18.19), będą one więc inną postacią równań Maxwella.

Zacniemy od podstawienia równania (18.19) do wzoru $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$; dostajemy wtedy

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

co możemy także przepisać jako

$$-\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.21)$$

Jest to jedno z równań wiążących φ i \mathbf{A} ze źródłami.

Nasze ostatnie równanie będzie najbardziej skomplikowane. Zacniemy od przepisania czwartego równania Maxwella w postaci

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}$$

i następnie podstawimy tam pola \mathbf{E} i \mathbf{B} wyrażone przez potencjały, przy wyzyskaniu wzorów (18.16) i (18.19):

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}.$$

Pierwszy wyraz możemy przepisać na mocy tożsamości algebraicznej $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, a wtedy

$$-c^2 \nabla^2 \mathbf{A} + c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (18.22)$$

To nie jest bardzo proste!

Na szczęście możemy teraz skorzystać ze swobody, którą sobie pozostawiliśmy, aby wybrać dowolnie dywergencję \mathbf{A} . To, co chcielibyśmy osiągnąć, to tak dobrać ów warunek,

aby równania dla \mathbf{A} i φ rozdzieliły się, ale miały tę samą postać. Możemy tego dokonać przyjmując^{*)}

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (18.23)$$

Widzimy, że teraz dwa środkowe wyrazy w \mathbf{A} i φ we wzorze (18.22) znoszą się, i że równanie znacznie się upraszcza:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}. \quad (18.24)$$

A nasze równanie dla φ — wzór (18.21) — przybiera tę samą postać:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (18.25)$$

Co za piękny układ równań! Są one piękne po pierwsze dlatego, że zostały ładnie rozdzielone — z gęstością ładunku wiąże się potencjał skalarny φ , z prądem zaś — potencjał wektorowy \mathbf{A} . Dalej, chociaż lewa strona wygląda trochę zabawnie — laplasjan razem z wyrazem $(\partial/\partial t)^2$ — gdy ją rozpiszemy, będzie miała postać

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (18.26)$$

i widać, że ma ona ładną symetrię względem x, y, z, t , przy czym czynnik $-1/c^2$ jest tu konieczny, ponieważ czas i przestrzeń *różnią się*; mają odmienne jednostki.

Równania Maxwella doprowadziły nas do równań nowego rodzaju dla potencjałów \mathbf{A} i φ , ale mają one matematycznie tę samą postać dla wszystkich czterech funkcji: φ, A_x, A_y, A_z . Gdy raz nauczymy się, jak te równania rozwiązywać, możemy dostać \mathbf{B} i \mathbf{E} z wyrażań $\nabla \times \mathbf{A}$ oraz $-\nabla \varphi - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$. Mamy tu inną postać praw elektromagnetyzmu, dokładnie równoważną równaniom Maxwella, a w wielu wypadkach znacznie prostszą w praktyce.

W gruncie rzeczy rozwiązywaliśmy już raz równanie bardzo podobne do równania (18.26). Badając dźwięk [rozd. 47 tomu I (cz. 2)] otrzymaliśmy równanie w postaci

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

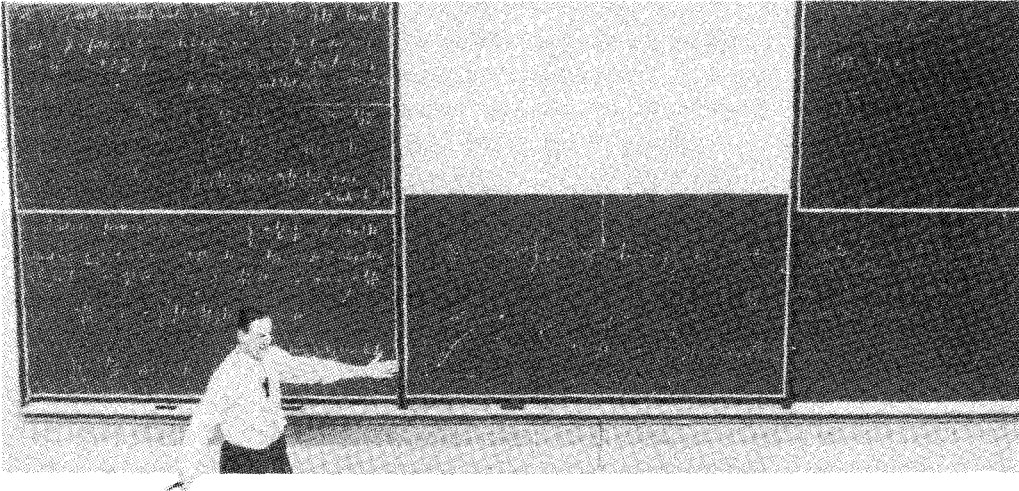
i widzieliśmy, że opisuje ono rozchodzenie się fal w kierunku osi x z prędkością c . Równanie (18.26) jest odpowiednim równaniem falowym w przestrzeni trójwymiarowej. Tak więc w obszarach, w których nie ma żadnych ładunków ani prądów, rozwiązaniami tych równań *nie* są potencjały φ i \mathbf{A} równe zeru. (Choć, istotnie, jest to jedno z możliwych rozwiązań.) Istnieją rozwiązania zawierające pewien zespół potencjałów φ i \mathbf{A} zmiennych

^{*)} Wybór wartości $\nabla \cdot \mathbf{A}$ nosi nazwę „wyboru cechowania”. Zmiana \mathbf{A} przez dodanie $\nabla \varphi$ — to „transformacja cechowania”. Warunek zapisany wzorem (18.23) nosi nazwę „cechowania lorentzowskiego”.

w czasie, ale zawsze poruszających się z prędkością c . Pola podróżują w próżni tak, jak w naszym przykładzie omówionym na początku tego rozdziału.

Nowy wyraz Maxwella w równaniu IV umożliwił nam napisanie równań pola przy użyciu wielkości \mathbf{A} i φ w postaci prostej oraz uwidaczniającej od razu, że istnieje coś takiego jak fale elektromagnetyczne. Ze względów praktycznych nadal często dogodnie będzie posługiwać się pierwotnymi równaniami dla \mathbf{E} i \mathbf{B} . Ale znajdują się one po drugiej stronie góry, na którą już się wspięliśmy. Jesteśmy teraz gotowi do przekroczenia grzbietu i przejścia na drugą stronę szczytu. Wszystko wyglądać będzie inaczej — przygotowani jesteśmy na nowe i piękne widoki.

zasada najmniejszego działania



Wykład specjalny*)

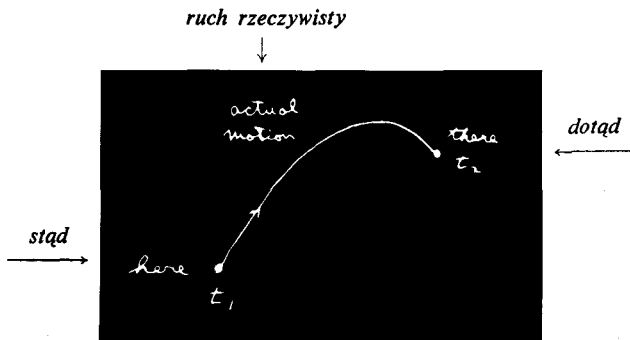
Gdy byłem w szkole średniej, mój nauczyciel fizyki — nazwisko jego brzmiało Bader — zawołał mnie pewnego dnia po lekcji fizyki i powiedział: „Wyglądasz na znudzonego. Chcę Ci powiedzieć coś ciekawego”. I wtedy powiedział mi coś takiego, co wydało mi się

*) Następne rozdziały nie zależą od materiału tego specjalnego wykładu — jego celem jest dostarczenie „rozrywki”.

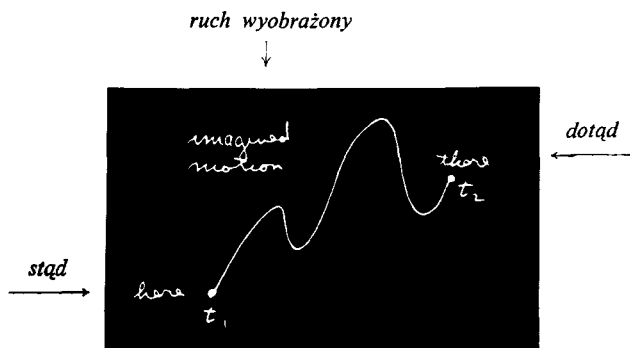
[Jest to prawie dosłowny tekst Feynmana; również rysunki są oryginalnymi rysunkami autora. (Przyp. red. wyd. polskiego)].

absolutnie fascynujące i od tego czasu zawsze mi się takim wydaje. Za każdym razem, gdy napotykam to zagadnienie, pracuję nad nim. I rzeczywiście, gdy zabrałem się do przygotowywania tego wykładu stwierdziłem, że znowu zacząłem się nad nim zastanawiać. Zamiast zająć się przygotowaniem materiału do wykładu, zająłem się nowym problemem. Tym przedmiotem mego zainteresowania jest zasada najmniejszego działania.

Pan Bader powiedział mi co następuje: „Przypuśćmy, że masz cząstkę (np. w polu grawitacyjnym), która gdzieś zaczyna swój ruch i przemieszcza się do pewnego innego punktu ruchem swobodnym — rzucasz ją, a ona się wznosi i opada.



Przebiega ona ze swego początkowego położenia do miejsca, w którym ma się znaleźć na końcu, w ciągu pewnego czasu. A teraz spróbuj wziąć pod uwagę inny ruch. Przypuśćmy, że ciało, aby się dostać »stąd« »dotąd«, zakreśla następującą drogę:

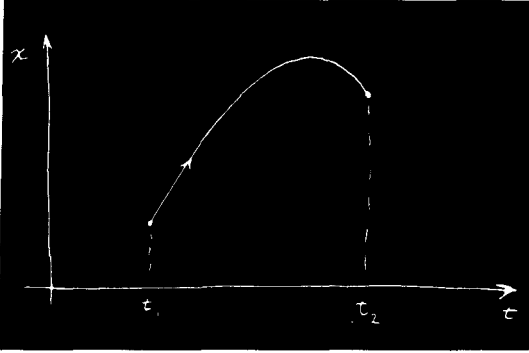


ale dobiega do jej końca dokładnie w tej samej chwili”. „Wtedy — powiedział mi — jeżeli obliczysz energię kinetyczną w każdym punkcie drogi, odejmiesz od niej energię potencjalną i scałkujesz po czasie od chwili startu do końca, przekonasz się, że liczba, którą otrzymasz, będzie *większa* niż liczba, którą byś dostał dla ruchu rzeczywistego.”

„Innymi słowy, prawa Newtona mogłyby być sformułowane nie w postaci $F = ma$, ale tak: średnia energia kinetyczna minus średnia energia potencjalna jest możliwie najmniejsza na drodze dowolnego obiektu biegnącego z jednego punktu do innego”.

„Zilustruję Ci trochę lepiej, co to znaczy. Weźmy przypadek pola grawitacyjnego. Wówczas gdy cząstka przebiega drogę $x(t)$ (ograniczmy się na chwilę do ruchu jednowymiarowego: wybieramy tory, które wznoszą się i opadają, ale nie odchylają na bok),

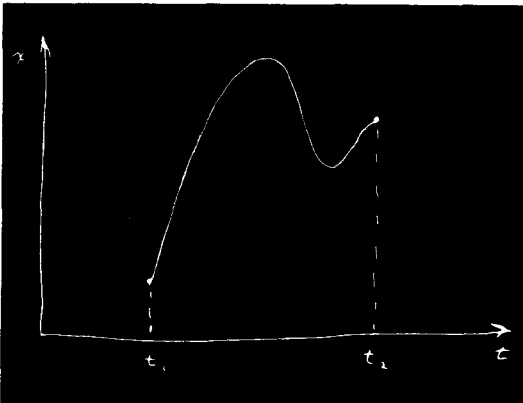
gdzie x jest wysokością nad poziomem ziemi, energia kinetyczna wynosi $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$, energia potencjalna zaś jest, w dowolnej chwili, równa mgx . Weźmy teraz różnicę energii kinetycznej i energii potencjalnej, obliczoną w każdej chwili w czasie trwania ruchu i scałkujmy po czasie od chwili początkowej do końcowej. Przypuśćmy, że chwilą początkową jest t_1 , a końcową — t_2 , i że zaczynamy od pewnej wysokości nad ziemią i kończymy w jakimś innym określonym punkcie.”



„Wówczas otrzymamy całkę:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt.$$

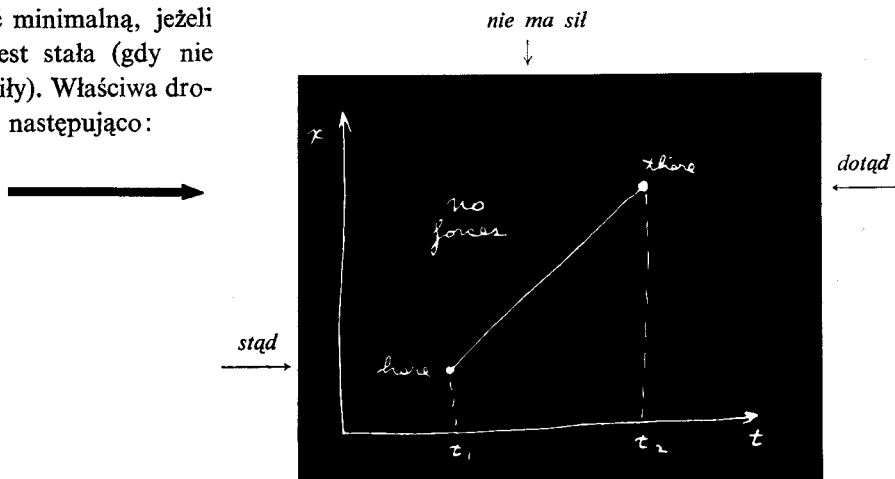
Ruch rzeczywisty przedstawia pewną krzywą — jest to parabola, jeżeli wykreślimy ją w funkcji czasu — i na tej krzywej całka ma określoną wartość. Ale mogliśmy sobie wyobrazić jakiś inny ruch, w którym ciało posunęło się bardzo wysoko, a potem w jakiś szczególny sposób opadło.”



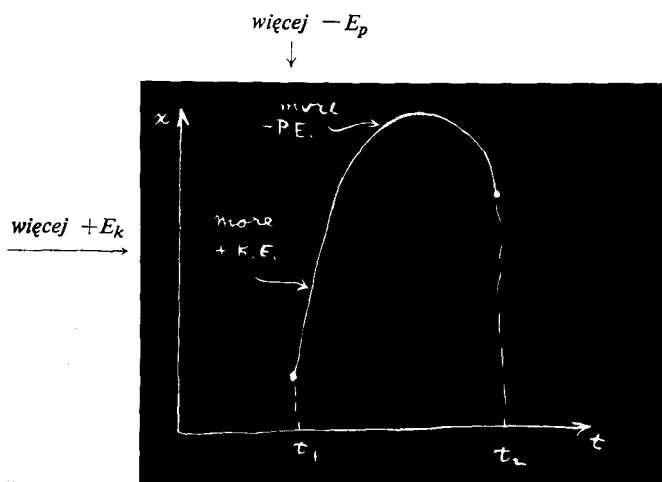
„Możemy obliczyć różnicę energii kinetycznej i energii potencjalnej i scałkować po takiej drodze... albo po jakiejś jeszcze innej, wybranej przez nas. Cud polega na tym, że rzeczywista droga jest tą, na której nasza całka ma wartość najmniejszą”.

„Sprawdźmy tę zasadę. Przede wszystkim przypuśćmy, że bierzemy przypadek cząstki swobodnej, dla której energia potencjalna w ogóle znika. Wtedy nasza reguła powiada, że idąc z jednego punktu do drugiego w przeciągu danego czasu musimy uzyskać minimalną wartość całki z energii kinetycznej, a więc cząstka musi się poruszać ruchem jednostajnym. (Wiemy, że jest to poprawna odpowiedź — ruch musi być jednostajny prostopoliniowy.) Dlaczego? Ponieważ gdyby cząstka poruszała się po jakiejś innej drodze, prędkości byłyby czasem mniejsze, a czasem większe od średniej. Średnia prędkość jest zaś taka sama w każdym wypadku, ponieważ ciało ma się dostać »stąd-dotąd« w określonym czasie.”

„Weźmy przykład. Powiedzmy, że zadanie Twoje polega na wyruszeniu z domu i przybyciu do szkoły samochodem w ciągu danego czasu. Możesz zadanie to wykonać na wiele sposobów: możesz z początku przyspieszać jak szalony, a zwalniać i hamować przy końcu; możesz jechać ze stałą prędkością; możesz wreszcie jechać trochę do tyłu, a potem do przodu i tak dalej. Oczywiście, średnia prędkość musi być równa całkowitej odległości podzielonej przez czas, w którym została ona przebyta. Ale jadąc inaczej niż ze stałą prędkością jedziesz czasami za szybko, a czasami za wolno. Jak wiemy, średni kwadrat wielkości, której wartość waha się wokół pewnej średniej, jest zawsze większy od kwadratu średniej. Tak więc wartość całki z energii kinetycznej byłaby zawsze większa, gdyby prędkość była zmieniana, niż wtedy, gdyby była stała. Widzisz więc, że całka ma wartość minimalną, jeżeli prędkość jest stała (gdy nie występują siły). Właściwa droga wygląda następująco:



„Ciało podrzucone w polu grawitacyjnym najpierw wznosi się szybciej, a potem zwalnia. Dzieje się tak dlatego, że jest tu także energia potencjalna, a my musimy mieć najmniejszą *średnią wartość* energii kinetycznej mniej energia potencjalna. Ponieważ energia potencjalna wzrasta, gdy się wznosimy, otrzymamy mniejszą *różnicę* energii kinetycznej i potencjalnej, jeżeli dostaniemy się wyżej tak szybko, jak tylko można, tam gdzie energia potencjalna jest większa. Wtedy możemy odjąć energię potencjalną od kinetycznej



i dostać niższą średnią. Tak więc lepiej jest wybrać taką drogę, która się wznosi i daje duży wkład ujemny pochodzący od energii potencjalnej.”

„Z drugiej strony, nie możesz się wznosić zbyt szybko albo zbyt wysoko, gdyż wtedy miałbyś za duży dodatni wkład pochodzący od energii kinetycznej — musisz poruszać się bardzo szybko, aby przebyć całą drogę ku górze i znowu zejść na dół w ustalonym czasie. Nie chcesz zająć zbyt wysoko, ale tylko w sam raz. Tak więc okazuje się, że rozwiązanie polega na swojego rodzaju zbilansowaniu — próbujemy dostać więcej energii potencjalnej, ale możliwie najmniejszym kosztem dodatkowej energii kinetycznej. Chcemy bowiem, aby ich różnica była tak mała, jak tylko można.”

Oto wszystko, co mi powiedział mój nauczyciel, ponieważ był bardzo dobrym nauczycielem i wiedział, kiedy należy przestać mówić. Ale ja nie wiem, kiedy przestać. Tak więc zamiast pozostawić to jako pewną interesującą uwagę, zamierzam was przerazić i napęłnić niesmakiem, pokazując, jak życie bywa skomplikowane. Zagadnienie z matematycznego punktu widzenia jest czymś nowym i trudnym. Mamy tu pewną wielkość, którą nazywamy *działaniem*, S . Jest to energia kinetyczna (E_k) minus energia potencjalna (E_p), scałkowane po czasie:

$$\text{działanie} = S = \int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_p) dt.$$

Pamiętamy, że E_p i E_k są funkcjami czasu. Dla każdego możliwego toru dostajemy różną liczbę dla tego działania. Naszym problemem matematycznym jest znalezienie, wzdłuż jakiej krzywej liczba ta jest najmniejsza.

Powiecie: „O, to jest po prostu zwykłe zagadnienie minimów i maksimów w rachunku różniczkowym. Obliczamy działanie i po prostu różniczkujemy je, aby dostać minimum”.

Ale miejcie się na baczności. Zwykle mamy do czynienia z funkcją pewnej zmiennej i musimy znaleźć wartość tej *zmiennej*, dla której funkcja jest największa lub najmniejsza. Mamy np. pręt, który został nagrany w środku i ciepło rozchodzi się dookoła. W każdym

punkcie pręta mamy jakąś temperaturę i przypuśćmy, że mamy znaleźć miejsce, w którym temperatura jest największa. Ale teraz dla *każdej drogi w przestrzeni* mamy pewną liczbę — a więc jest to całkiem inne zagadnienie — i musimy znaleźć taką *drogę w przestrzeni*, na której liczba ta jest najmniejsza. Jest to już całkiem inna gałąź matematyki. Nie jest to zwykły rachunek różniczkowy. Nazywamy ją *rachunkiem wariacyjnym*.

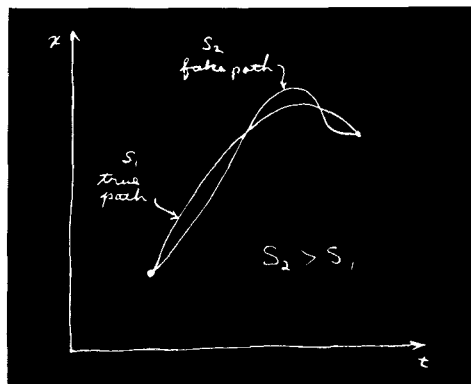
Jest wiele zagadnień tego rodzaju, którymi zajmuje się ta gałąź matematyki. Tak na przykład okrąg zwykle jest definiowany jako miejsce geometryczne punktów jednakowo oddalonych od pewnego ustalonego punktu. Istnieje jednak inna definicja okręgu: okrąg jest to taka krzywa o *danej długości*, która otacza możliwie największą powierzchnię. Każda inna krzywa o tej samej długości obejmuje mniejszą powierzchnię niż okrąg. Tak więc jeżeli postawimy zagadnienie: znaleźć krzywą, która przy ustalonej długości obejmuje największą powierzchnię, będziemy mieli zagadnienie rachunku wariacyjnego — a nie tego rodzaju rachunku, do którego przywykliśmy.

A więc obliczmy drogę obiektu. Oto w jaki sposób możemy to zrobić. Idea polega na tym, że wyobrażamy sobie, że istnieje jakaś rzeczywista droga i że każda inna droga narysowana przez nas nie jest właściwa, tak że jeżeli wzdłuż niej obliczymy działanie, to dostaniemy wartość większą niż na drodze rzeczywistej.



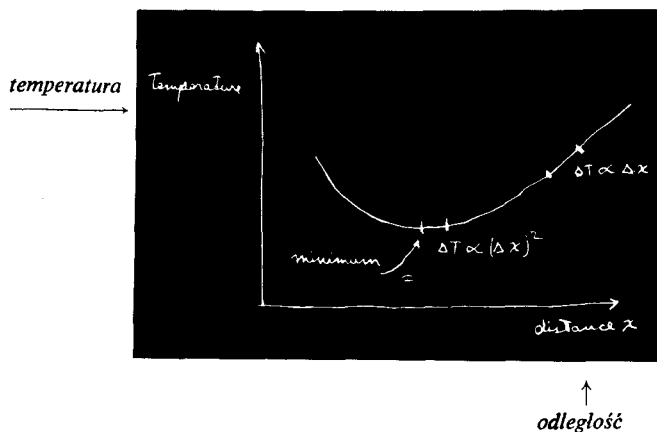
droga rzeczywista S_1

droga niewłaściwa S_2



Zagadnienie polega na znalezieniu rzeczywistej drogi. Gdzież ona jest? Jednym z możliwych sposobów jest oczywiście obliczanie działania dla milionów, milionów dróg i sprawdzanie, kiedy jest ono najmniejsze. Znalazłszy najmniejsze, mamy też szukaną drogę rzeczywistą.

Można zrobić i tak. Ale można też zrobić coś lepszego. Kiedy mamy wielkość osiągnącą minimum, np. taką zwykłą funkcję jak temperatura, jedną z właściwości minimum jest to, że jeżeli odchyłimy się od minimum o wielkość małą *pierwszego* rzędu, to funkcja odchyli się od swej minimalnej wartości o wielkość małą *drugiego* rzędu. W każdym innym miejscu na krzywej, jeżeli przebywamy mały odcinek, wartość funkcji zmienia się

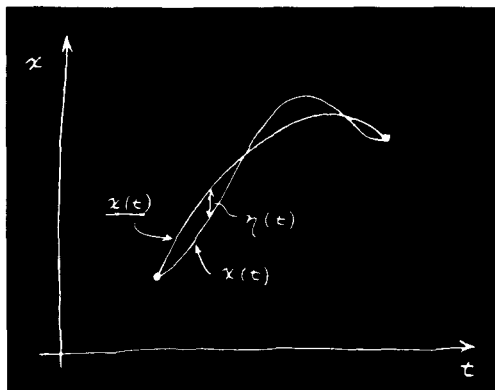


także o wielkość małą pierwszego rzędu. Ale w minimum mały ruch w bok zawsze z dokładnością do wyrażen małych pierwszego rzędu nie prowadzi do żadnych różnic.

W ten oto właśnie sposób mamy zamiar znaleźć rzeczywistą drogę. Jeżeli mamy rzeczywistą drogę, to krzywa, która różni się od niej tylko trochę, nie daje z dokładnością do wyrażen małych pierwszego rzędu żadnej różnicy w działaniu. Różnica może wystąpić dopiero z dokładnością do wyrażen małych drugiego rzędu, jeżeli rzeczywiście mamy do czynienia z minimum.

Można to łatwo udowodnić. Jeżeli dostajemy zmianę pierwszego rzędu, gdy w pewien sposób zniekształcamy krzywą, to w działaniu następuje zmiana *proporcjonalna* do odchylenia. Zmiana ta z założenia zwiększa działanie, inaczej nie dostalibyśmy minimum. Ale gdy zmiana jest *proporcjonalna* do odchylenia, przez zmianę znaku odchylenia mogliśmy działanie zmniejszyć. Przekonalibyśmy się, że w jednym kierunku działanie maleje, a w drugim wzrasta. Jediną możliwością, jeżeli chcemy mieć minimum, jest, aby z dokładnością do wyrażen małych *pierwszego rzędu* nie było żadnych zmian w działaniu, tak aby te zmiany były proporcjonalne do kwadratu odchylen od drogi rzeczywistej.

A więc będziemy działać w następujący sposób: Oznaczmy $x(t)$ (z podkreśleniem) drogę rzeczywistą — tę, którą chcemy znaleźć. Wybieramy pewną drogę próbną $x(t)$, która się różni od drogi rzeczywistej o małą wielkość, którą oznaczmy $\eta(t)$.



Idea polega na tym, że jeżeli obliczamy działanie S dla drogi $x(t)$, to różnica między działaniem S i działaniem, które obliczyliśmy dla drogi $\underline{x}(t)$, (w celu uproszczenia oznaczeń zapiszemy je po prostu jako \underline{S}), a więc różnica między S i \underline{S} powinna być równa zero w pierwszym przybliżeniu ze względu na małe η . Może się ona różnić z dokładnością do wyrażen małych drugiego rzędu, ale z dokładnością do wyrażen małych pierwszego rzędu różnica ma zniknąć.

I to musi być słuszne dla wszystkich η w ogóle. No, nie wszystkich. Metoda ma sens tylko wtedy, gdy ograniczamy się do rozważania dróg, które wszystkie zaczynają się i kończą w tych samych dwu punktach — każda droga zaczyna się w pewnym punkcie w chwili t_1 i kończy w pewnym innym punkcie w chwili t_2 , przy czym te punkty są ustalone. Tak więc odchylenia $\eta(t)$ muszą zniknąć na każdym z końców, tzn. $\eta(t_1) = 0$ oraz $\eta(t_2) = 0$. Nałożywszy ten warunek sprecyzowaliśmy problem matematyczny do końca.

Gdybyśmy nie znali rachunku różniczkowego, moglibyśmy postąpić w ten sam sposób, aby znaleźć minimum zwykłej funkcji $f(x)$. Można by się zastanowić, co się dzieje, jeżeli bierzemy funkcję $f(x)$ i dodajemy mały przyrost h do x , a następnie argumentujemy, że poprawka do $f(x)$ z dokładnością do wyrażen małych pierwszego rzędu w h powinna być w minimum równa zero. Podstawilibyśmy $x+h$ w miejsce x i rozwijalibyśmy z dokładnością do pierwszych potęg h . Tak właśnie mamy zamiar postąpić.

Idea polega więc na tym, że podstawiamy $x(t) = \underline{x}(t) + \eta(t)$ do wzoru na działanie

$$S = \int \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt,$$

gdzie energię potencjalną oznaczyliśmy $V(x)$. Pochodna dx/dt jest oczywiście równa pochodnej z $x(t)$ plus pochodna $\eta(t)$, tak że dla działania dostajemy następujące wyrażenie:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt.$$

Musimy teraz napisać to w postaci bardziej szczegółowej. Dla wyrazu kwadratowego dostaję

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2.$$

Ale chwileczkę! Nie interesują mnie wyrazy rzędu wyższego niż pierwszy, wobec tego zbierzemy wszystkie wyrazy zawierające η^2 i wyższe potęgi η i umieścimy je razem pod hasłem „rzęd drugi i wyższy”. Z tego wyrazu, który mamy przed sobą, dostaniemy tylko drugi rząd, ale będziemy mieli coś więcej skądinąd. Tak więc część związana z energią kinetyczną wynosi

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{rzęd drugi i wyższy})$$

Potrzebny jest nam teraz potencjał V w punkcie $\underline{x} + \eta$. Uważamy η za wielkość małą,

wobec czego możemy napisać $V(x)$ w postaci szeregu Taylora. W przybliżeniu jest to $V(\underline{x})$; w następnym przybliżeniu poprawka wynosi η razy szybkość zmian V względem x , i tak dalej:

$$V(\underline{x}+\eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \frac{1}{2}\eta^2 V''(\underline{x}) + \dots$$

Napisałem tu V' jako oznaczenie pochodnej V względem x dla skrócenia notacji. Wyraz proporcjonalny do η^2 i wszystkie inne należą do kategorii „rząd drugi i wyższy”, wobec czego nie musimy się nimi zajmować. Zbierając to wszystko dostajemy

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) + m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) + (\text{rząd drugi i wyższy}) \right] dt.$$

Jeżeli przyjrzymy się temu uważnie, zauważymy, że dwa pierwsze wyrazy, które tu napisałem, odpowiadają działaniu S , obliczonemu wzdłuż rzeczywistej drogi \underline{x} . Chcę się jednak skupić nad zmianą S — różnicą pomiędzy S a S , które obliczylibyśmy wzdłuż rzeczywistej drogi. Różnicę tę zapisujemy jako δS i nazywamy wariacją S . Odrzucając „rząd drugi i wyższy”, dostajemy dla δS :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) \right] dt.$$

Problem teraz przedstawia się następująco: Mam tu pewną całkę. Nie wiem jeszcze, jakie jest \underline{x} , ale wiem, że *bez względu na to, jakie jest η* , całka ta musi zniknąć. „No więc — pomyślcie — jedyną drogą do osiągnięcia tego celu jest założyć, że współczynnik przy η musi być równy zeru.” Ale co począć z wyrazem $d\eta/dt$? Powiecie: „Skoro η może być jakąkolwiek funkcją, jej pochodna także może być jakąkolwiek, wobec czego wnioskujemy, że współczynnik przy $d\eta/dt$ także powinien być równy zeru.” Ale tak nie jest. Nie jest tak, gdyż przecież istnieje związek między η i jej pochodną; nie są one zupełnie niezależne, skoro $\eta(t)$ musi zniknąć zarówno dla t_1 , jak i dla t_2 .

Rozwiązując dowolny problem wariacyjny zawsze czynimy użytek z tej samej ogólnej zasady. Przesuwamy trochę to, co chcemy zmienić (wariować) — tak jak zrobiliśmy dodając η , następnie bierzemy pod uwagę wyrazy małe pierwszego rzędu; zawsze tak porządkujemy nasze wyrażenie, aby dostać całkę w postaci „coś mnożone przez przesunięcie (η)”, ale bez innych pochodnych (a więc bez $d\eta/dt$). Musimy więc tak przekształcić nasze wyrażenie, aby było ono zawsze w postaci „coś” razy η . Zobaczycie za chwilę, ile na tym zyskujemy. (Istnieją wzory, które mówią, jak to wykonać w pewnych przypadkach bez rzeczywistych obliczeń, ale metody te nie są dostatecznie ogólne, by warto się było nimi zajmować; najlepiej jest po prostu obliczyć to w taki sposób, jak my to robimy.)

Jak mogę przekształcić wyraz $d\eta/dt$, aby dawał η ? Mogę to zrobić całkując przez części. Okazuje się, że cały trik rachunku wariacyjnego polega na napisaniu wariacji S i następnie scałkowaniu przez części, tak aby znikły pochodne $d\eta/dt$. Tak jest zawsze w każdym zagadnieniu, w którym występują pochodne.

Pamiętacie ogólną zasadę całkowania przez części? Jeśli mamy jakąś funkcję f mnożoną przez $d\eta/dt$ i scałkowaną względem t , piszemy pochodną ηf :

$$\frac{d}{dt}(\eta f) = \eta \frac{df}{dt} + f \frac{d\eta}{dt}.$$

Chcemy tylko scałkować ostatni wyraz, wobec czego

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = \eta f - \int \eta \frac{df}{dt} dt.$$

W naszym wzorze na δS funkcja f wynosi m razy dx/dt ; wobec tego mamy następujące wyrażenie dla δS :

$$\delta S = m \frac{dx}{dt} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(x) \eta(t) dt.$$

Pierwszy wyraz musimy obliczyć w dwu granicznych chwilach t_1 i t_2 . Poza tym musimy mieć resztę całki pozostałą z całkowania przez części. Ostatni wyraz przepiszujemy bez żadnej zmiany.

A teraz zdarzy się coś, co się zawsze zdarza: część scałkowana znika. (W gruncie rzeczy, jeżeli ta część nie znika, zmieniamy tak sformułowanie zasady działania, aby mieć pewność, że jednak zniknie!) Powiedzieliśmy już, że η musi być równe zero na obu końcach drogi, gdyż zasada głosi, że działanie jest minimalne pod warunkiem, że wszystkie krzywe zaczynają się i kończą w wybranych z góry punktach. Warunek ten mówi, że $\eta(t_1) = 0$ oraz $\eta(t_2) = 0$. A więc scałkowany wyraz znika. Pozostałe wyrazy łączymy i dostajemy

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2 x}{dt^2} - V'(x) \right] \eta(t) dt.$$

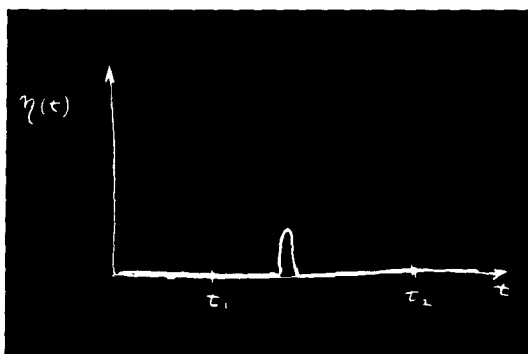
Wariacja S ma teraz postać, jaką chcieliśmy uzyskać: jest tu jakieś wyrażenie w nawiasie, oznaczmy je F , pomnożone przez funkcję $\eta(t)$ i scałkowane w przedziale od t_1 do t_2 .

Dostajemy zatem wynik: całka z „czegoś tam” razy funkcja $\eta(t)$ jest zawsze równa zero:

$$\int F(t) \eta(t) dt = 0.$$

Mam pewną funkcję zmiennej t ; mnożę ją przez $\eta(t)$ i całkuję od jednego końca do drugiego. I bez względu na to, jakie jest η , dostaję zero. Znaczy to, że funkcja $F(t)$ musi być równa zero. To jest oczywiste, ale mimo to podam tu coś w rodzaju dowodu.

Przypuśćmy, że dla $\eta(t)$ przyjąłem funkcję równą zero wszędzie, poza najbliższym oto-



czeniu pewnej szczególnej wartości. Pozostaje ona równa zero, dopóki nie dotrze do tej wartości t , po czym

śmiga na chwilę do góry, a potem śmiga w dół. Gdy obliczamy całkę z tego η pomnożonego przez pewną funkcję F , jedynym miejscem, w którym możemy otrzymać inną wartość niż zero, był punkt, w którym $\eta(t)$ się zmieniała, wobec czego dostajemy wartość F w tym właśnie punkcie razy całka obejmująca obszar zmienności η . Całka ta sama przez się nie znika, ale musi zniknąć po pomnożeniu przez F ; stąd wniosek, że funkcja F musi być równa zero w punkcie, w którym nastąpiła owa zmiana. Ale przecież punkt ten wybrany był dowolnie, a więc funkcja F musi znikać wszędzie.

Widzimy, że jeżeli nasza całka znika dla dowolnego η , to współczynnik przy η powinien być równy zero. Całka działania będzie miała minimum dla drogi, która spełnia to właśnie skomplikowane równanie różniczkowe:

$$\left[-m \frac{d^2 x}{dt^2} - V'(x) \right] = 0.$$

Ale nie jest ono w gruncie rzeczy aż tak skomplikowane; widzieliśmy je już dawniej. Jest to przecież po prostu $F = ma$. Pierwszy wyraz to masa razy przyspieszenie, a drugi — to pochodna energii potencjalnej, a więc siła.

Tak więc, przynajmniej dla układów zachowawczych, udowodniliśmy, że zasada najmniejszego działania daje poprawną odpowiedź; mówi ona, że działanie minimalne dostajemy spełniając prawo Newtona.

Tu jedna uwaga: nie udowodniłem, że to jest rzeczywiście *minimum*. Być może, jest to maksimum. W gruncie rzeczy nie musi to być wcale minimum. Jest tu analogia do przypadku „zasady najkrótszego czasu”, którą omawialiśmy w optyce. Tam także powiedzieliśmy z początku, że czas ma być minimalny. Okazało się jednak, że są takie wypadki, w których to nie był *czas najkrótszy*. Zasada podstawowa była taka, że dowolna *wariacja pierwszego rzędu* od drogi optycznej prowadzi do zerowej *zmiany* czasu; a więc to samo, co w naszym obecnym przypadku. Przez „najmniejszą” rozumiemy w gruncie rzeczy taką wartość S , że gdy dokonujemy zmiany drogi, znika wariacja pierwszego rzędu z S . To nie musi być wcale minimum.

Kolejna uwaga dotyczyć będzie pewnego uogólnienia. Przede wszystkim wszystko to można odnieść także do trzech wymiarów. Zamiast x można by rozważać x, y, z jako funkcje t ; działanie jest nieco bardziej skomplikowane. Dla ruchu trójwymiarowego

musimy się posłużyć pełną energią kinetyczną : $m/2$ razy cały kwadrat prędkości. Znaczy to, że

$$E_k = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

Również energia potencjalna E_p jest funkcją x , y , z . A co z drogą? Droga jest pewną ogólną krzywą w przestrzeni. Niełatwo byłoby ją narysować, ale idea jest taka sama. A co z η ? No, oczywiście, η ma trzy składowe. Można by przesuwac drogę w kierunku osi x , w kierunku osi y czy z albo we wszystkich tych kierunkach równocześnie. A więc η musi być wektorem. To w gruncie rzeczy nie jest wielką komplikacją. Ponieważ ma znikać tylko wariacja *pierwszego rzędu*, możemy wykonać obliczenia dokonując trzech kolejnych przesunięć. Możemy przesunąć η tylko w kierunku x , i powiedzieć, że ten współczynnik musi być równy zeru. Dostajemy jedno równanie. Następnie mamy przesunięcie w kierunku y i nowe równanie, a w kierunku z — trzecie, albo, jak kto woli, w innej kolejności. A prawo Newtona jest oczywiście zespołem trzech równań — po jednym dla każdej składowej. Sądzę, że każdy już widzi, jak to trzeba zrobić i będzie mógł udowodnić, że procedura ta sprawdza się w trzech wymiarach. Nawiasem mówiąc, można by używać dowolnego układu współrzędnych, jakie kto woli: biegunowych, czy jeszcze innych, i uzyskać równania Newtona dostosowane do tego właśnie układu współrzędnych, po prostu zastanawiając się nad tym, co się stanie, jeżeli dokonamy przesunięcia η w promieniu albo w kącie itd.

W podobny sposób metodę tę możemy uogólnić na przypadek wielu cząstek. Jeżeli mamy, powiedzmy, dwie cząstki i siłę działającą między nimi, tak że występuje energia potencjalna wzajemnego oddziaływania, to po prostu musimy dodać energie kinetyczne wszystkich cząstek i uwzględnić energię potencjalną oddziaływania wzajemnego. A co będziemy wariować? Wariujemy drogi *obu* cząstek. Wówczas dla dwu cząstek poruszających się w przestrzeni trójwymiarowej mamy sześć równań. Możemy zmieniać położenie cząstki 1 w kierunku x , w kierunku y i w kierunku z , i podobnie dla cząstki 2; a więc mamy sześć równań. I tak właśnie powinno być. Mamy trzy równania, które wyznaczają przyspieszenie cząstki 1 na podstawie znajomości siły, która na tę cząstkę działa, oraz trzy równania dla przyspieszenia cząstki 2. Wykonujemy te same czynności i otrzymujemy prawa Newtona w trzech wymiarach dla dowolnej liczby cząstek.

Powiedziałem, że otrzymujemy prawa Newtona. To nie jest całkiem prawdziwe, gdyż prawa Newtona obejmują też siły niezachowawcze, takie jak tarcie. Newton powiedział, że ma jest równe dowolnemu F , ale zasada najmniejszego działania funkcjonuje tylko dla układów *zachowawczych*, kiedy wszystkie siły mogą być uzyskane z funkcji potencjalnej. Wiemy jednak, że na poziomie mikroskopowym — na najgłębszym poziomie fizyki — nie ma sił niezachowawczych. Siły niezachowawcze, takie jak tarcie, pojawiają się tylko dlatego, że pomijamy komplikacje w mikroświecie — po prostu mamy za dużo cząstek do przeanalizowania. Ale prawa *podstawowe* zawsze *możemy* przedstawić w postaci zasady najmniejszego działania.

Dokonajmy następnego uogólnienia. Przypuśćmy, że interesuje nas, co się dzieje, jeżeli cząstka porusza się relatywistycznie. Nie dostaliśmy tu poprawnego równania relatywistycznego; $F = ma$ jest słuszne jedynie w mechanice nierelatywistycznej. Pytanie

brzmi: Czy istnieje odpowiednia zasada najmniejszego działania w przypadku relatywistycznym? Istnieje. Wzór w przypadku relatywistycznym jest następujący:

$$S = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-v^2/c^2} dt - q \int_{t_1}^{t_2} [\varphi(x, y, z, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(x, y, z, t)] dt.$$

Pierwszą część całki działania stanowi masa spoczynkowa m_0 , mnożona przez c^2 razy całka z pewnej funkcji prędkości, $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Dalej, zamiast po prostu energii potencjalnej mamy całkę z potencjału skalarnego φ oraz z \mathbf{v} mnożonego przez potencjał wektorowy \mathbf{A} . Oczywiście, w ten sposób włączamy tylko siły elektromagnetyczne. Wszystkie pola elektryczne i magnetyczne dane są przez φ i \mathbf{A} . Ta funkcja działania daje pełną teorię relatywistycznego ruchu jednej cząstki w polu elektromagnetycznym.

Oczywiście, wszędzie, gdzie napisałem \mathbf{v} , rozumie się, że zanim się zacznie sobie cokolwiek wyobrażać, należy podstawić dx/dt zamiast v_x i tak dalej. Należy też pamiętać, że tam, gdzie po prostu napisałem x, y, z , należy podstawić $x(t), y(t)$ i $z(t)$. Ściśle biorąc, dopiero wtedy, gdy się dokona tych wszystkich podstawień, otrzymuje się wzór na działanie w przypadku relatywistycznym. Bardziej pomysłowym spośród Was pozostawię do udowodnienia, że ta zasada działania rzeczywiście daje poprawne równania ruchu relatywistycznego. Czy mogę tylko zasugerować, że lepiej będzie najpierw wykonać obliczenia bez \mathbf{A} , to znaczy bez pola magnetycznego? Dostaniecie wtedy składowe równania ruchu $d\mathbf{p}/dt = -q \nabla\varphi$, gdzie jak pamiętamy, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Znacznie trudniej jest włączyć także przypadek potencjału wektorowego. Wariacje bardzo się komplikują. W ostatecznym wyniku siła będzie równa $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, jak trzeba, ale tę zabawę zostawiam już Wam.

Chciałbym podkreślić, że w przypadku ogólnym, na przykład we wzorze relatywistycznym, wyrażenie podcałkowe w działaniu nie ma już postaci „energia kinetyczna minus energia potencjalna”. Było to słuszne jedynie w przybliżeniu nierelatywistycznym. Tak na przykład, wyraz $m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}$ nie przedstawia energii kinetycznej. Zagadnienie, czym ma być działanie w każdym konkretnym przypadku, należy badać w jakimś procesie prób i błędów. Jest to dokładnie to samo zagadnienie, co określenie postaci praw ruchu. Należy po prostu manipulować równaniami, które się zna, i popatrzeć, czy można je dostać w postaci zasady najmniejszego działania.

Jeszcze jedna uwaga na temat terminologii. Funkcja, którą całkujemy względem czasu, nosi nazwę *lagranżjanu*, \mathcal{L} ; jest to funkcja tylko prędkości i położeń cząstek. Zasadę najmniejszego działania można więc także napisać w postaci

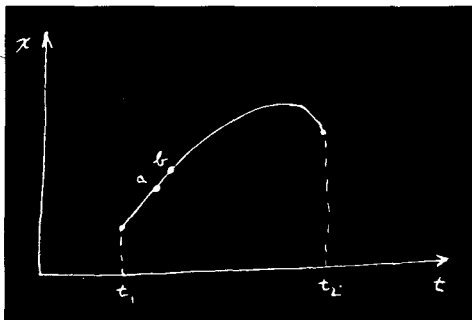
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x_i, v_i) dt,$$

gdzie przez x_i oraz v_i rozumiemy wszystkie składowe położeń i prędkości. Tak więc, jeżeli usłyszycie kogoś mówiącego o lagranżjanie, będziecie widzieć, że mówi on o funkcji używanej do znalezienia działania S . Dla relatywistycznego ruchu w polu elektromagnetycznym

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}).$$

Powinienem także powiedzieć, że ludzie wyrażający się najbardziej precyzyjnie i pedantycznie nie nazywają funkcji S działaniem. Nazywają ją „pierwszą główną funkcją Hamiltona”. Ale mieć wykład na temat „zasady najmniejszej pierwszej głównej funkcji Hamiltona”, to ponad moje siły. A więc nazwałem ją „działaniem”. Coraz więcej ludzi nazywa ją także działaniem. Z historycznego punktu widzenia sprawa przedstawia się w ten sposób, że dawniej coś, co wcale nie jest takie pożyteczne, zwano działaniem, ale sądzę, że rozsądniej jest przejść do nowej definicji. Tak więc Wy wszyscy także będziecie tę nową funkcję nazywać działaniem i wkrótce każdy będzie ją znał pod tą prostą nazwą.

Chcę teraz zrobić na ten temat uwagę podobną do tego, co mówiłem wprowadzając zasadę najkrótszego czasu. Istnieje spora różnica pomiędzy prawem, które mówi, że pewna całość od jednego punktu do innego ma minimum — to mówi nam coś o całej drodze — a prawem, które powiada, że w miarę posuwania się po tej drodze napotykamy siłę, która ciało nadaje przyspieszenie. Drugie prawo opisuje sposób, w jaki ciało przemierza drogę, a pierwsze stwierdza o całej drodze. W przypadku światła mówiliśmy o związku tych dwu praw. Chciałbym teraz wyjaśnić, dlaczego jest prawdą, że istnieją prawa różniczkowe, gdy istnieje też zasada najmniejszego działania tego właśnie typu. Powód jest następujący: rozważmy rzeczywistą drogę w czasie i w przestrzeni. Jak poprzednio, weźmy pod uwagę jedynie jeden wymiar, aby móc narysować x jako funkcję t . Wzdłuż drogi rzeczywistej działanie S ma minimum. Przypuśćmy teraz, że mamy drogę rzeczywistą i że przechodzi ona przez pewien punkt a w czasie i w przestrzeni, a także przez inny pobliski punkt b .



Jeżeli całość od t_1 do t_2 ma minimum, to trzeba, aby całość wzdłuż małego kawałka od a do b także miała minimum. Nie może być tak, aby na kawałku od a do b działanie było trochę większe. W innym wypadku można by zająć się tym kawałkiem drogi i trochę całość zmniejszyć.

Tak więc na każdym pododcinku drogi musimy także mieć minimum. Musi to być prawdą niezależnie od tego, jak krótki jest ten pododcinek. Wobec tego zasadę mówiącą nam, że cała droga daje minimum całości możemy też sformułować inaczej, mówiąc, że każda jej nieskończenie mała część także jest taką krzywą, na której działanie przybiera wartość minimalną. Jeżeli jednak weźmiemy odcinek drogi dostatecznie krótki — gdy punkty a i b są bardzo blisko siebie — to nie jest ważne jak się zmienia potencjał daleko stąd, ponieważ pozostaje przez cały czas prawie w tym samym miejscu. Jedyną rzeczą, którą należy omówić, są zmiany pierwszego rzędu w potencjale. Odpowiedź może zależeć

jedynie od pochodnej potencjału w danym punkcie, a nie do potencjału wszędzie indziej. W ten sposób twierdzenie dotyczące ogólnej właściwości całej drogi przechodzi w twierdzenie dotyczące tego, co się dzieje na małym odcinku, a więc w twierdzenie różniczkowe. A to twierdzenie różniczkowe obejmuje jedynie pochodne potencjału, tzn. siłę działającą w danym punkcie. Jest to jakościowe wyjaśnienie związku między prawem całkowym i różniczkowym.

W przypadku światła zastanawialiśmy się nad problemem, jak cząstka znajduje właściwą drogę. Z punktu widzenia metod różniczkowych można to łatwo zrozumieć. W każdej chwili nabiera ona pewnego przyspieszenia i wie tylko to, co ma zrobić w danej chwili. Ale wszystkie nasze instynkty dotyczące przyczyny i skutku stają dęba, gdy słyszymy, że cząstka decyduje, jaką ma drogę wybrać na zasadzie uzyskania na tej drodze najmniejszej wartości działania. Czy wyczuwa ona „węchem”, które z sąsiadujących ze sobą dróg dadzą więcej, a które mniej działania? W przypadku światła, gdy postawimy przesłony w taki sposób, aby fotony nie mogły sprawdzić wszystkich dróg, przekonujemy się, że nie mogą sobie one wyobrazić, którą drogą pójść i następuje dyfrakcja.

Czy to samo jest też słuszne w mechanice? Czy prawdą jest, że cząstka nie po prostu „podąża właściwą drogą”, ale „spogląda” na wszystkie inne możliwe tory? A jeżeli znajdzie takie przeszkody, które jej nie pozwolą patrzeć, czy dostaniemy coś takiego jak dyfrakcja? Cudem w tym wszystkim jest to, oczywiście, że tak właśnie jest. To właśnie mówią prawa mechaniki kwantowej. A więc nasza zasada najmniejszego działania nie została sformułowana w sposób kompletny. Nie jest tak, że cząstka wybiera drogę najmniejszego działania, ale że czuje wszystkie drogi w sąsiedztwie i wybiera tę, na której działanie jest najmniejsze, metodą analogiczną do tej, za pomocą której światło wybiera najkrótszy czas. Pamiętamy, że sposób, w jaki światło wybiera najkrótszy czas, był następujący: gdyby pobiegło ono drogą, która by zabrała inny czas, przybyłoby ono z inną fazą. Cała zaś amplituda w pewnym punkcie jest sumą wkładów do amplitudy od różnych dróg, którymi światło mogłoby tam przybyć. Wszystkie drogi, które dają wybrane na chybił trafił różne fazy, nie dodają się do niczego. Ale jeżeli znajdziemy ciąg dróg, które dają prawie te same fazy, wtedy małe wkłady dodadzą się i dostaniemy całkowitą amplitudę sensownej wielkości w momencie przybycia do celu. Ważną drogą staje się ta, dla której istnieje wiele sąsiednich dróg dających tę samą fazę.

To samo dokładnie mamy w mechanice kwantowej. Mechanika kwantowa (w przypadku nierelatywistycznym i przy pominięciu spinu elektronu) mówi nam co następuje: Prawdopodobieństwo, że cząstka wyruszająca z punktu 1 w chwili t_1 przybędzie w chwili t_2 do punktu 2 równe jest kwadratowi amplitudy prawdopodobieństwa. Pełną amplitudę możemy napisać w postaci sumy amplitud dla każdej możliwej drogi, która wiedzie do celu. Dla każdego $x(t)$ — dla każdej wyobrażalnej trajektorii — musimy obliczyć amplitudę. Wtedy dodajemy je do siebie. Co przyjmujemy na amplitudę dla każdej drogi? Nasza całka działania mówi nam, czym powinna być amplituda dla pojedynczej drogi. Amplituda jest proporcjonalna do pewnej stałej razy $\exp(iS/\hbar)$, gdzie S jest działaniem dla tej drogi. Znaczący to, że przedstawiamy fazę amplitudy za pomocą liczby zespolonej, przy czym kąt fazowy wynosi S/\hbar . Działanie S ma wymiar energia razy czas, a stała Plancka \hbar ma ten sam wymiar. Jest to stała, która nam mówi, kiedy mechanika kwantowa staje się niezbędną.

Oto jak to się dzieje. Przypuśćmy, że dla wszystkich dróg działanie S jest bardzo wielkie w porównaniu z \hbar . Jedna droga daje wkład do pewnej amplitudy. Dla pobliskiej drogi faza jest całkiem inna, ponieważ gdy działanie S jest bardzo wielkie, to nawet bardzo mała zmiana S oznacza, że faza jest całkiem inna, gdyż \hbar jest tak małe. Tak więc po zsumowaniu przyczynki z sąsiednich dróg zwykle się znoszą, z wyjątkiem jednego obszaru, w którym dana droga i droga do niej zbliżona dają w pierwszym przybliżeniu tę samą fazę (dokładniej, to samo działanie z dokładnością do \hbar). Tylko te drogi będą miały znaczenie. Tak więc w granicznym wypadku, gdy stała Plancka zmierza do zera, możemy poprawne prawa kwantowe podsumować w następującym stwierdzeniu: „Zapomnijmy o tych wszystkich amplitudach prawdopodobieństwa. Cząstka porusza się po określonym torze, a mianowicie po takim, w którym działanie S w pierwszym przybliżeniu nie ulega zmianie.” Jest to właśnie związek między zasadą najmniejszego działania, a mechaniką kwantową. Fakt, że mechanikę kwantową można w taki sposób sformułować, wykrył w roku 1942 pewien student tego samego nauczyciela, Badera, o którym mówiłem na początku tego wykładu.*) [Mechanika kwantowa została początkowo sformułowana przez podanie równania różniczkowego dla amplitudy (Schrödinger), a także przy użyciu matematyki macierzowej (Heisenberg).]

Chcę teraz powiedzieć o innych zasadach wariacyjnych w fizyce. Jest bardzo wiele takich interesujących zasad. Nie będę tu próbował wszystkich ich zestawić, lecz tylko opiszę jeszcze jedną. Później, kiedy przejdziemy do rozważania jakiegoś zjawiska fizycznego, dla którego istnieje zasada wariacyjna, powiemy sobie o niej. Teraz chcę pokazać, że elektrostatykę możemy sformułować nie przez podanie równań różniczkowych dla pola, ale przez zażądanie, aby pewna całka miała maksimum, czy też minimum. Przede wszystkim zajmiemy się przypadkiem, w którym gęstość ładunku jest w każdym punkcie znana, a zagadnienie polega na znalezieniu potencjału φ wszędzie w przestrzeni. Wiemy, że odpowiedź powinna być następująca:

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0.$$

Ale możemy to także sformułować inaczej: obliczmy całkę U^* , gdzie

$$U^* = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (\nabla\varphi)^2 dV - \int \rho\varphi dV,$$

która jest całką po objętości całej przestrzeni trójwymiarowej. Dla właściwego rozkładu potencjału $\varphi(x, y, z)$ ma ona minimum.

Możemy wykazać, że te dwa sformułowania elektrostatyki są sobie równoważne. Przypuśćmy, że wybraliśmy na chybił trafił pewną funkcję φ . Chcemy wykazać, że jeżeli przyjmiemy zamiast φ prawdziwy potencjał φ plus mała poprawka f , to wtedy z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu zmiana U^* równa jest zeru. Napiszemy zatem

$$\varphi = \underline{\varphi} + f.$$

Funkcja $\underline{\varphi}$ jest tym, czego szukamy, ale wariujemy ją, aby znaleźć, jaką musi mieć ona

*) Studentem tym był, oczywiście, sam Feynman. (Przyp. tłum.)

wartość, jeśli chcemy spełnić warunek znikania wariacji U^* z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu. Dla pierwszej części U^* trzeba napisać

$$(\nabla\varphi)^2 = (\nabla\varphi)^2 + 2\nabla\varphi \cdot \nabla f + (\nabla f)^2.$$

Jedynym wyrazem pierwszego rzędu, który się zmienia, jest

$$2\nabla\varphi \cdot \nabla f.$$

W drugim wyrazie wchodzącym w skład U^* wyrażenie podcałkowe wynosi

$$\varrho\varphi = \varrho\varphi + \varrho f,$$

którego zmienną częścią jest ϱf . Tak więc zachowując jedynie zmienne składniki musimy zająć się całką

$$\Delta U^* = \int (\varepsilon_0 \nabla\varphi \cdot \nabla f - \varrho f) dV.$$

A teraz, postępując zgodnie ze starym ogólnym prawem, musimy z naszego wyrażenia usunąć wszystkie pochodne f . Popatrzmy, jakie to są pochodne. Iloczyn skalarny wynosi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Musimy go scałkować względem x , y i z . Tu właśnie mamy ten trik: aby się pozbyć $\partial f/\partial x$, całkujemy przez części względem x . Wprowadza to pochodną działającą na φ . Jest to ta sama ogólna idea, którą przywykliśmy stosować do usuwania pochodnych względem t . Korzystamy z równości

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = f \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \int f \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} dx.$$

Wyraz scałkowany jest równy zeru, ponieważ musimy zażądać, żeby f było równe zeru w nieskończoności. [Odpowiada to warunkowi znikania η dla t_1 i t_2 . Tak więc zasadę naszą należałoby dokładniej sformułować następująco: U^* jest mniejsze dla prawdziwego φ niż dla jakiegoś innego $\varphi(x, y, z)$ zmierzającego do tej samej wartości w nieskończoności.] Następnie robimy to samo dla y i z . Nasza całka ΔU^* wynosi więc

$$\Delta U^* = \int (-\varepsilon_0 \nabla^2\varphi - \varrho) f dV.$$

Aby wariacja ta równała się zeru dla dowolnego f , wszystko jedno jakiego, współczynnik przy f musi być równy zeru, a zatem

$$\nabla^2\varphi = -\varrho/\varepsilon_0.$$

Dostaliśmy z powrotem nasze stare równanie. Tak więc nasza propozycja „wariacyjna” jest poprawna.

Możemy ją uogólnić, jeżeli wykonamy nasze przekształcenia w trochę inny sposób. Wróćmy do całkowania przez części i wykonajmy je bez rozkładania na składowe. Zacz-

nijmy od przyjrzenia się następującej równości:

$$\nabla \cdot (f \nabla \varphi) = \nabla f \cdot \nabla \varphi + f \nabla^2 \varphi.$$

Jeżeli zróżniczkuję lewą stronę, mogę pokazać, że jest ona dokładnie równa prawej. Posłużmy się teraz tym równaniem przy całkowaniu przez części. W naszej całce ΔU^* zastępujemy wyrażenie $\nabla \varphi \cdot \nabla f$ wyrażeniem $f \nabla^2 \varphi - \nabla \cdot (f \nabla \varphi)$ i całkujemy po objętości. Wyraz z dywergencją scałkowany po objętości możemy zastąpić całką powierzchniową:

$$\int \nabla \cdot (f \nabla \varphi) dV = \int f \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} da.$$

Ponieważ scałkowaliśmy po całej przestrzeni, powierzchnia, po której teraz całkujemy, znajduje się w nieskończoności. Tam f jest równe zero i dostajemy tę samą odpowiedź co przedtem.

Teraz dopiero widzimy, jak należy rozwiązywać problem, kiedy *nie* wiemy, gdzie znajdują się ładunki. Przypuśćmy, że mamy przewodniki z ładunkami jakoś na nich rozłożonymi. Możemy nadal posługiwać się naszą zasadą wariacyjną, jeżeli potencjały na wszystkich przewodnikach są stałe. Obliczamy całkę po U^* tylko w przestrzeni na zewnątrz wszystkich przewodników. Następnie, ponieważ φ na powierzchni przewodnika jest ustalona, f jest tam równe zero, wobec czego całka powierzchniowa

$$\int f \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} da$$

nadal równa się zero. Pozostała całka objętościowa

$$\Delta U^* = \int (-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi - \rho \varphi) f dV$$

ma być wykonana tylko w przestrzeni pomiędzy przewodnikami. Oczywiście, dostajemy znów równanie Poissona

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon_0.$$

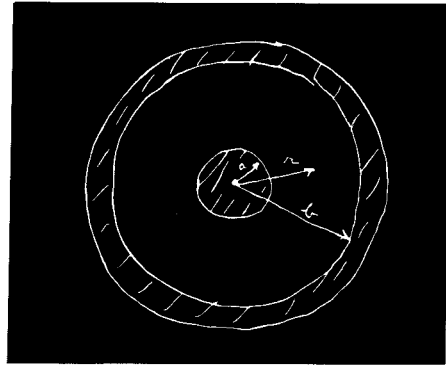
Wykazaliśmy zatem, że nasza pierwotna całka U^* ma wartość minimalną także wtedy, gdy obliczamy ją w całej przestrzeni, wyjąwszy obszar zajmowany przez przewodniki znajdujące się na ustalonych potencjałach [tzn. takich, że dowolny próbny potencjał $\varphi(x, y, z)$ musi być równy danemu potencjałowi przewodników, gdy x, y, z są współrzędnymi punktu położonego na powierzchni przewodnika.]

Interesujący przypadek napotykamy wtedy, gdy jedyne ładunki znajdują się na powierzchni przewodników. Wówczas

$$U^* = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int (\nabla \varphi)^2 dV.$$

Nasza zasada wariacyjna mówi nam, że w przypadku pozostawienia wszystkich przewodników na pewnych (danych) potencjałach, potencjał między nimi tak się do nich dopasowuje, że całka U^* ma najmniejszą wartość. Co to za całka? Wyraz $\nabla \varphi$ przedstawia pole elektryczne, wobec czego całka daje energię elektrostatyczną. Rzeczywiste pole jest tym jedynym polem ze wszystkich pól, które można przedstawić jako gradient pewnego potencjału, dla którego energia całkowita ma wartość minimalną.

Chciałbym posłużyć się tym wynikiem, aby obliczyć coś szczególnego i wykazać wszystkim, że ma to rzeczywiście praktyczne znaczenie. Przypuśćmy, że bierzemy dwa przewodniki w kształcie kondensatora walcowego.



Przewodnik wewnętrzny ma potencjał V , a zewnętrzny — zero. Niech promień wewnętrznego walca wynosi a , zewnętrznego zaś b . Możemy teraz założyć *dowolny* rozkład potencjału pomiędzy tymi dwoma przewodnikami. Biorąc *prawdziwe* φ i obliczając całkę $\frac{1}{2}\epsilon_0 \int (\nabla\varphi)^2 dV$ powinniśmy dostać energię układu, $\frac{1}{2}CV^2$. Nasza zasada pozwala nam zatem także na obliczenie pojemności C . Ale jeżeli posłużymy się złym potencjałem i spróbujemy obliczyć pojemność C tą samą metodą, otrzymamy pojemność zbyt wielką, gdyż potencjał V jest określony. Każdy potencjał założony przez nas, który nie jest w 100% poprawny, da nam wartość fałszywą pojemności C , większą od wartości poprawnej. Ale jeżeli nasz potencjał φ jest grubym przybliżeniem, to wartość pojemności C będzie dobrym przybliżeniem, ponieważ błąd w wartości C jest drugiego rzędu w porównaniu z błędem w wartości φ .

Przypuśćmy, że nie znamy pojemności kondensatora walcowego. Mogę wówczas posłużyć się moją zasadą do obliczenia tej wielkości. Odgaduję po prostu pewną funkcję φ , którą uważam za potencjał, i postępuję tak dopóty, dopóki nie dostanę najmniejszej pojemności C . Przypuśćmy na przykład, że wybieram potencjał, który odpowiada stałemu polu. (Wiecie, ma się rozumieć, że pole naprawdę wcale tam nie jest stałe; zmienia się ono jak $1/r$.) Stałe pole znaczy, że mamy potencjał zmieniający się liniowo z odległością. Aby dopasować warunki brzegowe na dwu przewodnikach musimy mieć

$$\varphi = V \left(1 - \frac{r-a}{b-a} \right).$$

Funkcja ta wynosi V dla $r = a$ oraz 0 dla $r = b$, a pośrodku ma stałe nachylenie równe $-V/(b-a)$. A więc co robimy, aby obliczyć całkę U^* ? Mnożymy kwadrat tego gradientu przez $\frac{1}{2}\epsilon_0$ i całkujemy po całej przestrzeni. Wykonajmy ten rachunek dla walca o jednostkowej długości. Element objętości w odległości r od osi walca wynosi $2\pi r dr$. Obliczając całkę przekonuję się, że pierwsza próba dla pojemności daje wynik

$$\frac{1}{2}CV^2 (\text{pierwsza próba}) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2} 2\pi r dr.$$

Całka jest łatwa do obliczenia: równa się po prostu

$$\pi V^2 \left(\frac{b+a}{b-a} \right).$$

Mamy więc wzór dla pojemności, który nie jest poprawny, lecz tylko przybliżony:

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)}.$$

Daje on oczywiście odpowiedź inną od poprawnej, uzyskiwanej ze wzoru $C = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$, ale nie jest ona znowu taka zła. Porównajmy ją z właściwą odpowiedzią dla kilku wartości b/a . Obliczyłem odpowiedzi w poniższej tabeli:

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{prawdziwe}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C \text{ (pierwsze przybliżenie)}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1,4423	1,500
4	0,721	0,833
10	0,434	0,612
100	0,267	0,51
1,5	2,4662	2,50
1,1	10,492070	10,500000

Nawet wtedy, gdy b/a wynosi aż 2, co daje sporą rozbieżność w polu, jeżeli się je porówna z polem zmieniającym się liniowo, dostałem nader dobre przybliżenie. Wynik oczywiście jest za duży, jak należało oczekiwać. Wszystko się pogarsza i to znacznie, jeżeli wewnątrz dużego walca znajdzie się cienki drut. Pole wykazuje wtedy bardzo duże zmiany i jeżeli się je reprezentuje stałą, nie osiąga się dobrego przybliżenia. Gdy $b/a = 100$, błąd sięga 100%. Sytuacja poprawia się dla małych b/a . Na drugim krańcu znajduje się przypadek, w którym przewodniki nie są od siebie bardzo oddalone — powiedzmy, gdy $b/a = 1,1$. Wtedy stałe pole jest całkiem dobrym przybliżeniem i na pojemność C dostajemy poprawną wartość z dokładnością do dziesiątych części procenta.

Chciałbym z kolei powiedzieć wam, jak można takie obliczenia udoskonalić. (Oczywiście, znamy poprawny wynik dla walca, ale metoda jest taka sama dla innych dziwnych kształtów, dla których poprawny wynik może nie być znany.) Krok następny polega na uzyskaniu lepszego przybliżenia dla nieznanego potencjału φ . Tak na przykład moglibyśmy spróbować wykonać obliczenia ze stałą plus czynnik wykładniczy itd. Ale jak poznać, że mamy lepsze przybliżenie, dopóki nie znamy prawdziwego φ ? Odpowiedź brzmi: obliczamy pojemność C ; najmniejsza wartość C jest najbliższa prawdy. Sprawdźmy tę zasadę. Przypuśćmy, że potencjał nie jest liniowy, ale powiedzmy kwadratowy w zmiennej r , tzn. że pole elektryczne nie jest stałe, ale liniowe. Najbardziej ogólna kwadratowa

postać funkcji φ , która pasuje do warunków $\varphi = 0$ dla $r = b$ oraz $\varphi = V$ dla $r = a$ jest następująca:

$$\varphi = V \left[1 + a \left(\frac{r-a}{b-a} \right) - (1+a) \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^2 \right],$$

gdzie a jest dowolną stałą liczbą. Wzór ten jest nieco bardziej skomplikowany. Zawiera on wyraz kwadratowy w potencjale, a także wyraz liniowy. Łatwo można stąd obliczyć pole. Wynosi ono

$$E = - \frac{d\varphi}{dr} = - \frac{aV}{b-a} + 2(1+a) \frac{(r-a)V}{(b-a)^2}.$$

Musimy to teraz podnieść do kwadratu i scałkować po objętości. No, ale co z a ? Jaką wartość dla niej przyjąć? Można przyjąć zmienność paraboliczną φ , ale jaką dokładnie? I oto, co zrobię: obliczę pojemność z *dowolnym* a . Dostaję

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{a}{b-a} \left[\frac{b}{a} \left(\frac{a^2}{6} + \frac{2a}{3} + 1 \right) + \frac{1}{6} a^2 + \frac{1}{3} \right].$$

Postać tego wzoru jest nieco skomplikowana, ale to się bierze z całkowania kwadratu pola. A teraz mogę wybrać moje a . Wiem, że prawdziwa odpowiedź daje wynik mniejszy niż wszystko, co mogę tu obliczyć, a więc cokolwiek przyjmę za a , da mi to wynik za duży. Ale jeżeli będę traktować a jak wolny parametr i będę go zmieniać, dostanę najmniejszą wartość, jaką w ogóle przy moich założeniach jestem w stanie uzyskać. Ta najmniejsza wartość będzie bardziej bliska prawdy niż jakakolwiek inna. A więc to, co teraz muszę zrobić, to znaleźć takie a , które daje mi minimalną wartość C . Możemy to zrobić posługując się zwykłym rachunkiem różniczkowym i przekonać się, że minimalną wartość pojemności C dostajemy dla $a = -2b/(b+a)$. Podstawiając tę wartość do wzoru uzyskuje minimalną pojemność

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)}.$$

Obliczyłem, co ten wzór daje dla różnych wartości b/a . Oznaczę te wartości jako C (kwadratowe). Oto tabela, która porównuje C (kwadratowe) z prawdziwym C .

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{prawdziwe}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C \text{ (kwadratowe)}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1,4423	1,444
4	0,721	0,733
10	0,434	0,475
100	0,267	0,346
1,5	2,4662	2,4667
1,1	10,492070	10,492065

Gdy stosunek promieni wynosi np. $2 : 1$, dostajemy 1,444, co jest bardzo dobrym przybliżeniem w stosunku do prawdziwej odpowiedzi, tzn. do 1,4423. Nawet dla większych b/a jest to przybliżenie całkiem dobre — jest ono znacznie, znacznie lepsze od pierwszego przybliżenia. Nawet gdy b/a wynosi 10, błąd jest jeszcze tylko około 10%. Ale gdy b/a staje się równe 100, no to oczywiście wyniki są zwariowane. Otrzymałem pojemność C równą 0,346 zamiast 0,267. Z drugiej strony dla stosunku promieni 1,5 wynik jest doskonały, a dla $b/a = 1,1$ wynik wychodzi 10,492065 zamiast 10,492070. Tam, gdzie wynik powinien być poprawny, rzeczywiście jest on bardzo, bardzo dobry.

Dałem tu te przykłady po pierwsze dlatego, żeby wykazać wartość teoretyczną zasady najmniejszego działania i zasad minimalnych w ogólności, a po drugie, żeby pokazać ich przydatność praktyczną — nie tylko po prostu do obliczania pojemności, kiedy już znamy wynik. Dla każdego innego kształtu kondensatora możemy odgadnąć pole przybliżone, zależne od pewnych nieznanymi parametrów, takich jak α , i dobrać je tak, aby otrzymać minimum. Dostaje się w ten sposób doskonałe wartości numeryczne dla zagadnień, których inaczej nie można rozwiązać.

Uwaga dodana po wykładzie

Chciałbym coś dodać, na co nie miałem czasu w trakcie wykładu. (Wydaje mi się, że zawsze przygotowuję więcej materiału niż mogę przekazać w czasie, który mam do dyspozycji.) Jak wspomniałem poprzednio, podczas przygotowywania tego wykładu zainteresowałem się pewnym zagadnieniem. Wśród zasad wariacyjnych, o których mógłbym wspomnieć, większość, jak zauważyłem, wypływa tak czy inaczej z zasady najmniejszego działania w mechanice czy też w elektrodynamice. Ale jest też taka ich klasa, która wydaje się być niezależna. Jako przykład podam sytuację, w której prądy są przepuszczane przez kawałek substancji, dla której słuszne jest prawo Ohma. Wówczas prądy rozchodzą się wewnątrz tego kawałka w taki sposób, że prędkość wytwarzania ciepła jest tak mała, jak to tylko jest możliwe. Możemy też powiedzieć, że (przy przemianach izotermicznych) szybkość wytwarzania energii jest najmniejsza. Zasada ta jednak jest słuszna także wtedy, zgodnie z teorią klasyczną, kiedy chcemy znaleźć rozkład prędkości elektronów wewnątrz metalu przewodzącego prąd. Ten rozkład prędkości nie jest dokładnie rozkładem zrównoważonym [rozdz. 40, tomu I (cz. 2), wzór (40.6)], ponieważ elektrony poruszają się też w kierunku poprzecznym. Z powyższej zasady możemy znaleźć nowy rozkład dla danego prądu, przy którym entropia na sekundę wyzwolona w czasie zderzeń jest możliwie mała. Prawdziwy opis zachowania elektronów powinien być jednak dokonany w oparciu o mechanikę kwantową. W związku z tym możemy zapytać: czy ta sama zasada minimalnego wytwarzania entropii jest słuszna także wtedy, gdy opisujemy owo zjawisko posługując się prawami mechaniki kwantowej? Jeszcze nie wiem.

Pytanie to jest oczywiście interesujące z ogólnego punktu widzenia. Takie zasady są urzekające i zawsze warto sprawdzić, jak dalece są one ogólne. Ale *chcę* to także wiedzieć z praktycznego punktu widzenia. Z kilkoma kolegami opublikowałem pracę, w której przedstawiliśmy wyniki uzyskane w sposób przybliżony przy zastosowaniu mechaniki kwantowej dla oporności elektrycznej, której doznaje elektron poruszający się w kryształach jonowych takich jak NaCl.*¹) Ale gdyby istniała zasada wariacyjna, moglibyśmy się nią posłużyć, aby poprawić nasze wyniki, podobnie jak zasada wariacyjna dla pojemności kondensatora pozwoliła nam uzyskać dobrą dokładność dla pojemności nawet wtedy, gdy o polu elektrycznym wiedzieliśmy tak mało.

*¹) Feynman, Hellworth, Iddings i Platzman, „Mobility of Slow Electrons in a Polar Crystal”, Phys. Rev. **127**, 1004 (1962).

rozwiązania równań Maxwella
w próżni

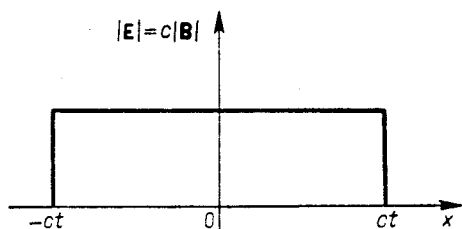
20-1. Fale w próżni; fale płaskie^{*)}

W rozdziale 18 osiągnęliśmy punkt, w którym równania Maxwella pojawiły się w pełnej postaci. Wszystko, co mamy wiedzieć o klasycznej teorii pola elektrycznego i magnetycznego, można znaleźć w tych oto czterech równaniach:

$$\begin{aligned}
 \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \text{II. } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
 \text{III. } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
 \end{aligned}
 \tag{20.1}$$

Kiedy zbierzemy wszystkie te równania razem, pojawia się godne uwagi nowe zjawisko: pola wytwarzane przez poruszające się ładunki mogą opuszczać swe źródła i poruszać się same w przestrzeni. Szczególny przykład tego rodzaju badaliśmy w rozdz. 18. Polegał on na tym, że nagle włączaliśmy prąd w postaci nieskończonej poruszającej się naładowanej warstwy. Po czasie t od chwili włączenia tego prądu pola elektryczne i magnetyczne, oba jednorodne, rozciągały się aż do odległości ct od źródła. Przypuśćmy, że warstwa z prądem leży w płaszczyźnie yz , przy czym gęstość powierzchniowa prądu skierowanego w dodatnim kierunku osi y wynosi J . Pole elektryczne będzie mieć tylko składową y -ową, a pole magnetyczne tylko składową z -ową. Wartość bezwzględna składowych pola dana

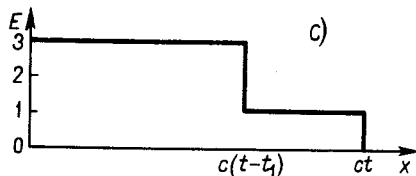
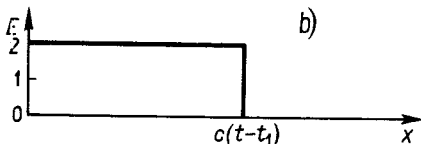
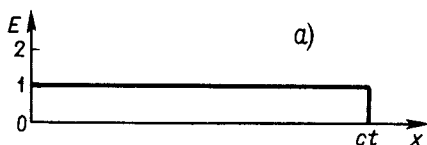
^{*)} Porównaj: Tom I, cz. 2, rozdz. 47 (*Dźwięk. Równanie falowe*).



20.1. Pole elektryczne i magnetyczne jako funkcja x w chwili t po uruchomieniu warstwy z prądem

20.2. Pole elektryczne warstwy z prądem.

a. Prąd o natężeniu jednostkowym włączony w chwili $t = 0$. b. Prąd o podwójnym natężeniu włączony w chwili $t = t_1$. c. Superpozycja prądów a) i b)



jest wzorem

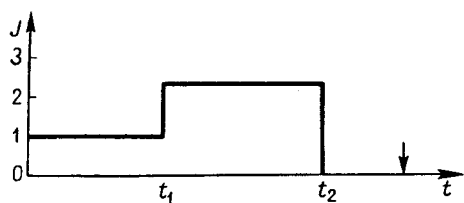
$$E_y = cB_z = -\frac{J}{2\epsilon_0 c}, \quad (20.2)$$

dla dodatnich wartości x mniejszych od ct . Dla większych x pola znikają. Istnieją oczywiście podobne pola rozciągające się do tej samej odległości od warstwy z prądem w kierunku ujemnym osi x . Na rysunku 20.1 przedstawiono wykres wartości tych pól jako funkcja x przy ustalonym t . Gdy czas biegnie, „czoło fali” w punkcie ct przemieszcza się w kierunku x ze stałą prędkością c .

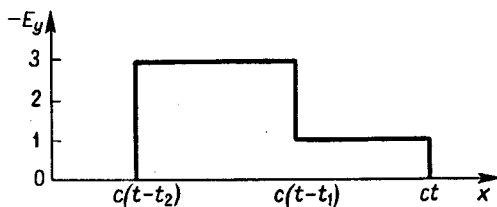
Rozważmy teraz następujący ciąg wypadków. Włączamy na chwilę prąd o jednostkowym natężeniu, a potem nagle zwiększamy jego natężenie do trzech jednostek i utrzymujemy go następnie przy tej wartości. Jak będą wyglądać pola w takim wypadku? Możemy to sprawdzić w następujący sposób. Przede wszystkim wyobraźmy sobie prąd o jednostkowym natężeniu, który został włączony w chwili $t = 0$ i pozostawiony dalej bez żadnych zmian. Pola dla dodatnich x przedstawia wykres na rys. 20.2a. Pytamy teraz, co się stanie, jeżeli dodatkowo włączymy prąd stały o natężeniu dwu jednostek w chwili t_1 .

Pola w tym wypadku będą dwukrotnie większe niż poprzednio, ale rozciągane będą w kierunku x tylko do odległości $c(t-t_1)$, jak pokazuje rys. 20.2b. Gdy dodamy te dwa rozwiązania korzystając z zasady superpozycji, przekonamy się, że suma tych dwu prądów stanowi prąd jednostkowy w czasie od zera do t_1 , a prąd o natężeniu trzech jednostek w czasie większym niż t_1 . W chwili t pola zmieniają się z x jak przedstawia rys. 20.2c.

Weźmy teraz bardziej skomplikowany przykład. Rozważmy prąd o jednostkowym natężeniu, który zostaje na chwilę włączony, następnie jego natężenie wzrasta do trzech jednostek, aż wreszcie prąd zostaje wyłączony. Jakie pola odpowiadają takiemu prądowi?



a)



b)

20.3. Jeżeli natężenie prądu w źródle zmienia się jak przedstawia część a rysunku, to w chwili t wskazanej strzałką pole elektryczne jako funkcja x wygląda tak, jak to przedstawia rys. b.

Znowu znajdujemy rozwiązania w ten sam sposób — przez dodanie rozwiązań dla trzech oddzielnych zagadnień. Przede wszystkim znajdujemy pola dla skokowego włączenia prądu jednostkowego. (Problem ten już rozwiązaliśmy.) Następnie znajdujemy pola wytworzone przez skokowe podniesienie wartości prądu o dwie jednostki. Na końcu zaś rozwiązujemy zagadnienie skokowej zmiany prądu o *minus* trzy jednostki. Gdy dodamy wszystkie te rozwiązania, będziemy mieli rozwiązanie dla prądu, który miał natężenie jednostkowe od zera do t_1 , następnie — trzy jednostki aż do jakiejś późniejszej chwili t_2 , a następnie został całkowicie wyłączony, tzn. do zera. Wykres prądu jako funkcji czasu pokazujemy na rys. 20.3a. Gdy dodamy wszystkie trzy rozwiązania dla pola elektrycznego, przekonamy się, że jego zmienność z x przy ustalonym t jest taka, jak przedstawia rys. 20.3b. Pole jest dokładnym odwzorowaniem prądu. Rozkład pola w przestrzeni jest dany wykresem zmienności prądu w czasie — tylko odwróconym. W miarę upływu czasu ten sam obraz przesuwa się dalej z prędkością c , tak że mamy tu mały fragment pola, podróżującego w dodatnim kierunku osi x , który zawiera w sobie pełną i szczegółową historię wszystkich zmian prądu. Gdybyśmy byli nawet wiele kilometrów stamtąd, jeszcze moglibyśmy powiedzieć na podstawie zmienności pola elektrycznego i magnetycznego, jak dokładnie zmieniał się prąd w źródle.

Zauważmy także, iż jeszcze długo po zatrzymaniu się działalności źródła i zniknięciu wszystkich ładunków i prądów ów fragment pola nadal się porusza w przestrzeni. Mamy tu więc pewien rozkład pól elektrycznego i magnetycznego, który istnieje niezależnie od jakichkolwiek ładunków czy prądów. Jest to właśnie ów nowy efekt, który wynika z pełnego układu równań Maxwella. Jeśli chcemy, możemy podać pewne przedstawienie matematyczne tej analizy, którą właśnie wykonaliśmy, pisząc, że pole elektryczne w danej chwili i w danym miejscu jest proporcjonalne do prądu w źródle, tylko nie w tej *samej* chwili, lecz w chwili *wcześniejszej*, równej $t - x/c$. Możemy napisać

$$E_y(t) = - \frac{J(t-x/c)}{2\epsilon_0 c}. \quad (20.3)$$

Wierście lub nie, ale to samo równanie wyprowadziliśmy już z innego punktu widzenia w tomie I (cz. 2), kiedy zajmowaliśmy się teorią współczynnika załamania. Musieliśmy sobie wówczas wyjaśnić, jakie pola są wytwarzane przez cienką warstwę oscylujących

dipoli umieszczonych na warstwie dielektryka, przy czym dipole te zostały uruchomione przez pole elektryczne nadbiegającej fali elektromagnetycznej. Nasze zagadnienie polegało na obliczeniu kombinacji pól fali pierwotnej i fal wypromieniowanych przez drgające dipole. Jakim cudem mogliśmy obliczyć pola wytworzone przez poruszające się ładunki, skoro nie mieliśmy do dyspozycji równań Maxwella? Za punkt wyjścia przyjęliśmy wówczas (bez żadnego wyprowadzenia) wzór na promieniowanie pól wytwarzanych na dużych odległościach od przyspieszanego ładunku punktowego. Jeżeli zajrzemy do rozdz. 31 tomu I (cz. 2), to zobaczymy, że wzór (31.10) jest dokładnie taki sam, jak (20.3), który dopiero co napisaliśmy. Choć nasze poprzednie wyprowadzenie było słuszne jedynie dla dużej odległości od źródła, widzimy teraz, że ten sam wynik jest też poprawny nawet tuż w pobliżu źródła.

Chcemy teraz zbadać w ogólny sposób zachowanie się pola elektrycznego i magnetycznego w próżni z dala od źródeł, tj. od ładunków i prądów. W pobliżu źródeł — dostatecznie blisko, aby w czasie potrzebnym na przekazanie sygnału źródło się zbytnio nie zmieniło — pola są z grubsza takie same jak te, które rozważaliśmy w przypadku statycznym. Jeżeli jednak oddalimy się tak, że opóźnienia staną się istotne, natura pól będzie radykalnie inna od tego, co znaleźliśmy poprzednio. W pewnym sensie pola zaczynają żyć własnym życiem, kiedy już oddaliły się dostatecznie daleko od źródła. Zaczniemy więc od omówienia zachowania się pól w obszarze, w którym nie ma ładunków ani prądów.

Przypuścmy, że interesuje nas odpowiedź na pytanie: Jakie pola mogą występować tam, gdzie gęstości ρ i \mathbf{j} są równe zeru? Z rozdziału 18 wiemy, że fizykę opisaną równaniami Maxwella można także wyrazić w języku potencjału wektorowego i skalarne go:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (20.4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (20.5)$$

Jeżeli wielkości ρ i \mathbf{j} są równe zeru, równania przybierają prostszą postać:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.7)$$

Tak więc w próżni potencjał skalarny oraz każda składowa potencjału wektorowego spełniają, każde z osobna, to samo równanie matematyczne. Przyjmijmy, że φ zastępuje dowolną z czterech wielkości: φ , A_x , A_y , A_z ; chcemy zbadać ogólne rozwiązanie następującego równania:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.8)$$

Równanie to nazywamy trójwymiarowym równaniem falowym — trójwymiarowym, po-

nieważ funkcja ψ może zależeć w ogólnym przypadku od x , y i z i musimy się interesować jej zmiennością ze względu na wszystkie trzy współrzędne. Staje się to jasne po rozpisaniu operatora Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.9)$$

W próżni pola elektryczne \mathbf{E} i \mathbf{B} także spełniają to samo równanie falowe. Tak na przykład, ponieważ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, możemy dostać równanie różniczkowe dla \mathbf{B} obliczając rotację równania (20.7). Ponieważ laplasjan jest operatorem skalarnym, operatory rotacji i laplasjanu można przestawić:

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2 \mathbf{B}.$$

Podobnie można przestawić operatory $\partial/\partial t$ i rotacji:

$$\nabla \times \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Wynika stąd, że dla pola \mathbf{B} mamy następujące równanie różniczkowe:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.10)$$

Tak więc każda składowa pola \mathbf{B} spełnia trójwymiarowe równanie falowe. Podobnie, korzystając z tego, że $\mathbf{E} = (-\partial\mathbf{A}/\partial t) - \nabla\varphi$, otrzymujemy równanie dla pola \mathbf{E} ; okazuje się, że pole elektryczne także spełnia trójwymiarowe równanie falowe:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.11)$$

Wszystkie nasze pola elektromagnetyczne spełniają to samo równanie falowe (20.8). Moglibyśmy wobec tego zapytać: Jakie jest najogólniejsze rozwiązanie tego równania? Jednakże zamiast myśleć o tym trudnym problemie już teraz spojrzmy najpierw na to, co można powiedzieć w ogólnym wypadku o tych rozwiązaniach, w których nie zależy ani od y ani od z . (Zawsze najpierw zbadaj prosty przypadek, aby sprawdzić, co się może zdarzyć, a potem przechodź do przypadków bardziej skomplikowanych.) Załóżmy, że wartości pól zależą tylko od x — że nie ma *zmienności* pól z x i y . Rozważamy zatem jeszcze raz fale płaskie. Możemy oczekiwać, że dostaniemy wyniki trochę zbliżone do tych, którymi się zajmowaliśmy w poprzednim paragrafie. I rzeczywiście, dostaniemy dokładnie tę samą odpowiedź. Moglibyście zapytać: „A więc po co to jeszcze raz powtarzać?” Ma to jednak znaczenie, po pierwsze, dlatego, że nie pokazaliśmy, iż znalezione przez nas fale stanowią najogólniejsze rozwiązanie dla fal płaskich, a po drugie, ponieważ znaleźliśmy pola pochodzące od bardzo szczególnego prądu w źródle. Chcielibyśmy teraz zapytać: Jak wygląda najogólniejsza postać fali jednowymiarowej, która może istnieć w próżni? Nie można na to pytanie odpowiedzieć sprawdzając, co się dzieje w szczególnym przypadku takiego czy innego źródła, ale musimy problem opracować ogólniej. Mamy też zamiar

tym razem przeprowadzić obliczenia posługując się równaniami różniczkowymi, a nie całkowymi. Choć dostaniemy te same wyniki, dobrze jest sprawdzić wyniki w obie strony, aby się przekonać, że nie robi żadnej różnicy, którą drogą się kroczy. Należy wiedzieć, jak przebiegają obliczenia przy użyciu każdej z tych metod, gdyż kiedy się napotyka trudny problem, często się okazuje, że tylko jedna z możliwych dróg jest odpowiednia.

Moglibyśmy rozważać od razu rozwiązanie równania falowego dla pewnej wielkości elektromagnetycznej. Zamiast tego chcemy wystartować wprost z równań Maxwella w próżni, aby każdy mógł zobaczyć, jak ściśły jest ich związek z falami elektromagnetycznymi. Tak więc przyjmijmy za punkt wyjścia równania (20.1), przyjmując, że ładunki i prądy są równe zeru. Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned} \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \text{II. } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{III. } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20.12)$$

Rozpiszmy pierwsze równanie na składowe:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (20.13)$$

Zakładamy, że nie ma żadnej zmienności ze względu na y i z , tak że ostatnie dwa wyrazy znikają. Równanie to mówi nam, że

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (20.14)$$

Rozwiązaniem tego równania jest E_x , składowa pola elektrycznego w kierunku x , która jest stała w przestrzeni. Jeżeli popatrzymy na równanie IV we wzorach (20.12), przy założeniu, że pole \mathbf{B} nie zależy ani od y ani od z , można dostrzec, że składowa E_x jest stała w czasie. Takie pole będzie polem stałym, pochodzącym od ładunku umieszczonego na płytach jakiegoś odległego kondensatora. Nie interesuje nas teraz takie nieciekawe pole statyczne. Na razie zajmujemy się tylko polami zmiennymi *dynamicznie*. Z tego punktu widzenia $E_x = 0$.

Otrzymaliśmy wobec tego ważny wynik, że dla propagacji fal płaskich w dowolnym kierunku *pole elektryczne musi być skierowane prostopadle do kierunku poruszania się fali*. Może ono oczywiście nadal zależeć w bardzo skomplikowany sposób od x .

Poprzeczne pole \mathbf{E} możemy zawsze rozłożyć na dwie składowe, powiedzmy na składową y i składową z . Zbadajmy najpierw przypadek, w którym pole elektryczne ma tylko jedną składową poprzeczną. Weźmy pole elektryczne tak, aby skierowane ono było zawsze w kierunku y , a składowa z -owa stale była równa zeru. Oczywiście, jeżeli rozwiążemy to zagadnienie, będziemy mogli także rozwiązać problem w przypadku, gdy pole elektryczne jest zawsze skierowane wzdłuż osi z . Ogólne rozwiązanie zawsze będziemy mogli wyrazić jako superpozycję takich dwu pól.

Nasze równania stają się teraz bardzo łatwe. Jediną składową nie znikającą pola elek-

trycznego jest E_y , i wszystkie pochodne — z wyjątkiem pochodnych względem x dają zero. Pozostałe równania Maxwella bardzo się upraszczają.

Popatrzmy następnie na drugie równanie Maxwella [równanie II z układu równań (20.12)]. Pisząc składowe rotacji \mathbf{E} , dostajemy

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Składowa x -owa z $\nabla \times \mathbf{E}$ znika, ponieważ pochodne obliczamy względem y i z . Także składowa y -owa jest równa zero, ponieważ znika pochodna względem z , a drugi wyraz równy jest zero, bo znika E_x . Jedyną składową rotacji \mathbf{E} , która nie jest równa zero, jest składowa z -owa, która równa jest $\partial E_y / \partial x$. Przyrównując wszystkie trzy składowe $\nabla \times \mathbf{E}$ do odpowiednich składowych wektora $\partial \mathbf{B} / \partial t$ możemy wyciągnąć następujący wniosek:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0, \quad (20.15)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (20.16)$$

Ponieważ składowe pola magnetycznego: x -owa i y -owa mają pochodne czasowe znikające, zatem odpowiadają stałemu polu magnetostatycznemu, które rozważaliśmy poprzednio. Ktoś mógł zostawić jakiś stały magnes w pobliżu obszaru, w którym rozchodzą się fale. Pominiemy te stałe pola i przyrównamy B_x i B_y do zera.

Nawiasem mówiąc, wniosek dotyczący znikania składowej B_x mogliśmy też wyciągnąć skądinąd. Ponieważ dywergencja pola \mathbf{B} równa jest zero (z trzeciego równania Maxwella), stosując to samo rozumowanie, którym posługiwaliśmy się powyżej w przypadku pola elektrycznego, stwierdzilibyśmy, że składowa podłużna pola magnetycznego nie wykazuje zmienności z współrzędną x . Ponieważ pomijamy takie jednorodne pola w naszych falowych rozwiązaniach, przyjelibyśmy $B_x = 0$. W płaskiej fali elektromagnetycznej pole \mathbf{B} , podobnie jak pole \mathbf{E} , musi być skierowane pod kątem prostym do kierunku rozchodzenia się fal.

Równanie (20.16) daje nam dodatkowy wynik, że jeżeli pole elektryczne ma tylko składową y , to pole magnetyczne ma tylko składową z . Tak więc pola \mathbf{E} i \mathbf{B} są do siebie *prostopadle*. Jest to właśnie dokładnie to, co napotkaliśmy w naszym szczególnym przypadku, który już rozważaliśmy.

Gotowi jesteśmy teraz posłużyć się ostatnimi równaniami Maxwella w próżni [równanie IV z układu równań (20.12)]. Pisząc równanie to w składowych, dostajemy

$$\left. \begin{aligned} c^2(\nabla \times \mathbf{B})_x &= c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ c^2(\nabla \times \mathbf{B})_y &= c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ c^2(\nabla \times \mathbf{B})_z &= c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} - c^2 \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

Z sześciu pochodnych pola \mathbf{B} tylko wyraz $\partial B_x / \partial x$ nie jest równy zeru. Tak więc te trzy równania dają nam po prostu

$$-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (20.18)$$

W wyniku całej naszej pracy stwierdziliśmy, że nie znika jedna tylko składowa każdego z pól \mathbf{B} i \mathbf{E} , oraz że składowe te muszą spełniać równania (20.16) i (20.18). Te dwa równania możemy połączyć w jedno, jeżeli zróżniczkujemy pierwsze względem x , a drugie względem t ; lewe strony tych dwu równań będą wtedy takie same (z dokładnością do czynnika c^2). Znajdujemy zatem równanie, które musi być spełnione przez składową E_y :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (20.19)$$

Takie samo równanie różniczkowe napotkaliśmy już poprzednio, rozważając rozchodzenie się dźwięku. Jest to równanie falowe dla fal jednowymiarowych.

Trzeba zwrócić uwagę na to, że podczas wyprowadzania tego równania znaleźliśmy coś *więcej* ponad to, co jest zawarte w równaniu (20.11). Równania Maxwella dostarczyły nam dodatkowej informacji, że pola elektromagnetyczne mają składowe skierowane jedynie pod kątami prostymi do kierunku rozchodzenia się fali.

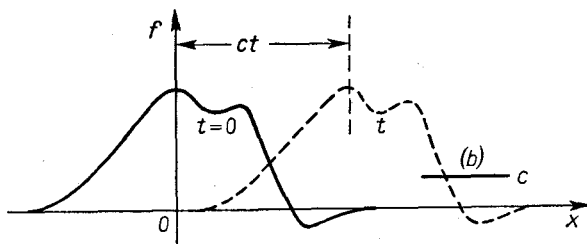
Dokonajmy jeszcze raz przeglądu tego, co wiemy na temat rozwiązań jednowymiarowego równania falowego. Jeżeli jakaś wielkość spełnia jednowymiarowe równanie falowe

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.20)$$

to jednym z możliwych rozwiązań jest funkcja $\psi(x, t)$ postaci

$$\psi(x, t) = f(x - ct), \quad (20.21)$$

zn. pewna funkcja *jednego* argumentu $(x - ct)$. Funkcja $f(x - ct)$ przedstawia zaburzenie pola o „sztywnym” kształcie w zmiennej x , która przemieszcza się w kierunku dodatnim osi x z prędkością c (patrz rys. 20.4). Jeżeli na przykład funkcja f ma maksimum, gdy jej argument równy jest zeru, to wtedy dla $t = 0$ maksimum ψ wypadnie w punkcie $x = 0$. Nieco później, powiedzmy dla $t = 10$, ψ będzie mieć maksimum dla $x = 10c$. W miarę upływu czasu maksimum przesuwa się ku dodatnim x z prędkością c .



20.4. Funkcja $f(x-ct)$ przedstawia pewien stały „kształt”, który wędruje ku dodatnim x z prędkością c .

Czasem wygodniej jest wyrazić to mówiąc, iż rozwiązanie jednowymiarowego równania falowego jest funkcją argumentu $(t-x/c)$. Jednakże znaczy to tyle samo, ponieważ każda funkcja $(t-x/c)$ jest też funkcją $(x-ct)$:

$$F(t-x/c) = F\left(-\frac{x-ct}{c}\right) = f(x-ct).$$

Pokażmy, że funkcja $f(x-ct)$ jest rzeczywiście rozwiązaniem równania falowego. Ponieważ jest ona funkcją tylko jednej zmiennej, a mianowicie zmiennej $(x-ct)$, oznaczmy przez f' pochodną f względem tej zmiennej, a przez f'' odpowiednio drugą pochodną f . Różniczkując wyrażenie (20.21) względem x dostajemy

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x-ct),$$

ponieważ pochodna $(x-ct)$ względem x wynosi 1. Druga pochodna ψ względem x równa jest oczywiście

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x-ct). \quad (20.22)$$

Obliczając pochodne ψ względem t dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= f'(x-ct)(-c), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= f''(x-ct)(+c^2) \end{aligned} \quad (20.23)$$

Widzimy, że ψ rzeczywiście spełnia jednowymiarowe równanie falowe.

Moglibyście się zdziwić: „Jeżeli mam równanie falowe, to skąd mam wiedzieć, że należy przyjąć $f(x-ct)$ za jego rozwiązanie? Nie lubię tych metod od końca. Czy nie ma jakiegoś sposobu rozwiązania *wprost* tego równania?” No, oczywiście, jeden z takich sposobów polega po prostu na znajomości rozwiązania. Można „przyrzędzić” pozornie bezpośrednią metodę, szczególnie zaś dlatego, że wiemy, jakie powinno być to rozwiązanie, ale z równaniem tak prostym jak nasze nie musimy się bawić w ciuciubabkę. Wkrótce

każdy to zrozumie, kiedy patrząc na równanie (20.20) niemal równocześnie dostrzeże funkcję $\psi = f(x-ct)$ jako jego rozwiązanie. (Podobnie jak teraz, gdy widzimy całkę z $x^2 dx$, wiemy od razu, że wynik brzmi $x^3/3$.)

W rzeczywistości powinniście dostrzegać nawet trochę więcej. Nie tylko dowolna funkcja argumentu $(x-ct)$ jest rozwiązaniem, ale także dowolna funkcja $(x+ct)$. Ponieważ równanie falowe zawiera jedynie c^2 , to zmiana znaku c nie prowadzi do żadnych zmian. I rzeczywiście, najogólniejszym rozwiązaniem jednowymiarowego równania falowego jest suma dwu dowolnych funkcji, jednej od argumentu $(x-ct)$, a drugiej — od argumentu $(x+ct)$:

$$\psi = f(x-ct) + g(x+ct). \quad (20.24)$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie równania przedstawia falę posuwającą się w dodatnim kierunku osi x , a drugi — dowolną falę posuwającą się w kierunku przeciwnym. Ogólne rozwiązanie jest superpozycją takich dwu fal, istniejących równocześnie.

Czytelnikowi pozostawiamy do przemyślenia zabawny problem. Weźmy funkcję ψ o następującej postaci:

$$\psi = \cos kx \cos kct.$$

Nie jest ona funkcją argumentu $(x-ct)$ ani $(x+ct)$. Mimo to można bez trudu wykazać, że jest ona rozwiązaniem równania falowego, podstawiając ją do równania (20.20). Czy możemy wobec tego powiedzieć, że ogólne rozwiązanie ma postać (20.24)?

Stosując nasze wnioski dotyczące rozwiązania równania falowego do składowej E_y , przekonujemy się, że wielkość ta może się zmieniać z x w dowolny sposób. Jednakże pola, które napotykamy w rzeczywistości, możemy zawsze uważać za sumę dwu zaburzeń o „sztywnych” kształtach. Jednym jest fala żeglująca w przestrzeni w jednym kierunku z prędkością c , przy czym przypisane tej fali pole magnetyczne jest prostopadłe do pola elektrycznego; drugim zaś jest fala podróżująca w przeciwnym kierunku z tą samą prędkością. Takie fale odpowiadają znanym nam falom elektromagnetycznym — światłu, falom radiowym, promieniowaniu podczerwonemu, nadfioletowemu, promieniowaniu rentgenowskiemu i tak dalej. W tomie I omówiliśmy już szczegółowo promieniowanie świetlne. Ponieważ wszystko, czego się wtedy dowiedzieliśmy, znajduje zastosowanie do dowolnej fali elektromagnetycznej, nie musimy tu się nimi zbyt szczegółowo zajmować.

Powinniśmy chyba zrobić kilka dalszych uwag na temat polaryzacji fal elektromagnetycznych. W naszym rozwiązaniu wybraliśmy przypadek szczególny, w którym pole elektryczne ma tylko składową y . Istnieje oczywiście inne rozwiązanie dla fal podróżujących w kierunku plus lub minus x , dla którego pole elektryczne ma tylko składową z . Ponieważ równania Maxwella są liniowe, to ogólne rozwiązanie dla fal jednowymiarowych poruszających się w kierunku x jest sumą fal E_y i fal E_z . Ogólne rozwiązanie przedstawiają następujące równania:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, E_y, E_z), & \mathbf{B} &= (0, B_y, B_z), \\ E_y &= f(x-ct) + g(x+ct), & cB_z &= f(x-ct) - g(x+ct), \\ E_z &= F(x-ct) + G(x+ct), & cB_y &= -F(x-ct) + G(x+ct). \end{aligned} \right\} \quad (20.25)$$

Dla takich fal elektromagnetycznych kierunek wektora \mathbf{E} nie jest stały, lecz obraca się w pewien dowolny sposób w płaszczyźnie yz . W każdym punkcie pole magnetyczne jest zawsze prostopadłe do pola elektrycznego i do kierunku rozchodzenia się fal.

Jeżeli są tylko fale poruszające się w jednym kierunku, powiedzmy w dodatnim kierunku osi x , to istnieje prosta reguła, która nam mówi, jaka jest względna orientacja pól elektrycznego i magnetycznego. Reguła jest następująca: iloczyn $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, który oczywiście jest wektorem skierowanym prostopadłe zarówno do \mathbf{E} , jak i do \mathbf{B} — wskazuje kierunek rozchodzenia się fal. Jeżeli pole \mathbf{E} można obrócić do pokrycia się z \mathbf{B} obrotem prawoskrętnym, to koniec wektora śruby wskazuje kierunek prędkości fali. (Zobaczmy dalej, że wektor $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ma szczególny sens fizyczny; jest to wektor, który opisuje strumień energii pola elektromagnetycznego.)

20-2. Fale trójwymiarowe

Przejdźmy teraz do omówienia przypadku fal trójwymiarowych. Widzieliśmy już, że wektor \mathbf{E} spełnia równanie falowe. Łatwo też można się przekonać, iż do tego samego wniosku możemy dojść wprost z równań Maxwella. Przypuśćmy, że punktem wyjścia jest dla nas równanie

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

i obliczmy rotację z obu stron:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (20.26)$$

Pamiętamy, że rotacja rotacji dowolnego wektora może być zapisana w postaci sumy dwu wyrazów, z których jeden zawiera dywergencję, a drugi — laplasjan:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

W próżni jednakże dywergencja \mathbf{E} znika, tak że w równaniu pozostaje tylko wyraz z laplasjanem. Co więcej, czwarte równanie Maxwella w próżni (20.12) mówi nam, że pochodna względem czasu z $\nabla \times \mathbf{B}$ równa jest drugiej pochodnej \mathbf{E} względem t :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Równanie (20.26) przechodzi więc w równanie

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

co właśnie jest trójwymiarowym równaniem falowym. Napisane w całym swym blasku równanie to głosi

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.27)$$

Jak będziemy szukać ogólnego rozwiązania tego równania? Odpowiedź brzmi: wszystkie rozwiązania trójwymiarowego równania falowego możemy przedstawić jako superpozycję rozwiązań jednowymiarowych, które już znaleźliśmy. Otrzymaliśmy równanie dla fal poruszających się w kierunku osi x , zakładając, że pole nie zależy od zmiennej y i od zmiennej z . Oczywiście, istnieją też inne rozwiązania, dla których pola nie zależą od x i od z i przedstawiają falę poruszającą się w kierunku osi y . Istnieją także takie rozwiązania, które nie zależą od x i od y i które reprezentują fale posuwające się równolegle do osi z . Ale w ogólnym wypadku, ponieważ zapisaliśmy nasze równania w postaci wektorowej, trójwymiarowe równanie falowe może mieć rozwiązania, które są falami płaskimi, poruszającymi się w dowolnym kierunku. I znów, ponieważ równania są liniowe, możemy mieć równocześnie tyle fal płaskich, ile chcemy, poruszających się w tyłuż dowolnych kierunkach. Tak więc najogólniejszym rozwiązaniem równania falowego jest superpozycja wszystkich rodzajów fal płaskich, poruszających się we wszystkich kierunkach.

Spróbujcie sobie wyobrazić, jak obecnie wyglądają pola elektryczne i magnetyczne w przestrzeni zawartej w naszej sali wykładowej. Przede wszystkim jest tu stałe pole magnetyczne; pochodzi ono od prądów płynących wewnątrz Ziemi — jest to stałe pole magnetyczne Ziemi. Następnie mamy tu pewne nieregularne, prawie statyczne pola elektryczne, wytworzone być może przez ładunki elektryczne wyprodukowane w czasie tarcia, skoro wiele osób kręci się w krzesłach i pociera rękawami marynarek o poręcz krzesła. Są tu także inne pola magnetyczne wytworzone przez oscylujące prądy w obwodach elektrycznych — pola, które zmieniają się z częstością 60 Hz, synchronicznie z prądnicą w Boulder Dam. Ale najbardziej interesujące są pola elektryczne i magnetyczne zmieniające się z wyższymi jeszcze częstościami. Gdy na przykład światło porusza się od okna do podłogi i od ściany do ściany, to oznacza to małe drgania pól elektrycznego i magnetycznego poruszające się z prędkością 300000 km/s. Są tu także fale podczerwone poruszające się od gorących części do zimnej tablicy. A zapomnieliśmy jeszcze o świetle nadfioletowym, o promieniach Röntgena i o falach radiowych podróżujących przez tę salę.

Przez salę przefruwają fale elektromagnetyczne niosące muzykę jazzową. Są tu fale zmodulowane przez szereg impulsów reprezentujących obrazy wypadków zachodzących w innych częściach świata, albo wyimaginowanych aspiryn rozpuszczających się w wyimaginowanych żołądkach.*¹⁾ Aby udowodnić realność tych fal, wystarczy włączyć odpowiednie urządzenie elektroniczne, które przemieni te fale w obrazy i dźwięki.

*¹⁾ Aluzja do reklam telewizyjnych. (Przyp. tłum.)

Jeżeli posuniemy się aż do zbadania nawet najmniejszych drgań, to znajdziemy niezmiernie słabe fale elektromagnetyczne pochodzące z bardzo odległych źródeł, docierające do tej sali po przebyciu niezmiernych odległości. Mamy tu teraz małe oscylacje pola elektrycznego, którego grzbiety są odległe od siebie o kilkadziesiąt centymetrów i które dobiegają do nas z miejsca odległego o miliony kilometrów, przesyłane na Ziemię przez *Marinera II*, statek kosmiczny, który właśnie minął Wenus. Jego sygnały niosą streszczenie informacji, które zebrał on na temat planet (informacji zebranych znów przy użyciu fal elektromagnetycznych, które przywędrowały do statku kosmicznego z planety).

Są tu także niesłychanie drobne drgania pól elektrycznego i magnetycznego, którymi są fale wytworzone o miliardy lat świetlnych stąd — w galaktykach znajdujących się w najodleglejszych zakątkach Wszechświata. Że to prawda, przekonano się „wypełniając salę drutami” — budując anteny tak wielkie, jak ta sala. Takie fale radiowe mogą być wykryte nawet wtedy, gdy pochodzą z miejsc znajdujących się poza zasięgiem największych teleskopów optycznych. Nawet te teleskopy optyczne są po prostu zbieraczami fal elektromagnetycznych. To, co nazywamy gwiazdami, to tylko wnioski, wnioski wyciągnięte z jedynej fizycznej rzeczywistości, która od nich do nas dotarła — ze starannej analizy nieskończonych skomplikowanych falowań pól elektrycznego i magnetycznego docierających tu do nas na Ziemię.

To oczywiście nie wszystko; są pola wytwarzane przez błyskawice odległe o kilometry stąd, pola naładowanych cząstek promieniowania kosmicznego, które śmigają przez salę, i więcej jeszcze, i więcej. Cóż za skomplikowanym tworem jest pole elektryczne w przestrzeni, dookoła was! A przecież zawsze spełnia ono trójwymiarowe równanie falowe.

20-3. Wyobraźnia naukowa

Poprosiłem, abyście sobie wyobrazili pola elektryczne i magnetyczne. Coście w związku z tym zrobili? Czy wiecie, jak to zrobić? Jak ja sobie wyobrażam pole elektryczne i magnetyczne? Co ja rzeczywiście widzę? Jakie są wymagania naukowej wyobraźni? Czy to jest coś innego niż próba wyobrażenia sobie sali pełnej niewidzialnych aniołów? Nie, to nie to samo, co wyobrażanie sobie niewidzialnych aniołów. Wymaga to wyobraźni znacznie wyższego stopnia, żeby pojąć pole elektromagnetyczne, niż żeby pojąć niewidzialne anioły. Dlaczego? Ponieważ, jeżeli chcemy wyobrazić sobie niewidzialne anioły, wszystko, co trzeba zrobić, to zmienić ich właściwości *odrobinkę* — robię je trochę widzialnymi, a wtedy mogę zobaczyć kształty ich skrzydeł i ciał i aureoli. Skoro już udało mi się wyobrazić sobie widzialnego anioła, potrzebna abstrakcja, która polega na wzięciu prawie niewidzialnych aniołów i wyobrażeniu sobie, że są one zupełnie niewidoczne, jest stosunkowo łatwa. Tak więc powiadacie: „Panie profesorze, proszę mi dać przybliżony opis fal elektromagnetycznych, nawet, gdyby miał on być nieco niedokładny, tak żebym i ja mógł je zobaczyć tak dobrze, jak mogę zobaczyć prawie niewidoczne anioły. Wtedy zmodyfikuję ten obraz, aby dostać potrzebną abstrakcję.”

Przykro mi, że nie mogę tego dla was uczynić. Nie wiem jak to zrobić. Nie mam żadnego obrazu tego pola elektromagnetycznego, który by był w jakimś sensie dokładny.

Znam pole elektromagnetyczne od długiego czasu — byłem 25 lat temu w tym samym położeniu, w jakim wy jesteście teraz, i mam 25 lat więcej doświadczenia dotyczącego myślenia o tych kołyszących się falach. Gdy zaczynam opisywać pole magnetyczne poruszające się w przestrzeni, mówię o polach E i B i faluję swoimi ramionami, a wy gotowi jesteście pomyśleć, że ja jestem w stanie zobaczyć te fale. Powiem wam, co ja widzę. Widzę coś w rodzaju niewyraźnych, mglistych, wijących się linii — tu i ówdzie jest na nich napisana litera E lub B i być może niektóre z tych linii mają na sobie strzałki — strzałka tu i strzałka tam, która zanika, gdy się jej zaczynam za bardzo przyglądać. Gdy mówię o polach mknących w przestrzeni, panuje we mnie potworny zamęt symboli, których używam od opisu przedmiotów oraz samych tych przedmiotów. W gruncie rzeczy nie jestem w stanie przedstawić takiego obrazka, który by nawet w przybliżeniu był podobny do prawdziwych fal. Tak więc jeżeli macie jakieś trudności z wytworzeniem sobie takiego obrazu, nie powinniście się martwić, że trudność ta jest czymś nienormalnym.

Nasza wiedza stawia wyobraźni straszliwe wymagania. Wymagana siła wyobraźni jest znacznie, znacznie większa niż ta, która była potrzebna przy pewnych dawnych ideach. Idee współczesne jest sobie znacznie trudniej wyobrazić. A przecież mamy wiele narzędzi. Posługujemy się matematycznymi równaniami i regułkami i rysujemy mnóstwo obrazków. A z czego sobie zdaję sprawę teraz, gdy mówię o polu elektromagnetycznym w przestrzeni? Widzę coś w rodzaju superpozycji wszystkich wykresów, jakie w związku z tym kiedykolwiek narysowałem. Nie widzę małych wiązek linii pola biegnących w przestrzeni, ponieważ dręczy mnie myśl, że gdybym poruszał się z inną prędkością, wiązki by znikły. Nawet nie widzę zawsze pól elektrycznego i magnetycznego, ponieważ czasem myślę, że powinienem rysować obrazki dla potencjału wektorowego i skalarnego, gdyż są one być może najważniejsze z fizycznego punktu widzenia wśród tego co drga i faluje.

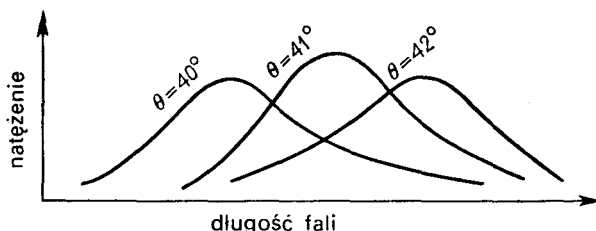
Powiecie: być może jedyną nadzieją jest przyjąć punkt widzenia matematyki. Ale cóż to jest takiego matematyczny punkt widzenia? Z matematycznego punktu widzenia mamy wektor pola elektrycznego i wektor pola magnetycznego w każdym punkcie w przestrzeni; znaczy to że mamy sześć liczb przyporządkowanych każdemu punktowi. Czy możecie sobie wyobrazić sześć liczb przyporządkowanych każdemu punktowi w przestrzeni? To za trudne. Czy możecie sobie wyobrazić choćby *jedną* liczbę przyporządkowaną każdemu punktowi? Ja nie mogę! Mogę wyobrazić sobie coś takiego jak temperatura w każdym punkcie przestrzeni. To wydaje mi się zrozumiałe. Jest tam zimno i ciepło, zmieniające się od punktu do punktu. Ale uczciwie mówię, że nie mogę zrozumieć idei *liczby* w każdym punkcie.

A więc być może powinniśmy zadać takie pytanie: czy możemy sobie przedstawić pole elektryczne trochę podobnie jak temperaturę, powiedzmy tak, jak odkształcenie w kawałku galarety? Przypuśćmy, że należy zacząć od przedstawienia sobie świata jako przestrzeni wypełnionej delikatną galaretą i że pola reprezentują pewne odkształcenia — powiedzmy rozciąganie i skręcanie — tej galarety. Wtedy moglibyśmy zobaczyć pole. Po „ujrzeniu” zaś do czego jest ono podobne, moglibyśmy abstrahować od owej galarety. Przez wiele lat tak właśnie próbowano czynić. Maxwell, Ampère, Faraday i inni próbowali pojąć pole elektromagnetyczne właśnie w ten sposób. (Czasami nazywali oni tę galaretę „eterem”.) Ale okazało się, że próba wyobrażenia sobie pola elektromagnetycznego w ten

sposób rzeczywiście była przeszkodą na drodze postępu. Na nieszczęście musimy się ograniczać do abstrakcji, do posługiwania się przyrządami przy wykrywaniu pola, do posługiwania się symbolami matematycznymi przy opisie pola, itd. Mimo to jednak w pewnym sensie pola są rzeczywiste, ponieważ potem, kiedy już zakończyliśmy manipulację równaniami matematycznymi — robiąc czy też nie robiąc żadnych obrazków, czy próbując uwidocznić całą rzecz — możemy przecież wykonać przyrządy, które będą wykrywać sygnały z *Marinera II* i wynajdywać galaktyki odległe o miliardy kilometrów i tak dalej.

Całe to zagadnienie wyobraźni w nauce często jest źle rozumiane przez ludzi z innych dyscyplin naukowych. Próbuja oni testować naszą wyobraźnię w następujący sposób. Mówią: „Tu oto jest rysunek człowieka w jakiejś tam sytuacji. Czy możesz sobie wyobrazić, co się teraz zdarzy?” Gdy zaś mówimy: „nie mogę sobie wyobrazić”, ludzie ci mogą sobie pomyśleć, że mamy słabą wyobraźnię. Przeoczają oni fakt, że wszystko, co *wolno* nam sobie wyobrazić w nauce, musi być *zgodne z wszystkim, co już wiemy*: że pola elektryczne i magnetyczne, o których mówimy, nie są po prostu pomysłem, który nas nawiedził w szczęśliwej chwili i który możemy kształtować, jak chcemy, ale ideami, które muszą być zgodne ze wszystkimi prawami fizyki dotychczas znanymi. Nie możemy sobie pozwolić na to, aby poważnie wyobrażać sobie coś, co jawnie jest w sprzeczności ze znanymi prawami przyrody. A więc nasz rodzaj wyobraźni zakłada całkiem trudną grę. Musimy sobie wyobrażać coś, co jeszcze nigdy przedtem nie było widziane, ani nikt nigdy o tym nie słyszał. A zarazem myśli nasze muszą być wciśnięte jakby w obcisły żakiet, żeby się tak wyrazić: muszą być ograniczane przez warunki, które pochodzą z naszej wiedzy o tym, jaką to przyroda jest naprawdę. Zagadnienie stworzenia czegoś nowego, a jednocześnie zgodnego ze wszystkim, co widziano dotychczas, jest skrajnie trudne.

Skoro jestem przy tym temacie, chciałbym zastanowić się nad tym, czy kiedykolwiek będzie można wyobrazić sobie *piękno*, którego nie można zobaczyć. To jest interesujący problem. Gdy patrzemy na tęczę, wydaje się nam piękna. Każdy, kto ją widzi, mówi: „Oo, tęcza.” (Widzicie, jak naukowo podchodzę do tematu. Boję się powiedzieć, że coś jest piękne, dopóki nie mam doświadczalnej metody zdefiniowania tego czegoś.) Ale jak moglibyśmy opisać tęczę, gdybyśmy byli ślepi? *Jesteśmy ślepi*, gdy mierzymy współczynnik odbicia promieniowania podczerwonego w chlorku sodu albo też gdy mówimy o częstości fal nadbiegających z pewnej galaktyki, której nie możemy zobaczyć. Wtedy wykonujemy jakiś wykres. Dla tęczy, na przykład, wykres taki przedstawiałby natężenie promieniowania jako funkcję długości fali mierzone przy użyciu spektrofotometru dla każdego kierunku na niebie. Ogólnie rzecz biorąc, taki pomiar dawałby raczej krzywą płaską. Wtedy pewnego dnia ktoś by wykrył, że w pewnych warunkach pogody i dla pewnych kątów na niebie widmo natężenia jako funkcja długości fali zachowuje się dziwnie: jest tam jakieś wzniesienie. Gdy kąt nachylenia przyrządu ulega zmianie tylko trochę, maksimum owego wzniesienia przenosi się od jednej długości fali do innej. Wówczas pewnego dnia w jakimś przeglądzie fizycznym dla ślepców, ktoś mógłby opublikować nudny artykuł specjalistyczny zatytułowany: „Natężenie promieniowania jako funkcja kąta w pewnych warunkach pogody”. W artykule tym mógłby się pojawić wykres taki jak na naszym rys. 20.5. Autor, być może, zauważyłby, że przy większych kątach więcej promieniowania przypada dla dużych długości fal, a dla mniejszych kątów maksimum promie-



20.5. Natężenie fal elektromagnetycznych jako funkcja długości fali dla trzech kątów (mierzonych od kierunku przeciwnego w stosunku do Słońca), obserwowana jedynie w pewnych warunkach meteorologicznych

niowania wypada dla fal krótszych. (Z naszego punktu widzenia powiedzielibyśmy, że światło widziane pod kątem 40° jest przeważnie zielone, a pod kątem 42° — przeważnie czerwone.)

Ale czy jesteśmy zdania, że wykres przedstawiony na rys. 20.5 jest piękny? Zawiera on znacznie więcej szczegółów, niż to, co dostrzegamy patrząc na tęczę, ponieważ nasze oczy nie mogą rozpoznać dokładnego kształtu widma. Jednakże oko znajduje tęczę piękną. Czy mamy dość wyobraźni, by dostrzec w liniach spektralnych to samo piękno, które widzimy patrząc bezpośrednio na tęczę? Nie wiem.

Ale przypuśćmy, że mam wykres współczynnika odbicia dla kryształu chlorku sodu jako funkcję długości fali w podczerwieni, a także jako funkcję kąta. Wyobrażałbym sobie, jak to by się przedstawiało moim oczom, gdyby mogły one widzieć w podczerwieni — byłaby tam być może jakaś lśniąca, świetlista „zielen”, pomieszana z odbiciami od powierzchni w kolorze „metalicznej czerwieni”. To byłoby coś pięknego, ale nie wiem, czy będę mógł kiedykolwiek spojrzeć na wykres współczynnika odbicia NaCl zmierzonego przy użyciu pewnych przyrządów i powiedzieć, że ma on to właśnie piękno.

Z drugiej strony, nawet jeżeli nie możemy dostrzec piękna w poszczególnych wynikach pomiarów, możemy już twierdzić, że widzimy pewne piękno w równaniach, które opisują ogólne prawa fizyki. Tak na przykład jest coś pięknego w regularności występowania wielkości x , y , z i t w równaniu falowym (20.9). A ta miła symetria sugeruje umysłowi, że jest jeszcze większe piękno, które łączy się z czterema wymiarami, z możliwością jakiejś czterowymiarowej symetrii przestrzeni, z możliwością badania tego wszystkiego i rozwijania szczególnej teorii względności. Z równaniami kojarzy się zatem mnóstwo intelektualnego piękna.

20-4. Fale kuliste

Widzieliśmy, że istnieją takie rozwiązania równania falowego, które odpowiadają falom płaskim, i że dowolną falę elektromagnetyczną możemy przedstawić w postaci superpozycji wielu fal płaskich. W pewnych szczególnych wypadkach jest jednak dogodniej opisywać pole fal w innej postaci matematycznej. Chcemy teraz omówić teorię fal kulistych, tzn. fal, dla których powierzchnie kuliste rozchodzą się z pewnego centrum.

Gdy rzucicie kamień do jeziora, zmarszczki na wodzie rozchodzą się w postaci fal kolistych na powierzchni — są to fale dwuwymiarowe. Fala kulista jest czymś podobnym, tyle że rozchodzi się w trzech wymiarach.

Zanim zaczniemy opisywać fale kuliste, zajmiemy się przez chwilę matematyką. Przypuśćmy, że mamy funkcję, która zależy tylko od odległości radialnej r od pewnego środka, innymi słowy — funkcję kulistosymetryczną. Nazwijmy tę funkcję $\psi(r)$, gdzie przez r rozumiemy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

odległość od owego środka. Aby znaleźć, jaka funkcja $\psi(r)$ spełnia równanie falowe, będziemy potrzebowali wyrażenia na laplasjan od ψ . Chcemy więc znaleźć sumę drugich pochodnych ψ względem x , y i z . Będziemy się posługiwać oznaczeniem $\psi'(r)$ dla oznaczenia pochodnej ψ względem r i odpowiednio ψ'' dla drugiej pochodnej ψ względem r .

Przede wszystkim znajdziemy pochodne względem x . Pierwsza pochodna wynosi

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial x} = \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial x},$$

druga pochodna ψ względem x równa jest

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi'' \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \psi' \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

Możemy obliczyć pochodne cząstkowe r względem x ze wzorów

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right).$$

Tak więc druga pochodna ψ względem x wynosi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \psi'. \quad (20.28)$$

Podobnie

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \psi', \quad (20.29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \psi'. \quad (20.30)$$

Laplasjan jest sumą tych trzech pochodnych. Pamiętając, że $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, otrzymujemy

$$\nabla^2 \psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r). \quad (20.31)$$

Często wygodniej jest zapisać tę tożsamość w następującej postaci:

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\psi). \quad (20.32)$$

Wykonując różniczkowanie wskazane w związku (20.32) widzimy, że prawa strona tego związku jest taka sama jak w związku (20.31).

Jeżeli chcemy rozważać pola o symetrii kulistej, które mogą się przenosić jako fale kuliste, musimy za naszą wielkość polową przyjąć funkcję zarówno r , jak i t . Przypuśćmy, że pytamy wobec tego, które funkcje $\psi(r, t)$ są rozwiązaniami trójwymiarowego równania falowego

$$\nabla^2 \psi(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(r, t) = 0. \quad (20.33)$$

Ponieważ funkcja $\psi(r, t)$ zależy od współrzędnych przestrzennych jedynie poprzez r , możemy posłużyć się równaniem dla laplasjanu, które dopiero co wyprowadziliśmy, (20.32). Dokładniej jednak, skoro funkcja ψ jest także funkcją t , musimy pisać pochodne względem r jako pochodne cząstkowe. Wówczas równanie falowe przechodzi w równanie

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0.$$

Musimy teraz rozwiązać to równanie, które się wydaje znacznie bardziej skomplikowane niż w przypadku fal płaskich. Ale zauważmy, że jeżeli pomnożymy to równanie przez r , dostaniemy

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi) = 0. \quad (20.34)$$

Równanie to mówi nam, że funkcja $r\psi$ spełnia jednowymiarowe równanie falowe w zmiennej r . Posługując się ogólną zasadą, której znaczenie tak często podkreślaliśmy (takie same równania mają zawsze takie same rozwiązania), przekonujemy się, że jeżeli $r\psi$ jest funkcją tylko argumentu $(r-ct)$, to będzie ono rozwiązaniem równania (20.34). A więc wiemy już, że fale kuliste muszą mieć postać

$$r\psi(r, t) = f(r-ct).$$

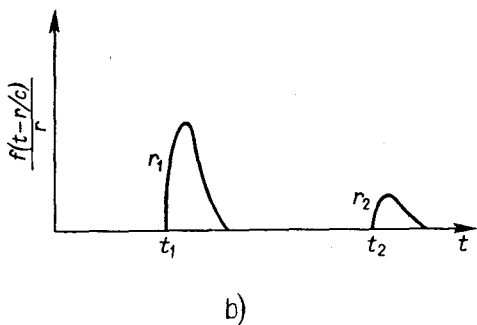
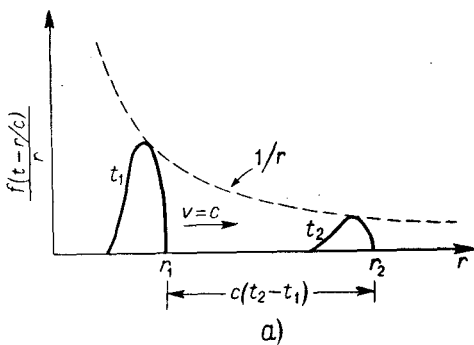
Jak widzieliśmy poprzednio, moglibyśmy równie dobrze powiedzieć, że $r\psi$ może mieć postać

$$r\psi = f(t-r/c).$$

Dzieląc przez r przekonujemy się, że wielkość polowa ψ (czykolwiek ta wielkość jest naprawdę) ma następującą postać:

$$\psi(r, t) = \frac{f(t-r/c)}{r}. \quad (20.35)$$

Taka funkcja reprezentuje ogólną falę kulistą, podróżującą z początku ($r=0$) z pręd-



20.6. Fala kulista $\psi = f(t-r/c)/r$. a. ψ jako funkcja r dla $t = t_1$ i ta sama fala w późniejszej chwili t_2 . b. ψ jako funkcja t dla $r = r_1$ i ta sama fala dla $r = r_2$

kością c . Jeśli zapomnimy na chwilę o r w mianowniku, to amplituda tej fali jako funkcja odległości od początku ma w danym momencie ustalony kształt, który przesuwa się z prędkością c . Czynniki r w mianowniku mówi nam jednak, że amplituda fali zmniejsza się jak $1/r$ w miarę rozchodzenia się fali. Innymi słowy, w przeciwieństwie do fali płaskiej, której amplituda pozostaje stała, gdy fala się porusza, w przypadku fali kulistej amplituda stale maleje, jak pokazuje rys. 20.6. Zjawisko to możemy łatwo zrozumieć na podstawie prostego rozumowania fizycznego.

Wiemy, że gęstość energii w fali zależy od kwadratu amplitudy fali. W miarę rozchodzenia się fali, jej energia rozpościera się po coraz to większych powierzchniach proporcjonalnie do kwadratu promienia r . Jeżeli energia całkowita jest zachowana, to gęstość energii musi maleć jak $1/r^2$, a więc amplituda fali powinna zanikać jak $1/r$. Zatem równanie (20.35) jest sensowną postacią dla fali kulistej.

Pominęliśmy drugie możliwe rozwiązanie jednowymiarowego równania falowego:

$$r\psi = g(t+r/c),$$

czyli

$$\psi = \frac{g(t+r/c)}{r}.$$

To także przedstawia falę kulistą, ale taką, która porusza się ku środkowi — od dużych r .

Chcemy teraz zrobić specjalne założenie. Powiadamy, bez żadnego dowodu, że fale wytwarzane przez źródło są to tylko te fale, które poruszają się od środka ku dużym r . Ponieważ wiemy, że fale są wywołane ruchem ładunków, skłonni jesteśmy sądzić, że fale rozchodzą się od ładunków. Byłoby dziwne wyobrazić sobie, że zanim uruchomiliśmy ładunki, fala kulista wyruszyła z nieskończoności i przybyła do ładunków dokładnie w tej chwili, w której się one zaczęły poruszać. Jest to możliwe rozwiązanie, ale doświadczenie mówi, że kiedy ładunki są przyspieszane, fale poruszają się od ładunków na zewnątrz. Choć równania Maxwella dopuściłyby każdą z tych dwu możliwości, będziemy do równań tych *dość dodawać jeszcze coś* na podstawie doświadczenia: że tylko fala rozchodząca się ma „sens fizyczny”.

Powinniśmy jednak zauważyć, że to dodatkowe założenie ma interesujące konsekwencje: usuwamy z równań Maxwella symetrię względem czasu, która w nich występuje. Początkowe równania dla pól \mathbf{E} i \mathbf{B} oraz równania falowe z nich wyprowadzone miały tę własność, że jeżeli zmieniamy znak t , to równanie nie ulega zmianie. Równania te mówią, że dla każdego rozwiązania odpowiadającego fali biegnącej w jednym kierunku istnieje równie poprawne rozwiązanie odpowiadające fali poruszającej się w kierunku przeciwnym. Nasze postanowienie, że będziemy rozważać jedynie fale kuliste rozchodzące się, jest ważnym założeniem dodatkowym. [Starannie zbadano sformułowanie elektrodynamiki, w którym tego dodatkowego założenia nie ma. Ku naszemu zdziwieniu w wielu okolicznościach *nie* prowadzi to do fizycznie bezsensownych wyników, ale odciągnęłoby nas zbyt daleko na bezdroża, gdybysmy chcieli już teraz rozważać te idee. Powiemy o nich więcej w rozdz. 28*¹].

Musimy jeszcze skomentować inny ważny moment. W naszym rozwiązaniu dla fali wychodzącej (20.35) funkcja ψ jest nieskończona dla $r=0$. To jest trochę dziwne. Chcielibyśmy mieć takie rozwiązanie falowe, które by było wszędzie gładkie. Nasze rozwiązanie musi fizycznie przedstawiać sytuację, w której w początku układu jest pewne źródło. Innymi słowy, niechcący zrobiliśmy pewien błąd. Nie rozwiązaliśmy równania falowego swobodnego (20.33) *wszędzie*; rozwiązaliśmy je z zerem po prawej stronie wszędzie, z wyjątkiem początku układu. Nasz błąd zakradł się do rozważań, ponieważ pewne kroki w naszym wyprowadzeniu nie są poprawne, gdy $r=0$.

Pokażmy, że łatwo można popełnić ten sam błąd w zagadnieniu elektrostatycznym. Przypuśćmy, że potrzebne jest nam rozwiązanie równania dla potencjału elektrostatycznego w próżni, $\nabla^2\varphi=0$. Laplasjan jest równy zeru, ponieważ zakładamy, że nie ma nigdzie ładunków. Ale co z kulistosymetrycznym rozwiązaniem tego równania, które ma być pewną funkcją φ , zależną jedynie od r ? Posługując się wzorem (20.32) dla laplasjanu dostajemy

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi) = 0.$$

Mnożąc to równanie przez r dostajemy równanie, które można łatwo scałkować:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\varphi) = 0.$$

Całkując po raz pierwszy względem r obliczamy pierwszą pochodną $r\varphi$, która równa jest stałej (oznaczymy ją a):

$$\frac{d}{dr} (r\varphi) = a.$$

Całkując drugi raz dostajemy $r\varphi$ w postaci

$$r\varphi = ar + b,$$

gdzie b jest inną stałą całkowania. Tak więc przekonał się, że następujące φ jest po-

*¹ W przekładzie polskim rozdział ten znajdzie się w 2 części tomu II (Przyp. red. wyd. polskiego).

tencjałem elektrostatycznym w próżni:

$$\varphi = a + \frac{b}{r},$$

Coś tu wyraźnie jest nie w porządku. W obszarze, w którym nie ma ładunków elektrycznych, znamy rozwiązanie dla potencjału; potencjał ten jest wszędzie stały. Odpowiada to pierwszemu wyrazowi w naszym rozwiązaniu. Ale mamy także drugi wyraz, który mówi nam, że jest jakiś wkład do potencjału, który się zmienia jak $1/r$. Wiemy jednak, że taki potencjał odpowiada ładunkowi punktowemu, umieszczonemu w początku układu. Tak więc, choć zdawało się nam, że rozwiązujemy zagadnienie dla potencjału w próżni, uzyskaliśmy rozwiązanie reprezentujące także pole ładunku punktowego. Czy widzicie podobieństwo tego, co się stało teraz, do tego, co się działo przed chwilą, gdy rozwiązywaliśmy równanie falowe? Gdyby rzeczywiście nie było ładunków ani prądów w początku układu, nie byłoby też kulistych fal wychodzących. Fale kuliste muszą być oczywiście wytwarzane przez jakieś źródła w początku układu. W następnym rozdziale będziemy badać związek między rozchodzącymi się falami kulistymi a prądami i napięciami, które je wytwarzają.

rozwiązania równań Maxwella z ładunkami i prądami

21-1. Światło a fale elektromagnetyczne^{*)}

W poprzednim rozdziale widzieliśmy, że wśród rozwiązań równań Maxwella znajdują się takie, które przedstawiają fale elektryczne i magnetyczne. Fale te odpowiadają zjawiskom radiowym, świetlnym, rentgenowskim i tak dalej, zależnie od długości fali. Zjawiska świetlne analizowaliśmy już dokładnie w tomie I. W tym rozdziale chcemy powiązać ze sobą te dwa kierunki badań — chcemy pokazać, że rzeczywiście równania Maxwella mogą stanowić podstawę dla naszego poprzedniego opisu zjawisk świetlnych.

Rozważając zjawiska świetlne zaczęliśmy od napisania równania dla pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek, który się porusza w dowolny sposób. Równanie to miało postać:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} \right], \quad (21.1)$$

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}.$$

[Patrz równanie (28.3) z tomu I (cz. 2).]

Jeżeli ładunek porusza się w dowolny sposób, to pole elektryczne, które znajdujemy *teraz* w pewnym punkcie, zależy tylko od położenia i od ruchu ładunku, ale nie od ruchu, który zachodzi *teraz*, i nie od obecnego położenia. Pole to zależy od położenia i od prędkości w chwili *wcześniejszej* — w chwili, która wyprzedza obecną o czas potrzebny do prze-

^{*)} Porównaj: Tom I, cz. 2, rozdz. 28 (*Promieniowanie elektromagnetyczne*), rozdz. 31 (*Skąd się bierze współczynnik załamania*), rozdz. 36 (*Mechanizm widzenia*).

bycia przez światło, biegnące z prędkością c , drogi od ładunku do punktu, w którym mierzymy pole. Innymi słowy, jeżeli chcemy znaleźć pole elektryczne w punkcie (1) w chwili t , musimy obliczyć położenie (2') ładunku oraz jego ruch w czasie $(t-r'/c)$, gdzie r' jest odległością od punktu (1) do położenia ładunku (2') w chwili $(t-r'/c)$. Znak prim ma przypominać, że r' jest tak zwaną „odległością opóźnioną” od punktu (2') do punktu (1), a nie rzeczywistą odległością punktu (2), położenia ładunku w chwili t , od punktu (1), w którym mierzymy pole (patrz rys. 21.1). Zauważmy, jakiej konwencji używamy teraz dla określenia kierunku wektora jednostkowego \mathbf{e}_r . W rozdziałach 28 i 36 tomu I (cz. 2) wygodnie było przyjąć, że wektor \mathbf{r} (a więc i \mathbf{e}_r) jest skierowany *ku* źródłu. Obecnie postępujemy podobnie jak przy omawianiu prawa Coulomba. Tam wektor \mathbf{r} był skierowany *od* ładunku umieszczonego w punkcie (2) *do* punktu, w którym mierzymy pole (1). Jedyna różnica oczywiście polega na tym, że nasz nowy wektor \mathbf{r} (i \mathbf{e}_r) jest równy staremu wektorowi \mathbf{r} ze znakiem minus.

Widzieliśmy również, że jeżeli prędkość v ładunku jest zawsze znacznie mniejsza od c i jeżeli rozważamy tylko punkty na dużych odległościach od ładunku, tak że jedynie ostatni wyraz we wzorze (21.1) odgrywa rolę, to możemy pola zapisać także w postaci

$$E = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \left[\begin{array}{l} \text{przyspieszenie ładunku w punkcie } (t-r'/c) \\ \text{zrutowane pod kątem prostym do } r' \end{array} \right] \quad (21.1')$$

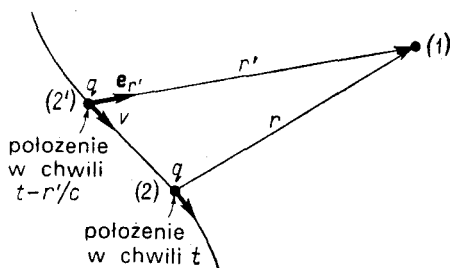
oraz

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}.$$

Przyjrzyjmy się dokładniej temu, co mówi pełne równanie (21.1). Wektor \mathbf{e}_r jest wektorem jednostkowym skierowanym do punktu (1) od położenia opóźnionego (2'). Pierwszy wyraz we wzorze (21.1) przedstawia zatem pole kulombowskie pochodzące od ładunku w jego położeniu opóźnionym; możemy je nazwać „opóźnionym polem kulombowskim”. Pole elektryczne zależy odwrotnie proporcjonalnie od kwadratu odległości i jest skierowane od opóźnionego położenia ładunku (to jest w kierunku wektora \mathbf{e}_r).

Ale to jest tylko pierwszy wyraz. Pozostałe wyrazy mówią nam, że prawa elektryczności *nie* orzekają, iż wszystkie pola są takie same jak pola statyczne, lecz tylko opóźnione (a takie stwierdzenie czasem się słyszy). Do „opóźnionego pola kulombowskiego” musimy dodać dwa inne wyrazy. Drugi wyraz powiada, że istnieje „poprawka” do opóźnionego pola kulombowskiego, która jest równa *szybkości zmian* opóźnionego pola kulombowskiego, pomnożonej przez r'/c , a więc przez opóźnienie. W pewnym sensie wyraz ten zmierza do *skompensowania* opóźnienia pochodzącego od pierwszego wyrazu. Pierwsze dwa wyrazy odpowiadają więc „opóźnionemu polu kulombowskiemu” ekstrapolowanemu w przyszłość — do chwili późniejszej o r'/c , tzn. *właśnie do chwili t !* Ekstrapolacja jest liniowa, tak jak gdybyśmy założyli, że

21.1. Pola w punkcie (1) w chwili t zależą od położenia (2') zajmowanego przez ładunek q w chwili $(t-r'/c)$



„opóźnione pole kulombowskie” nadal zmienia się z szybkością obliczoną dla ładunku w punkcie (2'). Jeżeli pole zmienia się powoli, to retardacją jest niemal całkowicie zniekształcona przez wyraz poprawkowy i te dwa wyrazy łącznie dają nam pole kulombowskie ładunku w punkcie (2), tzn. „natychmiastowe pole kulombowskie”, i to z bardzo dobrym przybliżeniem.

Istnieje wreszcie trzeci wyraz we wzorze (21.1), który zawiera drugą pochodną wektora jednostkowego e_r . W naszych badaniach zjawisk świetlnych skorzystaliśmy z faktu, że dla dużych odległości od ładunku dwa pierwsze wyrazy maleją jak odwrotność kwadratu odległości i stają się bardzo niewielkie w porównaniu z ostatnim wyrazem, który maleje tylko jak $1/r$. Tak więc skoncentrowaliśmy się całkowicie na ostatnim wyrazie i wykazaliśmy, że jest on (znowu dla dużych odległości) proporcjonalny do składowej przyspieszenia ładunku pod kątem prostym do linii obserwacji. [Co więcej, w przeważającej części naszych rozważań w tomie I przyjęliśmy, że ładunki poruszają się nierelatywistycznie. Efekty relatywistyczne rozważaliśmy tylko w jednym rozdziale, rozdz. 36 (t. I, cz. 2).]

Powinniśmy teraz spróbować powiązać ze sobą te dwie części naszych rozważań. Mamy równania Maxwella i mamy równość (21.1) przedstawiającą pole pochodzące od ładunku punktowego. Musimy zapytać, czy równania te są równoważne. Jeżeli możemy wyprowadzić równość (21.1) z równań Maxwella, to rzeczywiście rozumiemy związek między zjawiskami świetlnymi a elektromagnetyzmem. Jest to właśnie główny cel tego rozdziału.

Okazuje się, że nie zrobimy tego do końca. Rachunki stają się zbyt skomplikowane, abyśmy je mogli prześledzić we wszystkich straszliwych szczegółach. Ale podejmiemy dostatecznie blisko do rozwiązania zagadnienia, żebyście mogli bez trudu zobaczyć, jak ono wygląda. Brakować będzie tylko matematycznych szczegółów. Niektórzy z was mogą uważać, że matematyka w tym rozdziale jest raczej skomplikowana i mogą nie chcieć śledzić rozumowania zbyt dokładnie. Sądzymy jednak, że jest rzeczą ważną powiązać to, czego nauczyliście się już poprzednio, z tym, czego uczycie się teraz, lub przynajmniej wskazać, jak taki związek można uzyskać. Przeglądając poprzednie rozdziały zauważycie, że kiedykolwiek przyjmujemy jakieś stwierdzenie za punkt wyjścia dla dalszych rozważań, to zawsze wyjaśniamy troskliwie, czy jest to nowe „założenie”, które jest „prawem podstawowym”, czy też można je ostatecznie wydedukować z jakichś innych praw. Nie chcąc zagubić ducha tych wykładów powinniśmy wykazać, że istnieje związek między zjawiskami świetlnymi a równaniami Maxwella. Jeśli miejscami będzie to trudne — no, cóż, takie jest życie — nie ma innej metody.

21-2. Fale kuliste pochodzące ze źródła punktowego

Na podstawie rozważań przeprowadzonych w rozdz. 18 przekonaliśmy się, że równania Maxwella możemy rozwiązać przyjmując

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (21.2)$$

oraz

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (21.3)$$

gdzie wielkości φ i \mathbf{A} muszą być rozwiązaniami równań

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (21.4)$$

oraz

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}, \quad (21.5)$$

a także muszą spełniać warunek dodatkowy:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (21.6)$$

Znajdziemy teraz rozwiązanie równań (21.4) i (21.5). Aby to zrobić, musimy znaleźć rozwiązanie ψ równania

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -s, \quad (21.7)$$

gdzie s , które nazywamy źródłem, jest wielkością znaną. Oczywiście, s odpowiada ρ/ϵ_0 , a ψ odpowiada φ w równaniu (21.4), albo też s oznacza $j_x/(\epsilon_0 c^2)$, jeżeli ψ wynosi A_x , itp., ale na razie chcemy rozwiązać równanie (21.7) jako pewien problem matematyczny, bez względu na to, jaki fizyczny sens mają wielkości ψ i s .

Tam, gdzie ρ i \mathbf{j} są równe zero, a więc tam, gdzie mamy do czynienia, jak mówimy, z „próżnią” — potencjały φ i A oraz pola \mathbf{E} i \mathbf{B} wszystkie spełniają trójwymiarowe równanie falowe bez źródeł, którego postać matematyczna jest następująca:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (21.8)$$

W rozdziale 20 widzieliśmy, że rozwiązania tego równania mogą przedstawiać fale rozmaitego typu: fale płaskie w kierunku osi x , $\psi = f(t-x/c)$; fale płaskie w kierunkach y i z , albo w każdym innym kierunku; albo też fale kuliste postaci

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{f(t-r/c)}{r}. \quad (21.9)$$

(Rozwiązania możemy napisać w jeszcze inny sposób, np. jako fale cylindryczne, rozchodzące się od osi.)

Zaznaczaliśmy także, iż z punktu widzenia fizyki równanie (21.9) nie reprezentuje fali w próżni i że muszą wtedy istnieć ładunki w początku układu, które wytwarzają rozchodzącą się falę kulistą. Innymi słowy, wzór (21.9) jest rozwiązaniem równania (21.8) wszędzie, z wyjątkiem otoczenia punktu $r = 0$, gdzie musi ono przechodzić w rozwiązanie pełnego równania (21.7) z włączeniem pewnych źródeł. Zobaczmy teraz, jak to się dzieje. Jakie źródło s w równaniu (21.7) wyprodukowałoby falę taką, jak opisana wzorem (21.9)?

Przypuśćmy, że mamy fałę kulistą (21.9) i patrzymy, co się dzieje dla bardzo małych r . Wtedy opóźnienie $-r/c$ w funkcji $f(t-r/c)$ jest do pominięcia, pod warunkiem że f jest gładką funkcją i że wielkość ψ staje się równa

$$\psi = \frac{f(t)}{r} \quad (r \rightarrow 0). \quad (21.10)$$

Tak więc ψ jest po prostu jakby polem kulombowskim ładunku umieszczonego w początku układu i zmieniającego się w czasie. Znaczy to, że mała grudka ładunku o gęstości ρ , zamkniętego w bardzo małym obszarze w pobliżu początku układu, wytwarzałaby pole o potencjale

$$\varphi = \frac{Q/4\pi\epsilon_0}{r},$$

gdzie $Q = \int \rho dV$. Wiemy jednak, że takie φ spełnia równanie

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Wykonując takie same obliczenia moglibyśmy powiedzieć, że wielkość ψ z równania (21.10) spełnia równanie

$$\nabla^2 \psi = -s \quad (r \rightarrow 0), \quad (21.11)$$

gdzie funkcja s wiąże się z funkcją f wzorem

$$f = \frac{S}{4\pi},$$

przy czym

$$S = \int s dV.$$

Jedyna różnica polega na tym, że w ogólnym wypadku funkcja s , a wobec tego także S , może być funkcją czasu.

Ważne jest teraz to, że funkcja ψ spełnia równanie (21.11) dla małych r , a wobec tego spełnia także równanie (21.7). W miarę, jak zbliżamy się do początku układu, zależność ψ od r jak $1/r$ powoduje, że pochodne przestrzenne stają się bardzo duże. Ale pochodne czasowe zachowują swoje dawne wartości. [Są to po prostu pochodne czasowe funkcji $f(t)$.] Tak więc w miarę jak r zmierza do zera, wyraz $\partial^2 \psi / \partial t^2$ w równaniu (21.7) jest do pominięcia w porównaniu z wyrażeniem $\nabla^2 \psi$ i równanie (21.7) staje się równoważne równaniu (21.11).

Podsumujmy nasze wyniki. Jeżeli funkcja źródła $s(t)$ w równaniu (21.7) jest zlokalizowana w początku układu i ma całkowite natężenie równe

$$S(t) = \int s(t) dV, \quad (21.12)$$

to rozwiązaniem równania (21.7) jest

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{S(t-r/c)}{r}. \quad (21.13)$$

Jedynym skutkiem wprowadzenia wyrazu $\partial^2\psi/\partial t^2$ do równania (21.7) jest opóźnienie $(t-r/c)$ w potencjale quasi-kulobowskim.

21-3. Ogólne rozwiązanie równań Maxwella

Znaleźliśmy rozwiązanie równania (21.7) dla źródła „punktowego”. Następne pytanie, na które szukamy odpowiedzi, brzmi: Jakie jest rozwiązanie dla źródła rozciągniętego? Tu o odpowiedź jest łatwo. Możemy sobie wyobrazić, że dowolne źródło $s(x, y, z, t)$ jest zbudowane z sumy małych źródeł „punktowych”, jedno w każdym elemencie objętości dV , przy czym każde z nich ma natężenie $s(x, y, z, t) dV$. Ponieważ równanie (21.7) jest liniowe, wobec tego pole wypadkowe jest superpozycją pól pochodzących od wszystkich takich elementów źródłowych.

Robiąc użytek z wyników uzyskanych w poprzednim paragrafie [wzór (21.13)] wiemy, że pole $d\psi$ w punkcie (x_1, y_1, z_1) — lub, dla skrótów, w punkcie (1) — w chwili t , pochodzące od elementu źródła $s dV$ umieszczonego w punkcie (x_2, y_2, z_2) — lub, dla skrótów, w punkcie (2) — dane jest równaniem

$$d\psi(1, t) = \frac{s(2, t-r_{12}/c) dV_2}{4\pi r_{12}},$$

gdzie r_{12} jest odległością punktu (2) od (1). Dodając wkłady pochodzące od wszystkich części źródła, to znaczy całkując po całym obszarze, w którym $s \neq 0$, dostajemy

$$\psi(1, t) = \int \frac{s(2, t-r_{12}/c)}{4\pi r_{12}} dV_2. \quad (21.14)$$

Znaczy to, że pole w punkcie (1) w chwili t jest sumą wszystkich fal kulistych, które opuszczają elementy źródła w punkcie (2) w chwilach $(t-r_{12}/c)$. Jest to rozwiązanie naszego równania falowego dla dowolnego układu źródeł.

Widzimy teraz, jak otrzymać ogólne rozwiązanie dla równań Maxwella. Jeżeli przez ψ rozumiemy potencjał skalarny φ , to funkcja źródła s będzie miała postać ϱ/ϵ_0 . Możemy także zlecić funkcji ψ reprezentowanie dowolnej z trzech składowych potencjału wektorowego \mathbf{A} , zastępując wielkość s odpowiednią składową $\mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$. Tak więc, jeżeli znamy gęstość ładunku $\varrho(x, y, z, t)$ oraz gęstość prądu $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ wszędzie w przestrzeni, możemy od razu napisać rozwiązania równań (21.4) i (21.5). Są to

$$\varphi(1, t) = \int \frac{\varrho(2, t-r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 \quad (21.15)$$

oraz

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t-r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2. \quad (21.16)$$

Wówczas pola \mathbf{E} i \mathbf{B} możemy znaleźć przez zróżniczkowanie potencjałów, zgodnie z wzorami (21.2) i (21.3). [Nawiasem mówiąc, można sprawdzić, że wielkości φ i \mathbf{A} uzyskane z równań (21.15) i (21.16) rzeczywiście spełniają równość (21.6).]

Rozwiązaliśmy równania Maxwella. Jeżeli dane są dowolnie rozłożone prądy i ładunki, to możemy znaleźć potencjały wprost z powyższych całek, a następnie zróżniczkować je i dostać pola. A więc tym samym skończyliśmy z teorią Maxwella. Pozwala nam to na powrót znowu do naszej teorii światła, ponieważ aby nawiązać do naszych rozważań dotyczących światła, wystarczy tylko obliczyć pole elektryczne poruszającego się ładunku. Wszystko, co nam pozostaje do zrobienia, to wziąć poruszający się ładunek, obliczyć potencjały, a następnie zróżniczkować je i znaleźć pole \mathbf{E} ze wzoru $-\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$. Powinniśmy otrzymać wzór (21.1). Wymaga to wiele pracy, ale jest tu widoczna zasada.

Tak więc dotarliśmy do centrum wszechświata elektromagnetyzmu — do pełnej teorii elektryczności, magnetyzmu i światła; do pełnego opisu pól wytwarzanych przez poruszające się ładunki; — i jeszcze do czegoś więcej. Wszystko to zawarte jest tutaj. Tu oto jest struktura zbudowana przez Maxwella w całej swej mocy i pięknie. Jest to prawdopodobnie jedno z największych dokonań fizyki. Aby przypomnieć, jakie znaczenie ma ta teoria, napiszemy wszystkie wzory ujmując je razem w ramkę.

Równania Maxwella:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ich rozwiązania:

$$\mathbf{E} = - \nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2$$

21-4. Pola oscylującego dipola

Nie doczekaliśmy się jeszcze wypełnienia naszej obietnicy wyprowadzenia równania (21.1) dla pola elektrycznego poruszającego się ładunku punktowego. Nawet te wyniki, które już uzyskaliśmy, nie pozwalają na łatwe wyprowadzenie tego wzoru. Nie znaleźliśmy równania (21.1) nigdzie w opublikowanej dotychczas literaturze, z wyjątkiem tomu I tych wykładów^{*}). A więc widzicie, że nie jest go łatwo wyprowadzić. (Pola poruszającego się ładunku były już oczywiście napisane w wielu innych równoważnych postaciach.) Musimy się tu ograniczyć po prostu do wykazania, że w kilku przykładach równania (21.15) i (21.16) dają te same wyniki, co i (21.1). Wykażemy przede wszystkim, że wzór (21.1) daje poprawne wyrażenia dla pól z jednym tylko zastrzeżeniem, że ruch cząstki jest nierelatywistyczny. (Ten właśnie przypadek obejmuje 90% lub więcej materiału, który przedstawiliśmy omawiając zjawiska świetlne.)

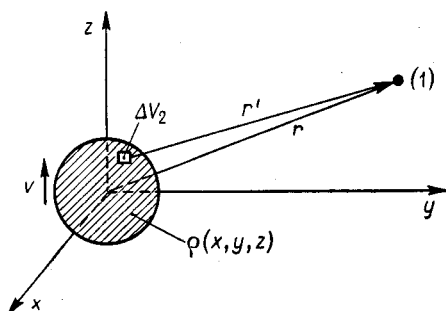
Rozważmy sytuację taką, w której mamy grudkę ładunku, poruszającą się w pewien sposób w małym obszarze i chcemy obliczyć pola w dużej od niej odległości. Zagadnienie to możemy sformułować inaczej, mówiąc, że szukamy pola w dowolnej odległości do ładunku punktowego, który drga w górę i w dół w ruchu o bardzo małej amplitudzie. Ponieważ światło jest zwykle emitowane przez obiekty obojętne elektrycznie, takie jak atomy, będziemy tu zakładać, że nasz drgający ładunek jest umieszczony w pobliżu równego sobie, lecz przeciwnego co do znaku spoczywającego ładunku. Jeżeli odległość między środkami ładunków wynosi d , to ładunki mają moment dipolowy równy $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, który będzie z założenia funkcją czasu. Powinniśmy oczekiwać, że jeżeli szukamy pól w pobliżu ładunków, to nie musimy się przejmować opóźnieniem; pole elektryczne będzie dokładnie takie samo, jak obliczone poprzednio dla dipola elektrostatycznego, oczywiście jeżeli posługujemy się chwilowym momentem dipolowym $\mathbf{p}(t)$. Ale jeżeli bardzo się oddalimy, powinniśmy szukać takiego wyrazu w polu, który maleje jak $1/r$ i zależy od przyspieszenia ładunku prostopadłego do linii obserwacji. Zobaczymy, czy możemy dostać taki wynik.

Zaczynamy od rozważenia potencjału wektorowego \mathbf{A} posługując się wzorem (21.16). Przypuśćmy, że nasz ładunek stanowi małą grudkę o gęstości $\rho(x, y, z)$, poruszającą się w każdej chwili z prędkością \mathbf{v} . Wówczas gęstość prądu $\mathbf{j}(x, y, z)$ będzie równa $\mathbf{v}\rho(x, y, z)$. Wygodnie będzie przyjąć nasz układ odniesienia tak, aby oś z była skierowana wzdłuż kierunku \mathbf{v} (rys. 21.2). Potrzebna jest nam wartość całki

$$\int \frac{\mathbf{j}(2, t-r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.17)$$

Jeżeli rozmiary naszego ładunku są rzeczywiście bardzo małe w porównaniu z r_{12} , to możemy przyjąć r_{12} w mianowniku równe r , tj. odległości do środka ładunku, i wynieść r przed znak całki. Następnie mamy zamiar także przyjąć $r_{12} = r$ w liczniku, choć to nie jest naprawdę całkiem w porządku. Nie jest to w porządku, ponieważ powinniśmy wziąć

^{*}) Wzór ten wyprowadził R. P. Feynman około roku 1950 i podał go w czasie swych wykładów jako podstawę dogodnej metody rozważania promieniowania synchronotronowego.



21.2. Potencjały w punkcie (1) dane są całkami z gęstości ładunku ρ .

gęstość \mathbf{j} , powiedzmy, na wierzchu grudki ładunku w czasie nieco innym niż na jej dnie. Gdy przyjmujemy $r_{12} = r$ w zależności $\mathbf{j}(t - r_{12}/c)$, bierzemy gęstość ładunku dla całego obszaru zajmowanego przez ładunek w tym samym czasie $(t - r/c)$. Jest to przybliżenie, które będzie dobre tylko wtedy, gdy prędkość v ładunku będzie znacznie mniejsza od c . A więc rachunek nasz jest nierelatywistyczny. Zastępując gęstość \mathbf{j} wielkością $\rho \mathbf{v}$ otrzymamy całkę (21.17) w postaci

$$\frac{1}{r} \int \mathbf{v} \rho(2, t - r/c) dV_2.$$

Ponieważ cały ładunek ma tę samą prędkość, więc całka ta wynosi po prostu \mathbf{v}/r razy całkowity ładunek q . Ale qv równe jest dokładnie $\partial \mathbf{p}/\partial t$, tj. szybkości zmian momentu dipolowego, która oczywiście jest obliczana w czasie opóźnionym $(t - r/c)$. Napiszemy to jako $\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$. Dostajemy w ten sposób wyrażenie dla potencjału wektorowego:

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{r}. \quad (21.18)$$

Wynik ten mówi nam, że prąd zmiennego dipola wytwarza potencjał wektorowy w postaci fal kulistych, których źródło ma natężenie $\dot{\mathbf{p}}/4\pi\epsilon_0 c^2$.

Możemy teraz obliczyć pole magnetyczne ze wzoru $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Ponieważ $\dot{\mathbf{p}}$ jest skierowane całkowicie wzdłuż osi z , więc \mathbf{A} ma tylko składową z -ową, a także są tylko dwie nie znikające pochodne w rotacji. Tak więc $B_x = \partial A_z/\partial y$ oraz $B_y = -\partial A_z/\partial x$. Popatrzmy najpierw na B_x :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{p}(t - r/c)}{r}. \quad (21.19)$$

Aby wykonać różniczkowanie, musimy pamiętać, że $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tak że

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \dot{p}(t - r/c) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \dot{p}(t - r/c). \quad (21.20)$$

Pamiętając, że $\partial r/\partial y = y/r$, dostajemy pierwszy wyraz we wzorze (21.20) w postaci

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y \dot{p}(t - r/c)}{r^3}, \quad (21.21)$$

który maleje jak $1/r^2$, a więc tak samo jak pole statycznego dipola (gdyż y/r jest stałe w ustalonym kierunku).

Drugi wyraz we wzorze (21.20) opisuje nowe efekty. Wykonując różniczkowanie dostajemy

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{cr^2} \ddot{p}(t-r/c), \quad (21.22)$$

gdzie \ddot{p} oznacza oczywiście drugą pochodną p względem t . Wyraz ten, który pochodzi z różniczkowania licznika, opisuje promieniowanie. Po pierwsze — reprezentuje on pole, które zanika z odległością tylko jak $1/r$. Po drugie — zależy on od *przyspieszenia* ładunku. Możecie już dostrzec, jak otrzymamy wynik taki, jak z równania (21.1'), opisującego promieniowanie świetlne.

Zbadajmy nieco bardziej szczegółowo, skąd się nam to promieniowanie wzięło — jest to ważny i interesujący wynik. Zaczynamy od wyrażenia (21.18), które wykazuje zależność od r jak $1/r$ i podobne jest wobec tego do potencjału kulombowskiego, z tym że w liczniku zawiera wyraz charakteryzujący opóźnienie. Dlaczego tak się dzieje, że gdy różniczkujemy względem współrzędnych przestrzennych, aby dostać pola, nie otrzymujemy po prostu pola $1/r^2$ — oczywiście z odpowiednim opóźnieniem w czasie?

Można to wyjaśnić w następujący sposób. Przypuśćmy, że pozwalamy naszemu dipolowi oscylować w górę i w dół ruchem sinusoidalnym. Mamy wtedy

$$p = p_z = p_0 \sin \omega t$$

oraz

$$A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega p_0 \cos \omega(t-r/c)}{r}.$$

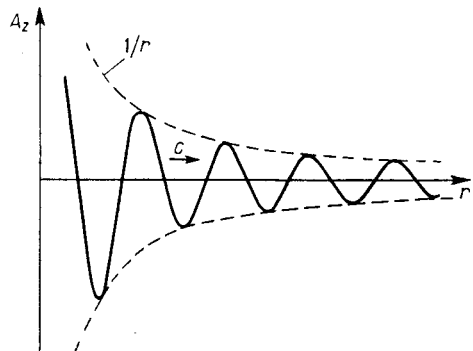
Jeżeli wykreślimy A_z jako funkcję r w danej chwili, dostajemy krzywą przedstawioną na rys. 21.3. Amplituda maleje jak $1/r$, ale poza tym mamy tu oscylacje w przestrzeni, które są zawarte pomiędzy krzywymi $1/r$ i $-1/r$. Pochodne względem współrzędnych przestrzennych są proporcjonalne do *nachylenia* krzywej przedstawiającej oscylacje. Z rysunku widzimy, że nachylenie to jest znacznie większe niż stromizna krzywej $1/r$. W gruncie rzeczy jest oczywiste, że dla danej częstości nachylenia w wierzchołkach są proporcjonalne do amplitudy fali, która zmienia się jak $1/r$. To właśnie wyjaśnia szybkość, z jaką maleje wyraz promienisty.

Wszystko to więc stąd się bierze, że zmienność *w czasie* w źródle jest tłumaczona na zmienność *w przestrzeni* w miarę rozchodzenia się fal, a pola magnetyczne zależą tylko od *przestrzennych* pochodnych potencjału.

Powróćmy teraz do naszych rozważań i skończmy obliczenia pola magnetycznego. Dla składowej B_x dostajemy dwa wyrazy (21.21) i (21.22), tak że

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{y \dot{p}(t-r/c)}{r^3} - \frac{y \ddot{p}(t-r/c)}{cr^2} \right].$$

21.3. Wartość A jako funkcja r w chwili t dla fali kulistej pochodzącej z oscylującego dipola



Wykonując takie same obliczenia dla składowej B_y , dostajemy

$$B_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{x \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3} + \frac{x \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr^2} \right].$$

Równie dobrze możemy powyższe wzory ująć razem w ładny wzór wektorowy:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (21.23)$$

Popatrzmy teraz na ten wzór. Przede wszystkim, jeżeli bardzo oddalamy się od początku układu, to tylko wyraz z $\dot{\mathbf{p}}$ się liczy. Kierunek pola \mathbf{B} dany jest przez iloczyn $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$, a więc pole to jest prostopadłe do promienia \mathbf{r} a także do przyspieszenia, jak przedstawia rys. 21.4. Tego właśnie oczekiwaliśmy; ten wynik także dostajemy z równania (21.1').

Popatrzmy teraz z kolei na to, do czego jeszcze nie przywykliśmy — na to, co się dzieje bliżej początku układu. W § 14-9 wyprowadziliśmy prawo Biota i Savarta dla pola magnetycznego prądu. Przekonaliśmy się tam, że element z prądem $\mathbf{j} dV$ daje wkład do pola magnetycznego równy

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (21.24)$$

Widzicie, że wzór ten ma bardzo podobną postać do pierwszego wyrazu w równaniu (21.23), jeżeli pamiętamy, że $\dot{\mathbf{p}}$ jest prądem. Ale jest też jedna różnica. W równaniu (21.23) prąd ma być obliczony w chwili $(t-r/c)$, co nie występuje w równaniu (21.24). W rzeczywistości wzór (21.24) jest jednak nadal bardzo dobrym przybliżeniem dla małych r , gdyż drugi wyraz w równaniu (21.23) zmierza w kierunku zniesienia efektu retardacyjnego w wyrazie pierwszym. Te dwa wyrazy łącznie dają wynik bardzo bliski wyrażenia (21.24), gdy r jest niewielkie.

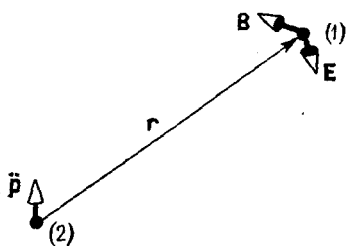
Możemy się o tym przekonać w sposób następujący. Gdy r jest małe, $(t-r/c)$ nie bardzo się różni od t , wobec czego możemy rozwinąć wyrażenie w nawiasie w równaniu (21.23) w szereg Taylora. Dla pierwszego wyrazu mamy

$$\dot{\mathbf{p}}(t-r/c) = \dot{\mathbf{p}}(t) - \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}}(t) + \text{itd.},$$

i w tym samym przybliżeniu w r/c

$$\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) = \ddot{\mathbf{p}}(t).$$

21.4. Pola promieniowania \mathbf{B} i \mathbf{E} oscylującego dipola



Gdy obliczamy sumę, dwa wyrazy zależne od $\ddot{\mathbf{p}}$ znoszą się i pozostaje prąd *neretardowany* $\dot{\mathbf{p}}$, tzn. $\dot{\mathbf{p}}(t)$ plus wyrazy rzędu $(r/c)^2$ lub wyższego [tj. $\frac{1}{2}(r/c)^2 \ddot{\mathbf{p}}$], które będą bardzo małe, gdy r będzie dostatecznie małe i $\dot{\mathbf{p}}$ nie zmieni się w istotny sposób w czasie r/c .

Tak więc równanie (21.23) daje pola bardzo podobne do pól w teorii z natychmiastowo rozchodzącymi się oddziaływaniami znacznie bardziej niż w teorii z natychmiastowymi oddziaływaniami z włą-

czonym opóźnieniem; efekty pierwszego rzędu względem opóźnienia nie pojawiają się, gdyż opisujący je wyraz jest skasowany przez drugi wyraz. Wzory statyczne są bardzo dokładne, znacznie dokładniejsze, niż byście mogli sądzić. Oczywiście, kompensacja ta zachodzi jedynie dla punktów leżących w pobliżu źródła. Dla punktów bardziej odległych poprawka staje się bardzo duża, gdyż opóźnienie wywiera bardzo silny wpływ na przebieg zjawiska i dostajemy ważny wyraz $1/r$ odpowiadający promieniowaniu.

Wciąż mamy przed sobą problem obliczenia pola elektrycznego i pokazania, że jest ono takie samo, jak to, które daje równanie (21.1'). Dla dużych odległości możemy łatwo dostrzec, że odpowiedź jest taka, jakiej oczekiwaliśmy. Wiemy, że z dala od źródeł, gdzie mamy falę rozchodzącą się, pola \mathbf{E} i \mathbf{B} są prostopadłe do siebie (i także do \mathbf{r}), jak wskazuje rys. 21.4, przy czym $cB = E$. A więc \mathbf{E} jest proporcjonalne do przyspieszenia $\ddot{\mathbf{p}}$, jak oczekiwaliśmy na podstawie wzoru (21.1').

Aby uzyskać pole elektryczne dla wszystkich odległości, musimy rozwiązać równanie dla potencjału elektrostatycznego. Gdy obliczaliśmy całkę z prądu dla potencjału wektorowego \mathbf{A} w celu otrzymania wzoru (21.18), dokonaliśmy przybliżenia polegającego na małej zmianie r w wyrazach zawierających opóźnienie. Taka metoda nie działałaby w przypadku potencjału elektrostatycznego, ponieważ dostalibyśmy wtedy $1/r$ pomnożone przez całkę z gęstości ładunku, która jest stała. Przybliżenie to jest zbyt grube. Musimy przejść do przybliżenia o rząd lepszego. Zamiast angażować się bezpośrednio w obliczenia poprawek wyższego rzędu, możemy zrobić coś innego — możemy wyznaczyć potencjał skalarny z równania (21.6), posługując się znanym już potencjałem wektorowym. Dywergencja \mathbf{A} w naszym przypadku wynosi po prostu $\partial A_z / \partial z$, ponieważ A_x i A_y są równe tożsamościowo zero. Różniczkując w ten sam sposób, jak robiliśmy to szukając pola \mathbf{B} , otrzymujemy

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\dot{\mathbf{p}}(t-r/c) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \dot{\mathbf{p}}(t-r/c) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{z \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3} - \frac{z \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr^2} \right].\end{aligned}$$

W notacji wektorowej

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Posługując się równaniem (21.6) dostajemy równanie dla φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c)\ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Całkując to względem t usuwamy po prostu jedną kropkę znad każdego p , tj.

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\mathbf{p} + (r/c)\dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (21.25)$$

(Stała całkowania odpowiadałaby pewnemu nałożonemu na nasze rozwiązanie polu sta-

tycznemu, które może oczywiście istnieć. Dla oscylującego dipola, który tu rozważamy, takie pole statyczne nie występuje.)

Możemy teraz obliczyć pole elektryczne \mathbf{E} ze wzoru

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Ponieważ poszczególne kroki tego rachunku są kłopotliwe, choć ideowo proste [pod warunkiem, że pamięta się, iż moment dipolowy $\mathbf{p}(t-r/c)$ oraz jego pochodne czasowe zależą od x, y, z poprzez opóźnienie r/c], podajemy tu po prostu ostateczny wynik:

$$\mathbf{E}(r, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \mathbf{p}^* - 3 \frac{(\dot{\mathbf{p}}^* \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{c^2} [\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) \times \mathbf{r}] \times \mathbf{r} \right\}, \quad (21.26)$$

gdzie

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}(t-r/c) + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}}(t-r/c). \quad (21.27)$$

Choć wzór ten ma raczej skomplikowaną postać, wynik możemy łatwo zinterpretować. Wektor \mathbf{p}^* jest to moment dipolowy opóźniony, a następnie „poprawiony” ze względu na opóźnienie, tak że dwa wyrazy zawierające \mathbf{p}^* dają dla małych r dokładnie statyczne pole dipola [patrz rozdz. 6, równanie (6.14)]. Gdy r jest duże, przeważa wyraz $\ddot{\mathbf{p}}$ i pole elektryczne jest proporcjonalne do przyspieszenia ładunków, będąc prostopadłe do \mathbf{r} i skierowane wzdłuż rzutu $\ddot{\mathbf{p}}$ na płaszczyznę prostopadłą do \mathbf{r} .

Wynik ten zgadza się z tym, co byśmy dostali z wzoru (21.1). Oczywiście, równanie (21.1) jest ogólniejsze, jest ono słuszne dla dowolnego ruchu, podczas gdy równanie (21.26) jest słuszne tylko dla małych ruchów, dla których możemy traktować opóźnienie r/c jako wielkość stałą dla całego źródła. Tak czy owak mamy teraz podbudowę dla naszych wszystkich poprzednich rozważań dotyczących zjawisk świetlnych [wyjawszy pewne kwestie omawiane w rozdz. 36 tomu I (cz. 2)], gdyż rozważania nasze opierały się wyłącznie na ostatnim wyrazie we wzorze (21.26). Rozważmy następnie, jak można dostać pola ładunków poruszających się szybciej [prowadzi to do efektów relatywistycznych przedstawionych w rozdz. 36 tomu I (cz. 2)].

21-5. Potencjały poruszającego się ładunku; ogólne rozwiązanie Liénarda i Wiecherta

W poprzednim paragrafie dokonaliśmy uproszczenia przy obliczaniu całki dla potencjału wektorowego \mathbf{A} przez rozważanie tylko małych prędkości. Ale czyniąc tak, pominieliśmy pewien ważny punkt, w dodatku taki, gdzie łatwo można popełnić omyłkę. Podejmiemy teraz od nowa obliczenia potencjałów poruszającego się ładunku — poruszającego się jakkolwiek, nawet z prędkościami relatywistycznymi. Z chwilą kiedy uzyskamy ten wynik, będziemy dysponowali pełnym obrazem zjawisk elektromagnetycznych ładunków elektrycznych. Przez obliczenie odpowiednich pochodnych będziemy mogli uzyskać nawet równanie (21.1). Obraz będzie pełny. A więc zabierzmy się do tego.

Spróbujmy obliczyć potencjał skalarny $\varphi(1)$ w punkcie (x_1, y_1, z_1) wytworzony przez ładunek *punktowy*, taki jak elektron poruszający się w dowolny sposób. Przez ładunek „punktowy” rozumiemy bardzo małą kulkę naładowaną, ściśniętą dowolnie mocno, przy czym ma ona pewną gęstość ładunku $\varrho(x, y, z)$. Potencjał φ obliczymy z równania (21.15):

$$\varphi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(2, t-r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.28)$$

Jak prawie każdemu mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka, potencjał jest równy po prostu całce z ϱ po takim ładunku „punktowym”, a więc całkowitemu ładunkowi q dzielonemu przez r , czyli

$$\varphi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} \quad (\text{źle!})$$

Przez r'_{12} rozumiemy wektor promienia wodzącego, skierowany od ładunku w punkcie (2) do punktu (1), w chwili $(t-r_{12}/c)$. Ten wynik jest fałszywy.

Poprawny wynik jest następujący:

$$\varphi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} \frac{1}{1-v_r/c}, \quad (21.29)$$

gdzie v_r jest składową prędkości ładunku równoległą do r'_{12} — a mianowicie ku punktowi (1). Pokażemy teraz, dlaczego tak jest. Aby można było łatwiej śledzić nasze rozważania, wykonamy najpierw obliczenia dla ładunku „punktowego”, który ma postać małego sześciangu, poruszającego się ku punktowi (1) z prędkością v , jak przedstawia rys. 21.5a. Niech długość boku sześciangu wynosi a . Przyjmiemy, że a jest znacznie, znacznie mniejsze od r_{12} , odległości od środka ładunku do punktu (1).

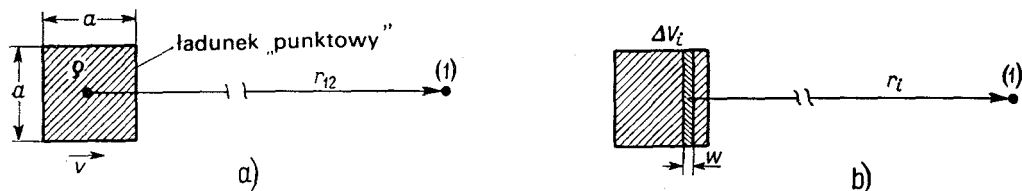
Aby obliczyć całkę (21.28), powrócimy do naszych podstawowych zasad. Zapiszemy ją mianowicie w postaci sumy

$$\sum_i \frac{\varrho_i \Delta V_i}{r_i}, \quad (21.30)$$

gdzie r_i oznacza odległość od punktu (1) do i -tego elementu objętości ΔV_i , ϱ_i zaś jest gęstością ładunku w chwili $t_i = (t-r_i/c)$. Ponieważ zawsze $r_i \gg a$, wygodnie będzie wybrać nasze ΔV_i w postaci cienkich prostopadłościennych warstw prostopadłych do r_{12} , jak przedstawia rys. 21.5b.

Przypuśćmy, że zaczynamy od elementów objętości ΔV_i o grubości znacznie mniejszej niż a . Poszczególne elementy przedstawiać się będą jak na rys. 21.6a, gdzie umieściliśmy ich więcej niż potrzeba do pokrycia całego ładunku. Ale *nie* pokazaliśmy tam ładunku i to z ważnego powodu. Gdzież mamy go narysować? Dla każdego elementu objętości ΔV_i mamy wziąć ϱ_i w czasie $t_i = (t-r_i/c)$, ale ponieważ ładunek się *porusza*, znajduje się on w *innym miejscu dla każdego elementu objętości* ΔV_i !

Powiedzmy, że zaczynamy od elementu objętości oznaczonego wskaźnikiem „1” na rys. 21.6a, tak wybranego, że w chwili $t_1 = (t-r_1/c)$ „tylny” brzeg ładunku zajmuje



21.5. a. Ładunek punktowy rozważany jako mały sześcian wypełniony ładunkiem i poruszający się z prędkością v ku punktowi (1). b. Element objętości ΔV_i używany do obliczenia potencjałów

położenie ładunku w czasie nieco *późniejszym*, $t_2 = (t - r_2/c)$, gdy ładunek będzie już w położeniu przedstawionym na rys. 21.6c. I tak dalej, dla ΔV_3 , ΔV_4 itd. Możemy teraz obliczyć sumę.

Ponieważ grubość każdego elementu ΔV_i wynosi w , jego objętość jest równa wa^2 . Wówczas każdy element objętości, który nakłada się na rozkład ładunku, zawiera pewien ładunek $wa^2\rho$, gdzie ρ jest gęstością ładunku wewnątrz sześcianu, którą uważamy za stałą. Kiedy odległość od ładunku do punktu (1) jest duża, popełniony przez nas błąd będzie do pominięcia, jeżeli przyjmemy, że wszystkie r_i w mianownikach są równe pewnej wartości średniej, powiedzmy opóźnionemu położeniu r' od środka ładunku. Suma (21.30) wynosi zatem

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{r'} \rho wa^2,$$

gdzie ΔV_N jest ostatnim elementem spośród ΔV_i , który nakłada się na rozkład ładunku, jak pokazuje rys. 21.6e. Suma wynosi więc

$$N \frac{\rho wa^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'} \left(\frac{Nw}{a} \right).$$

Ale wyrażenie ρa^3 jest po prostu równe całkowitemu ładunkowi q , zaś Nw jest równe długości b , jak pokazujemy na rys. 21.6e. Mamy więc

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left(\frac{b}{a} \right). \quad (21.31)$$

Co to jest b ? Jest to długość sześcianu zawierającego ładunek, *zwiększona* o odległość przebytą przez ładunek w czasie od $t_1 = (t - r_1/c)$ do $t_N = (t - r_N/c)$, który to czas wynosi

$$\Delta t = t_N - t_1 = (r_1 - r_N)/c = b/c.$$

Ponieważ prędkość ładunku równa jest v , przebyta odległość wynosi $v \Delta t = vb/c$. Ale długość b jest to ta właśnie odległość dodana do a :

$$b = a + \frac{v}{c} b.$$

Rozwiązując to równanie względem b , dostajemy

$$b = \frac{a}{1-v/c}.$$

Oczywiście, przez v rozumiemy tu prędkość w chwili opóźnionej $t' = (t-r'/c)$, co możemy zaznaczyć pisząc wskaźnik ret: $[1-v/c]_{\text{ret}}$, wobec czego nasze równanie dla potencjału przybiera postać:

$$\varphi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{1}{[1-v/c]_{\text{ret}}}.$$

Wynik ten zgadza się z naszym równaniem (21.29). Wyraz poprawkowy pochodzi stąd, że ładunek porusza się w czasie, gdy nasza całka „przesuwa się po ładunku”. Gdy ładunek porusza się ku punktowi (1), jego wkład do całki powiększa się w stosunku b/a . Zatem poprawna całka równa jest q/r' mnożonemu przez b/a , co wynosi $1/[1-v/c]_{\text{ret}}$.

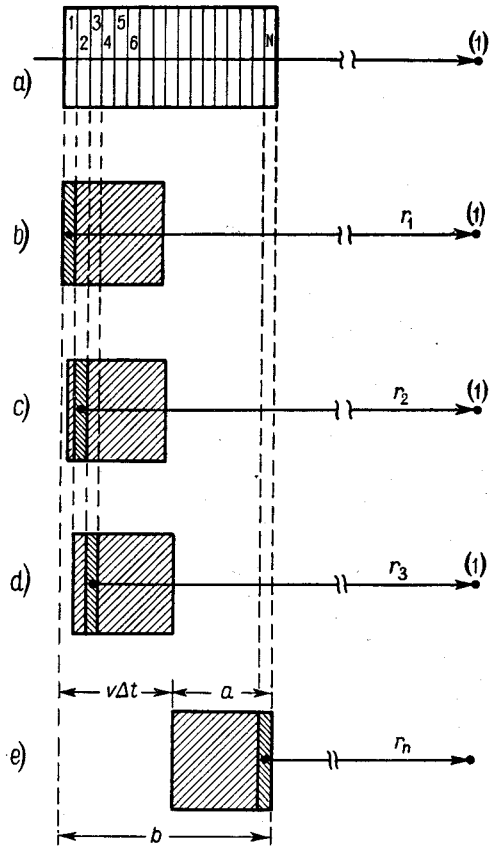
Jeżeli prędkość ładunku nie jest skierowana ku punktowi obserwacji (1), możemy łatwo dostrzec, że znaczenie ma tylko *składowa* tej prędkości w kierunku ku punktowi (1). Oznaczając tę składową v_r , dostajemy wyraz poprawkowy postaci $1/[1-v_r/c]_{\text{ret}}$. Co więcej, analiza wykonana przez nas przebiega tak samo dla rozkładu ładunku o *dowolnym* kształcie — nie musi to być sześcian. A wreszcie, ponieważ „rozmiary” ładunku a nie wchodzi do ostatecznego wyniku, widzimy, że musi on być słuszny nawet wtedy, gdy pozwolimy ładunkowi zmniejszyć się — nawet do punktu. Wynik ogólny mówi nam, że potencjał skalarny dla ładunku punktowego poruszającego się z dowolną prędkością wynosi

$$\varphi(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r' [1-v_r/c]_{\text{ret}}}. \quad (21.32)$$

Równość tę często piszemy w równoważnej postaci:

$$\varphi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [r - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c]_{\text{ret}}}, \quad (21.33)$$

gdzie \mathbf{r} jest wektorem skierowanym od ładunku do punktu (1), w którym obliczamy po-



21.6. Całkowanie funkcji $q(t-r'/c)dV$ dla poruszającego się ładunku

tencjał φ , a wszystkie wielkości w nawiasie mają mieć swoje wartości w chwili opóźnionej $t' = (t - r'/c)$.

To samo się dzieje, gdy obliczamy pole \mathbf{A} dla ładunku punkowego z równania (21.16). Gęstość prądu wynosi $\rho\mathbf{v}$ i całka po ρ jest taka sama jak obliczona przez nas całka dla potencjału φ . Potencjał wektorowy wynosi zatem

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0 c^2 [r - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c]_{\text{ret}}}. \quad (21.34)$$

Potencjały dla ładunku punkowego były po raz pierwszy w tej postaci rozważane przez Liénarda i Wiecherta i nazywamy je *potencjalami Liénarda–Wiecherta*.

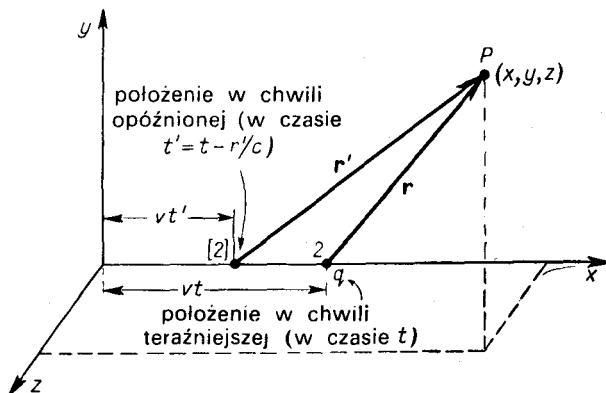
Aby zamknąć łańcuch wniosków wiodący do wzoru (21.1), trzeba teraz tylko obliczyć pola \mathbf{E} i \mathbf{B} z tych potencjałów (posługując się wzorami $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ oraz $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$). A to już tylko arytmetyka. Arytmetyka ta jest jednak nader skomplikowana, wobec czego nie będziemy tu podawać wszystkich szczegółów. Być może wystarczy wam nasze słowo, że równanie (21.1) jest równoważne potencjałom Liénarda–Wiecherta, które teraz wyprowadziliśmy.*)

21-6. Potencjały dla ładunku poruszającego się ze stałą prędkością. Wzór Lorentza

Chcemy teraz posłużyć się potencjalami Liénarda–Wiecherta w pewnym szczególnym wypadku — w celu znalezienia pól ładunku poruszającego się ze stałą prędkością po linii prostej. Zagadnienie to rozwiążemy potem jeszcze raz, korzystając z zasady względności. Wiemy już, jak wyglądają potencjały, gdy znajdujemy się w układzie spoczynkowym ładunku. Gdy ładunek się porusza, możemy sobie wszystko wyobrazić posługując się przekształceniem relatywistycznym od jednego układu do drugiego. Ale teoria względności miała swoje źródło właśnie w teorii elektryczności i magnetyzmu. Wzory dla transformacji [rozd. 15 tomu I (cz. 1)] odkrył Lorentz, gdy rozważał równania elektryczności i magnetyzmu. Tak więc, abyście mogli ocenić, skąd się to wszystko wzięło, chcielibyśmy pokazać, że równania Maxwella rzeczywiście prowadzą do przekształcenia Lorentza. Zaczniemy od obliczenia potencjałów ładunku poruszającego się ze stałą prędkością, przy czym za punkt wyjścia weźmiemy wprost równania Maxwella. Pokazaliśmy, że równania Maxwella wiodą do potencjałów dla poruszającego się ładunku, które uzyskaliśmy w poprzednim paragrafie. Tak więc, kiedy używamy tych potencjałów, posługujemy się równaniami Maxwella.

Przypuśćmy, że mamy ładunek poruszający się wzdłuż osi x z prędkością v . Potrzebne

*) Jeżeli macie wiele papieru i czasu, możecie spróbować sami sobie to wyprowadzić. Podsunęlibyśmy tylko dwie sugestie: po pierwsze, nie zapomnijcie, że pochodne r' mają skomplikowaną postać, gdyż zależą one od t' . Po drugie, nie próbujcie wyprowadzić wzoru (21.1), ale wykonajcie wszystkie różniczkowania w tym wzorze i następnie porównajcie wynik z tym, co dostajecie, obliczając pole \mathbf{E} wprost z potencjałów (21.33) i (21.34).



21.7. Szukanie w punkcie P potencjału ładunku poruszającego się ze stałą prędkością wzdłuż osi x

nam są potencjały w punkcie $P(x, y, z)$, jak pokazuje rys. 21.7. Jeżeli ładunek był w początku układu w chwili $t = 0$, to w chwili t znajduje się on w punkcie $x = vt$, $y = z = 0$. Musimy jednak znać jego położenie w chwili opóźnionej

$$t' = t - \frac{r'}{c}, \quad (21.35)$$

gdzie r' jest odległością do punktu P od ładunku w chwili opóźnionej. W chwili wcześniejszej t' ładunek znajdował się w punkcie $x = vt'$, wobec czego

$$r' = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}. \quad (21.36)$$

W celu obliczenia r' albo t' musimy powiązać to równanie z wzorem (21.35). Przede wszystkim wycinamy r' rozwiązując równanie (21.35) względem r' i podstawiając je do równania (21.36). Wtedy podnosząc obie strony do kwadratu dostajemy

$$c^2(t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2;$$

jest to równanie kwadratowe na t' . Porządkując w nim wyrazy względem potęg t' dostajemy

$$(v^2 - c^2)t'^2 - 2(xv - c^2t)t' + x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}. \quad (21.37)$$

Aby obliczyć r' , musimy to wyrażenie na t' podstawić do wzoru

$$r' = c(t - t').$$

Jesteśmy teraz gotowi do znalezienia potencjału φ z równania (21.33), które, ponieważ v

jest stałe, daje

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'/c)}. \quad (21.38)$$

Składowa \mathbf{v} w kierunku \mathbf{r}' wynosi $v(x-vt')/r'$, tak że $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'$ równa się po prostu $v(x-vt')$ i cały mianownik ma postać

$$c(t-t') - \frac{v}{c}(x-vt') = c \left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t' \right].$$

Podstawiając zamiast $(1-v^2/c^2)t'$ wyrażenie z równania (21.37) dostajemy dla φ wzór

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}.$$

Równanie to staje się bardziej zrozumiałe, jeżeli przepisze się je w postaci

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}}. \quad (21.39)$$

Potencjał wektorowy \mathbf{A} jest tu tym samym wyrażeniem z dodatkowym czynnikiem \mathbf{v}/c^2 :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \varphi.$$

W równaniu (21.39) możecie jasno dostrzec początki przekształcenia Lorentza. Gdyby ładunek był w początku swojego własnego układu spoczynkowego, jego potencjał wynosiłby

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Widzimy go w ruchomym układzie odniesienia i, jak się okazuje, trzeba przekształcić współrzędne w następujący sposób:

$$x \rightarrow \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$y \rightarrow y,$$

$$z \rightarrow z.$$

Jest to właśnie przekształcenie Lorentza, i to, co tu zrobiliśmy, jest w zasadzie powtórzeniem drogi przebytej przez Lorentza przy wyrowadzaniu tej transformacji.

Ale co to takiego ten dodatkowy czynnik $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, który występuje na początku równania (21.39)? A także, jak może się pojawić potencjał \mathbf{A} , skoro jest on wszędzie równy zeru w układzie spoczynkowym cząstki? Zobaczmy wkrótce, że wielkości \mathbf{A} i φ tworzą

razem czterowektor, podobnie jak pęd \mathbf{p} i energia całkowita U cząstki. Dodatkowy czynnik $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ w równaniu (21.39) jest to ten sam czynnik, który pojawia się zawsze, gdy przekształcamy składowe czterowektora — tak jak gęstość ładunku ρ przekształca się do $\rho/\sqrt{1-v^2/c^2}$. W gruncie rzeczy z wzorów (21.4) i (21.5) jest niemal widoczne, że wielkości \mathbf{A} i φ są składowymi czterowektora, ponieważ wykazaliśmy już w rozdz. 13, że \mathbf{j} i ρ są składowymi czterowektora.

Zagadnienia związane z relatywistycznymi przekształceniami w ramach elektrodynamiki podejmiemy bardziej szczegółowo w dalszej części wykładów; tu chcieliśmy tylko wykazać, w jak naturalny sposób równania Maxwella prowadzą do przekształcenia Lorentza. Nie będziecie się zatem dziwić, że prawa elektryczności i magnetyzmu są już poprawne z punktu widzenia teorii względności. Nie trzeba ich do niej przystosowywać, jak musieliśmy to uczynić w przypadku newtonowskich praw mechaniki.

zadania

Rozdział 1

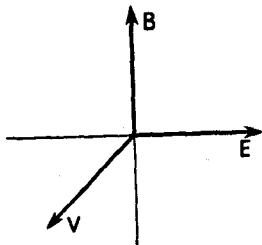
1.1. Siły elektryczne i grawitacyjne.

a. Ile musiałaby wynosić masa protonu, żeby siła grawitacyjna między dwoma spoczywającymi protonami była równa sile elektrycznej? Jak wielka byłaby ta masa w porównaniu z rzeczywistą masą protonu?

b. Ile wynosiłaby siła elektryczna między dwiema monetami dziesięciocentowymi^{*)}, umieszczonymi na przeciwległych krawędziach 10-metrowego stołu wykładowego, gdyby w nich ładunki jąder różniły się od ładunków elektronów o około 1%? Czy możesz wyobrazić sobie przedmiot, którego „ciężar” równa się tej sile?

1.2. Oszacuj z grubsza pracę, którą trzeba wykonać przeciwko sile *elektrycznej*, aby złożyć jądro uranu z dwóch równych części. Jaki byłby wynik w przypadku łączenia dwóch deuteronów dla zbudowania jądra helu? Wyraż również obie odpowiedzi w kilowatogodzinach na kilogram.

1.3. W miedzi na każdy atom przypada jeden elektron „przewodnictwa”. Jaka jest średnia prędkość elektronów przewodnictwa, gdy prąd o natężeniu 10 A przepływa przez drut miedziany o średnicy 2,5 mm? Czemu równa się w tym przypadku stosunek v^2/c^2 ? (Pamiętaj, że stosunek efektów „magnetycznych” do „elektrycznych” jest mniej więcej tego samego rzędu wielkości.)



1.4. W pewnym obszarze przestrzeni znajduje się jednorodne pole elektryczne E , które ma natężenie 10000 V/cm i które skierowane jest w kierunku dodatniej osi x . W tym

^{*)} Srebrna moneta o masie 2,54 g. (Przyp. tłum.)

samym obszarze znajduje się jednorodne pole magnetyczne \mathbf{B} w kierunku dodatniej osi y . Wiązka mezonów μ o prędkości $c/3$ przechodzi przez ten obszar *wzdłuż linii prostej* w kierunku dodatniej osi z .

a. Jakie jest natężenie pola \mathbf{B} ? (Mezon μ ma masę 207 razy większą od masy elektronu, a ładunek równy co do wielkości ładunkowi elektronu.)

b. Czy przy pomocy tego doświadczenia można rozstrzygnąć, czy ładunek mezonów jest dodatni czy ujemny?

1.5. W rozważanym obszarze przestrzeni istnieje jednorodne pole magnetyczne, takie że $B_x = 0$, $B_y = 0$ i $B_z = B_0$. Pole jest stałe w czasie, w rozpatrywanym obszarze nie ma też żadnych prądów ani pól elektrycznych.

Cząstkę o masie m i o dodatnim ładunku q puszczono z punktu $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ z prędkością v w kierunku dodatniej osi x . Naszkić tor cząstki i podaj jego wzór przy pomocy wielkości B_0 , m , v i q . (Założ, że $v/c \ll 1$.) Załóż następnie, że $B_x = 0$, $B_y = 0$, ale $B_z = B_0 + ax$. Dla wartości (ax) małych w porównaniu z B_0 , ale nie całkowicie do pominięcia, naszkicuj jakościowo zachowanie toru cząstki.*)

Wykaż, że przy takim założeniu pole jest niezgodne z równaniami Maxwella, jeśli pole zajmuje skończoną objętość w przestrzeni i, jak powyżej, zakłada się, że w tym obszarze nie ma prądów ani pola elektrycznego.

1.6. Cząstka o masie m i o dodatnim ładunku (q) znajduje się w punkcie $x = z = 0$, $y = a$ i porusza się z małą prędkością

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_x.$$

Na ładunek q działa inny, ujemny ładunek ($-Q$), unieruchomiony w początku układu, i jednorodne pole magnetyczne B_0 w kierunku dodatniej osi z . Jak silne musi być pole B_0 , żeby poruszająca się cząstka opisała wokół cząstki nieruchomej koło o promieniu a ? Wyłóż, dlaczego jeżeli natężenie pola magnetycznego jest inne niż to szczególne, prędkość cząstki jest funkcją tylko odległości od środka układu.

Naszkić z grubsza kilka cykli toru, po którym porusza się cząstka, jeśli zostanie wypuszczona z punktu $x = z = 0$, $y = a$ z prędkością równą zeru.

Rozdział 2

2.1. Drut miedziany o promieniu a pokryty jest równomiernie izolującą osłoną o zewnętrznym promieniu b . Drut ten przewodzi prąd elektryczny, który podnosi jego temperaturę do T_1 , podczas gdy zewnętrzna strona izolacji pozostaje w temperaturze T_2 , równej w przybliżeniu temperaturze pokojowej.

a. Jakie jest ∇T wewnątrz izolacji? Wyraż odpowiedź za pomocą wielkości a , b , T_1 i T_2 .

b. Ile wynosi różnica temperatur $(T_1 - T_2)$, jeśli prąd o 20A przesłany jest przez

* Patrz artykuł: Charpak i inni, *Physical Review Letters*, 6, 128 (1961), o zastosowaniu podobnego pola w ważnym doświadczeniu.

drut miedziany pokryty warstwą gumy o grubości 0,2 cm, której przewodnictwo cieplne wynosi $1,6 \cdot 10^{-3} \text{ W/cm} \cdot \text{deg}$?

2.2. Wykaż bezpośrednim rachunkiem, że

a. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.

b. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.

2.3. Pokaż, że jeżeli \mathbf{R} jest wektorem łączącym początek układu z punktem x, y, z , to

a) $\text{div} \mathbf{R} = 3$,

b) $\text{rot} \mathbf{R} = 0$,

c) $\nabla \cdot (\mathbf{R}/R^3) = 0$,

d) $\nabla \times (\mathbf{R}/R^3) = 0$,

e) $\nabla(1/R) = -\mathbf{R}/R^3$,

f) Z równań b) i (2.46) ze str. 42 wiemy, że wektor \mathbf{R} można przedstawić w postaci

$\mathbf{R} = \nabla \varphi$. Czym jest φ ?

2.4. Równania Maxwella mają postać następującą:

1. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$.

2. $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$.

3. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

4. $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = (\partial \mathbf{E}/\partial t) + (\mathbf{j}/\epsilon_0)$.

Zasadę zachowania ładunku można wyrazić w następujący sposób:

5. $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho/\partial t$.

a. Pokaż, że równanie 3 jest zgodne z równaniem otrzymanym z równania 2 po obliczeniu dywergencji obu jego stron.

b. Pokaż, że równanie 5 można otrzymać obliczając dywergencję po obu stronach równania 4 (tzn. że z równań Maxwella wynika zasada zachowania ładunku).

c. Pokaż, że w próżni ($\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$) pole \mathbf{E} spełnia równanie falowe

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Wskazówka. Oblicz rotację obu stron równania 2.

d. Pokaż, że w próżni pole \mathbf{B} spełnia takie samo równanie

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

c. Pokaż, że z równania 2 wynika, iż pole \mathbf{E} można przedstawić w postaci

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

gdzie \mathbf{A} jest potencjałem wektorowym zdefiniowanym równością $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Dlaczego wektor \mathbf{B} można wyrazić w ten sposób?

2.5. Prędkość sztywnego przedmiotu wirującego wokół dowolnej osi jest polem $\mathbf{v}(x, y, z)$. Wykaż, że

- a) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$,
 b) $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, gdzie $\boldsymbol{\omega}$ jest prędkością kątową.

2.6. Udowodnij bezpośrednim rachunkiem, że jeżeli \mathbf{A} jest stałym wektorem, a \mathbf{R} jest wektorem wodzącym, to

$$\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = 2\mathbf{A}.$$

Wiemy, że dla dowolnych wektorów zachodzi

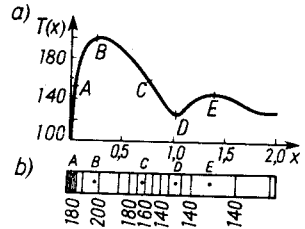
$$\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C},$$

co mogłoby nam sugerować, że

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{R}) - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{R} = 3\mathbf{A},$$

a to jest wynik fałszywy. Dlaczego podstawienie operatora ∇ w miejsce wektora \mathbf{B} daje fałszywy wynik?

2.7. Długi stalowy pręt poddany jest specjalnemu procesowi ogrzewania. W pewnym czasie t , podczas stygnięcia, rozkład temperatury $T(x)$ jest taki, jak na rys. a. Izotermie dla odstępów co 10°C pokazano na rys. b. Zakładamy przez cały czas, że temperatura zależy jedynie od x , odległości od jednego z końców pręta. W punktach A, B i C narysuj strzałki, których kierunki i długości reprezentować będą kierunki i wartości ∇T . W którym z pięciu oznaczonych punktów dywergencja strumienia ciepła \mathbf{h} jest największa? W ilu z pięciu oznaczonych punktów zachodzi $\nabla \times \mathbf{h} = 0$?



Rozdział 3

3.1.a. Równania Maxwella podano w postaci twierdzeń w rozdz. 1, a w postaci różniczkowej w rozdz. 2. Wykazać, że obie te ich postacie są równoważne.

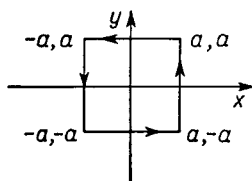
b. Wykaż, że równanie

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

jest równoważne zasadzie zachowania ładunku. W równaniu tym ρ oznacza ładunek na jednostkę objętości, a \mathbf{j} jest gęstością prądu elektrycznego.

3.2. Powierzchnię kuli pokrywa warstwa promieniotwórczej substancji, która emituje cząstki α o wysokiej energii. Przyjmijmy, że cząstki wysyłane są jedynie w kierunku radialnym na zewnątrz z powierzchni kuli. Mogłoby się wydawać, że ten strumień naładowanych cząstek tworzy prąd. Czy jednak prąd ten wytwarza pole magnetyczne?

3.3. Pole punktowego ładunku umieszczonego w początku układu ma postać



$$\mathbf{E} = \frac{K}{r^3} \mathbf{r}, \quad \text{gdzie} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mathbf{r} = ix + jy + kz,$$

a K jest stałą.

a. Oblicz strumień wektora \mathbf{E} przez powierzchnię kuli o promieniu a i o środku w początku układu.

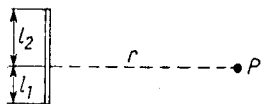
b. Użyj twierdzenie Gaussa do znalezienia związku między strumieniem wektora \mathbf{E} przez kulistą powierzchnię a całką objętościową z $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Czy możesz objaśnić swój wynik?

c. Oblicz całkę krzywoliniową z wektora \mathbf{E} wzdłuż podanej drogi (patrz rysunek) w płaszczyźnie xy .

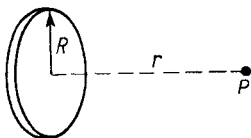
Postępuj twierdzeniem Stokesa do sprawdzenia wyniku.

3.4. Korzystając z wyników zad. 2.3 znajdź (bezużyteczny) wzór wyrażający objętość obszaru w postaci całki po powierzchni tego obszaru. Sprawdź swój wynik dla kuli i prostopadłościenniej kostki.

Rozdział 4



4.1. Znajdź potencjał φ w punkcie P (porównaj rysunek obok) odległym o r od naładowanego prostoliniowego odcinka o długości $(l_1 + l_2)$ metrów, którego gęstość ładunku wynosi λ C/m. Porównaj otrzymany wynik z potencjałem oczekiwanym w przypadku, gdy $r \gg (l_1 + l_2)$. Sprawdź swój wynik w granicy $r \ll (l_1 + l_2)$ porównując pole obliczone z potencjału φ z polem otrzymanym przy użyciu prawa Gaussa.



4.2. Oblicz pole elektryczne w punkcie P leżącym na osi cienkiego jednorodnie naładowanego krążka o promieniu R w odległości r od środka krążka.

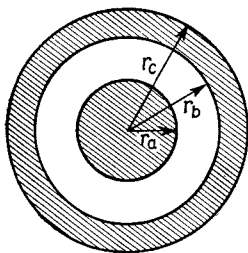
4.3. Ładunek q' rozmieszczony jest na jednej (wewnętrznej) z dwóch koncentrycznych metalowych kul (patrz rysunek obok); ładunek q rozmieszczony jest na zewnętrznej kuli.

a. Naszkicuj radialną składową pola elektrycznego jako funkcję odległości od środka.

b. Naszkicuj potencjał względem nieskończoności jako funkcję odległości od środka.

c. Jaki jest potencjał na powierzchni wewnętrznej kuli?

d. Wytłumacz, co się stanie z polem dla $r > r_c$ lub dla $r_c > r > r_b$, gdy ze środka usunie się kulę wewnętrzną.

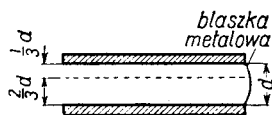


Rozdział 5

5.1. Pokaż, że potencjał elektryczny φ ma następującą ciekawą właściwość: średnia wartość φ po fikcyjnej kulistej powierzchni jest taka sama jak wartość φ w środku kuli, jeżeli wewnątrz kuli nie ma ładunków. Czy możesz wymyślić zastosowanie, w którym ta właściwość byłaby użyteczna?

5.2. Znajdź pole elektryczne wewnątrz, ale daleko od końców, niezwykle długiego walca, który ma wszędzie jednorodną gęstość ładunku. Zwróć uwagę na różnicę między otrzymanym wynikiem a polem wewnątrz równomiernie naładowanej kuli.

5.3. Dwie duże metalowe płyty utrzymywane są równoległe do siebie w odległości d i połączone na krawędziach metalową blaszką. Między płytami, w odległości $\frac{1}{3}$ od płyty górnej, umieszczono cienką warstwę tworzywa sztucznego, obdarzoną ładunkiem powierzchniowym σ_1 na jednostkę powierzchni. Oznacz przez E_1 i E_2 pola elektryczne odpowiednio przy górnej i dolnej płycie. Ile wynosi E_1 i E_2 ?

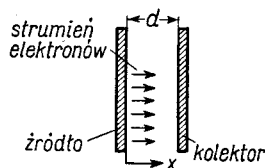


5.4. Znajdź ogólny wzór na składową x pola elektrycznego, w przypadku gdy gęstość ładunku ρ w całej przestrzeni zależy jedynie od x .

5.5. W lampie elektronowej elektrony emitowane są z gorącej metalowej płyty, a zbierane są przez płaską metalową płytę równoległą do źródła, znajdującą się w odległości d od niego. (Odległość d jest mała w porównaniu z szerokością płyt.) Potencjał elektryczny między płytami dany jest wzorem $\varphi = kx^{4/3}$, gdzie x jest odległością od źródła.

a. Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku na źródle? Na kolektorze?

b. Jaka jest objętościowa gęstość ładunku $\rho(x)$ dla $0 < x < d$?



5.6. Przewodnik na swojej powierzchni ma rozkład ładunku σ C/m²; σ nie musi być stałą. Pokaż, że siła działająca na ładunek zawarty w małym elemencie powierzchni dA jest prostopadła do powierzchni i dana jest wzorem $(\frac{1}{2}\sigma^2/\epsilon_0)dA$. (Czynnik $\frac{1}{2}$ jest poprawny. Wy tłumacz, skąd się on bierze.)

5.7. Maksymalne natężenie pola, które może wystąpić na powierzchni przewodnika znajdującego się w próżni, zanim rozpocznie się emisja pola, wynosi około 10^8 V/m. Zakładając, że ładunek powierzchniowy wytwarzający takie pole jest ujemny, porównaj liczbę dodatkowych elektronów na jednostkę powierzchni z liczbą atomów na jednostkę powierzchni. Porównaj siłę działającą na elektron w tym polu z siłą działającą na elektron w typowej atomowej odległości od protonu.

5.8. Ujemny mion (mezon μ) jest cząstką, która ma taki sam ładunek elektryczny jak elektron, lecz masę 207 razy większą. Gdy ujemny mion zostanie zatrzymany w materii, przyciągany jest przez jądro i może zastąpić jeden z elektronów w atomie, tworząc „mezonowy” atom. Z powodu swojej większej masy mion krąży bliżej jądra niż elektron i, w przypadku ciężkich jąder, w najniższym stanie energetycznym znajdzie się nawet wewnątrz jądra. Mion nie oddziałuje z materią jądrową siłami jądrowymi, a jedynie siłami elektrycznymi, widzi więc on jądro w postaci równomiernie naładowanej kuli. Za pomocą innych doświadczeń fizyki jądra ustalono, że promień jądra można wyrazić wzorem $R = R_0 A^{1/3}$, gdzie R_0 wynosi w przybliżeniu $1,2 \cdot 10^{-15} \text{m}$, a A jest łączną liczbą protonów i neutronów.

Rozważ model mezonowego atomu ołowiu, w którym mion oscyluje tam i z powrotem wzdłuż linii przechodzącej przez środek jądra. Jaka jest naturalna częstość ω tych oscylacji? Z rozdziału 41 tomu I (cz. 2) wiemy, że kwantowe stany energetyczne oscylatora harmonicznego przedzielone są odstępami energii $\hbar\omega$. Jaka jest różnica energii między dwoma najniższymi stanami w twoim modelu mezonowego atomu? Zaobserwowano w doświadczeniu, że gdy w ołowiu tworzone są mezonowe atomy, wysyłane są promienie Röntgena o energii 6 MeV. Czym wytłumaczyć to promieniowanie?

5.9. Wyobraź sobie, że Ziemia ma jednostajną gęstość i że wydrążono tunel wzdłuż jej średnicy. Wykaż, że jeśli byśmy wrzucili do tunelu jakiś przedmiot, oscylowałby on z okresem równym okresowi obiegu satelity krążącego wokół Ziemi przy samej jej powierzchni.

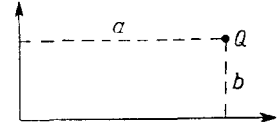
5.10. Wiadomo, że Ziemia wydziela w ciągu roku około $8 \cdot 10^{20} \text{ J}$ energii cieplnej. Zanim przestudiuje się szczegółowo termiczne modele, aby wyjaśnić to zjawisko, pożytecznie jest rozpatrzeć pewne modele, które są w sposób oczywisty zbyt uproszczone, lecz za których pomocą można jednak ocenić rząd wielkości tego promieniowania. Jako przykład rozważ możliwość tego, że całe ciepło wytworzone jest przez substancje promieniotwórcze, równomiernie rozmieszczone na Ziemi i w wyniku rozpadu wysyłające cząstki, których energia kinetyczna zamieniana jest w ciepło. Oceniono, że temperatura w środku Ziemi wynosi w przybliżeniu 2500°C i że przewodnictwo cieplne typowych składników Ziemi wynosi około $0,03 \text{ J/cm}\cdot\text{s}\cdot\text{deg}$. Czy opisany powyżej model jest zgodny z tak oszacowanymi wielkościami?

5.11. Dwa długie koncentryczne przewodzące walce są izolowane od siebie i naładowane. Daleko od końców, wewnętrzny walec ma efektywną gęstość ładunku $+\lambda_1$, a zewnętrzny — efektywną gęstość ładunku $+\lambda_2$ kulombów na jednostkę długości. Wewnętrzny walec ma promienie (wewnętrzny i zewnętrzny) r_1 i r_2 , podczas gdy walec zewnętrzny ma promienie r_3 i r_4 . Znajdź pole $E(r)$ w punkcie położonym blisko środka (tj. tam, gdzie wpływ końców walca można pominąć) i w punkcie na zewnątrz przy powierzchni zewnętrznego walca. Znajdź spadek potencjału między dwoma walcami. Opisz jakościowo wszelkie zmiany pola i potencjału powstałe, gdy

- promień r_1 maleje;
- promień r_2 rośnie,
- zewnętrzny przekrój wewnętrznego walca przyjmie postać kwadratu o bokach $2r$ (zakładając $\sqrt{2}r_2 < r_3$).

Rozdział 6

6.1. Posługując się metodą obrazów znajdź siłę działającą na ładunek Q umieszczony w odległościach a i b od dwóch przewodzących półpłaszczyzn ustawionych pod kątem prostym do siebie.



6.2. Cząstka o ładunku q , unieruchomiona w odległości x_0 od powierzchni dużej uziemionej płyty przewodzącej, zostaje nagle zwolniona. Cząstka ta przyciągana jest przez płytę i porusza się ku niej.

a. Jaka jest energia kinetyczna cząstki jako funkcja odległości x cząstki od płyty? (Pomiń straty energii, wywołane promieniowaniem.) Czy jest coś niefizycznego w twojej odpowiedzi?

b. Prawdziwą płytę metalową można uważać za płaszczyznę idealnie przewodzącą tylko dla odległości większych od odstępów atomowych, to jest od około 1Å . Oszacuj energię kinetyczną, z którą elektron dojdzie do przewodzącej płyty, jeśli puszczony został ze spoczynku w odległości 1 cm od płyty. Podaj odpowiedź w elektronowoltach.

6.3. Prostopadłościenne pudło z izolującego tworzywa sztucznego o wymiarach $1 \times 10 \times 100\text{ cm}$ zabezpieczone jest ładunkiem o jednostajnej gęstości $\rho\text{ C/cm}^3$. Rozważmy linię prostą, prostopadłą do ściany o wymiarach $10 \times 100\text{ cm}$ i przechodzącą przez środek pudła. Naszczuj z grubsza przebieg potencjału φ wzdłuż tej linii jako funkcję odległości od środka. Rozważ zakres odległości od $0,001\text{ cm}$ (tj. wewnątrz pudła) do odległości znacznie większych niż 100 cm ; odpowiedni byłby wykres $\log(\varphi)$ jako funkcji $\log(\text{odległość})$. Na tym samym wykresie naszczuj krzywą, która będzie reprezentowała wartość pola elektrycznego E .

6.4. Ziemia jest stale bombardowana promieniami kosmicznymi o wysokiej energii, które przychodzą spoza Układu Słonecznego. Ustalono na podstawie pomiarów przeprowadzanych na dużych wysokościach przy użyciu balonów i sztucznych satelitów, że promienie kosmiczne składają się niemal wyłącznie z protonów, chociaż znajduje się w nich niewielka część cząstek α , ciężkich jąder i elektronów. Średnia energia bombardujących protonów wynosi kilka miliardów elektronowoltów; natężenie strumienia protonów dochodzących do atmosfery ziemskiej wynosi przeciętnie jeden proton na cm^2 na sekundę.

Można się zastanawiać, jak długo musiałyby spadać na Ziemię ładunki z promienionowania kosmicznego, aby podnieść potencjał Ziemi do takiej wartości, przy której protony nie mogłyby już jej osiągnąć. Porównaj ten czas z wiekiem Ziemi, ocenianym na 5 miliardów lat. Jeżeli ten czas jest krótszy niż wiek Ziemi, stajemy wobec problemu: „Dlaczego promienionowanie kosmiczne nieustannie dociera jeszcze do Ziemi?”

6.5. Znajdź pojemność przypadającą na jednostkę długości długiego cylindrycznego kondensatora wykonanego z przewodzącego walca o promieniu a , umieszczonego współ-

osiowo wewnątrz walca o promieniu b . Określ jakościowo, co się stanie, jeżeli wystąpią niedoskonałości konstrukcji, w których wyniku powstanie ostrze wystające z zewnętrznej ściany.

- 6.6. a. Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku indukowanego na nienaładowanej, izolowanej, przewodzącej kuli, umieszczonej w odległości b od punktowego ładunku $+q$?
 b. Ile wynosi siła między ładunkiem i kulą, jeśli potencjał kuli wzrośnie do V ?

6.7. W rozdziale 6 stwierdzono, że można znaleźć pole na zewnątrz kuli o powierzchniowej gęstości ładunku, zmieniającej się jak $\cos \theta$, superponując pola dwóch z lekka przesuniętych, przeciwnie naładowanych kul. Wykaż, że tak jest i znajdź pole zarówno na zewnątrz, jak i wewnątrz kuli o powierzchniowej gęstości ładunku $\sigma(\theta) = A \cos \theta$, gdzie A jest stałą, a θ kątem biegunowym.

6.8. Pole dipola dane jest równaniami 6.14 i 6.15 (str. 102 i 103).

- a. Znajdź radialną i styczną składową pola w punkcie (r, θ, φ) .
 b. Wykaż, że pole elektryczne dipola ma ten sam kierunek i zwrot we wszystkich punktach dowolnej linii prostej, która przechodzi przez dipol.
 c. Jaki jest kierunek i względne natężenie pola \mathbf{E} w dowolnej ustalonej odległości od dipola dla punktów leżących pod kątami $0, \pi/4$ i $\pi/2$ względem kierunku \mathbf{p} ?

6.9. Dipol umieszczono w jednorodnym polu elektrycznym, które, zanim dipol został w nie wstawiony, miało natężenie E_0 .

- a. Jeżeli kierunek i zwrot dipola będzie zgodny z kierunkiem i zwrotem pola zewnętrznego, powstanie powierzchnia ekwipotencjalna, która otoczy dipol. Pokaż, że powierzchnia ta jest kulą i znajdź wartość momentu dipolowego, przy której kula będzie miała promień a .
 b. Naszkicuj pole elektryczne na zewnątrz kuli.
 c. Pokaż, jak zmieni się pole, gdy ciekłą przewodzącą powłokę kulistą o tym samym potencjale umieścimy tak, by pokrywała się z powierzchnią ekwipotencjalną.
 d. Jaka będzie gęstość ładunku na kuli?
 e. Jaki będzie moment dipolowy takiej gęstości ładunku?
 f. Jak można wykorzystać otrzymane powyżej wyniki?

6.10. Cząstka o elektrycznym momencie dipolowym \mathbf{p} umieszczona jest w odległości r od długiego drutu, który ma na jednostkę długości ładunek λ (λ jest stałą). Wektor momentu dipolowego leży w płaszczyźnie określonej przez drut i cząstkę.



- a. Jaka jest siła i moment skręcający działające na cząstkę, gdy moment \mathbf{p} jest prostopadły do drutu?
 b. Jaka jest siła i moment skręcający działające na cząstkę, gdy wektor momentu \mathbf{p} jest do drutu równoległy?

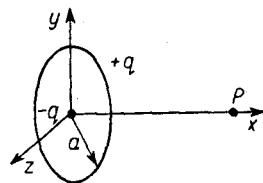
6.11. Znajdź potencjał jako funkcję odległości od bardzo dużej warstwy dipoli. Załóż, że na jednostkę powierzchni przypada Σ dipoli i że każdy dipol ma moment \mathbf{p} o kierunku normalnej do powierzchni.

6.12. Ładunek elektryczny $+q$ rozmieszczony jest równomiernie na cienkim pierścieniu o promieniu a . Pierścień leży w płaszczyźnie yz , a jego środek znajduje się w początku układu. W początku układu umieszczono ponadto ładunek $-q$.

a. Znajdź potencjał φ w punkcie P na osi x w odległości x od początku układu.

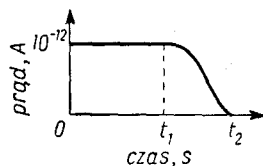
b. Jakie jest pole elektryczne w tym punkcie?

c. Jak zmienia się pole elektryczne przy zmianie x dla $x \gg a$? Jak wielka jest zmiana pola na dużych odległościach w porównaniu z polem dipola? Czy możesz to wytłumaczyć?



6.13. Kondensator płaski o odstępie płyt 1 cm i o pojemności 100 nF naładowano za pomocą baterii do różnicy potencjałów 10 V. Po naładowaniu baterię odłączono od kondensatora. Dolną płytę oświetlono światłem niebieskim, powodując emisję elektronów o energii kinetycznej w zakresie $0 \div 1,5$ eV. Okładki kondensatora tak naładowano, że elektrony były przyciągane przez górną płytę.

Całkowity prąd, który płynie do górnej płyty, jest przedstawiony na wykresie (rysunek obok) jako funkcja czasu. Ile czasu upłynie, zanim różnica potencjałów między płytami stanie się równa zero (czas t_1 na wykresie)? Jaka będzie różnica potencjałów po czasie dużo dłuższym niż czas t_2 ? Jak zmieni się wynik, jeśli odstęp między płytami zostanie *przed* naładowaniem kondensatora podwojony? Jak zmieni się wynik, jeśli odstęp między płytami zostanie podwojony *dopiero* wówczas, *gdy* kondensator zostanie w pełni naładowany, a bateria usunięta?



6.14. Izolujący pręt o długości 1 m i o promieniu 1 cm ma oś umieszczoną wzdłuż osi x a końce w punktach $x = -0,5$ m i $x = 0,5$ m. Całkowita objętościowa gęstość ładunku w pręcie wynosi $\rho = ar^2$, gdzie r jest odległością od osi pręta, a zaś jest stałą, która wynosi 2 C/m^{-5} .

a. Znajdź natężenie pola elektrycznego E w czterech punktach: $x = 0$; $z = 0$; $y = 0$; $0,5$; $1,0$ i $2,0$ cm. Załóż w tej części zadania, że pręt ma nieskończoną długość.

b. Dokonaj dokładnego oszacowania potencjału w punkcie $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ w stosunku do potencjału w nieskończoności. Określ niepewność swojego oszacowania i uzasadnij ją.

c. Czy potencjał w punkcie $x = 0,5$ m, $y = z = 0$ jest większy, mniejszy czy równy potencjałowi w początku układu?

Rozdział 7

7.1. a. Wykaż, że powierzchnie ekwipotencjalne potencjału wytworzonego przez dwa równoległe liniowe ładunki o przeciwnych znakach są walcami obrotowymi. Przyj-

mij, że gęstość tych ładunków liniowych wynosi $+\lambda$ i $-\lambda$ C/m, a odległość między nimi jest równa d .

b. Na podstawie uzyskanego powyżej wyniku znajdź pojemność na jednostkę długości dwóch równoległych drutów o promieniu r , których środki oddalone są od siebie o d . Załóż, że $d \geq 2r$.

c. Wykaż, że, jeżeli $x, y \geq d$, potencjał można otrzymać z zespolonej funkcji

$$f(z) = U + iV = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}.$$

Rozdział 8

8.1. Czy zgadzasz się ze stwierdzeniem podanym w rozdz. 8, że energia elektrostatyczna jądra, które zawiera Z protonów rozmieszczonych mniej więcej równomiernie w kuli o promieniu r , wynosi w przybliżeniu

$$U = \frac{3}{5} Z(Z-1) \frac{e^2}{r^2}?$$

8.2. Maksymalna pojemność pewnego radiowego kondensatora strojącego wynosi 100 pf (1 pf = 10^{-12} f). Przez obracanie ruchomą płytą pojemność tę można zredukować do 10 pf. Załóżmy, że kondensator jest naładowany do różnicy potencjałów 300 V przy swojej maksymalnej pojemności. Gałka strojąca zostaje wtedy obrócona do położenia odpowiadającego minimalnej pojemności. Jaka jest początkowa i końcowa wartość różnicy potencjału? Ile pracy mechanicznej wykonano przy obrocie gałki?

8.3. Dwa kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 naładowano początkowo ładunkami q_1 i q_2 . Wykaż, że z wyjątkiem szczególnych przypadków, zmagazynowana energia elektrostatyczna maleje, gdy dwa kondensatory zostają połączone równolegle. Gdzie pojawia się stracona energia? Znajdź warunki, przy których kondensatory mogą być połączone bez straty energii.

8.4. Wykaż, że gdy dipol o momencie dipolowym \mathbf{p} umieszczony jest w polu elektrycznym \mathbf{E} , energia elektrostatyczna dana jest wzorem:

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Oblicz moment siły, którą pole \mathbf{E} działa na dipol. Przeprowadź obliczenie zarówno bezpośrednio, jak i za pomocą powyższego wzoru na energię. Czy energia będzie taka sama, jeśli dipol utworzony będzie z dwóch ładunków umieszczanych kolejno w polu? Jeśli odpowiedź brzmi: „nie”, oblicz różnicę; jeśli — „tak”, uzasadnij fizycznie swoje rozumowanie.

8.5. Wykaż, że płyty kondensatora płaskiego przyciągają się wzajemnie siłą daną wzorem $F = q^2/2\epsilon_0 A$. Zbadaj pracę potrzebną na powiększenie odległości między płytami od x do $(x+dx)$.

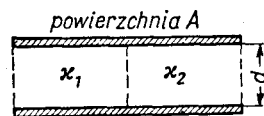
8.6. Mezon π (zwany też pionem) jest cząstką, którą spotykamy we wszystkich trzech stanach ładunkowych; tak więc istnieją dodatnie, ujemne i obojętne mezony π . Masa (pomnożona przez c^2) naładowanych pionów wynosi 139,6 MeV, a masa obojętnych mezonów π jest równa 135,0 MeV. W jednym z modeli pionu założono, że różnica mas spowodowana jest jedynie energią elektrostatyczną. Jeśli założy się ponadto, że piony można uważać za kule i że w takiej kuli ładunek pionów jest rozmieszczony równomiernie, można obliczyć „promień” pionu. Przyjmij więc te założenia i oblicz promień pionu. Czy twój wynik jest zgodny z innymi oszacowaniami wymiarów jądrowych?

8.7. Kulista metalowa powłoka o wewnętrznym promieniu równym a , a zewnętrznym równym b ma środek w początku układu. W jednym punkcie powłoki znajduje się mały otwór. Jeżeli na powłoce nie ma efektywnego ładunku, jaką pracę trzeba wykonać, by ładunek q_1 przeprowadzić z nieskończoności, przez otwór, do początku układu? Jaką pracę trzeba wykonać, jeśli powłoka otrzyma całkowity ładunek q_2 ?

Rozdział 10

10.1. Kondensator płaski wypełniony jest, tak jak pokazano na rysunku obok, dwoma dielektrykami o takich samych wymiarach, lecz o różnych stałych dielektrycznych κ . Wykaż, że pojemność takiego kondensatora wyraża wzór

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$



10.2. Odstęp między płytami (w kształcie kwadratu o boku 20 cm) płaskiego kondensatora wynosi 1 cm. Kondensator ten naładowano do różnicy potencjałów równej 10 V, a następnie odłączono od baterii. Dużą warstwę dielektryka o kwadratowej powierzchni i o grubości trochę mniejszej niż 1 cm umieszczono między płytami tak, że obszar w kondensatorze o powierzchni 10×20 cm wypełniony został dielektrykiem. Stała dielektryczna tego dielektryka wynosi 4,0.



a. Znajdź siłę przyciągającą między płytami.

b. Jaki jest moment dipolowy na jednostkę objętości w dielektryku w punktach położonych w głębi między płytami (tak, że efekty brzegowe można pominąć)?

c. Przypuśćmy, że warstwa dielektryka składa się z substancji o stałej dielektrycznej równej 4,0, w której osadzone są równomiernie rozmieszczone małe metalowe kulki. Czy różnica potencjałów między płytami będzie większa, mniejsza czy równa różnicy potencjałów w przypadku rozpatrywanego poprzednio jednorodnego dielektryka?

10.3. Odstęp między płytami płaskiego kondensatora wynosi d . Kondensator ten ma pojemność C_0 , gdy napełniony jest powietrzem. Między płyty kondensatora wsunęto izolującą płytę o grubości $t \ll d$ i o stałej dielektrycznej κ . Płyta ta ma powierzchnię równą

powierzchni płyt kondensatora. Udowodnij, pomijając efekty brzegowe, że pojemność kondensatora wynosi teraz

$$C = \frac{C_0}{1 - [(\kappa - 1)/\kappa](t/d)}.$$

10.4. Na powierzchni izolowanej metalowej kuli o promieniu a znajduje się ładunek Q . Kulę tę pokryto warstwą dielektryka o wewnętrznym promieniu równym a i o zewnętrznym promieniu równym b .

a. Oblicz powierzchniowy ładunek polaryzacyjny na wewnętrznej i na zewnętrznej powierzchni dielektryka.

b. Jaka jest objętościowa gęstość polaryzacyjnego ładunku wewnątrz dielektryka?

10.5. Kondensator płaski połączono z baterią, która utrzymuje różnicę potencjałów V_0 między jego płytami. Między płyty kondensatora, zapewniając całkowicie przestrzeń między nimi, wstawiono płytkę o stałej dielektrycznej κ .

a. Wykaż, że bateria wykonuje w czasie procesu wstawiania płytki pracę równą $q_0 V_0 (\kappa - 1)$, gdzie q_0 jest ładunkiem, jaki znajdował się na płytach kondensatora przed wstawieniem płytki.

b. Jaka pracę wykonują siły mechaniczne działające na płytkę, w czasie wstawiania jej między płyty kondensatora? Czy praca ta wykonana jest na czynniku, czy też przez czynnik wstawiający płytkę?

10.6. Dwie współosiowe rury o promieniach a i b ($a < b$) opuszczane są pionowo w kąpieli olejowej. Pokaż, że, jeżeli przyłożone jest napięcie V między rurami, olej podniesie się na wysokość

$$H = \frac{V^2 (\kappa - 1) \epsilon_0}{\ln(b/a) \rho (b^2 - a^2) g},$$

gdzie κ jest stałą dielektryczną oleju.

10.7. Wykaż, że gdy linia sił przecina powierzchnię oddzielającą dwa dielektryki o stałych dielektrycznych κ_1 i κ_2 , tworzy z normalną do powierzchni w tych dwóch ośrodkach kąty θ_1 i θ_2 określone związkiem

$$\kappa_1 \operatorname{ctg} \theta_1 = \kappa_2 \operatorname{ctg} \theta_2.$$

Rozdział 11

11.1. Znajdź pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz kuli z substancji dielektrycznej, zakładając, że kula ta jest równomiernie spolaryzowana, a jej promień wynosi a (porównaj rys. 11.7, str. 192).

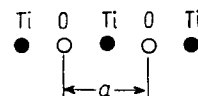
11.2. Stała dielektryczna helu w temperaturze 0°C i pod ciśnieniem 1 atm wynosi 1,000074. Znajdź moment dipolowy indukowany w każdym atomie helu, gdy gaz znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu 10^2 V/m.

11.3. Para wodna jest polaryzowalnym gazem, którego stała dielektryczna wykazuje znaczną zależność od temperatury. Dane doświadczalne obrazujące ten efekt podaje następująca tabela:

$T(^{\circ}\text{K})$	Ciśnienie (cm Hg)	$(\kappa-1)\cdot 10^5$
393	56,49	400,2
423	60,93	371,7
453	65,34	348,8
483	69,75	328,7

Zakładając, że para wodna podlega prawu gazu doskonałego, oblicz cząsteczkową polaryzowalność jako funkcję temperatury i zrób wykres tej zależności. Z nachylenia krzywej wydedukuj wartość stałego momentu dipolowego cząsteczki H_2O .

11.4. Zbadaj układ złożony z dwóch atomów będących w stałej od siebie odległości równej a . Każdy atom ma polaryzowalność α . Znajdź związek, który musi zachodzić między wielkościami a i α , aby układ ten był ferroelektryczny. (Odpowiedź: $a^3 = \alpha/2\pi$.) Jeśli się okaże, że zadanie to jest zbyt proste, zbadaj



ciąg atomów tlenu rozmieszczonych w równych odstępach a od siebie. Przyjmij również, że atomy tytanu znajdują się w połowie odległości między kolejnymi atomami tlenu.

Niech polaryzowalność tlenu będzie α_{O} , tytanu α_{T} . Jakie warunki muszą spełniać wielkości α_{O} i α_{T} , aby układ był ferroelektrykiem.

Wskazówka:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1,20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

11.5. „Dielektryk” złożony jest z pewnej liczby mosiężnych kul o średnicy d , rozdzielonych odstępami $3d$ i tworzących regularną siatkę. Znajdź stałą dielektryczną κ tego „dielektryka” zakładając, że na każdą kulę działa tylko przyłożone zewnętrzne pole elektryczne (tzn. pomijając oddziaływanie sąsiednich kul lub zmianę rozmieszczenia indukowanych ładunków).

Rozdział 12

12.1. Pierścień o promieniu a wykonany jest z miedzianego drutu, którego średnica jest *dużo* mniejsza niż a . Pierścień umieszczono w środku kuli z tworzywa sztucznego. Promień tej kuli jest bardzo duży w porównaniu z promieniem a pierścienia. Zmienne pole magnetyczne indukuje prąd w pierścieniu. Prąd ogrzewa drut generując energię ciepłą

w ilości W J/s. Temperatura przy zewnętrznej powierzchni dużej kuli wynosi T_0 . Jaka temperatura panuje w środku pierścienia w przypadku stanu stacjonarnego?

12.2. W zadaniu 5.10 rozważano prosty model ciepły Ziemi. W innym modelu (znów zbyt uproszczonym) zakłada się, że wewnątrz Ziemi znajduje się rdzeń o niezwykle wysokim przewodnictwie i o promieniu a . Znajdź, jak wielki musi być ten rdzeń, jeśli jego temperatura wynosi 2500°C , jeśli przewodnictwo cieplne otaczającej Ziemi równe jest $0,03 \text{ J/cm}\cdot\text{s}\cdot\text{deg}$, i jeśli Ziemia w ciągu roku wydziela $8\cdot 10^{20}$ J w postaci energii cieplnej.

12.3. a. Przy pewnych geometrycznych i fizycznych warunkach wygodnie jest wyrazić potencjał w postaci $\varphi = f(r) \cos \theta = f(r)z/r$, gdzie $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. (Tą postacią potencjału posłużyliśmy się, na przykład, w rozdz. 12 do rozwiązania zagadnienia przepływu „suchej wody” wokół kuli.) Gdy funkcję $f(r)$ rozwinie się w szereg potęgowy

$$f(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^n,$$

tylko dwa spośród współczynników b_n mogą być różne od zera, jeśli φ ma spełniać równanie Laplace'a. Znajdź te dwa współczynniki.

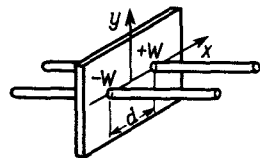
b. W analogicznym dwuwymiarowym zagadnieniu potencjał φ można przedstawić w postaci

$$\varphi = g(\varrho) \cos \theta = g(\varrho) \frac{z}{\varrho}; \quad g(\varrho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varrho^n,$$

gdzie $\varrho^2 = y^2 + z^2$. Znajdź, które wartości współczynników c_n mogą być różne od zera, jeśli φ ma spełniać równanie Laplace'a.

Wskazówka. Do przeprowadzenia obliczeń użyj współrzędnych kartezjańskich.

12.4. Dwie cienkie rury wodociągowe rozdzielone odstępem d przechodzą prostopadle przez dużą ścianę o grubości t . Przewodnictwo cieplne ściany wynosi k , temperatura zaś daleko od rur wynosi T_0 . Gorąca woda, która oddaje ścianie $+W$ watów, przepływa przez rurę położoną w punkcie $x = +d/2$, podczas gdy zimna woda, która pochłania W watów ze ściany, przepływa przez drugą rurę. Potraktuj to zagadnienie jako dwuwymiarowe i pomiń skończone wymiary rur. Znajdź temperaturę w punkcie P o współrzędnych

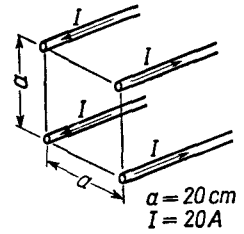


$x = 100 d$, $y = 100 d$. Niech $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $d = 50 \text{ cm}$, $k = 0,03 \text{ W/cm}\cdot\text{deg}$, $W = 200 \text{ W}$, a grubość ściany wynosi 10 cm . Dokonaj odpowiednich przybliżeń przy obliczaniu wyniku.

Rozdział 13

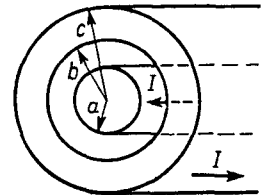
13.1. Cztery długie miedziane druty są do siebie równoległe, a ich przekrój wyznacza kwadrat o boku 20 cm . Przez każdy z drutów puszczono prąd o natężeniu 20 A , w kierunku

wskazany na rysunku obok. Jaka jest wartość i kierunek wektora \mathbf{B} w środku kwadratu? Jaka jest wartość i kierunek siły działającej na jednowoltowy odcinek dolnego lewego drutu?



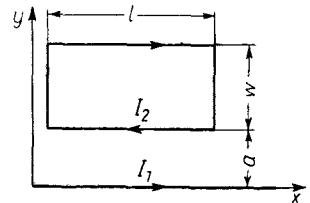
13.2. Długi pełny walec dielektryczny o promieniu a jest trwale spolaryzowany tak, że polaryzacja o wielkości proporcjonalnej do odległości od osi walca jest wszędzie skierowana radialnie na zewnątrz, tzn. $\mathbf{P} = P_0 \mathbf{r}/2$. Walec obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół swojej osi. Jakie jest pole magnetyczne na osi walca w punktach położonych niezbyt blisko końców?

13.3. Długi koncentryczny kabel składa się z dwóch współosiowych przewodników o wymiarach podanych na rysunku obok. W przewodnikach płyną prądy o jednakowym natężeniu równym I , ale w przeciwnych kierunkach. Można przyjąć, że prądy rozłożone są równomiernie w przewodnikach.



- Znajdź pole magnetyczne \mathbf{B} w odległości r wewnątrz przewodnika ($r < a$).
- Znajdź pole \mathbf{B} między dwoma przewodnikami ($a < r < b$).
- Znajdź pole \mathbf{B} wewnątrz zewnętrznego przewodnika ($b < r < c$).
- Znajdź pole \mathbf{B} na zewnątrz kabla ($r > c$).

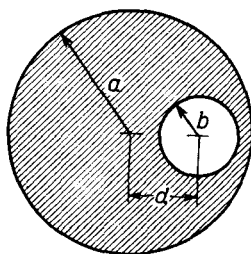
13.4. W długim drucie płynie prąd I_1 , podczas gdy w prostokątnej ramie z drutu, której długość i szerokość są odpowiednio l i w , płynie prąd I_2 . Drut leży w płaszczyźnie ramy.



- Jaka siła działa na ramę? Jaka siła działa na długi drut?
- Jaki moment skręcający działa na ramę? Jaki moment skręcający działa na drut?

13.5. Obraz z telewizyjnej lampy kineskopowej powstaje przez odchylenie strumienia elektronów w polu magnetycznym, które pochodzi z układu odchylających cewek przycelowanych naokoło części szyjki lampy kineskopowej. Na ogół elektrony emitowane są z działka elektronowego (przed odchyleniem) z energią 3 keV; po odchyleniu są one dalej przyspieszane.

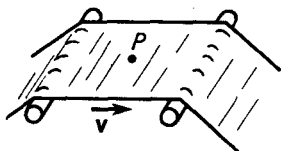
Oszacuj wartość pola magnetycznego działającego na strumień elektronów w momencie największego odchylenia. Oceń również liczbę amperozwojów cewki w tym samym czasie. Możesz nie uwzględniać w oszacowaniu przyspieszania po odchyleniu. Jak zmieni się twój wynik, gdybyś je uwzględnił?



13.6. Bardzo długi przewodzący pręt o promieniu a ma niecentralnie położone wydrążenie o promieniu b , którego oś jest równoległa do osi pręta i odsunięta od niej na odległość d . Przez przewodnik przepływa prąd o jednorodnej gęstości $+j$. Jakie jest pole magnetyczne B na osi wydrążenia daleko od końców?

Rozdział 14

14.1. W wytwórni błon plastikowych szeroki pas z cienkiej masy plastycznej przesuwają się między kolejnymi wałkami z prędkością v . W procesie produkcji na błonie gromadzi się równomiernie rozłożony powierzchniowy ładunek (σ).



a. Jaki jest potencjał wektorowy przy powierzchni pasa, w środku dużej, płasko rozpiętej części? (Blisko punktu P na rysunku.)

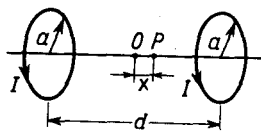
b. Jakie jest pole B w tym samym obszarze?

14.2. Drut o kształcie pokazanym na rysunku przewodzi prąd I . Jakie jest pole magnetyczne w środku półkola, pochodzące od



- każdego z prostych odcinków o długości l ,
- części półkolistej o długości πr ,
- całego drutu?

14.3. W urządzeniach magnetycznych używanych w praktyce często musimy stosować jednorodne pole magnetyczne. Jednorodność pola wytworzonego przez cewki Helmholtza lub dwie współosiowe pętle, w których płynie w tym samym kierunku prąd, jest jedną z najważniejszych cech tych urządzeń. Załóżmy, że cewki o promieniu a mają osie na osi x i rozdzielone są odstępem d . W każdej z nich płynie prąd I .



a. Znajdź pole magnetyczne w punkcie P na osi cewek w odległości x od środkowego punktu O .

b. Rozwiń wyrażenie na pole w szereg potęgowy zachowując wyrazy do rzędu x^2 .

c. Jaki związek musi zachodzić między wielkościami a i d , żeby wyraz x^2 zniknął? Jak to ma znaczenie?

d. Wykaż, że pole wytworzone przez cewki z dokładnością do tego rzędu, gdy spełniony jest warunek w punkcie c, dane jest wzorem

$$B_x = \frac{8I}{5^{3/2} a \epsilon_0 c^2}.$$

14.4 W kwadratowej ramie z drutu o boku a płynie prąd I .

a. Stosując prawo Biota–Savarta wykaż, że wartość pola magnetycznego \mathbf{B} w punkcie leżącym na osi ramy, w odległości x od jej środka, dana jest wzorem:

$$B = \frac{4a^2 I}{\pi(4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2} \varepsilon_0 c^2}.$$

b. Znajdź ten sam wynik posługując się potencjałem wektorowym.

Wskazówka: Pozostaw potencjał wektorowy w jego postaci całkowitej i skorzystaj z zależności

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy,$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b [\lim_{x \rightarrow c} f(x, y)] dy.$$

14.5. Użyj potencjału wektorowego do obliczenia pola magnetycznego w dowolnym punkcie leżącym na osi kołowej pętli o promieniu a , w której płynie prąd I .

14.6. Przewodzącą kulę o promieniu a naładowano do potencjału V . Pokaż, że jeśli kula obraca się z prędkością kątową ω , pole magnetyczne na zewnątrz niej odpowiada polu dipola o momencie

$$\mu = \varepsilon_0 \omega V \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right).$$

Pokaż również, że pole wewnątrz kuli dane jest wzorem

$$B_{\text{wewn}} = \frac{2\omega V}{3c^2}.$$

Wyniki te są ściśle dla wszystkich punktów leżących wewnątrz i na zewnątrz kuli. Jeśli nie będziesz mógł tego wykazać, wyprowadź pierwszy z wyników dla odległości dużo większych niż a , a drugi dla środka kuli.

14.7. Jak wykazaliśmy (rozd. 14) obrót Ziemi można by zmierzyć przez pomiar różnicy potencjałów między jej środkiem, a krawędzią naładowanego przewodzącego walca umieszczonego na Biegunie Północnym (o osi skierowanej ku środkowi Ziemi). Wykaż, że tę różnicę potencjałów można przedstawić w postaci

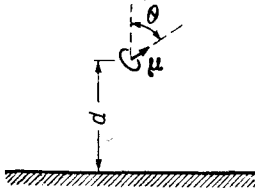
$$V = \left(\frac{v}{c} \right)^2 \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0},$$

gdzie v jest prędkością punktu na zewnętrznej krawędzi walca, a λ jest ładunkiem powierzchniowym na jednostkę długości. Czy możesz sobie wyobrazić sensowne parametry urządzenia, konieczne do zmierzenia tego efektu?

Rozdział 15

15.1. Metal nadprzewodzący ma tę właściwość, że wewnątrz nadprzewodnika oba pola B i E są równe zeru.

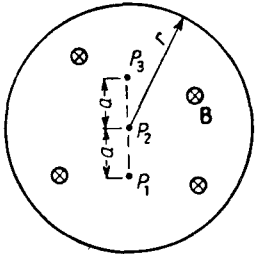
a. W przypadku pola E stwierdziliśmy, że warunek brzegowy na powierzchni nadprzewodnika wymaga, żeby pole E było prostopadłe do powierzchni lub, innymi słowy, by składowa styczna była równa zeru. Jaki jest analogiczny warunek brzegowy dla pola magnetycznego?



b. W odległości d od nieskończonej nadprzewodzącej płaszczyzny umieszczono mały zamknięty obwód prądu o momencie magnetycznym μ skierowanym pod kątem θ względem normalnej. Podaj w kilku zdaniach, jaką metodą można by znaleźć pole magnetyczne w całej przestrzeni, zakładając, że wiesz już, jakie jest pole dipola magnetycznego.

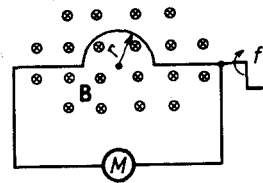
c. Znajdź zależność momentu skracającego działającego na dipol od kąta θ . Znajdź kąty równowagi. Które z tych kątów odpowiadają równowadze trwałej, a które chwiejnej?

d. Znajdź zależność siły, działającej w kierunku nadprzewodnika — lub w kierunku przeciwnym — od kąta θ .

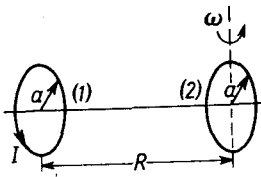


Rozdział 17

17.1. Na rysunku obok przedstawiono jednorodne pole magnetyczne B zawarte wewnątrz walca o promieniu r . Natężenie pola B maleje ze stałą prędkością 100 Gs/s. Jakie jest przyspieszenie chwilowe (jego kierunek i wartość) elektronu znajdującego się w punktach P_1 , P_2 i w P_3 ? Załóż, że a wynosi 5,0 cm.



17.2. Sztynny drut, zgięty w półkole o promieniu r , obraca się z częstością f w jednorodnym polu magnetycznym, tak jak pokazano na rysunku obok. Jaka jest wartość i częstość indukowanego napięcia i indukowanego prądu, jeśli oporność wewnętrzna przyrządu pomiarowego M wynosi R_M , a pozostała część obwodu ma oporność znikomą? Należy przyjąć, że pole wytwarzane przez prąd jest małe w porównaniu z polem B . Wymaga to założenia, że prąd jest mały, w przeciwnym razie zmodyfikowałby on B .



17.3. Mała kołowa pętla (1) (rysunek obok) o promieniu a przewodzi stały prąd I . Inna pętla (2), również

o promieniu a , umieszczona jest na osi przechodzącej przez środek pętli (1) i w odległości R od niej, przy czym $R \gg a$. Płaszczyzny obu okręgów są równoległe. Obracamy teraz pętlą (2) wokół jednej z jej średnic z prędkością kątową ω . Jaka siła elektromotoryczna będzie generowana, jeśli obwód pętli (2) będzie otwarty, tak że nie będzie płynąć w nim żaden prąd?

17.4. Metalowy drut o masie m ślizga się bez tarcia po dwóch szynach odległych od siebie o d , tak jak pokazano na rysunku poniżej. Tor leży w skierowanym pionowo jednorodnym polu magnetycznym \mathbf{B} .

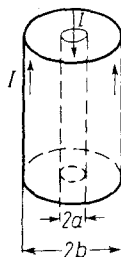
a. Stały prąd I płynie z prądnicy (G) wzdłuż jednej z szyn, przez drut i z powrotem wzdłuż drugiej szyny. Znajdź prędkość (wartość i kierunek) drutu jako funkcję czasu, zakładając, że drut znajdował się w spoczynku w chwili $t = 0$.

b. Prądnicę zastąpiono baterią o stałej sile elektromotorycznej \mathcal{E} . Prędkość drutu zbliża się teraz do stałej granicznej wartości. Jaka jest ta graniczna wartość? W jaki sposób prędkość jako funkcja czasu dąży do tej wartości?

c. Jaki jest prąd w rozważanym problemie b, gdy osiągnięta jest graniczna prędkość? Należy założyć, że pole pochodzące od prądu I jest dużo mniejsze niż pole \mathbf{B} .



17.5. Obwód zawiera dwie cewki o indukcyjności odpowiednio \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_2 , połączone szeregowo. Cewki te mają względną indukcyjność \mathfrak{M} . Znajdź wypadkową indukcyjność \mathfrak{M} obwodu. Jak zmieni się indukcyjność, jeśli w jednej cewce druty zostaną nawinięte w przeciwną stronę?



17.6. Koncentryczny kabel (patrz rysunek obok) wykonano z drutu otoczonego współosiowym przewodzącym walcem, który przenosi prąd w przeciwną stronę. Promień drutu równy jest a , a promień walca b .

a. Pokaż, że jeżeli założyć, iż prąd w drucie płynie po jego powierzchni, to indukcyjność własna takiego kabla na jednostkę długości jest równa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

b. Oblicz indukcyjność własną w przypadku, gdy prąd rozłożony jest równomiernie w drucie. Porównaj otrzymane wyniki, by zdać sobie sprawę ze znaczenia założenia dotyczącego rozkładu prądu.

17.7. Toroidalna cewka o N zwojach ma przekrój w kształcie kwadratu, którego długość boku wynosi a ; jej wewnętrzny promień równy jest b .

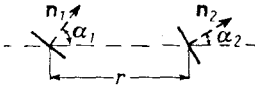
a. Wykaż, że indukcyjność własna cewki równa jest

$$\mathcal{L} = \frac{N^2 a}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

b. W podobny sposób wyraż indukcyjność wzajemną układu złożonego z cewki i długiego prostego drutu umieszczonego wzdłuż osi symetrii toroidalnej cewki. Załóż, że przewodniki zamykające obwód, którego częścią jest długi prosty drut, położone są daleko od cewki, tak że ich wpływ można pominąć.

c. Znajdź stosunek indukcyjności własnej cewki do indukcyjności wzajemnej układu.

17.8. Dwa płaskie zamknięte obwody prądu, każdy o powierzchni A i przewodzący prąd I , umieszczono w odległości r od siebie, jak pokazano na rysunku poniżej.

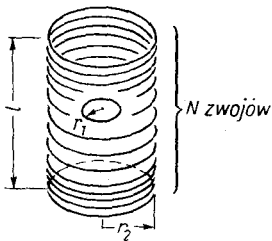


Normalne do tych obwodów (\mathbf{n}_1 i \mathbf{n}_2) tworzą kąty α_1 i α_2 z linią prostą łączącą obwody. Wektory \mathbf{n}_1 i \mathbf{n}_2 oraz prosta łącząca środki leżą w jednej płaszczyźnie.

a. Znajdź indukcyjność wzajemną \mathcal{M} tego układu obwodów. Załóż, że promień każdego obwodu jest dużo mniejszy niż odległość między nimi.

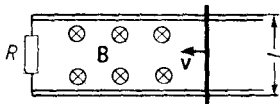
b. Stosując otrzymane wyrażenie na \mathcal{M} znajdź wartość i kierunek siły między obwodami.

c. Jak zmieniłyby się siła, gdyby zmienić kierunek prądu w jednym lub w obu obwodach?



17.9. Pojedynczy zwój cewki o promieniu r_1 umieszczono współosiowo w środku solenoidu o długości l składającego się z N zwojów o promieniu r_2 , gdzie $r_2 \gg r_1$. Oznacz pojedynczy zwój jako obwód 1, a solenoid — jako obwód 2. Znajdź zarówno indukcyjność \mathcal{M}_{12} , jak \mathcal{M}_{21} .

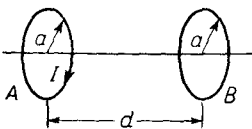
17.10. Jak zaznaczono na rysunku obok, opierający się na dwóch szynach drut posuwa się z prędkością v . Istnieje jednorodne pole B , prostopadłe do płaszczyzny rysunku i zwrócone ku tej płaszczyźnie. Jaki prąd I przepływa przez opór R , jeśli $v = 100$ cm/s, $l = 10$ cm, $B = 0,1$ W/m² a $R = 10$ Ω . (Nie uwzględniaj pola wytworzonego przez prąd.) Gdyby uwzględnić pole wytworzone przez indukowany prąd, to czy szacowany przez ciebie indukowany prąd byłby większy, mniejszy czy też pozostałby taki sam?



Czy wynik twój zmieni się, jeśli magnes wytwarzający pole B będzie poruszać się z tą samą prędkością v , co drut?

Czy indukcyjność własna obwodu, przez który płynie indukowany prąd, rośnie, maleje, czy jest stała w czasie?

17.11. Dwa współosiowe kołowe obwody o promieniu a oddalone są od siebie o d , przy czym $d \gg a$. Przez jeden z obwodów (obwód A) przesyłany jest prąd $I = K_0 t^2$, tak jak pokazano na rysunku obok, a opór drugiego obwodu (obwodu B) wynosi R .



- a. Jaki moment skręcający działa na obwód B, jeśli pominąć indukcyjność własną?
 b. Pokaż, że gdy nie uwzględni się indukcyjności własnej, siła działająca na obwód B będzie równa

$$\frac{24\pi^4 a^8 K_0^2 t^3}{(4\pi\epsilon_0 c^2)^2 d^7 R}$$

Jaki jest kierunek tej siły?

- c. Oceń, w jaki sposób prawdziwa siła i moment skręcający różnią się od twojego oszacowania, tj. jak indukcyjność własna wpływa na moment skręcający i siłę?
 d. Wytlumacz, co by się stało z wynikami zadania a i b, gdyby obrócić obwód B o 90° wokół osi prostopadłej do wspólnej osi obu obwodów.

Rozdział 20

20.1. Wygodnie jest czasami rozpatrywać zespolone rozwiązania równań różniczkowych.

- a. Zakładając, że pole zmienia się sinusoidalnie w czasie i ze zmianą współrzędnej x (nie ma zależności od y i z), wykaż, że każda składowa wyrażenia

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

spełnia równanie falowe. (Pamiętaj, że prawdziwe pole jest równe części rzeczywistej tego wyrażenia.)

- b. Przekonaj się, że rzeczywista część pola \mathbf{E} odpowiada fali płaskiej, posuwającej się wzdłuż osi x . W jakim biegnie ona kierunku?

- c. Wykaż, że operacja ∇ zastosowana do takiej funkcji, jak w zadaniu a, działa w sposób następujący:

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{e}_x (-ik),$$

gdzie \mathbf{e}_x jest jednostkowym wektorem wzdłuż osi x , a i jest równe $\sqrt{-1}$; pokaż więc tym samym, że operację ∇ możemy zastąpić zwykłym mnożeniem. Jakie podobne stwierdzenie możesz sformułować o pochodnej czasowej?

- d. Posługując się wynikami zadania c, wypisz równania Maxwella zastosowane do pól, które zmieniają się sinusoidalnie z x i t . Jaki związek musi zachodzić między k i ω ?

- e. Jak zmieniają się twoje odpowiedzi, jeśli pole będzie miało postać

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t + kx)}$$

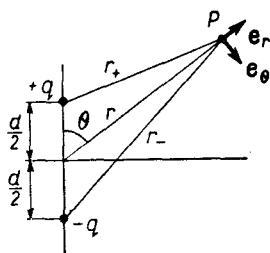
20.2. Płaska fala elektromagnetyczna o częstotliwości ω odbija się od zwierciadła, które porusza się z prędkością v w tym samym kierunku co fala. Korzystając z równań Maxwella oblicz częstotliwość odbitej fali, takiej jaką widzi nieruchomy obserwator. Porównaj ten wynik z wynikiem otrzymanym w tomie I (cz. 2) na podstawie samej tylko teorii względności.

Rozdział 21

21.1. Dokonaj szczegółowego wyprowadzenia wzoru (21.25) ze str. 385.

21.2. Wzór (21.1) ze str. 374 przedstawia równość, przy której pomocy można obliczyć pole elektryczne wytworzone przez poruszające się ładunki. Rozpatrzmy dipol zbudowany z ładunków dodatniego i ujemnego oscylujących wokół początku układu wzdłuż osi z ; tzn. ruch dodatniego ładunku opisany jest wzorem $z_+ = \frac{d}{2} \cos \omega t$, ujemnego zaś wzorem $z_- = -\frac{d}{2} \cos \omega t$. Moment dipola określony jest jako $\mathbf{p} = d \cos \omega t \mathbf{e}_z$. Wykaż,

że przy pomocy wspomnianej wyżej równości można obliczyć całkowite pole elektryczne dipola:



$$E_\varphi = 0,$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega(t-r/c) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega(t-r/c) \right]$$

$$E_r = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{1}{r^3} \cos \omega(t-r/c) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega(t-r/c) \right].$$

Założ, że punkt P znajduje się w odległości $r \gg d$ od dipola.

Wskazówka:

$$\mathbf{e}_{r_+} \simeq +\mathbf{e}_r,$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_{r_+}) \text{ i } \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{e}_{r_+}) \text{ są wektorami o kierunku niemal } \mathbf{e}_r.$$

21.3. Z symetrii równań Maxwella i z postaci elektrycznego i magnetycznego pola oscylującego elektrycznego dipola^{*)} wyprowadzić wzór na pole oscylującego dipola magnetycznego. W pobliżu źródła pole musi przypominać pole dipola utworzonego z małego kołowego zamkniętego obwodu o promieniu a ($a \ll c/\omega$), w którym płynie prąd $i = i_0 \cos(\omega t)$.

^{*)} Wzór na pole elektryczne elektrycznego dipola podano w zad. 21.2; odpowiadający mu wzór na pole magnetyczne znaleziono używając wzoru (21.1) ze str. 374:

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}.$$

Odpowiedź: $B_\varphi = 0$,

$$B_\theta = \frac{1}{c^2} (E_\theta \text{ dipola elektrycznego}),$$

$$B_r = \frac{1}{c^2} (E_r \text{ dipola elektrycznego}),$$

$$E_\varphi = -(B_\varphi \text{ dipola elektrycznego}),$$

$$E_\theta = E_r = 0,$$

gdzie w wyrażeniach na pole dipola zastąpiono moment dipola elektrycznego momentem dipola magnetycznego μ ($\mu = \pi a^2 i_0$).

21.4. W zadaniu 21.2 oscylujący dipol tworzyły dwa poruszające się ładunki. A oto inny sposób utworzenia promieniującego dipola. Dwie przewodzące kule łączy się drutem o długości d . Do drutu przykładają się oscylujący prąd, który osadza na jego końcach wypadkowy ładunek $\pm q(t)$, ale pozostawia drut obojętnym elektrycznie; funkcja $q(t)$ może być przy tym przedstawiona jako część rzeczywista funkcji $Q_0 e^{i\omega t}$.

W dowolnym punkcie P , oddalonym o $r \gg d$ od dipola, wyrażenie całkowe na potencjał retardowany daje ścisły wzór na φ (patrz rysunek):

$$\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \omega(t-r_1/c)}{r_1} - \frac{\cos \omega(t-r_2/c)}{r_2} \right].$$

a. Zakładając, że $\omega d/2c \ll 1$, pokazać, że

$$\varphi \approx \frac{Q_0 d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{1}{r} \cos \omega(t-r/c) - \frac{\omega}{c} \sin \omega(t-r/c) \right].$$

b. Pokaż ponadto, że

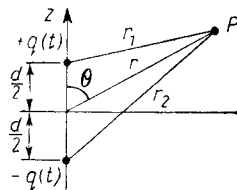
$$A_z \approx - \frac{Q_0 \omega d \sin \omega(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2}.$$

c. Przekonaj się, że te potencjały dają te same elektryczne i magnetyczne pola promieniowania (tę część pola, która jest proporcjonalna do $1/r$), jak w zadaniu 21.2.

21.5. Antena, której częstość użytkowa ma być równa $\omega = 2\pi c/\lambda$, zbudowana jest z dwóch współliniowych drutów. Każdy z nich ma długość równą ćwiartce długości fali i jest wzbudzany w punkcie złączenia przez sinusoidalne napięcie o odpowiedniej częstości. Powstały w wyniku rozkład prądu w drutach jest z bardzo dobrym przybliżeniem sinusoidalny,

$$i = -i_0 \sin(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

Aby znaleźć promieniowanie tej anteny, można ją traktować jako superpozycję wielu



dipoli, każdy położony w punkcie z o długości Δz i o momencie zmieniającym się od dipola do dipola.

a. Pokaż, że należy przyjąć następującą wartość momentu dipola:

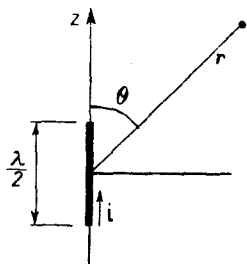
$$\Delta p = \left[\frac{i_0}{\omega} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t \right] \Delta z.$$

b. Wykaż, że na dużych odległościach ($r \gg c/\omega$) pole całej anteny jest równe

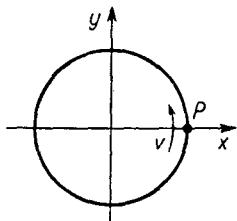
$$E_\theta = \frac{2i_0}{4\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \cos\omega(t-r/c),$$

$$B_\varphi = \frac{1}{c} E_\theta.$$

c. Wykonaj powierzchniowy szkic wykresu biegunowego E_θ jako funkcji kąta θ zarówno dla tego przypadku, jak i dla pojedynczego dipola i przeprowadź porównanie.



$$i = -i_0 \sin \omega t \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \quad \left(-\frac{\lambda}{4} < z < \frac{\lambda}{4} \right)$$



21.6. Cząstka o ładunku q porusza się po kole o promieniu r ze stałą prędkością v .

a. Znajdź potencjał skalarny φ w środku koła, w chwili gdy cząstka przechodzi przez punkt P .

b. Znajdź potencjał wektorowy A w środku w tym samym czasie.

c. Oblicz potencjał w otoczeniu środka i użyj równań (18.19) i (18.16) do wyznaczenia pola elektrycznego i magnetycznego w środku. Jaki jest kierunek pola elektrycznego w odniesieniu do wektora wodzącego punktu P ?

d. Oblicz również te pola stosując wzór (21.1) ze str. 374. Zwróć uwagę, że problem ten jest relatywistyczny. Prędkość v niekoniecznie jest mała w porównaniu z prędkością światła c .

skorowidz

Aharonov 269
Ampère, A. 224
Ampère prawo 224
amperomierz 276
atomowe orbity 24
– prądy 226

Bella telefon 279
betatron 297
Biota-Savarta prawo 250
błyskawica 166
Bohm 129, 269
Bohr, N. 86
brzegowe warunki 121
brzegowych wartości zagadnienia 121
bursztyn 28
burze 157

Całka krzywoliniowa 47
– wektorowa 47
ciepła dyfuzji równanie 57
– przepływ 41, 202
Clausiusa-Mossottiego równanie 192
Coulomba prawo 66, 92
Curie prawo 189
Curie-Weissa prawo 197
cząstki dziwne 143

Debye'a długość 131
dielektryki 170, 183

dielektryczna stała 170
dipol 381
– cząsteczkowy 183
– elektryczny 99
– magnetyczny 247
dipolowy moment 106
– potencjał 104
Dirac, P.A.M. 30
dyfrakcja neutronów 209
dyfuzja neutronów 209
dyfuzji ciepła równanie 57
dywergencja 39, 47

Ekranowanie elektrostatyczne 133
ekwipotentjalne powierzchnie 80
elektrodynamika 16
elektret 194
elektromagnetyzm 13
elektromagnetyzmu prawa 20
elektrostatyka 64, 83
elektryczny prąd 221
– – w atmosferze 153
energia elektryczna 256
– elektrostatyczna 134
– jąder 142
– kondensatora 136
– kryształów jonowych 139
– ładunków 134
– ładunku punktowego 150
– magnetyczna 306

- energia mechaniczna 256
 — w polu elektrostatycznym 146
- Fale 353
 — elektromagnetyczne 374
 — kuliste 368, 376
 — płaskie 353
 — trójwymiarowe 363
 falowe równanie 325
 farad (jednostka) 116
 Faraday, M. 170, 276
 Faradaya prawo indukcji 292
 ferroelektryczność 195
 fizyka ciała stałego 141
 Fouriera twierdzenie 132
 Franklin, B. 92
- Galwanometr 25, 276
 Gauss, K. 277
 Gaussa powierzchnia 171
 — twierdzenie 54
 Geiger 86
 generator van de Graaffa 97, 143
 gęstość ładunku 40, 67, 90
 — prądu 40, 221
 gradientu operator 34, 47
 gradient potencjału w atmosferze 151
- Hamiltona pierwsza główna funkcja 342
 Hess, V. 153
- Iloczyn skalarny 36
 — wektorowy 40
 indukcja wzajemna 299
 indukcji prawa 291
 indukcyjność 280, 306
 indukowane prądy 275
 izolator 15, 170
 izoterma 32
 izotermiczne powierzchnie 32
- Jeans, J. 38
 jonosfera 126, 155
- Kilokaloria 140
 koloidalne cząstki 129
 kondensator 114
 — płasko-równoległy 115
 krążenie pola 21, 57
- kula naładowana 89
 kulista warstwa 89
- Lamb, W. 93
 Laplace'a równanie 99, 121
 laplasjan 44, 99
 Laughton 94
 Lenza reguła 281
 Liënarda-Wiecherta potencjały 390
 linie sił pola 80
 Lorentza siła 220, 272
 — wzór 390
 lorentzowskie cechowanie 328
- Ładunek liniowy 87
 ładunki polaryzacyjne 164
 ładunku zasada zachowania 221
- Magnetostatyka 65, 220
 magnetyczne pole 220, 238
 — — prądu stałego 224
 magnetyczna siła 15, 220, 223
 magnetycznego pola względność 229
 magnetyczny dipol 247
 — moment dipolowy 248
 Marsden 86
 Maxwell, J. C. 25, 28, 93, 313
 Maxwella równania 29, 40, 98, 313, 353, 374
 McCullough 27
 mikroskop jonowy 118
 model atomu Rutherforda-Bohra 86
 — — Thomsona 86
- Najmniejszego działania zasada 330
 naładowane przewodniki 136
 napięcie powierzchniowe 207
 natężenie pola 18
 Neuman, J. von 213
 neutronów dyfrakcja 209
 — dyfuzja 209
 — równanie dyfuzji 210
 Newton, I. 79
 niepolarna cząsteczka 184
- Obraz elektryczny 110
 oddziaływania jądrowe 143
 operator dywergencji 39
 — gradientu 34, 47
 — rotacji 40
 operator wektorowy 38
 orientacja polaryzacji 187

oscylacje plazmy 126
oświetlenie 216

Piezoelektryczność 194

Pines 129

piroelektryczność 194

plazma 126

plazmy oscylacje 126

plazmowa częstość 128

Plimpton 94

pojemność 115, 136

podatność elektryczna 175

polarna cząsteczka 184

polaryzacja elektronowa 184

polaryzacji wektor 172

polaryzowalność jonowa 195

pole bezwirowe 61

— bezźródłowe 61

— dwuwymiarowe 122

— elektrostatische 83, 120

— elektryczne 15, 16, 98, 120

— magnetyczne 15, 16, 220, 238

— podróżujące 318

— przewodnika 94, 109

— siatki 132

— skalarnie 31

— wektorowe 18, 29, 31

— we wnęce przewodnika 96

potencjał elektryczny 68

— kwadrupolowy 108

— prędkości 213

— wektorowy 253

potencjału elektrostatische równania 98

prąd elektryczny 221

prądy atomowe 226

— indukowane 275

— wirowe 284

prądnicza 275, 299, 301

prekursor błyskawicy 167

Priestley, J. 92

promieniowanie kosmiczne 153

przewodnictwo cieplne 41

przewodnik elektryczny 15

przewodność cieplna 203

Rachunek całkowity 47

— różniczkowy 29

— wariacyjny 335

Rutherford, R. 93

rotacja 40, 47

rozpadającej się kropli teoria 165

rozwińnięcie w szereg Taylora 108

równania elektrostatische 177

— Maxwella 29, 40, 98, 313, 353, 374

równanie dyfuzji ciepła 57

— — neutronów 210

— falowe 325

Rutherford, E. 86

Samoi indukacja 281, 303

Schrödingera równanie 269

separacja ładunku 162

silniki elektryczne 275

siła elektromotoryczna (SEM) 278

— elektryczna 13, 220

— jądrowa 143

— Lorentza 220, 272

— magnetyczna 15, 220, 223

soczewka kwadrupolowa 124

solenoid 227

spin protonu 142

spinowo-orbitalna składowa 143

sprężenia współczynnik 310

stała dielektryczna 170

stan podstawowy 143

— wzbudzony 143

statyka 64

Stokesa twierdzenie 61

strumień 18, 49, 73

strumień elektryczny 19

strumienia reguła 292

superpozycji zasada 16, 66

synchrotron 298

Światło 374

światła prędkość 324

Tesla (jednostka) 221

Thomson, Sir J. J. 86

transformacja cechowania 328

transformator 280

Warstwa kulista 89

— naładowana 88

Weber, W. 277

weber (jednostka) 221

wektor jednostkowy 33

— polaryzacji 172

wektorowe pole 18, 29, 31

wektorowy iloczyn 40

wektorowy operator 38

— potencjał 253

Wilson, C. T. R. 165

wirowe prądy 284

woltomierz 276

współczynnik sprzężenia 310

wyładowania szczotkowe 165

— wysokiego napięcia 116

względność pola elektrycznego 229

— — magnetycznego 229

Zasada najmniejszego działania 330

— superpozycji 16, 66

— zachowania ładunku 221

zdolność emisyjna 119

zespolona zmienna 122



Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie piąte
Arkuszy drukarskich 26,5
Druk ukończono we wrześniu 2004 r.
Druk i oprawa: Pabianickie Zakłady Graficzne SA
95-200 Pabianice, ul. Piotra Skargi 40/42

28,30

WYDAWNICTWO NAUKOWE **PWN**
poleca

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands

Feynmana wykłady z fizyki

t. 1.1 Mechanika, szczególna teoria względności

Feynmana wykłady z fizyki

t. 1.2 Optyka, termodynamika, fale

Feynmana wykłady z fizyki

t. 2.1 Elektryczność i magnetyzm, elektrodynamika

Feynmana wykłady z fizyki

t. 2.2 Elektrodynamika, fizyka ośrodków ciągłych

Feynmana wykłady z fizyki

t. 3 Mechanika kwantowa

Biblioteka Główna UMK



300041704720

Biblioteka
Główna
UMK Toruń

S 35816

Feynmana wykłady z fizyki TOM 2.1

Elektryczność i magnetyzm, elektrodynamika

Biblioteka Główna UMK



300041704720

Richard P. Feynman, światowej sławy fizyk XX wieku, żył w latach 1918–1988. Stopień doktora uzyskał mając 24 lata. Podczas II wojny światowej brał udział w realizacji projektu Manhattan w Los Alamos. W 1965 roku Feynman, wraz z J. Schwingerem i S.-I. Tomonagą, został laureatem nagrody Nobla za rozwiązanie istotnych problemów elektrodynamiki kwantowej. Sformułował także teorię wyjaśniającą zjawisko nadciekłości w ciekłym helu. Razem z M. Gell-Manem napisał ważną pracę dotyczącą słabych oddziaływań, później pracował nad podwalinami teorii kwarków. Oprócz tych osiągnięć, wprowadził do fizyki nowe metody obliczeniowe; wśród nich największe znaczenie mają diagramy Feynmana, powszechnie dziś stosowane do obliczania przebiegu procesów elementarnych. Ten wielki uczyony opublikował szereg monografii, prac naukowych i popularyzatorskich oraz podręczników. Zajmował się też sprawami publicznymi. Miał wszechstronną osobowość, wykazywał nienasyconą ciekawość, był wzorowym empirykiem, ale również niezwykłym nauczycielem fizyki. Z licznych nagród, które otrzymał, najbardziej dumny był z Medalu Oersteda za Nauczanie (1972).

Feynmana wykłady z fizyki to najbardziej niezwykły podręcznik fizyki, jaki został kiedykolwiek napisany. Jego oryginalność polega nie tylko na nietrójnym doborze materiału i niekonwencjonalnym porządku jego wyłożenia. Autor ukazuje fizykę niejako *in statu nascendi*, wciąga Czytelnika w odkrywanie prawdziwości rządzących przyrodą. Na kartach książki Feynmana fizyka przestaje być zbiorem praw o bloczkach, dźwigniach i pryzmatach, a staje się tym, czym jest w rzeczywistości: fascynującą opowieścią o pięknie praw przyrody.

Ta książka to rodzaj podstawowego przewodnika po fizyce dla studentów fizyki i dziedzin pokrewnych, nauczycieli i pracowników naukowych, dla wszystkich interesujących się fizyką.

t. 2.1



t. 1-3



Infolinia: 0 801 351 929
Księgarnia internetowa: www.pwn.pl